Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 285, 2002 г.

**Ю. А. Лавров, В. Д. Лукьянов**

# О ЧАСТОТАХ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ УСЕЧЕННОГО ШАРОВОГО СЕКТОРА, ПОКРЫТОГО ТОНКОЙ УПРУГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ

## 1. Введение

Поиску собственных частот заполненной жидкостью упругой сферической оболочки посвящено множество работ. Рассматриваются, как правило, колебания полной сферы [1–4] и полусферы [5–6]. В настоящей работе исследуется случай, которому в литературе не уделено достаточного внимания – случай свободных колебаний усеченного шарового сектора с произвольным углом раскрыва, заполненного идеальной сжимаемой жидкостью. Стенками сектора служат тонкая упругая сферическая оболочка, центр которой находится в вершине сектора, концентричная ей идеально жесткая сферическая стенка меньшего радиуса и идеально жесткая радиальная стенка. В построении решения участвует алгоритм, описанный в [7–9].

## 2. Постановка задачи

Усеченный шаровой сектор занимает область $\Omega = \{R < r < R_1,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ 0 \leqslant \vartheta < \alpha\}$, которая заполнена идеальной сжимаемой жидкостью. Здесь $r$, $\varphi$, $\vartheta$ – сферические кординаты. Оболочка расположена на сферической поверхности радиуса $R_1$. Разыскиваются осесимметричные формы колебаний сектора, у которых нет зависимости от угла $\varphi$ и потому эта переменная в выкладках отсутствует.

Акустическое давление $P(r, \vartheta)$ в среде в области $\Omega$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + k^2\right)P(r,\vartheta) = 0 \qquad (2.1)$$

$k$ – волновое число, $k = \omega/c$, $c$ – скорость звука в жидкости, $\omega$ –

круговая частота. Гармоническая зависимость волновых процессов от времени подразумевается множителем $\exp(-i\omega t)$, который всюду опущен.

Коническая и внутренняя сферическая границы области $\Omega$ являются идеально жесткими

$$\left.\frac{\partial P(r,\vartheta)}{\partial\vartheta}\right|_{\vartheta=\alpha}=0, \tag{2.2}$$

$$\left.\frac{\partial P(r,\vartheta)}{\partial r}\right|_{r=R}=0. \tag{2.3}$$

Уравнения Власова [10] смещений оболочки с учетом контакта с акустической средой имеют вид

$$-\rho h\omega^2 U(\vartheta)=G\Big(1-\sigma+\frac{d}{d\vartheta}L\Big)U(\vartheta)+$$
$$+G\frac{d}{d\vartheta}\Big(\big(1+\sigma-\beta(\Delta_\perp+2)\big)W(\vartheta)\Big), \tag{2.4}$$
$$-\rho h\omega^2 W(\vartheta)=-G\big(1+\sigma-\beta\Delta_\perp\big)LU(\vartheta)-$$
$$-G\Big(2(1+\sigma)+\beta\big(\Delta_\perp^2+(1-\sigma)(\Delta_\perp+2)\big)\Big)W(\vartheta)+P(R_1,\vartheta). \tag{2.5}$$

Применены обозначения: $U(\vartheta)$, $W(\vartheta)$ – перемещение точек оболочки в направлении роста соответственно координат $\vartheta$ и $r$,

$$L\Phi(\vartheta)=\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\big(\sin\vartheta\Phi(\vartheta)\big),\qquad \Delta_\perp\Phi(\vartheta)=L\Big(\frac{d}{d\vartheta}\,\Phi(\vartheta)\Big),$$

$G=Eh/(R_1^2(1-\sigma^2))$, $\beta=h^2/(12R_1^2)$, $h$ – толщина оболочки, материал которой имеет модуль Юнга $E$, коэффициент Пуассона $\sigma$ и плотность $\rho$.

