Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 285, 2002 г.

**А. П. Качалов**

# ГАУССОВЫ ПУЧКИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА НА МНОГООБРАЗИИ

В этой статье мы исследуем свойства пространственно-временных гауссовых пучков типа квазифотон для уравнений Максвелла на многообразии. Впервые стационарный вариант гауссовых пучков исследовался в работе [1]. В работе [2] впервые исследовались пространственно-временные гауссовы пучки типа квазифотон. Статья [3] посвящена изучению пространственно-временных гауссовых пучков для уравнений Максвелла в случае однократных ненулевых корней характеристического уравнения. Данная статья посвящена изучению электромагнитных гауссовых пучков в случае кратных корней характеристического уравнения. Этот случай наиболее близок к классическим уравнениям Максвелла в области. Схема исследования гауссовых пучков во многом аналогична схеме, изложенной в книге [4].

**Формулировка задачи.**

Пусть $\mathcal{M}$ – это $C^\infty$-гладкое дифференциальное многообразие размерности 3. Обозначим через $\Lambda^l$ $(\widetilde{\Lambda}^l)$, $l = 0, 1, 2, 3$, пространства $C^\infty$-гладких, комплексных (вещественных) дифференциальных $l$-форм или просто $l$-форм на этом многообразии и как $\Lambda^l(\mathbf{x})$, $(\widetilde{\Lambda}^l(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$, пространства $l$-форм в точке $\mathbf{x}$. Иногда мы также будем использовать обозначения $\Lambda^l(U)$ $(\widetilde{\Lambda}^l(U))$ для сужений пространств $\Lambda^l$ или $\widetilde{\Lambda}^l$ на любое подмножество $U \subset \mathcal{M}$.

Как обычно (см., например, [5]) электрическое поле $\mathcal{E}$ и магнитное поле $\mathcal{H}$ задаются 1-формами на многообразии, $\mathcal{E}, \mathcal{H} \in \Lambda^1$, в то время как электрическая индукция $\mathcal{D}$ и магнитная индукция $\mathcal{B}$ задаются 2-формами на этом многообразии, $\mathcal{D}, \mathcal{B} \in \Lambda^2$.

Мы в дальнейшем предполагаем, что уравнения состояния электромагнитной среды, которые представляют собой связь между $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$ и между $\mathcal{B}$ и $\mathcal{H}$, являются линейными и задаются по-

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) грант 02-01-00260.

средством двух операторов Ходжа $*_\epsilon$ и $*_\mu$,

$$*_\epsilon, *_\mu : \Lambda^l \to \Lambda^{3-l}, \quad l = 0, 1, 2, 3.$$

Эти соотношения могут быть записаны в виде:

$$\mathcal{D} = *_\epsilon \mathcal{E}, \quad \mathcal{B} = *_\mu \mathcal{H}. \tag{1}$$

Поскольку мы будем описывать динамические процессы в электромагнитной среде мы в дальнейшем предполагаем что дифференциальные формы $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$ и $\mathcal{B}$ зависят от времени $t$ как от параметра. С помощью оператора внешнего дифференцирования на формах $d$ и оператора дифференцирования по времени $\partial_t$ уравнения Максвелла записываются в виде:

$$\begin{cases} d\mathcal{H} = \partial_t \mathcal{D} + j, \\ d\mathcal{E} = -\partial_t \mathcal{B}, \\ d\mathcal{D} = \rho, \\ d\mathcal{B} = 0. \end{cases}$$

В этих уравнениях плотность электрического тока $j \in \Lambda^2$ и плотность электрического заряда $\rho \in \Lambda^3$ считаются известными величинами.

В локальной карте $(U, X)$ на многообразии $\mathcal{M}$ 1-формы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$ могут быть записаны в виде:

$$\mathcal{E} = E_i dx^i, \quad \mathcal{H} = H_i dx^i,$$

где

$$\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3), \quad \mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$$

являются ковариантными векторными полями на многообразии $\mathcal{M}$, зависящими от параметра $t$.

Записав 2-формы $\mathcal{D}$ и $\mathcal{B}$ в виде

$$\mathcal{D} = D^1 dx^2 \wedge dx^3 + D^2 dx^3 \wedge dx^1 + D^3 dx^1 \wedge dx^2,$$
$$\mathcal{B} = B^1 dx^2 \wedge dx^3 + B^2 dx^3 \wedge dx^1 + B^3 dx^1 \wedge dx^2,$$

уравнения состояния (1) в карте $(U, X)$ записываются в виде

$$D^i = \epsilon^{ij} E_j, \quad B^i = \mu^{ij} H_j, \tag{2}$$

Операторы Ходжа $*_\epsilon$ и $*_\mu$ порождают электрическую и магнитную метрики на $\mathcal{M}$, которые задаются с помощью симметричных, положительно определенных 2-контрвариантных тензоров $g_\epsilon$ и $g_\mu$,

$$g_\epsilon^{ij} = \det[\epsilon]^{-1}\epsilon^{ij}, \quad g_\mu^{ij} = \det[\mu]^{-1}\mu^{ij}, \tag{3}$$

так, что

$$\epsilon^{ij} = g_\epsilon^{1/2} g_\epsilon^{ij}, \quad \mu^{ij} = g_\mu^{1/2} g_\mu^{ij}.$$

Легко видеть, что

$$\widehat{D}^i = g_\epsilon^{-1/2} D^i, \quad \widehat{B}^i = g_\mu^{-1/2} B^i$$

есть контрвариантные векторные поля на многообразии. Здесь

$$g_\epsilon = \det[g_{\epsilon ij}], \quad g_\mu = \det[g_{\mu ij}],$$

а $g_{\epsilon ij}$, $g_{\mu ij}$ – 2-ковариантные метрические тензоры соответствующие операторам Ходжа $*_\epsilon$ и $*_\mu$.

