Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 285, 2002 г.

Н. Я. Кирпичникова, Л. А. Свиркина, В. Б. Филиппов

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКИХ УПРУГИХ ВОЛН ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ОТ МАЛОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ В СЛОЕ

Рассмотрена задача дифракции плоских упругих волн вертикальной поляризации от неоднородного включения, имеющего вид кругового цилиндра, радиус a которого мал относительно длины падающей волны λ: $a \ll \lambda$.

Из верхнего полупространства Ω_0 с параметрами λ_0, μ_0, ρ_0 на упругий слой Ω_1 с параметрами λ_1, μ_1, ρ_1 падает плоская волна вертикальной поляризации продольная или поперечная. Упругий слой Ω_1 лежит на упругом полупространстве Ω_2 с параметрами λ_2, μ_2, ρ_2. Малой неоднородностью Ω_3 является круговой цилиндр радиуса a, находящийся в упругом слое Ω_1, расположенном между двумя упругими полупространствами Ω_0 и Ω_2.

Плоскость падения заданной волны перпендикулярна оси цилиндра. В этом случае общая задача переходит в плоскую задачу дифракции от малой неоднородности Ω_3, имеющей вид круга радиуса a и помещенной в слой Ω_1. Толщина слоя $H = h + h_1$ имеет порядок длины волны.

Исследуется *дифракция плоских упругих волн вертикальной поляризации от упругого включения, помещенного в слой, лежащий на упругом полупространстве*. Плоскость поляризации таких волн совпадает с плоскостью падения. Волны вертикально поляризованного падающего поля рассеиваются от неоднородности как цилиндрические волны с продольной и поперечной скоростями. Интенсивность рассеивания пропорциональна скачку параметров Ляме λ, μ, скачку плотностей ρ сред и неоднородности, и площади неоднородности.

Аналогия с электромагнитным рассеянием на неоднородности просматривается только в случае горизонтальной поляризации (SH-волна) [1]. Картина рассеяния вертикально поляризованной

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 01-01-00255).

волны сложнее. Сложность задачи для вертикально поляризованного поля состоит в том, что задача векторная и компоненты вектора смещений представлены посредством скалярного и векторного потенциалов. Это приводит к двум уравнениям Гельмгольца для потенциалов и к сложным граничным условиям на границах раздела.

1. Постановка задачи дифракции от малой неоднородности в слое.

Задача рассеяния волн вертикальной поляризаций от поверхности упругого включения формулируется следующим образом.

Рассмотрим упругий слой Ω_1, расположенный между двумя упругими полупространствами: верхним Ω_0 и нижним Ω_2. Из полупространства Ω_0 на упругий слой Ω_1 падает стационарная плоская упругая волна (продольная или поперечная). В слое толщины $H = h + h_1$, $(H \sim O(\lambda))$ находится неоднородное включение Ω_3 в виде кругового цилиндра радиуса $r = a$ $(a \ll \lambda)$. Плоскость XOY падения волн перпендикулярна оси цилиндра (оси OZ). На всех границах раздела параллельных плоскости XOZ и на поверхности цилиндра $r = a$ выполняются условия жесткого контакта.

Фактически в трехслойной упругой среде решается квазидвумерная задача о дифракции плоской волны (продольной или поперечной) от неоднородного круга, помещенного в упругий слой между двумя упругими полупространствами.

Решение сформулированной задачи производится следующим методом. Из уравнений движения для однородных изотропных упругих сред, принципа излучения и граничных условий сначала устанавливается общий вид искомых потенциалов.

Динамические уравнения теории упругости однородной изотропной среды для вектора смещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ с гармонической зависимостью от времени переходят в следующие:

$$L\mathbf{u} = -\rho\omega^2\mathbf{u}. \tag{1.1}$$

Для вектора смещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, удовлетворяющего уравнению (1.1), ставится следующая задача.

Пусть из упругого полупространства $\Omega_0 = \{y > h\}$ на упругий слой $\Omega_1 = \{-h_1 \leqslant y \leqslant h\}$ толщины H, $kH \sim O(1)$, падает плоская волна.

Плоская упругая волна вполне определена вектором смещения частиц $\mathbf{u}$, все компоненты которого должны быть непрерывны при переходе через границы раздела сред. Кроме того, на границах должны быть непрерывны компоненты тензора напряжений. Таких границ три: верхняя $\Gamma_{01} = \{y = h\}$, нижняя $\Gamma_{12} = \{y = -h_1\}$ и внутренняя граница $\Gamma_{13} = \{r = a\}$, (ось цилиндра находится в центре декартовой системы координат).

Сформулируем условия жесткого контакта на границах раздела. На границе $\Gamma_{01} = \{y = h\}$

$$[\mathbf{u}]\big|_{y=h} = 0, \quad [\sigma_{yx}]\big|_{y=h} = 0, \quad [\sigma_{yy}]\big|_{y=h} = 0, \quad [\sigma_{yz}]\big|_{y=h} = 0. \quad (1.2)$$

На поверхности цилиндра $\Gamma_{12} = \{r = a\}$, образующая которого параллельна оси OZ, а радиус цилиндра a мал по сравнению с длиной волны, $(ka \ll 1)$ выполнены следующие условия

$$[\mathbf{u}]\big|_{r=a} = 0, \quad [\sigma_{rr}]\big|_{r=a} = 0, \quad [\sigma_{r\varphi}]\big|_{r=a} = 0, \quad [\sigma_{rz}]\big|_{r=a} = 0. \quad (1.3)$$

И, наконец, на поверхности раздела $\Gamma_{12} = \{y = -h_1\}$ выполнены также условия жесткого контакта

$$[\sigma_{yx}]\big|_{y=-h_1} = 0, \quad [\sigma_{yy}]\big|_{y=-h_1} = 0, \quad [\sigma_{yz}]\big|_{y=-h_1} = 0. \quad (1.4)$$

Волны, отраженные от слоя, должны удовлетворять условиям излучения.

В общем случае вектор смещений $\mathbf{u}$ может быть выражен через скалярный Φ и векторный $\boldsymbol{\Psi}$ потенциалы формулой

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad}\Phi + \operatorname{rot}\boldsymbol{\Psi}. \quad (1.5)$$

Можно показать, что потенциалы удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)\Phi = 0, \quad (\Delta + \varkappa^2)\boldsymbol{\Psi} = 0, \quad (1.6)$$

здесь

$$k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}, \quad a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad \varkappa^2 = \frac{\omega^2}{b^2}, \quad b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

a продольная и b поперечная скорости распространения.