Условие безотрывности смещений на границе оболочки и жидкости, плотность которой $\rho_0$, имеет вид

$$W(\vartheta)=\frac{1}{\rho_0\omega^2}\left.\frac{\partial P(r,\vartheta)}{\partial r}\right|_{r=R_1}. \tag{2.6}$$

Край оболочки жестко защемлен

$$U(\alpha)=0, \tag{2.7}$$

$$\left.\frac{dW(\vartheta)}{d\vartheta}\right|_{\vartheta=\alpha}=0, \tag{2.8}$$

$$W(\alpha)=0. \tag{2.9}$$

## 3. Колебания изолированной оболочки

При построении решения поставленной задачи для совместной системы “оболочка-жидкость” используется результат для более простого случая – случая собственных колебаний оболочки в вакууме.

Решение $U_0(\vartheta)$, $W_0(\vartheta)$ этой вспомогательной задачи должно удовлетворять условиям (2.4)–(2.5), (2.7)–(2.9), причем, в (2.5) следует временно положить $P(R_1, \vartheta) \equiv 0$.

Выражения для вибрационных полей оболочки, обеспечивающих ограниченные при $\vartheta \to 0$ амплитуды, имеют вид

$$U_0(\vartheta) = \sum_{s=1}^{3} C_s U_{0s}(\vartheta), \quad W_0(\vartheta) = \sum_{s=1}^{3} C_s W_{0s}(\vartheta), \tag{3.1}$$

$$U_{0s}(\vartheta) = A_s F_1(q_s, \vartheta), \qquad W_{0s}(\vartheta) = B_s F_0(q_s, \vartheta),$$

$$F_0(q, \vartheta) = \mathcal{P}_q(\cos\vartheta), \qquad F_1(q, \vartheta) = \frac{\partial \mathcal{P}_q(\cos\vartheta)}{\partial\vartheta},$$

$\mathcal{P}_q(z)$ – функция Лежандра первого рода порядка $q$, $C_s$ – произвольные константы. Для определения величин $q_s$, $A_s$, $B_s$ служит вытекающая из (2.4)–(2.5) однородная система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}(\chi) + \rho h\omega^2)A + a_{12}(\chi)B = 0, \\ a_{21}(\chi)A + (a_{22}(\chi) + \rho h\omega^2)B = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\chi = q(q+1), \quad a_{11}(\chi) = (1 - \sigma - \chi)G, \quad a_{12}(\chi) = \big((\chi - 2)\beta + 1 + \sigma\big)G,$$

$$a_{21}(\chi) = \chi(\chi\beta + 1 + \sigma)G, \quad a_{22}(\chi) = -\big(\big(\chi^2 - (\chi-2)(1-\sigma)\big)\beta + 2 + 2\sigma\big)G,$$

так что

$$A_s = a_{12}(\chi_s), \quad B_s = -(a_{11}(\chi_s) + \rho h\omega^2), \quad \chi_s = q_s(q_s+1).$$

Характеристические числа $q_s$ следует находить из условия существования нетривиального решения однородной системы (3.2)

$$\Delta(\chi) = (a_{11}(\chi) + \rho h\omega^2)(a_{22}(\chi) + \rho h\omega^2) - a_{12}(\chi)a_{21}(\chi) = 0. \tag{3.3}$$

Определитель $\Delta(\chi)$ представляет собой многочлен третьей степени относительно $\chi$, поэтому уравнение (3.3) имеет три корня. Предполагается, что это простые корни. Кратные корни, которые возможны при определеных сочетаниях параметров, определяющих механические свойства оболочки и ее геометрические размеры, следует рассматривать как предельный случай простых корней. По каждому из таких корней $\chi_s$ найдется пара значений $q_s = \bigl(-1 + \sqrt{1+4\chi_s}\bigr)/2$, $\tilde{q}_s = \bigl(-1 - \sqrt{1+4\chi_s}\bigr)/2$. Из свойства функций Лежандра $\mathcal{P}_q(x) = \mathcal{P}_{-1-q}(x)$ следует равенство $\mathcal{P}_{\tilde{q}_s}(x) = \mathcal{P}_{q_s}(x)$, следовательно, паре значений $q_s$, $\tilde{q}_s$ соответствуют линейно зависимые решения системы дифференциальных уравнений (2.4)–(2.5). Таким образом, три линейно независимые решения системы определяются только тремя корнями $q_s$, $s = 1, 2, 3$, характеристического уравнения (3.3).