Теперь мы можем сформулировать задачу, которую будем изучать в этой статье. Задача состоит в нахождении дифференциальных форм $\mathcal{E} = \mathcal{E}(t)$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t)$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}(t)$ и $\mathcal{B} = \mathcal{B}(t)$, $\mathcal{E}(t), \mathcal{H}(t) \in \Lambda^1$, $\mathcal{D}(t), \mathcal{B}(t) \in \Lambda^2$ для любого $t \in R$, которые удовлетворяют уравнениям состояния (1) с независимыми от времени операторами Ходжа $*_\epsilon$, $*_\mu$ и уравнениям Максвелла для среды, свободной от сторонних токов и зарядов,

$$\begin{cases} d\mathcal{H} = \partial_t \mathcal{D}, \\ d\mathcal{E} = -\partial_t \mathcal{B}, \\ d\mathcal{D} = 0, \\ d\mathcal{B} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

В этой статье мы будем рассматривать специальный класс решений уравнений (1), (4), которые имеют вид лучевых разложений

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \exp\{i\delta^{-1}\theta\}\sum_{n=0}^{\infty}(-i\delta)^n\mathcal{E}_{(n)},\\
\mathcal{H} &= \exp\{i\delta^{-1}\theta\}\sum_{n=0}^{\infty}(-i\delta)^n\mathcal{H}_{(n)},\\
\mathcal{D} &= \exp\{i\delta^{-1}\theta\}\sum_{n=0}^{\infty}(-i\delta)^n\mathcal{D}_{(n)},\\
\mathcal{B} &= \exp\{i\delta^{-1}\theta\}\sum_{n=0}^{\infty}(-i\delta)^n\mathcal{B}_{(n)},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где $\delta$ – малый положительный асимптотический параметр. $0 < \delta < 1$, $\theta$ – комплекснозначная скалярная функция и $\mathcal{E}_{(n)}, \mathcal{H}_{(n)} \in \Lambda^1$, $\mathcal{D}_{(n)}, \mathcal{B}_{(n)} \in \Lambda^2$ для всех $n = 0, 1, \dots$ и $t \in R$.

Подстановка асимптотических разложений (5) в уравнения Максвелла (4) и приравнивание при возрастающих степенях асимптотического малого параметра $\delta$ приводит к последовательности систем уравнений

$$
\begin{cases}
d\theta\wedge\mathcal{H}_{(n)} - \partial_t\theta *_\epsilon \mathcal{E}_{(n)} = -d\mathcal{H}_{(n-1)} + *_\epsilon\partial_t\mathcal{E}_{(n-1)},\\
-d\theta\wedge\mathcal{E}_{(n)} - \partial_t\theta *_\mu \mathcal{H}_{(n)} = d\mathcal{E}_{(n-1)} + *_\mu\partial_t\mathcal{H}_{(n-1)}, \quad n = 0, 1, \dots,
\end{cases}
\tag{6}
$$

$$
\begin{cases}
d\theta\wedge *_\epsilon\mathcal{E}_{(n)} + d(*_\epsilon\mathcal{E}_{(n-1)}) = 0,\\
d\theta\wedge *_\mu\mathcal{H}_{(n)} + d(*_\epsilon\mathcal{H}_{(n-1)}) = 0, n = 0, 1, \dots.
\end{cases}
\tag{7}
$$

Здесь мы предполагаем, что $\mathcal{E}_{(-1)} \equiv \mathcal{H}_{(-1)} \equiv 0$. В частности при $n = 0$ мы имеем

$$
\begin{cases}
d\theta\wedge\mathcal{H}_{(0)} - \partial_t\theta *_\epsilon \mathcal{E}_{(0)} = 0,\\
-d\theta\wedge\mathcal{E}_{(0)} - \partial_t\theta *_\mu \mathcal{H}_{(0)} = 0,
\end{cases}
\tag{8}
$$

$$
\begin{cases}
d\theta\wedge *_\epsilon\mathcal{E}_{(0)} = 0,\\
d\theta\wedge *_\mu\mathcal{H}_{(0)} = 0.
\end{cases}
\tag{9}
$$

**Лемма 1.** *Пусть дифференциальные формы $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$ и $\mathcal{B}$, имеющие вид* (5) *с $\partial_t\theta \neq 0$ асимптотически (с точностью до $O(\delta^N)$, для любого $N > 0$) удовлетворяют первой паре уравнений Максвелла* (4) *и уравнениям состояния* (1). *Тогда они асимптотически удовлетворяют второй паре уравнений Максвелла* (4).

**Доказательство.** Для доказательства достаточно проверить выполнение соотношений (7) при условии выполнения соотношений

(6). Мы докажем выполнение соотношений (7) для электрических полей. Доказательство для магнитных полей проводится аналогично.

Доказательство будем проводить по индукции. При $n = 0$ первое соотношение (9) следует из тождеств

$$d\theta \wedge *_\epsilon \mathcal{E}_{(0)} = -(\partial_t \theta)^{-1} d\theta \wedge d\theta \wedge \mathcal{H}_{(0)} = 0.$$

Пусть теперь соотношения (7) удовлетворяются для $n = 0, \ldots, l-1$. Покажем их выполнение для $n = l$. Для этого умножим первое уравнение (11) при $n = l$ на $d\theta$ слева. Мы получим

$$d\theta \wedge *_\epsilon \mathcal{E}_{(l)} + d(*_\epsilon \mathcal{E}_{(l-1)}) = -(\partial_t \theta)^{-1} \{-d\theta \wedge d\mathcal{H}_{(l-1)} + \\ + d\theta \wedge *_\epsilon \partial_t \mathcal{E}_{(l-1)} - (\partial_t \theta) d(*_\epsilon \mathcal{E}_{(l-1)})\}. \qquad (10)$$

Вычисляя теперь дифференциал первого уравнения (6) при $n = l-1$, получим

$$-d\theta \wedge d\mathcal{H}_{(l-1)} - \partial_t d\theta \wedge *_\epsilon \mathcal{E}_{(l-1)} - \partial_t \theta d(*_\epsilon \mathcal{E}_{(l-1)}) = \\ = d(*_\epsilon \partial_t \mathcal{E}_{(l-2)}).$$

Упрощая формулу (10) с использованием этого соотношения, будем иметь

$$d\theta \wedge *_\epsilon \mathcal{E}_{(l)} + d(*_\epsilon \mathcal{E}_{(l-1)}) = \\ = -(\partial_t \theta)^{-1} \partial_t [d\theta \wedge *_\epsilon \mathcal{E}_{(l-1)} + d(*_\epsilon \mathcal{E}_{(l-2)})] = 0.$$

Здесь мы воспользовались независимостью оператора Ходжа от времени а также тем, что при $n = l-1$ соотношение (7) выполнено.