В формулах (1.5)–(1.6) “часть перемещения, соответствующая функции Φ, переносится с продольной скоростью a. Из первого уравнения (1.6) следует, что расширение $\Delta\Phi = \operatorname{div}\mathbf{u}$ удовлетворяет волновому уравнению с той же скоростью. В сейсмологии эта волна называется *первичной* волной или просто волной P; это волна *уплотнения-разрежения*, обуславливающая изменение объема. С другой стороны, второе из уравнений (1.6) показывает, что часть перемещения, соответствующая функции $\mathbf{\Psi}$, переносится с меньшей скоростью $b < a$. Из условия $\operatorname{rot}\mathbf{u} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{\Psi}$ следует, что вращение $\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{u}$ удовлетворяет волновому уравнению с поперечной скоростью b. В сейсмологии эта волна называется *вторичной* волной или волной SH; это волна *сдвига*, обуславливающая искажение элемента без изменения его объема. В том случае, когда модуль сдвига $\mu = 0$, $b = 0$. Это показывает, что волны сдвига не могут распространяться в среде с нулевой жесткостью" (например, в жидких средах) [2]. В случае волны вертикальной поляризации, потенциал $\mathbf{\Psi}$ можно выбрать так, чтобы единственной отличной от нуля была компонента $\Psi_z \equiv \Psi$. Тогда согласно (1.5) в декартовой системе координат для составляющих каждого из потенциалов вектора смещения мы получаем

$$u_x = u = \frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{\partial}{\partial y}\Psi; \quad u_y = v = \frac{\partial}{\partial y}\Phi - \frac{\partial}{\partial x}\Psi. \tag{1.7}$$

В цилиндрической системе координат составляющие вектора смещений вертикальной поляризации равны

$$u^r = u = \frac{\partial}{\partial r}\Phi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Psi; \quad u^\varphi = v = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Phi - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Psi. \tag{1.8}$$

В данной статье исследуется задача рассеяния от неоднородности в слое для падающей волны вертикальной поляризации.

Мы рассматриваем гармонические волны с зависимостью всех величин от времени t и координаты x в виде $\exp\, i(\xi x - \omega t)$, где ξ есть горизонтальная компонента волнового числа, определяющаяся углом падения волны θ и сохраняющаяся при переходе через плоские границы раздела сред. В дальнейшем множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать, а $\partial/\partial x$ всюду заменим на $i\xi$. Отметим, что $\xi = k_i \sin\theta_i$, $i = 0, 1, 2, 3$ в случае падения продольной плоской волны и $\xi = \varkappa_i \sin\theta_i$, $i = 0, 1, 2, 3$ для падающей волны, распространяющейся с поперечной скоростью [3].

В безграничной упругой среде Ω_0 составляющие вектора смещений $\mathbf{u}$ удовлетворяют условиям излучения Зоммерфельда:

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial u(v)}{\partial r}-iku(v)\right)=0,\quad \mathrm{Im}\,k>0. \tag{1.9}$$

Поставленную задачу рассеяния плоской волны от малого включения в слое будем решать в несколько этапов [4]. Во-первых, по падающей плоской волне найдем поле, отраженное от слоя без включения. Во-вторых, построим функцию Грина для задачи без неоднородности. В-третьих, выведем интегральное уравнение, определяющее решение данной задачи с неоднородностью в слое. Наконец, методом последовательных приближений найдем первую итерационную добавку к решению. Поле исследуем для точки наблюдения, расположенной на расстоянии $kr\gg 1$, в случае малого (по сравнению с длиной волны) радиуса включения $k\,a\ll 1$.

2. Решение задачи отражения вертикально поляризованной волны от слоя (без включения Ω_3).

Выберем скалярные и векторные потенциалы (1.7) для каждой из рассматриваемых сред в следующем виде

$$\begin{aligned}\Phi_0^0&=\Phi_0=[A_0e^{-i\alpha_0 y}+Ae^{i\alpha_0 y}]e^{i\xi x};\\ \Psi_0^0&=\Psi_0=[B_0e^{-i\beta_0 y}+Be^{i\beta_0 y}]e^{i\xi x};\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}\Phi_1^0&=\Phi_1=[Ce^{i\alpha_1 y}+De^{-i\alpha_1 y}]e^{i\xi x};\\ \Psi_1^0&=\Psi_1=[Ee^{i\beta_1 y}+Fe^{-i\beta_1 y}]e^{i\xi x};\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\Phi_2^0=\Phi_2=[Ge^{-i\alpha_2 y}]e^{i\xi x};\quad \Psi_2^0=\Psi_2=[He^{-i\beta_2 y}]e^{i\xi x}. \tag{2.3}$$

Здесь $\alpha_i=\sqrt{k_i^2-\xi^2}$, $\beta_i=\sqrt{\varkappa_i^2-\xi^2}$, $i=0,1,2,3$. В формулах (2.1) при падении волны с продольной скоростью распространения a коэффициенты $A_0=1$, $B_0=0$, в случае падения на слой волны с поперечной скоростью b коэффициенты $A_0=0$, $B_0=1$. Кроме того, верхний индекс 0 у продольной и поперечной составляющих Φ_i^0, Ψ_i^0, $i=0,1,2$ означает решение задачи отражения падающей волны от слоя без неоднородности. Верхний индекс мы опустим и вспомним о нем в пятом разделе этой статьи.

На границах раздела $\Gamma_{01}=\{y=h\}$ и $\Gamma_{12}=\{y=-h_1\}$ условия жесткого контакта для компонент скалярного и векторного потенциала Φ_i, Ψ_i, $i=0,1,2$ переходят в следующую систему восьми равенств:

$$i\xi(\Phi_0 - \Phi_1) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\Psi_0 - \Psi_1\Big)\Big|_{y=h} = 0, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(\Phi_0 - \Phi_1\big) - i\xi\big(\Psi_0 - \Psi_1\big)\Big|_{y=h} = 0, \tag{2.5}$$

$$\frac{\mu_0}{\mu_1}\left(\frac{\partial\Psi_0}{\partial y} + ip_0\Phi_0\right) - \left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial y} + ip_1\Phi_1\right)\Big|_{y=h} = 0, \tag{2.6}$$

$$\frac{\mu_0}{\mu_1}\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial y} - ip_0\Psi_0\right) - \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} - ip_1\Psi_1\right)\Big|_{y=h} = 0, \tag{2.7}$$

$$i\xi\big(\Phi_1 - \Phi_2\big) + \frac{\partial}{\partial y}\big(\Psi_1 - \Psi_2\big)\Big|_{y=-h_1} = 0, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(\Phi_1 - \Phi_2\big) - i\xi\big(\Psi_1 - \Psi_2\big)\Big|_{y=-h_1} = 0, \tag{2.9}$$

$$\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial y} + ip_1\Phi_1\right) - \frac{\mu_2}{\mu_1}\left(\frac{\partial\Psi_2}{\partial y} + ip_2\Phi_2\right)\Big|_{y=-h_1} = 0, \tag{2.10}$$

$$\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} - ip_1\Psi_1\right) - \frac{\mu_2}{\mu_1}\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} - ip_2\Psi_2\right)\Big|_{y=-h_1} = 0. \tag{2.11}$$

Обозначим через

$$\widehat{A} = Ae^{i\alpha_0 h}, \quad \widehat{B} = Be^{i\beta_0 h}, \quad A^0 = A_0 e^{-i\alpha_0 h}, \quad B^0 = B_0 e^{-i\beta_0 h}; \tag{2.12}$$

$$\widehat{C} = Ce^{i\alpha_1 h}, \quad \widehat{D} = De^{-i\alpha_1 h}, \quad \widehat{E} = Ee^{i\beta_1 h}, \quad \widehat{F} = Fe^{-i\beta_1 h}; \tag{2.13}$$

$$\widehat{\widehat{C}} = Ce^{-i\alpha_1 h_1}, \quad \widehat{\widehat{D}} = De^{i\alpha_1 h_1}, \quad \widehat{\widehat{E}} = Ee^{-i\beta_1 h_1}, \quad \widehat{\widehat{F}} = Fe^{i\beta_1 h_1}; \tag{2.14}$$

$$\widehat{G} = Ge^{i\alpha_2 h_1}; \quad \widehat{H} = He^{i\beta_2 h_1}. \tag{2.15}$$

