Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 285, 2002 г.

Ю. А. Лавров

О ЧАСТОТАХ СВОБОДНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ЖИДКОСТИ, РАЗДЕЛЯЮЩЕЙ ЖЕСТКУЮ И УПРУГУЮ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ СТЕНКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

1. Введение. Цилиндрический резервуар кольцевого поперечного сечения, заполненный жидкостью, может быть элементом конструкции транспортного средства. При проектировании такого элемента важно предотвратить вредные вибрации, возникающие в результате резонансных явлений. В большинстве представленных в литературе работ (например, [1–4]) рассматриваются свободные процессы лишь для одинарной упругой оболочки, внутреннее пространство которой заполнено жидкой средой. Полученные результаты для собственных частот не могут указывать на то существенное их снижение, которое было бы вызвано наличием второй, концентрично размещенной цилиндрической стенки. Изучению низкочастотных колебаний “двойной оболочки” посвящено существенно ме́ньшее число работ. К примеру, в [5] такие колебания исследовались численно и экспериментально.

В настоящей работе на основе точного решения задачи о совместных колебаниях системы “упругая оболочка – кольцевой слой жидкости” выводятся формулы для приближенного поиска низших собственных частот.

2. Постановка задачи. Идеальная сжимаемая жидкость заполняет объем $R < r < R_1$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $-H < z < H$. Здесь r, φ, z – цилиндрические координаты. Акустическое давление в жидкости $P(r, z, \varphi)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) P(r, z, \varphi) = 0, \tag{2.1}$$

$k = \omega/c$, ω – круговая частота, c – скорость звука в жидкости. Зависимость процессов от времени предполагается гармонической.

Поверхности внутренней цилиндрической и торцевых плоских стенок – идеально жесткие:

$$\frac{\partial P(R,z,\varphi)}{\partial r}=0,\quad 0\leqslant\varphi<2\pi,\quad -H<z<H, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial P(r,\pm H,\varphi)}{\partial z}=0,\quad 0\leqslant\varphi<2\pi,\quad R<r<R_1. \tag{2.3}$$

Осевое $U(z,\varphi)$, окружное $V(z,\varphi)$ и изгибное $W(z,\varphi)$ смещения цилиндрической оболочки удовлетворяют уравнениям технической теории оболочек [6, 7]

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1-\sigma}{2R_1^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\Omega^2\right)U(z,\varphi)+\\ +\frac{1+\sigma}{2R_1}\frac{\partial^2 V(z,\varphi)}{\partial z\partial\varphi}+\frac{\sigma}{R_1}\frac{\partial W(z,\varphi)}{\partial z}=0,\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered}\frac{1+\sigma}{2R_1}\frac{\partial^2 U(z,\varphi)}{\partial z\partial\varphi}+\left(\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{R_1^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\Omega^2\right)V(z,\varphi)+\\ +\frac{1}{R_1^2}\frac{\partial W(z,\varphi)}{\partial\varphi}=0,\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered}\frac{\sigma}{R_1}\frac{\partial U(z,\varphi)}{\partial z}+\frac{1}{R_1^2}\frac{\partial V(z,\varphi)}{\partial\varphi}+\\ \left(\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4}{\partial z^4}+\frac{2}{R_1^2}\frac{\partial^4}{\partial z^2\partial\varphi^2}+\frac{1}{R_1^4}\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4}\right)+\right.\\ \left.+\frac{1}{R_1^2}+\Omega^2\right)W(z,\varphi)=\frac{(1-\sigma^2)}{Eh}P(R_1,z,\varphi).\end{gathered} \tag{2.6}$$

Применены обозначения: E – модуль Юнга, σ – коэффициент Пуассона, $\Omega^2=(1-\sigma^2)\rho\omega^2/E$, ρ – плотность материала оболочки, h – ее толщина.