В дальнейшем мы построим решения уравнений (6), удовлетворяющие условию $\partial_t \theta \neq 0$. Тем самым, по лемме 1 мы построим асимптотические решения уравнений Максвелла.

Обозначим через $\vec{\mathcal{U}}$ вектор, состоящий из пар 1-форм

$$\vec{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_e \\ \mathcal{U}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} \\ \mathcal{H} \end{pmatrix}.$$

Введем пространства $\Lambda_2^l$, $l = 0, 1, 2, 3$, векторов с двумя компонентами, заданными $l$-формами. В частности

$$\Lambda_2^1 = \{\vec{\mathcal{U}}\}.$$

Рассмотрим операторы $\mathcal{J}, \mathcal{N}, \mathcal{F} : \Lambda^1_2 \to \Lambda^2_2$

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} 0, & d\theta\wedge \\ -d\theta\wedge, & 0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} *_\epsilon, & 0 \\ 0, & *_\mu \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} *_\epsilon \partial_t, & -d \\ d, & *_\mu \partial_t \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Тогда, используя обозначения

$$\vec{\mathcal{U}}_{(n)} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{e(n)} \\ \mathcal{U}_{h(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{(n)} \\ \mathcal{H}_{(n)} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

мы можем переписать систему уравнений (6) в виде

$$(\mathcal{N} - \partial_t \theta \mathcal{J})\vec{\mathcal{U}}_{(n)} = \mathcal{F}\vec{\mathcal{U}}_{(n-1)}. \tag{15}$$

В частности, система уравнений (8) примет вид

$$(\mathcal{N} - \partial_t \theta \mathcal{J})\vec{\mathcal{U}}_{(0)} = 0. \tag{16}$$

Элементы матричных операторов $\mathcal{J}$, $\mathcal{N}$ и $\mathcal{F}$ , определяемые формулами (11)–(13) есть операторы из $\Lambda^1$ в $\Lambda^2$. Таким образом, уравнения (15) и (16) являются уравнениями в пространстве $\Lambda^2_2$.

Чтобы решить систему уравнений (15), мы сначала должны решить однородную систему уравнений (16). Вектор $\vec{\mathcal{U}}_{(0)}$ называется собственным вектором оператора $\mathcal{N}$ по отношению к оператору $\mathcal{J}$ (или просто собственным вектором $\mathcal{N}$) соответствующим собственному значению $\partial_t\theta$, которое является комплекснозначной скалярной функцией на $\mathcal{M}$.

**Собственные числа и собственные вектора оператора $\mathcal{N}$.**

В этом параграфе мы изучим собственные числа и собственные вектора оператора $\mathcal{N}(\mathcal{Z})$, $\mathcal{Z} \in \Lambda^1$,

$$\mathcal{N}(\mathcal{Z}) = \begin{pmatrix} 0, & \mathcal{Z}\wedge \\ -\mathcal{Z}\wedge, & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N} = \mathcal{N}(d\theta), \tag{17}$$

по отношению к оператору $\mathcal{J}$, т.е. собственные значения $\lambda(\mathcal{Z})$, $\lambda : \Lambda^1 \to C(\mathcal{M})$, и соответствующие собственные вектора $\vec{\mathcal{V}}(\mathcal{Z})$, $\vec{\mathcal{V}} : \Lambda^1 \to \Lambda^1_2$,

$$(\mathcal{N}(\mathcal{Z}) - \lambda(\mathcal{Z})\mathcal{J})\vec{\mathcal{V}}(\mathcal{Z}) = 0. \tag{18}$$

Спектральные свойства оператора $\mathcal{N}(\mathcal{Z})$, определяемого формулой (17) сильно зависят от соотношения между операторами Ходжа $*_\epsilon$ и $*_\mu$. Построение гауссовых пучков для случая однократных собственных значений описано в статье [3]. В этой статье мы опишем случай кратных корней. Этот случай наиболее близок к классическим уравнениям Максвелла в области $R^3$.

**Лемма 2.** *Оператор $\mathcal{N}(\mathcal{Z})$ имеет три собственных значения 0, $\pm\lambda(\mathcal{Z})$ кратности два для любой 1-формы $\mathcal{Z} \in \Lambda^1$ и для любой точки $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$, $\mathcal{Z}(\mathbf{x}) \neq 0$ в том и только том случае, если $*_\epsilon = \varrho^2 *_\mu$, где $\varrho$ есть гладкая положительная скалярная функция на $\mathcal{M}$.*

**Доказательство.** Пусть $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$, $\mathcal{Z}(\mathbf{x}) \neq 0$. Нам достаточно доказать эту лемму в этой точке в какой-нибудь системе координат. Для упрощения выкладок мы возьмем систему координат в окрестности $U$ точки $\mathbf{x}$, так что $g_\epsilon^{ij}(\mathbf{x}) = \delta^{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, где $\delta$ – это символ Кронекера и $[g_\mu^{ij}]$ – диагональная матрица. Таким образом,

$$[\epsilon^{ij}] = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad [\mu^{ij}] = \begin{pmatrix} \mu^{11}, & 0, & 0 \\ 0, & \mu^{22}, & 0 \\ 0, & 0, & \mu^{33} \end{pmatrix}.$$

в точке $\mathbf{x}$.