Для этих восьми неизвестных A, B, C, D, E, F, G, H получим из граничных условий (2.4)–(2.11) следующую систему уравнений пригодную для падающей волны, распространяющейся как с продольной так и с поперечной скоростями:

$$\left.\begin{aligned}
&\xi\widehat{A}+\beta_0\widehat{B}-\xi(\widehat{C}+\widehat{D})-\beta_1(\widehat{E}-\widehat{F})=-\xi A^0\,[\beta_0B^0],\\
&\alpha_0\widehat{A}-\xi\widehat{B}-\alpha_1(\widehat{C}-\widehat{D})+\xi(\widehat{E}+\widehat{F})=\alpha_0A^0\,[\xi B^0],\\
&\frac{\mu_0}{\mu_1}(p_0\widehat{A}+\beta_0\widehat{B})-p_1(\widehat{C}+\widehat{D})-\beta_1(\widehat{E}-\widehat{F})=-p_0\frac{\mu_0}{\mu_1}A^0[\beta_0\frac{\mu_0}{\mu_1}B^0],\\
&\frac{\mu_0}{\mu_1}(\alpha_0\widehat{A}-p_0\widehat{B})-\alpha_1(\widehat{C}-\widehat{D})+p_1(\widehat{E}+\widehat{F})=\alpha_0\frac{\mu_0}{\mu_1}A^0[p_0\frac{\mu_0}{\mu_1}B^0],\\
&\xi(\widehat{\widehat{C}}+\widehat{\widehat{D}})+\beta_1(\widehat{\widehat{E}}-\widehat{\widehat{F}})-\xi\widehat{G}+\beta_2\widehat{H}=0,\\
&\alpha_1(\widehat{\widehat{C}}-\widehat{\widehat{D}})-\xi(\widehat{\widehat{E}}+\widehat{\widehat{F}})+\alpha_2\widehat{G}+\xi\widehat{H}=0,\\
&p_1(\widehat{\widehat{C}}+\widehat{\widehat{D}})+\beta_1(\widehat{\widehat{E}}-\widehat{\widehat{F}})-\frac{\mu_2}{\mu_1}[p_2\widehat{G}-\beta_2\widehat{H}]=0,\\
&\alpha_1(\widehat{\widehat{C}}-\widehat{\widehat{D}})-p_1(\widehat{\widehat{E}}+\widehat{\widehat{F}})+\frac{\mu_2}{\mu_1}[\alpha_2\widehat{G}+p_2\widehat{H}]=0.
\end{aligned}\right\}\quad(2.16)$$

Правая часть системы (2.16) содержит известные значения с множителем A^0 в случае падения на слой волны с продольной скоростью и в квадратных скобках известные величины с множителем B^0 составляющей векторного потенциала падающего поля. Величины p_i равны $p_i=(\xi^2-\varkappa_i^2/2)\xi^{-1}$.

Проведя громоздкие вычисления, мы получим необходимые нам значения для скалярного Φ и векторного Ψ потенциалов в задаче отражения от слоя упругой волны, распространяющейся с продольной и поперечной скоростями. Приведем эти формулы в обоих случаях

I. $A_0=1$, $B_0=0$:

$$\widehat{A}=A^0\,\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad \widehat{B}=A^0\,\frac{\Delta_2}{\Delta},\tag{2.17}$$

$$\widehat{C}=\frac{1}{2\alpha_1(p_1-\xi)}\big\{(\alpha_1T_2-\alpha_0T_1)\widehat{A}+ +(\alpha_1\beta_0T_4+\xi T_3)\widehat{B}+(\alpha_1T_2+\alpha_0T_1)A^0\big\},\tag{2.18}$$

$$\widehat{D}=\frac{1}{2\alpha_1(p_1-\xi)}\big\{(\alpha_1T_2+\alpha_0T_1)\widehat{A}+ +(\alpha_1\beta_0T_4-\xi T_3)\widehat{B}+(\alpha_1T_2-\alpha_0T_1)A^0\big\},\tag{2.19}$$

$$\widehat{E}=\frac{1}{2}\big[\widehat{C}a_{12}-\widehat{D}b_{11}\big],\quad \widehat{F}=\frac{1}{2}\big[\widehat{C}a_{11}-\widehat{D}b_{12}\big]. \tag{2.20}$$

II. $A_0=0$, $B_0=1$:

$$\widehat{A}=B^0\,\frac{\Delta_1'}{\Delta},\quad \widehat{B}=B^0\,\frac{\Delta_2'}{\Delta}, \tag{2.21}$$

$$\widehat{C}=\frac{1}{2\alpha_1(p_1-\xi)}\big\{(\alpha_1T_2-\alpha_0T_1)\widehat{A}+$$
$$+(\alpha_1\beta_0T_4+\xi T_3)\widehat{B}-(\alpha_1\beta_0T_4-\xi T_3)B^0\big\}, \tag{2.22}$$

$$\widehat{D}=\frac{1}{2\alpha_1(p_1-\xi)}\big\{(\alpha_1T_2+\alpha_0T_1)\widehat{A}+$$
$$+(\alpha_1\beta_0T_4-\xi T_3)\widehat{B}-(\alpha_1\beta_0T_4+\xi T_3)B^0\big\}. \tag{2.23}$$

В формулах (2.17)–(2.23) введены обозначения:

$$a_{11}=e^{-i(\alpha_1+\beta_1)H}[\mathcal{A}\alpha^++\mathcal{A}^+],\quad a_{12}=e^{-i(\alpha_1-\beta_1)H}[\mathcal{A}\alpha^--\mathcal{A}^-],$$

$$b_{11}=e^{i(\alpha_1+\beta_1)H}[-\mathcal{A}\alpha^++\mathcal{A}^+],\quad b_{12}=e^{i(\alpha_1-\beta_1)H}[\mathcal{A}\alpha^-+\mathcal{A}^-],$$

$$\beta_1(a_{11}b_{11}-a_{12}b_{12})=4\alpha_1,\quad \mathcal{A}=ab-cd=(p_1-\xi)(p_2-\xi)\mathcal{J},$$

$$\mathcal{A}^+=d^2+\alpha_2\beta_2b^2+\alpha_1\beta_1(a^2+\alpha_2\beta_2c^2);$$

$$\mathcal{A}^-=d^2+\alpha_2\beta_2b^2-\alpha_1\beta_1(a^2+\alpha_2\beta_2c^2),\quad \alpha^+=\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_2,\ \alpha^-=\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2;$$

величины a, b, c, d равны в свою очередь

$$\mathcal{J}=\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\alpha_2\beta_2+p_2^2}{\alpha_2\beta_2+\xi^2},$$

$$a=p_2-\mathcal{J}\xi,\quad b=p_1-\mathcal{J}\xi,\quad c=1-\mathcal{J},\quad d=p_1p_2-\mathcal{J}\xi^2.$$