В качестве условий закрепления краев оболочки принимаются соотношения

$$U(\pm H,\varphi)=0, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial V(\pm H,\varphi)}{\partial z}=0, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial W(\pm H,\varphi)}{\partial z}=0, \tag{2.9}$$

$$W(\pm H,\varphi)=0. \tag{2.10}$$

Условия (2.7)–(2.10), использованные, к примеру, в [3, 8], допускают точное решение задачи в тригонометрических рядах [7].

Условие безотрывности смещений на границе оболочки и жидкости имеет вид

$$W(z,\varphi) = \frac{1}{\rho_0\omega^2}\,\frac{\partial P(R_1,z,\varphi)}{\partial r}, \tag{2.11}$$

ρ_0 – плотность жидкости.

3. Точное решение. Процедура построения аналитического решения задачи (2.1)–(2.11) подобна описанной в [4] и в целях кратности изложения здесь не приводится. Окончательные выражения для полей имеют вид:

$$P(r,z,\varphi) = \cos(m\varphi)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n p_n F(q_n z) f_0(m,\gamma_n R,\gamma_n r),$$

$$U(z,\varphi) = \cos(m\varphi)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n F'(q_n z),$$

$$V(z,\varphi) = \sin(m\varphi)\sum_{n_0}^{\infty}(-1)^n v_n F(q_n z),$$

$$W(z,\varphi) = \cos(m\varphi)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w_n F(q_n z).$$

Здесь $m = 0,1,2,\ldots$, $q_n = \chi_n/H$, $\chi_n = \pi n$ и $F(x) = \cos(x)$ для четных, $\chi_n = \pi(n+1/2)$ и $F(x) = \sin(x)$ для нечетных по координате z процессов, $\gamma_n = \sqrt{k^2 - q_n^2}$, $F'(x) = dF(x)/dx$,

$$f_0(m,x,y) = \left(J_{m+1}(x) - \frac{m}{x}J_m(x)\right)Y_m(y) - \left(Y_{m+1}(x) - \frac{m}{x}Y_m(x)\right)J_m(y),$$

$$p_n = C\tau_n\rho_0\omega^2 A_{33}(q_n)/z_n,$$

$$u_n = C\tau_n\gamma_n f_1(m,\gamma_n R,\gamma_n R_1)A_{31}(q_n)/z_n,$$

$$v_n = -C\tau_n\gamma_n f_1(m,\gamma_n R,\gamma_n R_1)A_{32}(q_n)/z_n,$$

$$w_n = w_n(\omega,R,R_1) = C\tau_n\gamma_n f_1(m,\gamma_n R,\gamma_n R_1)A_{33}(q_n)/z_n,$$

$$z_n = \det(\mathcal{A}(q_n))\gamma_n f_1(m,\gamma_n R,\gamma_n R_1)$$
$$-A_{33}(q_n) f_0(m,\gamma_n R,\gamma_n R_1)\Omega^2\rho_0/(\rho h),$$

$J_m(x)$, $Y_m(x)$ – функции Бесселя первого и второго рода, C – произвольная константа, $\tau_n = 1/2$ только для $n = 0$ в случае четных по координате z процессов, $\tau_n = 1$ во всех прочих случаях, $f_1(m,x,y) = \partial f_0(m,x,y)/\partial y$, $\det(\mathcal{A}(q))$ – характеристический полином оболочки, $\mathcal{A}(q) = \{\mathcal{A}_{ij}(q)\}$, $i,j = 1,2,3$,

$$\mathcal{A}_{11}(q) = q^2 + \frac{1-\sigma}{2R_1^2}\,m^2 - \Omega^2, \quad \mathcal{A}_{12}(q) = \mathcal{A}_{21}(q) = \frac{1+\sigma}{2R_1}\,mq,$$

$$\mathcal{A}_{13}(q) = \mathcal{A}_{31}(q) = \frac{\sigma}{R_1}\,q,$$

$$\mathcal{A}_{22}(q) = \frac{1-\sigma}{2}\,q^2 + \frac{m^2}{R_1^2} - \Omega^2, \quad \mathcal{A}_{23}(q) = \mathcal{A}_{32}(q) = \frac{m}{R_1^2},$$

$$\mathcal{A}_{33}(q) = \frac{1}{R_1^2} + \frac{h^2}{12}\left(q^2 + \frac{m^2}{R_1^2}\right)^2 - \Omega^2,$$

$A_{ij}(q)$ – алгебраическое дополнение соответствующего элемента матрицы $\mathcal{A}(q)$.