В этой системе координат 1-формы $\mathcal{Z}$, $\mathcal{U}_e$ и $\mathcal{U}_h$ записываются в виде

$$\mathcal{Z} = Z_i dx^i, \quad \mathcal{U}_e = U_{ei} dx^i, \quad \mathcal{U}_h = U_{hi} dx^i.$$

Операторы $\mathcal{N}$ и $\mathcal{J}$ представляются в вида $[6 \times 6]$ комплекснозначных матриц $\mathbf{N}$ и $\mathbf{J}$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0, & \mathbf{K}(\mathbf{Z}) \\ -\mathbf{K}(\mathbf{Z}), & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} [\epsilon^{ij}], & 0 \\ 0, & [\mu^{ij}] \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{K}(\mathbf{Z})$ – это $[3 \times 3]$ комплекснозначная матрица,

$$\mathbf{K}(\mathbf{Z}) = \begin{pmatrix} 0, & -Z_3, & Z_2 \\ Z_3, & 0, & -Z_1 \\ -Z_2, & Z_1, & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, уравнение (18) в этих координатах имеет вид

$$(\mathbf{N}(\mathbf{Z}) - \lambda(\mathbf{Z})\mathbf{J})\mathbf{U} = 0.$$

Расписывая эту систему покомпонентно, получим

$$\mathbf{K}(\mathbf{Z})\mathbf{U}_h = \lambda(\mathbf{Z})\mathbf{U}_e,$$
$$-\mathbf{K}(\mathbf{Z})\mathbf{U}_e = \lambda(\mathbf{Z})[\mu^{ij}]\mathbf{U}_h,$$

или

$$(\mathbf{K}(\mathbf{Z}) + \lambda^2(\mathbf{Z})[\mu^{ij}])\mathbf{U}_h = 0. \tag{19}$$

Вычисляя определитель системы уравнений (19), получим

$$\det(\mathbf{K}^2(\mathbf{Z}) + \lambda^2(\mathbf{Z})[\mu^{ij}]) = \mu^{11}\mu^{22}\mu^{33}\lambda^6 + A(\mathbf{Z})\lambda^4 + B(\mathbf{Z})\lambda^2 = 0, \tag{20}$$

где

$$A(\mathbf{Z}) = -(Z_2^2 + Z_3^2)\mu^{22}\mu^{33} - (Z_1^2 + Z_3^2)\mu^{11}\mu^{33} - (Z_1^2 + Z_2^2)\mu^{11}\mu^{22},$$
$$B(\mathbf{Z}) = (\mu^{11}Z_1^2 + \mu^{22}Z_2^2 + \mu^{33}Z_3^2)(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2). \tag{21}$$

Возвращаемся к доказательству леммы. При $*_\varepsilon = \varrho^2 *_\mu$ мы имеем

$$\mu^{11}(\mathbf{x}) = \mu^{22}(\mathbf{x}) = \mu^{33}(\mathbf{x}) = \varrho^{-2}(\mathbf{x}).$$

Подстановка этих соотношений в формулу (21) приводит к следуюшим формулам для $A(\mathbf{Z})$ и $B(\mathbf{Z})$

$$A(\mathbf{Z}) = -2\varrho^{-2}(\mathbf{x})(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2),$$
$$B(\mathbf{Z}) = \varrho^{-2}(\mathbf{x})(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)^2.$$

Используя эти выражения, получим, что характеристическое уравнение (20) имеет три корня кратности два

$$\lambda(\mathbf{Z}) = 0, \quad \lambda(\mathbf{Z}) = \pm\varrho^{-1}\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}.$$

Достаточность доказана. Для доказательства необходимости прежде всего заметим, что характеристическое уравнение (20) имеет корень $\lambda = 0$ кратности два. Кроме того, если $\lambda$ является корнем характеристического уравнения то $-\lambda$ тоже корень этого уравнения. Тем самым, если корни этого уравнения имеют кратность два, то они равны $\lambda_0(\mathcal{Z}) = 0$, $\lambda_{1,2}(\mathcal{Z}) = \pm\lambda(\mathcal{Z})$ для любой 1-формы $\mathcal{Z}$. Пусть в точке $\mathbf{x}$ $\mathbf{Z}_1 = (1, 0, 0)$. Тогда в этой точке мы получим следующие выражения для коэффициентов $A$ и $B$

$$A(\mathbf{Z}_1) = -\mu^{11}(\mu^{22} + \mu^{33}),$$
$$B(\mathbf{Z}_1) = \mu^{11}$$

Условие кратности корней характеристического уравнения в точке $\mathbf{x}$ записывается в виде

$$4(\mu^{11})^2\mu^{22}\mu^{33} = (\mu^{11})^2(\mu^{22}+\mu^{33})^2.$$

Поскольку $\mu^{ii} > 0$, $i = 1,2,3$, мы имеем $\mu^{22} = \mu^{33}$. Рассматривая $\mathbf{Z} = (0,1,0)$ мы получим, что $\mu^{11} = \mu^{33}$. В результате в точке $\mathbf{x}$ в данной системе координат мы имеем

$$\mu^{ij} = \alpha\epsilon^{ij}, \quad \alpha > 0.$$

Поскольку точка произвольная, а соотношение между операторами Ходжа $*_\epsilon$ и $*_\mu$ инвариантно по отношению к замене координат, мы получаем, что они отличаются на скалярный множитель. Лемма доказана.

В дальнейшем мы будем предполагать, что выполнены условия

$$*_\epsilon = \varrho^2 *_\mu \tag{22}$$

и оператор $\mathcal{N}(\mathcal{Z})$ имеет собственные числа

$$\lambda_0(\mathcal{Z}) = 0, \quad \lambda_{1,2}(\mathcal{Z}) = \pm\lambda(\mathcal{Z}), \tag{23}$$

кратности два.

Введем новый оператор Ходжа $*$

$$* = \varrho *_\mu = \varrho^{-1} *_\epsilon\,. \tag{24}$$

Тогда для соответствующих метрических тензоров будет выполняться соотношение

$$g^{ij} = \varrho^2 g_\epsilon^{ij} = \varrho^{-2} g_\mu^{ij}\,.$$

Для дальнейших исследований удобно ввести оператор $\mathcal{S}(\mathcal{Z}) : \Lambda^1 \to \Lambda^1$,

$$\mathcal{S}(\mathcal{Z})\mathcal{U} = *(\mathcal{Z}\wedge\mathcal{U}). \tag{25}$$

Система уравнений (18) с использованием этого оператора может быть записана в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\mathcal{Z})\mathcal{U}_h(\mathcal{Z}) &= \lambda(\mathcal{Z})\varrho\,\mathcal{U}_e(\mathcal{Z}),\\ \mathcal{S}(\mathcal{Z})\mathcal{U}_e(\mathcal{Z}) &= -\lambda(\mathcal{Z})\varrho^{-1}\mathcal{U}_h(\mathcal{Z}).\end{aligned}$$

В частности

$$\mathcal{S}^2(\mathcal{Z})\mathcal{U}_e(\mathcal{Z}) = \mathcal{S}(\mathcal{Z})(-\lambda(\mathcal{Z})\varrho^{-1}\mathcal{U}_h(\mathcal{Z})) = -\lambda^2(\mathcal{Z})\mathcal{U}_e(\mathcal{Z}).$$

Тем самым мы свели изучение спектральных свойств оператора $\mathcal{N}(\mathcal{Z})$ к изучению спектральных свойств оператора $\mathcal{S}(\mathcal{Z})$.