Основные неизвестные $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$, $\widehat{E}$ и $\widehat{F}$ выражены через Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_1', Δ_2', которые мы приведем

$$\Delta=2\alpha_1\beta_1\{-8\alpha_1(\alpha_0\beta_0T_1T_4+\xi T_2T_3)+(\alpha_0\beta_0T_1^2+\xi^2T_3^2)\times$$
$$\times[a_{11}+a_{12}+b_{11}+b_{12}]+\alpha_1\beta_1(\alpha_0\beta_0T_4^2+T_2^2)\times$$
$$\times[a_{11}-a_{12}+b_{11}-b_{12}]+\alpha_0\beta_1(\xi T_3T_4-T_1T_2)[a_{11}-a_{12}-b_{11}+b_{12}]$$
$$+\alpha_1\beta_0(\xi T_3T_4-T_1T_2)[a_{11}+a_{12}-b_{11}-b_{12}]\}; \tag{2.24}$$

$$\Delta_1=2\alpha_1\beta_1\{8\alpha_1(\alpha_0\beta_0T_1T_4-\xi T_2T_3)+(\alpha_0\beta_0T_1^2-\xi^2T_3^2)[a_{11}+a_{12}+b_{11}+b_{12}]$$

$$+\alpha_1\beta_1(\alpha_0\beta_0 T_4^2 - T_2^2)[a_{11}-a_{12}+b_{11}-b_{12}] + \alpha_0\beta_1(\xi T_3T_4 - T_1T_2)\times$$
$$\times[a_{11}-a_{12}-b_{11}+b_{12}] + \alpha_1\beta_0(T_1T_2 - \xi T_3T_4)[a_{11}+a_{12}-b_{11}-b_{12}]\}; \quad (2.25)$$

$$\Delta_2 = 4\alpha_0\alpha_1\beta_1\{4\alpha_1(T_1T_2+\xi T_3T_4) - \xi T_1T_3[a_{11}+a_{12}+b_{11}+b_{12}]$$
$$-\alpha_1\beta_1T_4T_2[a_{11}-a_{12}+b_{11}-b_{12}]\}; \quad (2.26)$$

$$\Delta_1' = -4\beta_0\alpha_1\beta_1\{4\alpha_1(T_1T_2+\xi T_3T_4) - \xi T_1T_3[a_{11}+a_{12}+b_{11}+b_{12}]$$
$$-\alpha_1\beta_1T_4T_2[a_{11}-a_{12}+b_{11}-b_{12}]\}; \quad (2.27)$$

$$\Delta_2' = 2\alpha_1\beta_1\{8\alpha_1(\xi T_2T_3 - \alpha_0\beta_0T_1T_4) + (\alpha_0\beta_0T_1^2 - \xi^2T_3^2)[a_{11}+a_{12}+b_{11}+b_{12}]$$
$$+\alpha_1\beta_1(\alpha_0\beta_0T_4^2 - T_2^2)[a_{11}-a_{12}+b_{11}-b_{12}] + \alpha_0\beta_1(T_1T_2 - \xi T_3T_4)\times$$
$$\times[a_{11}-a_{12}-b_{11}+b_{12}] + \alpha_1\beta_0(\xi T_3T_4 - T_1T_2)[a_{11}+a_{12}-b_{11}-b_{12}]\}. \quad (2.28)$$

В формулах (2.18)–(2.28) величины T_1, T_2, T_3, T_4 равны

$$T_1 = \frac{\mu_0}{\mu_1}\xi - p_1, T_2 = \frac{\mu_0}{\mu_1}p_0 - \xi, T_3 = \frac{\mu_0}{\mu_1}p_0 - p_1, T_4 = \frac{\mu_0}{\mu_1} - 1.$$

Окончательно решение задачи отражения от слоя волн вертикальной поляризации имеет следующий вид:

I. Для продольной падающей волны $A_0 = 1$, $B_0 = 0$:

$$\Phi_0 = [e^{-i\alpha_0 y} + A^0\frac{\Delta_1}{\Delta}e^{i\alpha_0(y-h)}] = A^0[e^{-i\alpha_0(y-h)} + \frac{\Delta_1}{\Delta}e^{i\alpha_0(y-h)}], \quad (2.29)$$

$$\Psi_0 = A^0\frac{\Delta_2}{\Delta}e^{i\beta_0(y-h)}], \quad (2.30)$$

$$\Phi_1 = [\widehat{C}_a e^{i\alpha_1(y-h)} + \widehat{D}_a e^{-i\alpha_1(y-h)}], \quad (2.31)$$

$$\Psi_1 = [\widehat{E}_a e^{i\beta_1(y-h)} + \widehat{F}_a e^{-i\beta_1(y-h)}]. \quad (2.32)$$

Коэффициенты $\widehat{C} = \widehat{C}_a$, $\widehat{D} = \widehat{D}_a$, $\widehat{E} = \widehat{E}_a$, $\widehat{F} = \widehat{F}_a$ определяются по формулам (2.18)–(2.20), или

$$\widehat{C}_a = \frac{A^0}{2\alpha_1(p_1-\xi)\Delta}[\alpha_1T_2(\Delta+\Delta_1) + \alpha_0T_1(\Delta-\Delta_1) +$$
$$+(\alpha_1\beta_0T_4 + \xi T_3)\Delta_2], \quad (2.18')$$

$$\widehat{D}_a = \frac{A^0}{2\alpha_1(p_1-\xi)\Delta}[\alpha_1T_2(\Delta+\Delta_1) - \alpha_0T_1(\Delta-\Delta_1) +$$
$$+(\alpha_1\beta_0T_4 - \xi T_3)\Delta_2]. \quad (2.19')$$

II. Для падающей с поперечной скоростью волны $A_0=0$, $B_0=1$

$$\Phi_0 = B^0\left[\frac{\Delta_1'}{\Delta}e^{i\alpha_0(y-h)}\right], \qquad (2.33)$$

$$\Psi_0 = B^0\left[e^{-i\beta_0(y-h)} + \frac{\Delta_2'}{\Delta}e^{i\beta_0(y-h)}\right], \qquad (2.34)$$

$$\Phi_1 = \left[\widehat{C}_b e^{i\alpha_1(y-h)} + \widehat{D}_b e^{-i\alpha_1(y-h)}\right], \qquad (2.35)$$

$$\Psi_1 = \left[\widehat{E}_b e^{i\beta_1(y-h)} + \widehat{F}_b e^{-i\beta_1(y-h)}\right], \qquad (2.36)$$

где величины $\widehat{E} = \widehat{E}_b$, $\widehat{F} = \widehat{F}_b$ найдутся из (2.20), причем $\widehat{C} = \widehat{C}_b$, $\widehat{D} = \widehat{D}_b$ в них определяются по формулам (2.22), (2.23) или

$$\widehat{C}_b = \frac{B^0}{2\alpha_1(p_1-\xi)\Delta}[(\alpha_1T_2 - \alpha_0T_1)\Delta_1') - \alpha_1\beta_0T_4(\Delta - \\ -\Delta_2') + \xi T_3(\Delta + \Delta_2')], \qquad (2.22')$$

$$\widehat{D}_b = \frac{B^0}{2\alpha_1(p_1-\xi)\Delta}[(\alpha_1T_2 + \alpha_0T_1)\Delta_1') - \\ -\alpha_1\beta_0T_4(\Delta - \Delta_2') - \xi T_3(\Delta + \Delta_2')]. \qquad (2.23')$$