Набор произвольных постоянных $C_1$, $C_2$, $C_3$ в представлении (3.1) можно сократить до одной константы $C_0$, если применить гранично–контактные условия (2.7) и (2.8). В этом случае $C_s = C_0\, m_s$, $s = 1, 2, 3$,

$$
\begin{aligned}
m_1 &= U_{03}(\alpha)W'_{02}(\alpha) - U_{02}(\alpha)W'_{03}(\alpha),\\
m_2 &= U_{01}(\alpha)W'_{03}(\alpha) - U_{03}(\alpha)W'_{01}(\alpha),\\
m_3 &= U_{02}(\alpha)W'_{01}(\alpha) - U_{01}(\alpha)W'_{02}(\alpha).
\end{aligned}
$$

Применение условия (2.9) позволяет построить уравнение для поиска собственных частот изолированной оболочки

$$
\sum_{s=1}^{3} m_s W_{0s}(\alpha). \tag{3.4}
$$

## 4. Совместные колебания оболочки и жидкости

Метод Фурье – метод разделения переменных, когда частные решения уравнения Гельмгольца в сферической системе координат ищутся в виде $P(r,\vartheta) = Q(r)\Theta(\vartheta)$, порождает две задачи Штурма–Лиувилля. Для функции $\Theta(\vartheta)$ эта краевая задача имеет вид

$$
\frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\;\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{d\Theta(\vartheta)}{d\vartheta}\right) + \mu\Theta(\vartheta) = 0, \qquad \left.\frac{d\Theta(\vartheta)}{d\vartheta}\right|_{\vartheta=\alpha} = 0,
$$

$\mu$ – постоянная разделения переменных. Ограниченное при $\vartheta \to 0$ решение этой задачи выражается через функции Лежандра первого рода, $\Theta(\vartheta) = F_0(\lambda_n, \vartheta)$. Дискретный набор значений $\lambda_n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, определяется из уравнения

$$
F_1(\lambda, \alpha) = 0, \tag{4.1}
$$

причем, $\lambda_0 = 0$. Соотношение $\mu_n = \lambda_n(\lambda_n + 1)$ связывает постоянные разделения $\mu_n$ с величинами $\lambda_n$, для которых справедлива [11] асимптотика $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\sim} \pi(n + 1/4)/\alpha - 1/2$.

Функциям $Q(r)$ соответствует краевая задача вида

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\,\frac{dQ(r)}{dr}\right) + \left(k^2 - \frac{\mu}{r^2}\right)Q(r) = 0, \qquad \left.\frac{dQ(r)}{dr}\right|_{r=R} = 0.$$

Решением этой задачи являются функции $f_0(\lambda_n, kR, kr)$, здесь

$$f_0(\lambda, x, y) = \big(\phi_{-\lambda-1/2}(x)J_{\lambda+1/2}(y) - \phi_{\lambda+1/2}(x)J_{-\lambda-1/2}(y)\big)\big/\sqrt{y},$$

$$\phi_\nu(x) = x(J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)) - J_\nu(x),$$

$J_\nu(x)$ – функция Бесселя порядка $\nu$.