Чтобы описать свойства собственных векторов оператора $\mathcal{S}(\mathcal{Z})$, нам нужен какой-нибудь базис 1-форм в $\Lambda^1$. Зафиксируем некоторую точку $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$ и некоторую вещественнозначную 1-форму $\mathcal{Z}_0$, $\mathcal{Z}_0 \in \widetilde{\Lambda}^1$, $\mathcal{Z}_0(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Тогда, в силу положительной определенности метрического тензора, отвечающего оператору Ходжа $*$, существуют окрестность $U_0$ точки $\mathbf{x}_0$ и окрестность $W$ 1-формы $\mathcal{Z}_0$, симметричная по отношению отображения $\mathcal{Z} \to \widetilde{\mathcal{Z}}$, такая, что скалярная функция

$$h(\mathcal{Z}) = \sqrt{*(*\mathcal{Z} \wedge \mathcal{Z})}, \tag{26}$$

которая в любой локальной карте имеет вид

$$h(\mathbf{Z}) = \sqrt{g^{ij}(\cdot) Z_i Z_j},$$

определена и аналитична по $\mathcal{Z}$ при любых $\mathbf{x} \in U_0$ и $\mathcal{Z} \in W_0$ и

$$h(\mathcal{Z})(\mathbf{x}) \neq 0$$

в этих окрестностях.

Рассмотрим оператор $e_0 : W_0(U_0) \to \Lambda^1(U_0)$

$$e_0(\mathcal{Z}) = h^{-1}(\mathcal{Z})\mathcal{Z}.$$

Тогда для любой 1-формы $\mathcal{Z} \in W_0$, и $\mathbf{x} \in U_0$, имеем

$$*(e_0(\mathcal{Z}) \wedge e_0(\mathcal{Z}))(\mathbf{x}) = 1.$$

Пусть $\mathcal{Z}_1 \in \widetilde{\Lambda}^1(U_1)$, где $U_1 \subset U_0$, – какая-нибудь вещественнозначная 1-форма, $\mathcal{Z}_1(\mathbf{x}) \neq 0$, для которой выполнено условие ортогональности

$$*(*Z_0 \wedge Z_1) = 0.$$

Тогда по теореме о неявной функции существуют окрестности $U$ точки $\mathbf{x}_0$ и $W$ 1-формы $\mathcal{Z}_0$ и оператор $e_1 : W(U) \to \Lambda^1(U)$, аналитичный по отношению к $\mathcal{Z}$, такой что $e_1(\mathcal{Z}) \in \widetilde{\Lambda}^1$ при $\mathcal{Z} \in \widetilde{\Lambda}^1(U)$ и

$$\begin{aligned} &*(*e_0(\mathcal{Z}) \wedge e_1(\mathcal{Z}))(\mathbf{x}) = 0, \\ &*(*e_1(\mathcal{Z}) \wedge e_1(\mathcal{Z}))(\mathbf{x}) = 1, \end{aligned} \tag{27}$$

для $\mathcal{Z} \in W(U)$, $\mathbf{x} \in U$.

Рассмотрим оператор $e_2(\mathcal{Z}) : W(U) \to \Lambda^1(U)$,

$$e_2(\mathcal{Z}) = *(e_0(\mathcal{Z}) \wedge e_1(\mathcal{Z})). \tag{28}$$

Тогда в силу соотношения (27) легко доказать, что

$$*(*e_i(\mathcal{Z}) \wedge e_j(\mathcal{Z}))(\mathbf{x}) = \delta_{ij} \tag{29}$$

для $i, j = 0, 1, 2$. Кроме того

$$\begin{aligned} *(e_0(\mathcal{Z}) \wedge e_1(\mathcal{Z})) &= e_2(\mathcal{Z}), \\ *(e_1(\mathcal{Z}) \wedge e_2(\mathcal{Z})) &= e_0(\mathcal{Z}), \\ *(e_2(\mathcal{Z}) \wedge e_0(\mathcal{Z})) &= e_1(\mathcal{Z}), \end{aligned} \tag{30}$$

**Лемма 3.** *Пусть $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$, $\mathcal{Z}_0 \in \widetilde{\Lambda}^1$, $\mathcal{Z}_0(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Тогда существует окрестность $U \ni \mathbf{x}_0$ и окрестность $W \ni \mathcal{Z}_0$, симметричная по отношению к отображению $\mathcal{Z} \to \bar{\mathcal{Z}}$, такая что для любой 1-формы $\mathcal{Z} \in W$ $\mathcal{S}(\mathcal{Z})$ имеет три различных простых собственных значения $\sigma_0(\mathcal{Z}) = 0$, $\sigma_{1,2}(\mathcal{Z}) = \sigma_\pm(\mathcal{Z}) = \pm ih(\mathcal{Z})$ для $\mathbf{x} \in U$, ц $h(\mathcal{Z})$ определяемой формулой (26), и собственными векторами $\mathcal{W}_0(\mathcal{Z}) = e_0(\mathcal{Z})$, $\mathcal{W}_{1,2}(\mathcal{Z}) = \mathcal{W}_\pm(\mathcal{Z})$,*

$$\mathcal{W}_\pm(\mathcal{Z}) = h(\mathcal{Z})e_1(\mathcal{Z}) \mp ie_2(\mathcal{Z}). \tag{31}$$

*При этом выполняется соотношения*

$$\mathcal{W}_-(\mathcal{Z}) = \overline{\mathcal{W}_+(\overline{\mathcal{Z}})}.$$