Приведем окончательно выражения для компонент вектора смещений в случае падения плоской продольной волны на слой без неоднородности ($A_0 = 1$, $B_0 = 0$):

$$u_0^{0a} = iA^0e^{i\xi x}\left\{\xi\left[e^{-i\alpha_0(y-h)} + \frac{\Delta_1}{\Delta}e^{i\alpha_0(y-h)}\right] + \beta_0\frac{\Delta_2}{\Delta}e^{i\beta_0(y-h)}\right\}, \quad (2.37)$$

$$v_0^{0a} = -iA^0e^{i\xi x}\left\{\alpha_0\left[e^{-i\alpha_0(y-h)} - \frac{\Delta_1}{\Delta}e^{i\alpha_0(y-h)}\right] + \xi\frac{\Delta_2}{\Delta}e^{i\beta_0(y-h)}\right\}, \quad (2.38)$$

$$u_1^{0a} = ie^{i\xi x}\Big\{\xi\left[\widehat{C}_a e^{i\alpha_1(y-h)} + \widehat{D}_a e^{-i\alpha_1(y-h)}\right] + \\ +\beta_1\left[\widehat{E}_a e^{i\beta_1(y-h)} - \widehat{F}_a e^{-i\beta_1(y-h)}\right]\Big\}, \qquad (2.39)$$

$$v_1^{0a} = ie^{i\xi x}\Big\{\alpha_1\left[\widehat{C}_a e^{i\alpha_1(y-h)} - \widehat{D}_a e^{-i\alpha_1(y-h)}\right] - \\ -\xi\left[\widehat{E}_a e^{i\beta_1(y-h)} + \widehat{F}_a e^{-i\beta_1(y-h)}\right]\Big\}. \qquad (2.40)$$

В случае падения плоской поперечной волны ($A_0 = 0,\ B_0 = 1$):

$$u_0^{0b} = iB^0 e^{i\xi x}\left\{\xi\frac{\Delta_1'}{\Delta}e^{i\alpha_0(y-h)} - \beta_0\left[e^{-i\beta_0(y-h)} - \frac{\Delta_2'}{\Delta}e^{i\beta_0(y-h)}\right]\right\}, \quad (2.41)$$

$$v_0^{0b} = iB^0 e^{i\xi x}\left\{\alpha_0\frac{\Delta_1'}{\Delta}e^{i\alpha_0(y-h)} - \xi\left[e^{-i\beta_0(y-h)} + \frac{\Delta_2}{\Delta}e^{i\beta_0(y-h)}\right]\right\}, \quad (2.42)$$

$$u_1^{0b} = ie^{i\xi x}\Big\{\xi\left[\widehat{C}_b e^{i\alpha_1(y-h)} + \widehat{D}_b e^{-i\alpha_1(y-h)}\right] + $$

$$+\beta_1\left[\widehat{E}_b e^{i\beta_1(y-h)} - \widehat{F}_b e^{-i\beta_1(y-h)}\right]\Big\}, \quad (2.43)$$

$$v_1^{0b} = ie^{i\xi x}\Big\{\alpha_1\left[\widehat{C}_b e^{i\alpha_1(y-h)} - \widehat{D}_b e^{-i\alpha_1(y-h)}\right] - $$

$$-\xi\left[\widehat{E}_b e^{i\beta_1(y-h)} + \widehat{F}_b e^{-i\beta_1(y-h)}\right]\Big\}. \quad (2.44)$$

3. Построение функции Грина для задачи отражения волны от слоя.

В конце первого пункта данной статьи говорилось, что необходимо построить функции Грина, соответствующие задаче отражения от слоя волны, падающей с продольной или с поперечной скоростями (см. формулы (2.17)–(2.23)). С помощью функций Грина построим интегральные уравнения для компонент скалярного Φ_i, $i = 0, 1$, и векторного Ψ_i, $i = 0, 1, 2$ потенциалов. Интегральные уравнения разрешим методом последовательных приближений, найдя первую итерацию к решению задачи дифракции от слоя. Эта добавка будет подобна цилиндрической волне, рассеивающейся от малого сечения неоднородности в слое. Мощность рассеивающейся волны пропорциональна площади сечения $\pi(ka)^2$, $(\pi(\varkappa a)^2)$. Затем по потенциалам найдем компоненты вектора смещений, используя формулы (1.7).

Построим функции Грина, удовлетворяющие уравнениям Гельмгольца (1.6), краевым условиям (2.4)–(2.11) и условиям излучения Зоммерфельда, аналогично построениям работы [4].

Приведем теперь формулу для функции Грина $\mathcal{G}(M, M_0)$ задачи отражения продольной волны от слоя Ω_1 в случае, когда источник находится в верхнем полупространстве $M_0 \in \Omega_0$

$$\mathcal{G}_j(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-x_0)\xi} G_j(y, y_0, \xi)d\xi, \quad j = 0, 1, 2. \quad (3.1)$$

I. Для источника продольной скорости и наблюдателя, находящихся в области Ω_0 функция Грина $G_0^a(y, y_0, \xi)$ принимает вид

$$G_0^a(M, M_0) = \frac{e^{i\alpha_0(y_> - h)}}{2i\alpha_0}\left[e^{-i\alpha_0(y_< - h)} + \frac{\Delta_1}{\Delta} e^{i\alpha_0(y_< - h)}\right]. \tag{3.2}$$

Здесь Δ, Δ_1 определены выражениями (2.24)–(2.25), в которых переменная ξ этого пункта в отличии от постоянного значения в п. 2 играет роль переменной интегрирования (см. (3.1)).

Нам понадобится квазифункция Грина $G_{10}^a(y, y_0, \xi)$ в случае, когда источник находится в верхнем полупространстве $M_0 \in \Omega_0$, а наблюдатель $M \in \Omega_1$. Она представлена формулой

$$G_{10}^a(y, y_0, \xi) = \frac{e^{i\alpha_0 y_0}}{2i\alpha_0}\left[\widehat{C}_a e^{-i\alpha_1(y-h)} + \widehat{D}_a e^{i\alpha_1(y-h)}\right], \tag{3.3}$$

где величины $\widehat{C}_a$, $\widehat{D}_a$ определены формулами (2.18′)–(2.19′). Эта функция удовлетворяет соответствующему уравнению Гельмгольца и краевым условиям жесткого контакта на поверхностях Γ_{01}, Γ_{12}. Кроме этого квазифункция Грина $G_{10}^a(y, y_0, \xi)$ зависит, как и функция Грина, от двух аргументов, а на Γ_{01} удовлетворяет граничным условиям одновременно с функцией Грина $G_0^a(y, y_0, \xi)$ для Ω_0, на Γ_{12} эта квазифункция удовлетворяет условиям жесткого контакта одновременно с квазифункцией $G_{21}^a(y, y_0, \xi)$, где $y \in \Omega_2$.

Мы будем использовать квазифункции Грина $G_{01}^b(y, y_0, \xi)$ для $y \in \Omega_0$ и $G_{10}^b(y, y_0, \xi)$, $y \in \Omega_1$, которые соответствуют поперечным составляющим Ψ_0 и Ψ_1. Эти функции подобны квазифункции Грина $G_{10}^a(y, y_0, \xi)$. Вместо квадратной скобки формулы (3.3) в этих квазифункциях будет стоять множителем или Ψ_0 или Ψ_1, первый множитель останется тем же. Функция $G_{21}^b(y, y_0, \xi)$ одновременно с $G_{10}^b(y, y_0, \xi)$ удовлетворяют граничным условиям на Γ_{12}.

II. Для источника, находящегося в области Ω_0 и распространяющегося с поперечной скоростью, функция Грина $G_0^b(y, y_0, \xi)$ принимает вид

$$G_0^b(M, M_0) = \frac{e^{i\beta_0(y_> - h)}}{2i\beta_0}\left[e^{-i\beta_0(y_< - h)} + \frac{\Delta_2'}{\Delta} e^{i\beta_0(y_< - h)}\right]. \tag{3.4}$$

Здесь Δ, Δ_2' определены выражениями (2.24), (2.28), причем определитель Δ одинаков для волны, падающей как с продольной так и с поперечной скоростями. Здесь необходимо построить квазифункцию Грина $G_{01}^a(y, y_0, \xi)$.