Поле давлений в жидкости и поле смещений точек оболочки следует разыскивать в виде разложения по стоячим волнам

$$P(r,\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_0(\lambda_n, kR, kr)F_0(\lambda_n, \vartheta),$$

$$U(\vartheta) = U_0(\vartheta) + U_1(\vartheta), \qquad W(\vartheta) = W_0(\vartheta) + W_1(\vartheta).$$

Здесь $U_1(\vartheta)$, $W_1(\vartheta)$ – частное решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (2.4)–(2.5), которое следует искать в виде

$$U_1(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{1n}F_1(\lambda_n, \vartheta), \qquad W_1(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} w_{1n}F_0(\lambda_n, \vartheta). \tag{4.2}$$

Условия (2.1)–(2.3) выполнены. Коэффициенты $p_n$, $u_{1n}$, $w_{1n}$ пока не определены. Позже, когда они будут найдены, появится возможность убедиться, что ряды в (4.2) сходятся при $0 \le \vartheta \le \alpha$. А это будет означать, что $U_1(\vartheta)$, $W_1(\vartheta)$, а следовательно, и $U(\vartheta)$, $W(\vartheta)$ удовлетворяют условиям (2.7)–(2.8) в силу равенства (4.1).

Каждая их функций $W_{0s}(\vartheta)$, $s = 1, 2, 3$, может быть разложена по ортогональной системе функций $F_0(\lambda_n, \vartheta)$. Коэффициентами разложения служат величины $w_{0sn} = \big(W_{0s}(\vartheta), F_0(\lambda_n, \vartheta)\big)/\big(F_0(\lambda_n, \vartheta), F_0(\lambda_n, \vartheta)\big)$. Для вычисления скалярных произведений следует [11] воспользоваться формулой:

$$\big(F_0(\nu_1, \vartheta), F_0(\nu_2, \vartheta)\big) = \int_0^\alpha F_0(\nu_1, \vartheta)F_0(\nu_2, \vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta =$$

$$= \left. \frac{\sin\vartheta\big(F_0(\nu_1,\vartheta)F_1(\nu_2,\vartheta) - F_0(\nu_2,\vartheta)F_1(\nu_1,\vartheta)\big)}{\nu_1(\nu_1+1) - \nu_2(\nu_2+1)} \right|_0^\alpha .$$

Таким образом,

$$\big(F_0(q_s,\vartheta), F_0(\lambda_n,\vartheta)\big) = \frac{\sin\alpha F_0(\lambda_n,\alpha)F_1(q_s,\alpha)}{\mu_n - \chi_s},$$

$$\big(F_0(\lambda_n,\vartheta), F_0(\lambda_n,\vartheta)\big) = \lim_{q\to\lambda_n} \big(F_0(q,\vartheta), F_0(\lambda_n,\vartheta)\big) =$$

$$= -\frac{\sin\alpha F_0(\lambda_n,\alpha)}{2\lambda_n+1}\frac{\partial F_1(\lambda_n,\alpha)}{\partial\lambda_n},$$

$$W_{0s}(\vartheta) = \frac{2F_1(q_s,\alpha)}{\alpha}\big(a_{11}(\chi_s)+\rho h\omega^2\big)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau_n}{(\mu_n-\chi_s)}\frac{F_0(\lambda_n,\vartheta)}{F_0(\lambda_n,\alpha)}.$$

Обозначение $\tau_n = -\alpha(\lambda_n+1/2)F_0(\lambda_n,\alpha)/\big(\partial F_1(\lambda_n,\alpha)/\partial\lambda_n\big)$ введено для удобства. Дело в том, что $\tau_n \underset{n\to\infty}{\to} 1$ (см. [11]).