*Эти собственные вектора аналитичны по отношению к $\mathcal{Z}$ в $W$ и для любой $\mathcal{Z} \in W$ образуют базис в $\Lambda^1(U)$, где $U$ есть некоторая окрестность точки $\mathbf{x}_0$.*

**Доказательство.** В системе координат $(U, X)$ в окрестности точки $\mathbf{x}_0$ оператор $\mathcal{S}(\mathcal{Z})$ имеет представление

$$\mathbf{S}(\mathbf{Z})\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{pmatrix} g_{11}, & g_{12}, & g_{13} \\ g_{21}, & g_{22}, & g_{23} \\ g_{31}, & g_{32}, & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & -Z_3, & Z_2 \\ Z_3, & 0, & -Z_1 \\ -Z_2 & Z_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}$$

где $\mathcal{U} = U_i dx^i$, $\mathcal{Z} = Z_i dx^i$ в этой системе координат.

Элементарные вычисления показывают, что оператор $\mathbf{S}(\mathbf{Z})$ имеет собственные значения

$$\lambda_0(\mathbf{Z}) = 0,$$

$$\lambda_\pm(\mathbf{Z}) = \pm ih(\mathbf{Z}) = \pm i\sqrt{g^{ij}(\cdot)Z_i Z_j}$$

Тем самым очевидно, что собственные значения $\mathcal{S}(\mathcal{Z})$ есть

$$\lambda_0(\mathcal{Z}) = 0,$$
$$\lambda_\pm(\mathcal{Z}) = \pm ih(\mathcal{Z})$$

Поскольку эти собственные значения имеют кратность 1, в окрестности $\mathcal{Z}_0$ существуют собственные векторы $\mathcal{W}_0(\mathcal{Z})$, $\mathcal{W}_\pm(\mathcal{Z})$, аналитичные по отношению к $\mathcal{Z}$ в этой окрестности. Очевидно, что мы можем взять

$$\mathcal{W}_0(\mathcal{Z}) = e_0(\mathcal{Z}).$$

Докажем, что 1-формы $\mathcal{W}_\pm(\mathcal{Z})$ задаваемые формулами (31) являются собственными векторами оператора $\mathcal{S}(\mathcal{Z})$ соответстствующими собственным значениям $\pm ih(\mathcal{Z})$. Доказательство проводится простой подстановкой

$$\mathcal{S}(\mathcal{Z})\mathcal{W}_\pm(\mathcal{Z}) = *(\mathcal{Z} \wedge \mathcal{W}_\pm(\mathcal{Z})) = h(\mathcal{Z}) * (e_0(\mathcal{Z}) \wedge e_1(\mathcal{Z}))\mp$$

$$\mp ih(\mathcal{Z}) * (e_0(\mathcal{Z}) \wedge e_2(\mathcal{Z})) = \pm ih(\mathcal{Z})(e_1(\mathcal{Z}) \mp ie_2(\mathcal{Z})) =$$

$$= \pm ih(\mathcal{Z})\mathcal{W}_\pm(\mathcal{Z}).$$

Здесь мы использовали формулы (29), (30). Поскольку $h(\mathcal{Z}) \neq 0$ в окрестностях $W \ni \mathcal{Z}_0$, $U \ni \mathbf{x}_0$ 1-формы $\mathcal{W}_0(\mathcal{Z})$, $\mathcal{W}_\pm(\mathcal{Z})$ образуют базис в $W(U)$. Наконец,

$$\overline{\mathcal{W}_\pm(\overline{\mathcal{Z}})} = \overline{e_1(\overline{\mathcal{Z}})} \pm \overline{ie_2(\overline{\mathcal{Z}})} = e_1(\mathcal{Z}) \pm ie_2(\mathcal{Z}) = \mathcal{W}_\mp(\mathcal{Z}).$$

Используя операторы Ходжа, введем скалярное произведение в пространстве $\Lambda^1_2(\mathbf{x})$. Это скалярное произведение для любых $\vec{\mathcal{U}}(\mathbf{x})$, $\vec{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) \in \Lambda^1_2(\mathbf{x})$ задается формулой

$$< \vec{\mathcal{U}}(\mathbf{x}), \vec{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) >_{\mathbf{x}} = *(*_\epsilon \mathcal{U}_e \wedge \overline{\mathcal{V}}_e + *_\mu \mathcal{U}_h \wedge \overline{\mathcal{V}}_h)(\mathbf{x}). \qquad (32)$$

Норма, соответствующая этому скалярному произведению, с точностью до нормировочной константы совпадает с плотностью энергии электромагнитного поля. Поэтому мы будем называть ее энергетической нормой.

**Теорема 1.** *Пусть* $*_\epsilon = \varrho^2 *_\mu$, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$, $\mathcal{Z}_0 \in \widetilde{\Lambda}^1$, $\mathcal{Z}_0(\mathbf{x}_0) \neq 0$. *Тогда имеются собственные векторы* $\vec{\mathcal{V}}_i^\pm(\mathcal{Z})$, $i = 0,1,2$, *оператора* $\mathcal{N}(\mathcal{Z})$, *соответствующие собственным значениям* $\lambda_0(\mathcal{Z}) = 0$,

$\lambda_{1,2} = \pm h(\mathcal{Z})$, *которые удовлетворяют следующим свойствам в некоторой окрестности* $U \ni \mathbf{x}_0$ *и некоторой окрестности* $W \ni \mathcal{Z}_0$.

(1) $\vec{\mathcal{V}}_i^{\pm}(\mathcal{Z}) \in \Lambda_2^1$, $i = 0,1,2$, *являются аналитическими по* $\mathcal{Z}$ *и* $C^\infty$-*гладкими по* $\mathbf{x}$.

(2) $\overline{\vec{\mathcal{V}}_i^{\pm}(\overline{\mathcal{Z}})} = \vec{\mathcal{V}}_i^{\pm}(\mathcal{Z})$.

(3) $\vec{\mathcal{V}}_i^{\pm}(\mathcal{Z})$, $i = 0,1,2$, *образуют базис в* $\Lambda_2^1$.