Уравнение для поиска последовательности ω_s, $s = 1,2,3,\ldots$ собственных частот имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(\omega, R, R_1) = 0. \tag{3.1}$$

4. Эффект понижения собственной частоты при уменьшении толщины слоя жидкости в резонаторе. Численные результаты представлены на Рис. 1 для системы “стальная оболочка – вода”, $H/R = 1$, $h/R = 0.001$. Часть (а) соответствует четным, (б) – нечетным по z процессам.

Величина $\varepsilon = (R_1 - R)/R$ выбирается в качестве малого параметра, по которому ведется разложение низших собственных частот. Их снижение наблюдается при $\varepsilon \to 0$, когда уменьшается R_1, а остальные размеры постоянны. При этом сокращается объем жидкости в резонаторе. Важно напомнить, что при пропорциональном уменьшении одновременно всех геометрических размеров акустического резонатора имеет место, напротив, повышение собственных частот.

Сохранение в разложении по ε величины $\psi = \psi(\varepsilon) = \omega^2(\varepsilon)/\varepsilon$ лишь одного либо двух младших членов позволяет подготовить приближенные формулы

$$\omega_s(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\approx} \sqrt{\varepsilon\psi_{s0}}, \tag{4.1}$$

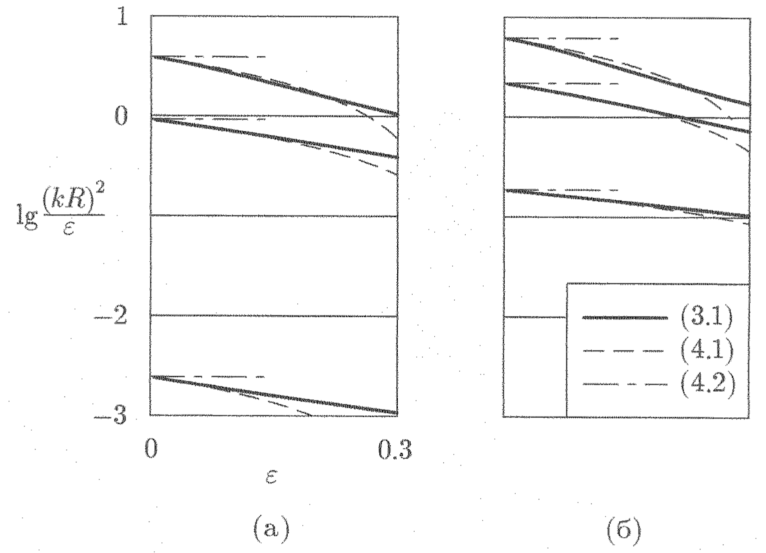

Рис. 1.

$$\omega_s(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\approx} \sqrt{\varepsilon\psi_{s\,0} + \varepsilon^2\psi_{s\,1}}, \tag{4.2}$$

$$\psi_{s\,0} = \frac{\xi_s}{\kappa}, \quad \psi_{s\,1} = -\left(\frac{h\rho}{R\rho_0}\,\eta_{s\,1} + \frac{1}{2}\,\eta_{s\,2} + \frac{R^2}{c^2}\psi_{s\,0}\eta_{s3}\right)\psi_{s\,0} - \frac{2}{\kappa}\,\eta_{s4},$$