Теперь есть возможность построить коэффициенты $u_{0n}$, $w_{0n}$, а также выразить через них коэффициенты $u_n = u_{0n} + u_{1n}$, $w_n = w_{0n} + w_{1n}$ для разложений

$$U_0(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{0n}F_1(\lambda_n,\vartheta), \qquad U(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_nF_1(\lambda_n,\vartheta),$$

$$W_0(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} w_{0n}F_0(\lambda_n,\vartheta), \qquad W(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} w_nF_0(\lambda_n,\vartheta).$$

Условия (2.4)–(2.6) порождают систему алгебраических уравнений для поиска $p_n$, $u_n$, $w_n$:

$$\begin{cases} (a_{11}(\mu_n)+\rho h\omega^2)(u_n-u_{0n}) + a_{12}(\mu_n)(w_n-w_{0n}) = 0, \\ a_{21}(\mu_n)(u_n-u_{0n}) + (a_{22}(\mu_n)+\rho h\omega^2)(w_n-w_{0n}) = \\ = -p_nf_0(\lambda_n,kR,kR_1), \\ w_n = \big(\rho_0c\omega\big)^{-1}p_nf_1(\lambda_n,kR,kR_1), \end{cases}$$

$f_1(\lambda,x,y) = \partial f_0(\lambda,x,y)/\partial y$. Решение этой системы и, далее, замена старой произвольной постоянной $C_0$ на новую $C$ с применением связи

$$C = -C_0\,\alpha\Big(2F_1(q_1,\alpha)F_1(q_2,\alpha)F_1(q_3,\alpha)(\chi_1-\chi_2)(\chi_2-\chi_3)(\chi_3-\chi_1)\times$$
$$G\big(G(1-\beta)(1+\sigma)+\beta\rho h\omega^2\big)\Big)^{-1}$$

позволяет предъявить искомые коэффициенты выражений для полей:

$$p_n = \frac{C\tilde{p}_n}{f_0(\lambda_n, kR, kR_1)F_0(\lambda_n, \alpha)}, \quad u_n = \frac{C\tilde{u}_n}{F_0(\lambda_n, \alpha)}, \quad w_n = \frac{C\tilde{w}_n}{F_0(\lambda_n, \alpha)}.$$

Применены обозначения:

$$\tilde{p}_n = \tau_n f_0(\lambda_n, kR, kR_1)\,\rho_0\,\omega c\,(\rho h\omega^2 + a_{11}(\mu_n))/z_n,$$

$$\tilde{u}_n = -\tau_n f_1(\lambda_n, kR, kR_1)\,a_{12}(\mu_n)/z_n,$$

$$\tilde{w}_n = \tilde{w}_n(\omega, R, R_1) = \tau_n f_1(\lambda_n, kR, kR_1)\,(\rho h\omega^2 + a_{11}(\mu_n))/z_n,$$

$$z_n = z_n(\omega, R, R_1) =$$

$$= f_0(\lambda_n, kR, kR_1)\,\rho_0\,\omega c\,(\rho h\omega^2 + a_{11}(\mu_n)) + f_1(\lambda_n, kR, kR_1)\Delta(\mu_n).$$

Предложенные выражения для полей, удовлетворяющие условиям (2.1)–(2.8), будут соответствовать собственному процессу, если на $W(\vartheta)$ наложить последнее условие (2.9). Таким образом, уравнение для поиска дискретного множества $\omega_s$, $s = 1, 2, 3, \ldots$ собственных частот принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{w}_n(\omega, R, R_1) = 0. \tag{4.3}$$

Скорость сходимости ряда в (4.3) соразмерна с таковой для быстросходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4}$.

Формальная подстановка $\rho_0 \equiv 0$ в (4.3) позволяет находить частоты свободных колебаний изолированной оболочки. Результаты применения уравнений (3.4) и (4.3) совпадают.

## 5. Эффект понижения собственной частоты при уменьшении глубины жидкости в резонаторе

Численные результаты представлены на рис. 1 для совместной системы “стальная оболочка – вода”, $\alpha = \pi/3$, $h/R = 0.001$.

В рассмотрение вводится величина $\varepsilon = \sqrt{(R_1 - R)/R}$. При $\varepsilon \to 0$, когда уменьшается $R_1$, а прочие геометрические размеры неизменны, объем резонатора уменьшается и наблюдается, также как в [7–8], аномальное снижение собственных частот. рис. 1 позволяет убедиться, что низшие собственные частоты примерно пропорциональны $\varepsilon$. Механический смысл такого явления объяснен в [12].