(4) *Для любых* $\mathbf{x} \in U$, $\mathcal{Z} \in \Lambda^1(U)$

$$\left\langle \vec{\mathcal{V}}_i^{\sigma}(\mathcal{Z}), \vec{\mathcal{V}}_k^{\kappa}(\bar{\mathcal{Z}}) \right\rangle_{\mathbf{x}} = \delta^{\sigma\kappa}\delta_{ik}. \tag{33}$$

(5) *Для любых* $\mathbf{x} \in U \subset \mathcal{M}$, $\mathcal{Z} \in \Lambda^1(U)$, $i = 1,2$, $\sigma = \pm$

$$*\mathcal{Z} \wedge \mathcal{V}_{ie}^{\sigma}(\mathcal{Z}) = *\mathcal{Z} \wedge \mathcal{V}_{ih}^{\sigma}(\mathcal{Z}) = *\mathcal{V}_{ie}^{\sigma} \wedge \mathcal{V}_{ih}^{\sigma}(\mathcal{Z}) = 0.$$

**Доказательство.** Шаг 1. Рассмотрим семейство векторов $\vec{\mathcal{U}}_i^{\pm}(\mathcal{Z}) \in \Lambda_2^1(U)$, $i = 0,1,2$,

$$\vec{\mathcal{U}}_0^{+}(\mathcal{Z}) = \begin{pmatrix} e_0(\mathcal{Z}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathcal{U}}_0^{-}(\mathcal{Z}) = \begin{pmatrix} 0 \\ e_0(\mathcal{Z}) \end{pmatrix}, \tag{34}$$

$$\vec{\mathcal{U}}_1^{\pm}(\mathcal{Z}) = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_e(\mathcal{Z}) \\ \pm\mathcal{U}_h(\mathcal{Z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1(\mathcal{Z}) \\ \mp\varrho e_2(\mathcal{Z}) \end{pmatrix},$$

$$\vec{\mathcal{U}}_2^{\pm}(\mathcal{Z}) = \begin{pmatrix} -\varrho^{-2}\mathcal{U}_h(\mathcal{Z}) \\ \pm\mathcal{U}_e(\mathcal{Z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho^{-1}e_2(\mathcal{Z}) \\ \pm e_1(\mathcal{Z}) \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Из свойств симметрии $e_i(\mathcal{Z})$, $i = 0,1,2$ следует, что

$$\overline{\mathcal{U}_e(\overline{\mathcal{Z}})} = \mathcal{U}_e(\mathcal{Z}), \quad \overline{\mathcal{U}_h(\overline{\mathcal{Z}})} = \mathcal{U}_h(\mathcal{Z}). \tag{66}$$

Шаг 2. На этом шаге мы докажем, что $\vec{\mathcal{U}}_i^{\pm}(\mathcal{Z})$, $i = 0,1,2$, являются собственными векторами оператора $\mathcal{N}(\mathcal{Z})$ соответствующими собственным значениям $\lambda_i(\mathcal{Z})$, $\lambda_0(\mathcal{Z}) = 0$, $\lambda_{1,2} = \lambda^{\pm}(\mathcal{Z}) = \pm h(\mathcal{Z})$.

Поскольку $\mathcal{Z} \wedge \mathcal{Z} = 0$ очевидно, что вектора $\vec{\mathcal{U}}_0^{+}(\mathcal{Z})$ и $\vec{\mathcal{U}}_0^{-}(\mathcal{Z})$ – это линейно независимые собственные вектора $\mathcal{N}(\mathcal{Z})$ в $\Lambda^1(U)$ для $\mathcal{Z} \in W$, соответствующие собственному значению $\lambda_0(\mathcal{Z}) = 0$. Далее

$$\mathcal{N}(\mathcal{Z})\vec{\mathcal{U}}_1^{\pm}(\mathcal{Z}) = \begin{pmatrix} \mp\varrho h(\mathcal{Z})e_0(\mathcal{Z}) \wedge e_2(\mathcal{Z}) \\ -h(\mathcal{Z})e_0(\mathcal{Z}) \wedge e_1(\mathcal{Z}) \end{pmatrix} = \pm h(\mathcal{Z}) \begin{pmatrix} \varrho * e_1(\mathcal{Z}) \\ \mp * e_2(\mathcal{Z}) \end{pmatrix} =$$

$$= \pm h(\mathcal{Z}) \begin{pmatrix} *_\epsilon e_1(\mathcal{Z}) \\ \mp \varrho *_\mu e_2(\mathcal{Z}) \end{pmatrix} = \pm h(\mathcal{Z}) \mathcal{J}(\mathcal{Z}) \vec{\mathcal{U}}_1^{\pm}(\mathcal{Z}),$$

$$\mathcal{N}(\mathcal{Z}) \vec{\mathcal{U}}_2^{\pm}(\mathcal{Z}) = \begin{pmatrix} \pm h(\mathcal{Z}) e_0(\mathcal{Z}) \wedge e_1(\mathcal{Z}) \\ -\varrho^{-1} h(\mathcal{Z}) e_0(\mathcal{Z}) \wedge e_2(\mathcal{Z}) \end{pmatrix} = \pm h(\mathcal{Z}) \begin{pmatrix} * e_2(\mathcal{Z}) \\ \pm \varrho^{-1} * e_1(\mathcal{Z}) \end{pmatrix}$$

$$= \pm h(\mathcal{Z}) \begin{pmatrix} \varrho^{-1} *_\epsilon e_2(\mathcal{Z})) \\ \pm *_\mu e_1(\mathcal{Z}) \end{pmatrix} = \pm h(\mathcal{Z}) \mathcal{J}(\mathcal{Z}) \vec{\mathcal{U}}_2^{\pm}(\mathcal{Z}).$$

Тем самым $\vec{\mathcal{U}}_i^{+}(\mathcal{Z})$, $i = 1, 2$, являются собственными векторами $\mathcal{N}(\mathcal{Z})$, соответствующими собственному значению $h(\mathcal{Z})$, а $\vec{\mathcal{U}}_i^{-}(\mathcal{Z})$, $i = 1, 2$, являются собственными векторами $\mathcal{N}(\mathcal{Z})$, соответствующими собственному значению $-h(\mathcal{Z})$.