В случае, когда источник поперечной скорости находится в верхнем полупространстве $M_0 \in \Omega_0$, а точка наблюдения $M \in \Omega_1$, квазифункция Грина $G_{10}^b(y, y_0, \xi)$ представлена формулой

$$G_{10}^b(y, y_0, \xi) = \frac{e^{i\beta_0 y_0}}{2i\beta_0}\left[\widehat{E}_b e^{-i\beta_1(y-h)} + \widehat{F}_b e^{i\beta_1(y-h)}\right], \qquad (3.5)$$

где $\widehat{E}_b$, $\widehat{F}_b$ найдутся из равенств (2.20), а величины $\widehat{C}_b$, $\widehat{D}_b$ определены (2.22′)–(2.23′). Квазифункция Грина $G_{10}^a(y, y_0, \xi)$ строится аналогично.

Мы решаем задачу о дифракционной добавке от малой неоднородности к отраженным от слоя продольной и поперечной волнам. В связи с этим найдем асимптотику при $kr \gg 1$, $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ квазифункций Грина $G_{10}^a(y, y_0, \xi)$, $G_{10}^b(y, y_0, \xi)$. Этот путь требует сложных рассмотрений (см. [5, 6]), связанных с контурными интегралами на плоскости комплексного переменного ξ с разрезами, соответствующими различным типам волн, распространяющихся в упругом слое. Приведем окончательный вид асимптотических выражений квазифункций

$$\mathcal{G}_{10}^{a,b}(M, M_0) \sim \frac{e^{i(k_0(\varkappa_0)r - 3/4\pi)}}{\sqrt{2\pi k_0(\varkappa_0) r}} T_{10}^{a,b}(\varphi), \qquad (3.6)$$

где коэффициенты перехода $T_{10}^{a,b}(\varphi)$ из слоя Ω_1 в верхнюю среду Ω_0 равны

$$T_{10}^a(\varphi) = [\widehat{C}_a + \widehat{D}_a], \quad T_{10}^b(\varphi) = [\widehat{E}_b + \widehat{F}_b]. \qquad (3.7)$$

В формулах (3.7) коэффициенты $\widehat{C}_a$, $\widehat{D}_a$ и $\widehat{E}_b, \widehat{F}_b$ определены выражениями (2.18′), (2.19′) и (2.20), в которых коэффициенты $\widehat{C}_b$, $\widehat{D}_b$ найдутся из (2.22′), (2.23′). Отметим, что в $T_{10}^a(\varphi)$ под ξ следует понимать величину $\xi = k_0 \cos\varphi$, а в $T_{10}^b(\varphi)$ величину $\xi = \varkappa_0 \cos\varphi$.

4. Интегральное уравнение задачи отражения волн от неоднородности в слое.

Используя функции Грина $\mathcal{G}_0^{a,b}$, $\mathcal{G}_{10}^{a,b}$, построенные в п. 3, сведем решение сформулированной задачи (1.1)–(1.9) к решению интегральных уравнений для каждой составляющей вектора смещений (1.5). Затем, учитывая асимптотику функций Грина при $k_0 r \gg 1$ и малость области интегрирования $k_3 a \ll 1$, найдем решение интегральных уравнений методом последовательных приближений.

Построение интегральных уравнений базируется на применении формулы Грина в областях Ω_0, Ω_1, Ω_2 и Ω_3. Обозначим оператор Гельмгольца через $L \equiv (\Delta + k^2)$ и применим формулу Грина к решениям Φ_i, Ψ_i, $i = 0,1,2,3$ нашей задачи (1.1)–(1.9), к функциям и квазифункциям Грина $\mathcal{G}_{ij}^{a,b}$ в каждой из областей Ω_j, $j = 0,1,2,3$.

Отметим, что в отличии от работ [1, 4], здесь мы находимся в более сложной ситуации: задача векторная, составляющие вектора смещений представлены скалярным и векторным потенциалами. Сами потенциалы удовлетворяют уравнениям Гельмгольца, однако усложняются граничные условия жесткого контакта на трех границах $\Gamma_{01} = \{y = h\}$, $\Gamma_{12} = \{y = -h_1\}$, $\Gamma_{13} = \{r = a\}$.

Используя условия согласования (2.4)–(2.11) на границах Γ_{01}, Γ_{12}, граничные условия жесткого контакта на неоднородности $\Gamma_{13} : r = a$

$$\left.\begin{aligned} &\left[u^r \equiv \frac{\partial}{\partial r}\Phi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Psi\right]\Bigg|_{r=a} = 0; \\ &\left[u^\varphi \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Phi - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Psi\right]\Bigg|_{r=a} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left[\sigma_{rr} \equiv \mu\left(\frac{\varkappa^2}{2}\Phi + u^r + \frac{\partial}{\partial\varphi}u^\varphi\right)\right]\Bigg|_{r=a} = 0, \\ &\left[\sigma_{r\varphi} \equiv \mu\left(\frac{\varkappa^2}{2}\Psi - u^\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}u^r\right)\right]\Bigg|_{r=a} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

и свойства функций Грина, мы получаем по четыре интегральных уравнения для каждой составляющей Φ_i, Ψ_i, $i = 0,1,2,3$, которые переходят в одно.

Рассмотрим область Ω_0^R (рис. 1), ограниченную границей раздела $\Gamma_{01} = \{y = h\}$ сред Ω_0 и Ω_1, полуокружностью $\mathbf{C}_0^R$ радиуса

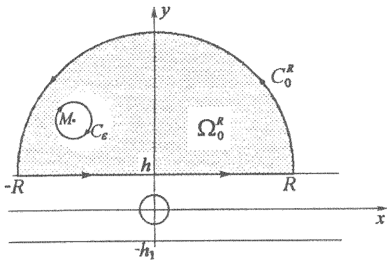

Рис. 1.

$R \to \infty$ и бесконечно малой окружностью радиуса $\varepsilon \to 0$, описанной вокруг произвольной точки M. Применяя в этой области формулу Грина к функциям $\mathcal{G}_0^a(M, M_0)$, Φ_0 и Ψ_0, получим следующее соотношение

$$\Phi_0(M) = \\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\partial \mathcal{G}_0^a(M, M_0)}{\partial y_0} \Phi_0(M_0) + \frac{\partial \Phi_0(M_0)}{\partial y_0} \mathcal{G}_0^a(M, M_0) \right) dx_0, \quad (4.3)$$

где интегрирование происходит по прямой $(y_0 = h)$.

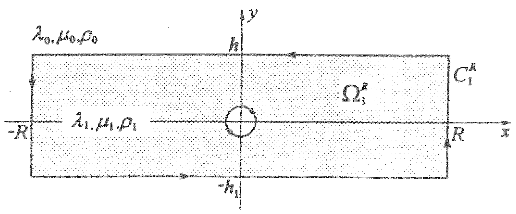

Рис. 2.

Аналогичную формулу имеем и для функции $\Psi_0(M)$.