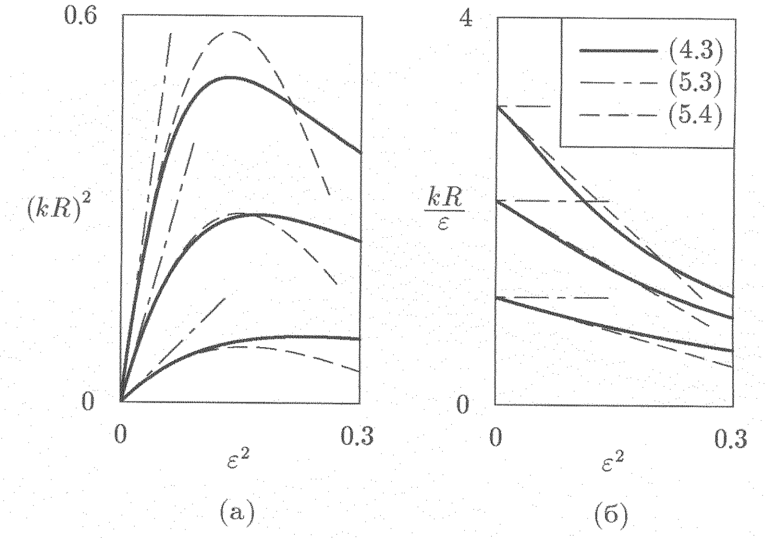


Рис. 1.

При выводе формулы для приближенного поиска аномальных частот в качестве искомой выбирается величина $\psi = \psi(\varepsilon) = \omega(\varepsilon)/\varepsilon$. Для ее поиска используется уравнение

$$\Psi(\varepsilon, \psi) = 0, \tag{5.1}$$

$$\Psi(\varepsilon, \psi) = \left\{ \begin{array}{ll} \Psi_1(\varepsilon, \psi) & \varepsilon \neq 0 \\ \Psi_0(\kappa\psi^2) & \varepsilon = 0 \end{array} \right| ,$$

$$\Psi_1(\varepsilon, \psi) = G \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{w}_n(\varepsilon\psi, R, R(1+\varepsilon^2)), \quad \Psi_0(\kappa\psi^2) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Psi_1(\varepsilon, \psi)$$

$$\Psi_0(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n \mu_n \nu_n}{\zeta_n(\xi)}, \quad \kappa = \frac{\rho_0 R}{G_0}, \quad \nu_n = \mu_n - 1 + \sigma$$

$$\zeta_n(\xi) = \mu_n(\mu_n - 2)\big(1 - \sigma^2 + \big(\mu_n(\mu_n - 2) + (1-\sigma)^2\big)\beta_0 - \mu_n^2\beta_0^2\big) - \xi\nu_n,$$

$$G_0 = Eh/(R^2(1-\sigma^2)), \quad \beta_0 = h^2/(12R^2).$$

Функция $\Psi_0(\xi)$ имеет дискретное множество положительных корней $\xi_s$, $s=1,2,3,\ldots$. В точке $(0,\sqrt{\xi_s/\kappa})$ и некоторой ее окрестности функция $\Psi(\varepsilon,\psi)$ является аналитической, подчиняется требованиям

$$\Psi(0,\sqrt{\xi_s/\kappa})=0,\qquad \left.\frac{\partial\Psi(\varepsilon,\psi)}{\partial\psi}\right|_{\varepsilon=0,\psi=\sqrt{\xi_s/\kappa}}\neq 0,$$