ξ_s – s-й положительный корень уравнения

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau_n\mu_n^2}{\zeta_n(\xi)} = 0,$$

$$\mu_n = \lambda_n^2 + m^2, \quad \lambda_n = \chi_n\alpha, \quad \alpha = R/H, \quad \kappa = (1-\sigma^2)\rho_0 R^3/(Eh),$$

$$\zeta_n(\xi) = \mu_n(\mu_n^3\beta_0 - \xi) + \lambda_n^4(1-\sigma^2), \quad \beta_0 = h^2/(12R^2),$$

$$\eta_{s\,1} = \frac{1}{\eta_{s\,0}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau_n\mu_n(\mu_n^3+\sigma^2\mu_n^2+2m^2(2+\sigma-\sigma^2)\mu_n-m^4(3+2\sigma-\sigma^2))}{\zeta_n^2(\xi_s)},$$

$$\eta_{s\,2} = \frac{1}{\eta_{s\,0}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau_n\mu_n(\lambda_n^2+3m^2)}{\zeta_n^2(\xi_s)}, \quad \eta_{s3} = \frac{1}{\eta_{s\,0}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau_n\mu_n^2}{\zeta_n^2(\xi_s)},$$

$$\eta_{s4}=\frac{1}{\eta_{s0}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau_n\mu_n(2m^2\beta_0\mu_n^4+(1-\sigma^2)\lambda_n^4(\lambda_n^2-m^2))}{\zeta_n^2(\xi_s)},\quad \eta_{s0}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau_n\mu_n^3}{\zeta_n^2(\xi_s)},$$

Величины ξ_s, η_{s1}, η_{s2}, η_{s3}, η_{s4}, необходимые для приближенного поиска низших собственных частот, представлены в таблице 1 для случая $\alpha=1$, $\sigma=0.3$, $\sqrt{12\beta_0}=0.001$.

Таблица 1

	Четные по z процессы			Нечетные по z процессы		
m	1	2	3	1	2	3
ζ_1	5063	19169	38744	394265	257439	218466
η_{11}	2.019	5.076	10.19	4.670	8.190	13.30
η_{12}	2.999	2.998	2.992	1.576	2.235	2.564
η_{13}	0.9998	0.2497	0.1107	0.2882	0.1544	0.08690
η_{14}	0.01650	0.05844	0.1002	0.7943	0.005158	0.05327

Литература

1. Wen-Hwa-Chu, *Breathing vibrations of a partially filled cylibndrical tank. Linear theory.* Trans. ASME J. Appl. Mech.¡ **30**, No. 6 (1963) 532–536.
2. J. Mistry, J. C. Menezes, *Vibrations of cylinders partially-filled with liquids.* Trans. ASME J. Vibr. Acoust., **117**, No. 1 (1995), 87–93.
3. В. П. Георгиевский, П. С. Малютин, А. Г. Тарасова, *Матрица Грина динамической задачи для цилиндрической оболочки, содержащей сжимаемую среду, при произвольных граничных условиях.* Акуст. журн., **34**, No. 6 (1988), 1016–1019.
4. Ю. А. Лавров, *О собственных частотах цилиндрического акустического резонатора с упругой цилиндрической и жесткими торцевыми стенками.* Акуст. журн., **43**, No. 3 (1997), 425–428.
5. Shigeru Yoshikawa, *Vibration of two concentric submerged cylindrical shells coupled by the entrained fluid.* J. Acoust. Soc. Amer., **95**, No. 6 (1994), 3273–3286.
6. *Вибрация в технике. Справочник в 6 томах. Т. 1 Колебания линейных систем.* Под ред. В. В. Болотина. Машиностроение, М. (1978).
7. А. Л. Гольденвейзер, *Теория упругих тонких оболочек.* Наука, М. (1976).
8. А. П. Филиппов, *Колебания цилиндрической оболочки.* ПММ, **1**, No. 2 (1937), 177–186.

Lavrov Yu. A. On frequencies of free acoustic oscillations in fluid dividing rigid and elastic cylindrical walls of finite length.

The solution of a problem on determination of frequencies and mode shapes of free nonsymmetric oscillations in ring volume filled with ideal compressible fluid is constructed. Internal cylindrical bound and face flat walls are ideally rigid. The thin elastic shell with clamped edges is placed along an extrenal cylindrical boundary. The phenomenon of decreasing of natural frequency at diminution of the thickness of fluid layer is confirmed.

Санкт-Петербургский
государственный университет
путей сообщений

Поступило 20 февраля 2002 г.