Применим формулу Грина к заштрихованной на рис. 2 области Ω_1^R, ограниченной внешним прямоугольным и внутренним круговым $-\mathbf{C}_3 = \{r = a, -2\pi \leqslant \varphi \leqslant 0\}$ контурами. Оба замкнутых контура обозначены одним $\mathbf{C}_1^R = \partial\Omega_1^R$. Формула Грина в области Ω_1^R

даст интегральное уравнение относительно квазифункций $\mathcal{G}_{10}^{a,b}$, и функций Φ_1, Ψ_1

$$-\int\limits_{\Gamma_{01}} \left[\frac{\partial\Phi_1(M_1)}{\partial y_1}\mathcal{G}_1(M,M_1) - \frac{\partial\mathcal{G}_1(M,M_1)}{\partial y_1}\Phi_1(M_1)\right]dx_1 =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_{12}} \left[\frac{\partial\Phi_1(M_1)}{\partial y_1}\mathcal{G}_1(M,M_1) - \frac{\partial\mathcal{G}_1(M,M_1)}{\partial y_1}\Phi_1(M_1)\right]dx_1 + \qquad (4.4)$$

$$\int\limits_0^{2\pi} r_1\left[\frac{\partial\Phi_1(M,M_1)}{\partial r_1}\mathcal{G}_1(M,M_1) - \frac{\partial\mathcal{G}_1(M,M_1)}{\partial r_1}\Phi_1(M,M_1)\right]d\varphi_1,$$

Первый интеграл в (4.4) взят по границе $\Gamma_{01} = \{y_1 = h\}$, второе интегрирование происходит по линии раздела $\Gamma_{12} = \{y_1 = -h_1\}$ между средой Ω_1 и Ω_2, третий интеграл берется по окружности радиуса a, пройденной по часовой стрелке.

Обратимся к областям Ω_2^R, Ω_3 (см. рис.3 и 4), в которых применим формулу Грина к функциям $\Phi_{1(2,3)}$, $\Psi_{1(2,3)}$ и квазифункциям $\mathcal{G}_{10}^{a,b}$. Область интегрирования Ω_2^R состоит из полуокружности $\mathbf{C}_2^R$ радиуса $R \to \infty$ и линии раздела $\Gamma_{12} = \{y = -h_1 - 0\}$.

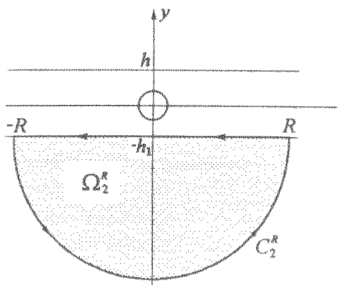

Рис. 3.

Интеграл (4.3) по контуру Γ_{01}, являющемуся границей раздела областей Ω_0 и Ω_1, при $y = h{+}0$ выразится через интеграл (4.4) по тому же контуру, но при $y = h - 0$ в силу граничных условий (1.2)–(1.4). Интегралы по контуру Γ_{12}, являющемуся границей раздела областей Ω_1 и Ω_2, по нижней границе слоя $y_1 = -h_1 + 0$

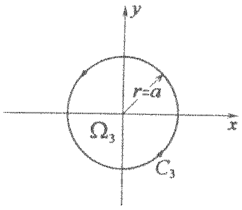

Рис. 4.

и верхней границе $y = -h_1 - 0$ полупространства Ω_2 пропадают и формула (4.4) обращается в следующую ($M \in \Omega_1$, переменная интегрирования x_1 в первом интеграле формулы (4.5) лежит на границе раздела Γ_{01}):

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial\Phi_1(M_1)}{\partial y_1}\mathcal{G}_{10}(M;M_1) - \frac{\partial\mathcal{G}_{10}(M,M_1)}{\partial y'}\Phi_1(M_1)\right]dx_1 =$$

$$a\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial\Phi_1(M_1)}{\partial r'}\mathcal{G}_{10}(M;M_1) - \frac{\partial\mathcal{G}_{10}(M;M_1)}{\partial r'}\Phi_1(M_1)\right]d\varphi', \qquad (4.5)$$

Применим формулу Грина к функциям Φ_3, Ψ_3 и $\mathcal{G}_1$ в области Ω_3. Останутся интегралы поверхностный и объемный по области Ω_3 (рис. 4), являющейся кругом радиуса a:

$$a\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial\Phi_3}{\partial r'}\mathcal{G}_{10}(r,\varphi;r'=a,\varphi') - \frac{\partial\mathcal{G}_{10}}{\partial r'}\Phi_3(r'=a,\varphi')\right]d\varphi' =$$

$$= (k_1^2 - k_3^2)\iint_{|r'|\leqslant a}\mathcal{G}_{10}(r,\varphi;r',\varphi')\Phi_3(r,\varphi;r',\varphi')r'dr'd\varphi'. \qquad (4.6)$$

Далее три интегральных уравнения (4.3), (4.5) и (4.6) в силу условий жесткого контакта на границах раздела переходят в одно.

Окончательно, в случае (I) падения продольной волны получим для искомых потенциалов Φ и Ψ два интегральных уравнения, решение которых будем искать методом последовательных приближений. Это оправданный шаг ввиду малости области интегрирования $k_3 a \ll 1$.

$$\Phi_0(M) = \mathcal{A}_1 \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi_3}{\partial r'} \mathcal{G}_{10}^a(M; r' = a, \varphi') r' d\varphi' +$$

$$+\mathcal{B}_1(k_1^2 - k_3^2) \iint\limits_{|r'| \leqslant a} \mathcal{G}_1^a(r, \varphi; r', \varphi') \Phi_3(r, \varphi; r', \varphi') r' dr' d\varphi'. \qquad (4.7)$$

$$\Psi_0(M) = \mathcal{A}_2 \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial \Psi_3}{\partial r'} \mathcal{G}_{10}^a(M; r' = a, \varphi') r' d\varphi' +$$

$$+\mathcal{B}_2(k_1^2 - k_3^2) \iint\limits_{|r'| \leqslant a} \mathcal{G}_{10}^a(r, \varphi; r', \varphi') \Psi_3(r, \varphi; r', \varphi') r' dr' d\varphi'. \qquad (4.8)$$

Здесь $M \in \Omega_0$, а интегрирование происходит по окружности $r' = a$ и по кругу $|r'| \leqslant a$. Величины $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ содержат различные комбинации разностей и сумм параметров Ламе и плотностей четырех рассматриваемых сред. Ввиду громоздкости выражений для коэффициентов $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, их явные выражения мы здесь не приводим.

5. Метод последовательных приближений решения интегральных уравнений (4.7)–(4.8) и дифракционная добавка от неоднородности.

Решать уравнения (4.7), (4.8) будем следующим образом. Представим функции $\Phi_j(M)$, $\Psi_j(M)$ $j = 0, 1, 3$ в виде суммы неизвестных слагаемых $\phi_j(M)$, $\psi_j(M)$ и известных функций Φ_j^0, Ψ_j^0 которые дают решение задачи отражения плоской волны от слоя без неоднородности (см. формулы (2.29)–(2.36)). Следуя §5 статьи [1], мы получим следующее. Для каждой из составляющих $\phi_0(M)$, $\psi_0(M)$, являющихся добавками к искомому решению, имеем новые интегральные уравнения:

$$\phi_0(M) = \mathcal{A}_1 \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial [\phi_3 + \Phi_1^0]}{\partial r'} \mathcal{G}_{10}^a(M; r' = a, \varphi') r' d\varphi' +$$

$$+\mathcal{B}_1(k_1^2 - k_3^2) \iint\limits_{|r'| \leqslant a} \mathcal{G}_1^a(r, \varphi; r', \varphi') [\phi_3 + \Phi_1^0](r, \varphi; r', \varphi') r' dr' d\varphi'. \qquad (5.1)$$

$$\psi_0(M) = \mathcal{A}_2 \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial[\psi_3 + \Psi_1^0]}{\partial r'} \mathcal{G}_{10}^a(M; r' = a, \varphi') r' d\varphi' +$$

$$+\mathcal{B}_2(k_1^2 - k_3^2) \iint\limits_{|r'|\leqslant a} \mathcal{G}_{10}^a(r, \varphi; r', \varphi')[\psi_3 + \Psi_1^0](r, \varphi; r', \varphi') r' dr' d\varphi'. \quad (5.2)$$

Интегральные уравнения (5.1), (5.2) можно решать методом последовательных приближений, если в качестве нулевых итераций для функций ϕ_3, ψ_3 выбрать нулевые значения. Это возможно, так как из физических соображений и по условию задачи составляющие Φ, Ψ конечны, а область интегрирования мала ($kr' \ll 1$).