следовательно, по теореме о неявных функциях [13] существует однозначная функция $\psi_s(\varepsilon)$, определяемая уравнением (5.1), дополнительным условием $\psi_s(0)=\sqrt{\xi_s/\kappa}$ и аналитическая в некоторой окрестности точки $\varepsilon=0$. Коэффициенты $\psi_{sm}$, $m=0,1,2,\ldots$ сходящегося в этой окрестности ряда

$$\psi_s(\varepsilon)=\sum_{m=0}^{\infty}\psi_{sm}\varepsilon^{2m} \tag{5.2}$$

можно найти методом неопределенных коэффициентов, подставляя (5.2) в (5.1). Сохранение одного либо двух младших членов ряда позволяет выписать приближенные формулы

$$\omega_s(\varepsilon)\underset{\varepsilon\to 0}{\approx}\varepsilon\psi_{s0}, \tag{5.3}$$

$$\omega_s(\varepsilon)\underset{\varepsilon\to 0}{\approx}\varepsilon\,(\psi_{s0}+\psi_{s1}\,\varepsilon^2), \tag{5.4}$$

$$\psi_{s0}=\sqrt{\frac{\xi_s}{\kappa}},\qquad \psi_{s1}=-\left(1+\frac{R^2\psi_{s0}^2}{2c^2}\eta_{s1}+\frac{h\rho}{2R\rho_0}\eta_{s2}\right)\psi_{s0}-\frac{G_0}{R\rho_0\psi_{s0}}\eta_{s3},$$

$$\eta_{s1}=\frac{1}{\eta_{s0}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau_n\nu_n^2}{\zeta_n^2(\xi_s)},\qquad \eta_{s0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_n\mu_n\nu_n^2}{\zeta_n^2(\xi_s)},$$

$$\eta_{s2}=\frac{1}{\eta_{s0}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_n\mu_n^2}{\zeta_n^2(\xi_s)}\big(\mu_n(\mu_n-1+\sigma^2+4\sigma)+(1-\sigma)^2+$$

$$+2\mu_n(\mu_n-1)(1+\sigma)\beta_0+\mu_n^2(\mu_n-2)\beta_0^2\big),$$

$$\eta_{s3}=\frac{1}{\eta_{s0}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_n\mu_n^2(\mu_n-2)\nu_n}{\zeta_n^2(\xi_s)}\big(1-\sigma^2+2(\mu_n(\mu_n-2)+(1-\sigma)^2)\beta_0-3\mu_n^2\beta_0^2\big).$$

На рис. 1 сплошными линиями представлены зависимости от глубины резонатора трех низших его собственных частот. Пунктирными и штрих–пунктирными линиями показано действие приближенных формул (5.4) и (5.3) соответственно.

Величины $\xi_s$, $\eta_{s1}$, $\eta_{s2}$, $\eta_{s3}$, необходимые для приближенного поиска низших собственных частот, представлены в таб. 1 для случая $\sigma = 0.3$, $\sqrt{12\beta_0} = 0.001$.

Таблица 1

| $\alpha$ | $15^0$ | $30^0$ | $45^0$ | $60^0$ | $75^0$ | $90^0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\zeta_1$ | 7334.3 | 3432.4 | 2229.4 | 1609.3 | 1238.7 | 981.4 |
| $\eta_{11}$ | 0.00468 | 0.01867 | 0.04200 | 0.07460 | 0.11630 | 0.16672 |
| $\eta_{12}$ | 249.25 | 59.26 | 27.20 | 15.77 | 10.85 | 8.31 |
| $\eta_{13}$ | 255.64 | 53.92 | 22.42 | 11.70 | 6.92 | 4.34 |
| $\zeta_2$ | 13966.0 | 6351.9 | 4162.8 | 3057.2 | 2413.7 | 1984.5 |
| $\eta_{21}$ | 0.00142 | 0.00557 | 0.01252 | 0.02227 | 0.03477 | 0.04999 |
| $\eta_{22}$ | 827.81 | 194.60 | 86.89 | 48.28 | 31.37 | 22.30 |
| $\eta_{23}$ | 988.87 | 185.47 | 78.23 | 42.21 | 26.24 | 17.71 |
| $\zeta_3$ | 22416.1 | 9296.9 | 6071.4 | 4469.0 | 3543.1 | 2929.4 |
| $\eta_{31}$ | 0.00071 | 0.00265 | 0.00595 | 0.01059 | 0.01654 | 0.02380 |
| $\eta_{32}$ | 1711.44 | 407.32 | 180.85 | 99.55 | 63.92 | 44.76 |
| $\eta_{33}$ | 2926.42 | 402.86 | 166.90 | 90.27 | 56.56 | 38.59 |

## Литература


1. В. С. Кобычкин, В. П. Шмаков, *Исследование частот колебаний сферической оболочки, заполненной жидкостью.* — Строительная механика и расчет сооружений, No. 2 (1969), 49–54.
2. Ali E. Engin, *Vibrations of fluid-filled spherical shells.* — J. Acoust. Soc. Am., **46**, No. 1 (1969), Pt. 2, 186–190.
3. Mingsian R. Bai, Kuorung Wu, *Free vibrations of a thin spherical shell containing a compressible fluid.* — J. Acoust. Soc. Am., **95**, No. 6 (1994), 3300–3310.
4. R. Rand, F. DiMaggio, *Vibrations of fluid-filled spherical and spheroidal shells.* — J. Acoust. Soc. Am., **42**, No. 6 (1967), 1278–1286.
5. Е. А. Самойлов, Б. С. Павлов, *Колебания полусферической оболочки, заполненной жидкостью.* — Изв. ВУЗов. Авиационная техника, **7**, No. 3 (1964), 73–86.
6. Chintsun Hwang, *Longitudinal sloshing of liquid in a flexible hemispherical tank.* — Trans. ASME. J. Appl. Mech., **32**, No. 3 (1965), 665–670.
7. Ю. А. Лавров, В. Д. Лукьянов, Г. Л. Никитин, *О собственных частотах прямоугольного акустического резонатора с упругими стенками.* — Акуст. журн., **35**, No. 2 (1989), 302–307.

8. Ю. А. Лавров, *О собственных частотах цилиндрического акустического резонатора с упругими торцевыми стенками.* — Прикладная механика, **27 (37)**, No. 4 (1991), 53–59.
9. Ю.А. Лавров, *О собственных частотах цилиндрического акустического резонатора с упругой цилиндрической и жесткими торцевыми стенками.* Акуст. журн., **43**, No. 3 (1997), 425–428.
10. В. З. Власов, *Избранные труды.* Т. 1. Изд–во АН СССР, М. (1962).
11. Е. В. Гобсон, *Теория сферических и эллипсоидальных функций.* Изд-во иностр. литературы, М. (1952).
12. D. P. Kouzov, Yu. A. Lavrov, *On effect of natural frequency reduction in acoustical resonator at the approaching closely of its elastic walls.* — Asymptotics in mechanics, AiM '96. Proceedings. Marine Technical University of St. Petersburg, (1996) 129–136..
13. А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций.* Т. 1. Наука, М. (1967).

Lavrov Y. A., Lukyanov V. D. On frequencies of free oscillations of a truncated spherical cone covered with a thin elastic spherical shell.

The analytical solution of a problem on a determination of frequencies and forms of free axisymmetric oscillations of the truncated spherical cone filled with an ideal compressible fluid is constructed. Spherical wall of a smaller radius and radial wall of a sector are absolutely rigid. On the spherical boundary of the greater radius the thin elastic shell is placed. The shell edge is clamped in a radial wall. The outside shell surface bounds with vacuum. The effect of anomalous lowering of natural frequency at rapprochement of spherical walls is revealed. There is constructed and numerically tested an approximate formula for search of the lowest natural frequencies which are approximately proportional to the square root of difference of radiuses of spherical walls for small significances of this difference.

С.-Петербургский государственный университет путей сообщения
С.-Петербургский военный инженерно-технический университет

Поступило 15 января 2002 г.