Следовательно, первая итерация к каждому из решений $\phi_0^{(1)}$, $\psi_0^{(1)}$, равна:

$$\phi_0(M)^{(1)} = \mathcal{A}_1 \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial[\Phi_1^0]}{\partial r'} \mathcal{G}_{10}^a(M; r' = a, \varphi') r' d\varphi' +$$

$$+\mathcal{B}_1(k_1^2 - k_3^2) \iint\limits_{|r'|\leqslant a} \mathcal{G}_1^a(r, \varphi; r', \varphi')[\Phi_1^0](r, \varphi; r', \varphi') r' dr' d\varphi'. \quad (5.3)$$

$$\psi_0(M)^{(1)} = \mathcal{A}_2 \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial[\Psi_1^0]]}{\partial r'} \mathcal{G}_{10}^a(M; r' = a, \varphi') r' d\varphi' +$$

$$+\mathcal{B}_2(k_1^2 - k_3^2) \iint\limits_{|r'|\leqslant a} \mathcal{G}_{10}^a(r, \varphi; r', \varphi')[\Psi_1^0](r, \varphi; r', \varphi') r' dr' d\varphi'. \quad (5.4)$$

Если теперь в интегральных уравнениях (5.3), (5.4) подставить вместо функции Грина $\mathcal{G}_{10}^a(M; r' = a, \varphi')$ ее асимптотику (3.6)-(3.7) при $k_0 r \gg 1$, и учесть тот факт, что область интегрирования мала ($k_3 a \ll 1$), мы получим добавочное слагаемое от неоднородности к решению задачи отражения плоской волны от слоя глубины $h + h_1$. Эта добавка представляет собой цилиндрическую волну, рассеивающуюся от неоднородности с некоторой диаграммой направленности.

Рассеяние от неоднородности в слое упругой плоской волны поляризованной вертикально дается сложной формулой вида

$$\phi(r, \varphi) = \pi(k_3 a)^2 \mathcal{A} \frac{e^{i(k_0 r - 3/4\pi)}}{\sqrt{2\pi k_0 r}} F(\varphi, \varphi_0), \quad (5.5)$$

где диаграмма направленности $F(\varphi_0, \varphi)$ равна

$$F(\varphi_0, \varphi) = T_{01}^{a,b}(\varphi_0) T_{10}^{a,b}(\varphi), \tag{5.6}$$

а коэффициенты перехода $T_{10}^{a,b}(\varphi)$, $T_{01}^{a,b}(\varphi_0)$ из слоя Ω_1 в верхнюю среду Ω_0 и обратно равны

$$T_{10}^{a}(\varphi) = [\widehat{C}_a + \widehat{D}_a], \quad T_{10}^{b}(\varphi) = [\widehat{E}_b + \widehat{F}_b]. \tag{5.7}$$

В формулах (5.6) прослеживается симметрия относительно углов падения и отражения φ_0, φ. Величину ξ в коэффициентах перехода $T_{10}^{a,b}(\varphi)$ следует заменить на величины

$$\xi_a = k_0 \cos\varphi, \quad \xi_b = \varkappa_0 \cos\varphi,$$

а в коэффициетах перехода $T_{10}^{a,b}(\varphi_0)$ величина ξ_a равна

$$\xi = k_0 \cos\varphi_0 = k_1 \cos\varphi_1, \sin\varphi_1 = \sqrt{1 - \frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi_0}.$$

Дифракционная добавка (5.5) мала ввиду того, что она содержит два малых множителя $(k_2 a)^2$, $(k_2 a \ll 1)$ и $(k_0 r)^{-1/2}$, $(k_0 r \gg 1)$.

Если *сравнивать рассеяние* плоской упругой *волны вертикальной поляризации от неоднородности в слое* с рассеянием волны горизонтальной поляризации от неоднородности в слое и рассеянием этой волны в неограниченном пространстве, то *качественная картина сохранится.*

Неоднородность будет излучать как точечный источник, интенсивность которого *пропорциональна площади сечения* этой неоднородности и *скачкам скоростей, плотностей, параметров Ламе в слое, в неоднородности* и на границах разделов.

Изменились количественные характеристики рассеиваемого поля. Присутствие слоя привнесет громоздкость в окончательные формулы в случае волн вертикальной поляризации и скажется в диаграмме направленности.

Литература

1. Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов, Л. А. Свиркина, *Рассеяние плоских упругих волн от малой неоднородности, помещенной в упругий слой.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **275** (2001), 72–84.
2. И. Н. Снеддон, Д. С. Берри, *Классическая теория упругости.* (ФМ) ГИФМЛ, М. (1961).

3. Л. М. Бреховских, *Волны в слоистых средах.* Изд-во Наука, М. (1973).
4. Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов,, *Дифракция плоских электромагнитных волн от малой неоднородности, помещенной в слой.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **275** (2001), 85–99.
5. В.А. Фок, *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.* Изд-во Советское радио, М. (1970).
6. Ф. Франк, Р. Мизес, *Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики.* ОНТИ ГРОТЛ, Л.–М. (1937).

Kirpichnikova N. Ya., Svirkina L. A., Philippov V. B. Diffraction of plane ellastic waves of the vertical polarization on a small inhomogeneity inside an ellastic layer.

The problem of diffraction of the ellastic plane wave of the vertical polarization on a small inhomogeneity lying in a layer is investigated. The layer is situated on the ellastic half-space. We consider three-layer model of isotropic ellastic theory. The inhomogeneity is a circular cylinder, radius a of which is small in comparision with the length of the falling wave. The insident wave is supposed to be polarized ortogonal to the axis of the cylinder.

Diffraction addition from the small inhomogeneity in the wave, reflected from the elastic layer, is proved to have the more order than the first with respect to parameter $(ka)^2/\sqrt{kr}$, $kr \gg 1$, $ka \ll 1$, where k is the wave number, r is distance between the inhomogeneity and observer point. The small inhomogeneity generates the cyliner wave, intensifity of which is proportional to the area of the inhomogeneity cross-section, to the jumps of the square velocities in the layer and in the inhomogeneity.

The diffraction coefficients, determining the radiation pattern of the scattering wave are obtained. The scattering of vertical polarised field by the inhomogeneity is behaved as scattering by a point source for $kr \gg 1$. The power of the scattering is proportional to the area of the inhomogeneous cross-section, the jumps of the densities ρ_i, $i = 0, 1, 2, 3$ and the jumps of Lame parameters μ_i, λ_i of the media and the inhomogeneity.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 4 марта 2002 г.