Формулы (34) и (35) показывают, $\vec{\mathcal{U}}_i^{\pm}(\mathcal{Z}) \in \Lambda_2^1(U)$ аналитические по $\mathcal{Z}$ в $W$. Кроме того $e_1(\mathcal{Z})(\mathbf{x}) \neq 0$ и $e_2(\mathcal{Z})(\mathbf{x}) \neq 0$, если $\mathcal{Z} \in W$, $\mathbf{x} \in U$.

Шаг 3. На этом шаге мы докажем, что $\vec{\mathcal{U}}_i^{\pm}(\mathcal{Z})$, $i = 0, 1, 2$, образуют базис в $\Lambda_2^1(U)$, если $\mathcal{Z} \in W$. Для доказательства этого достаточно доказать их линейную независимость в $\Lambda_2^1(U)$.

Пусть

$$\sum_{\pm} \sum_{i=0}^{2} C_i^{\pm} \vec{\mathcal{U}}_i^{\pm}(\mathcal{Z}) = 0 \tag{36}$$

в $\Lambda^1(U)$, где $C_i^{\pm}$ есть некоторые скалярные функции на многообразии $U$.

Применяя оператор $\mathcal{N}(\mathcal{Z})$ к левой части тождества (36) и рассматривая первую и вторую компоненты тождества, получим

$$\begin{aligned} (C_1^{+} - C_1^{-}) *_\epsilon \mathcal{U}_e(\mathcal{Z}) - (C_2^{+} - C_2^{-}) *_\mu \mathcal{U}_h(\mathcal{Z}) = 0, \\ (C_1^{+} + C_1^{-}) *_\mu \mathcal{U}_h(\mathcal{Z}) + \varrho^2 (C_2^{+} + C_2^{-}) *_\epsilon \mathcal{U}_e(\mathcal{Z}) = 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Используя факт, что $\vec{\mathcal{U}}_1^{+}(\mathcal{Z})$ есть собственный вектор оператора $\mathcal{N}(\mathcal{Z})$, соответствующий собственному значению $\lambda_1(\mathcal{Z}) = h(\mathcal{Z})$, мы имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \wedge \mathcal{U}_h(\mathcal{Z}) = h(\mathcal{Z}) *_\epsilon \mathcal{U}_e(\mathcal{Z}), \\ \mathcal{Z} \wedge \mathcal{U}_e(\mathcal{Z}) = -h(\mathcal{Z}) *_\mu \mathcal{U}_h(\mathcal{Z}) \end{aligned} \tag{38}$$

в $U$ для $\mathcal{Z} \in W$. Умножая первое тождество (38) на $\mathcal{U}_h(\mathcal{Z})$, а второе тождество (38) на $\mathcal{U}_e(\mathcal{Z})$, мы получим следующие тождества

$$\begin{aligned} *_\epsilon \mathcal{U}_e(\mathcal{Z}) \wedge \mathcal{U}_h(\mathcal{Z}) = 0, \\ *_\mu \mathcal{U}_h(\mathcal{Z}) \wedge \mathcal{U}_e(\mathcal{Z}) = 0. \end{aligned} \tag{39}$$

в $U$ для $\mathcal{Z} \in W$. С другой стороны, поскольку $\mathcal{U}_e(\mathcal{Z})(\mathbf{x}) \neq 0$ для $\mathbf{x} \in U$, $\mathcal{Z} \in W$ мы имеем

$$(*_\epsilon \mathcal{U}_e(\mathcal{Z}) \wedge \mathcal{U}_e(\mathcal{Z})) = (*_\mu \mathcal{U}_h(\mathcal{Z}) \wedge \mathcal{U}_h(\mathcal{Z})) \neq 0 \tag{40}$$

для $\mathbf{x} \in U$ и $\mathcal{Z} \in W$. Умножая первое и второе тождества (37) на $\mathcal{U}_e(\mathcal{Z})$ и $\mathcal{U}_h(\mathcal{Z})$ соответственно и используя формулы (39) и (40), мы получим, что

$$\begin{aligned} C_1^+ + C_1^- = 0, \quad C_1^+ - C_1^- = 0, \\ C_2^+ + C_2^- = 0, \quad C_2^+ - C_2^- = 0. \end{aligned}$$

в окрестности $U$ точки $\mathbf{x}_0$. Следовательно, $C_i^\pm = 0$, $i = 1, 2$. Тогда из тождества (36) получаем, что $C_0^\pm = 0$ в $U$.

Шаг 4. На этом шаге мы докажем условия ортогональности

$$\left\langle \vec{\mathcal{U}}_i^\sigma(\mathcal{Z}), \vec{\mathcal{U}}_k^\kappa(\overline{\mathcal{Z}}) \right\rangle_{\mathbf{x}} = 0 \tag{41}$$

для $\sigma$, $\kappa = \pm$, $i$, $k = 0, 1, 2$, $(\sigma, i) \neq (\kappa, k)$.

Используя формулу (28) для скалярного произведения и свойства симметрии $\mathcal{U}_e(\mathcal{Z})$ и $\mathcal{U}_h(\mathcal{Z})$ по отношению к отображению $\mathcal{Z} \to \overline{\mathcal{Z}}$, получим

$$\begin{aligned} &\left\langle \vec{\mathcal{U}}_i^\sigma(\mathcal{Z}), \vec{\mathcal{U}}_k^\kappa(\overline{\mathcal{Z}}) \right\rangle_{\mathbf{x}} = \\ &= *(*_\epsilon \mathcal{U}_{ei}^\sigma(\mathcal{Z}) \wedge \overline{\mathcal{U}_{ek}^\kappa(\overline{\mathcal{Z}})} + *_\mu \mathcal{U}_{hi}^\sigma(\mathcal{Z}) \wedge \overline{\mathcal{U}_{hk}^\kappa(\overline{\mathcal{Z}})})_{\mathbf{x}} = \\ &= *(*_\epsilon \mathcal{U}_{ei}^\sigma(\mathcal{Z}) \wedge \mathcal{U}_{ek}^\kappa(\mathcal{Z}) + *_\mu \mathcal{U}_{hi}^\sigma(\mathcal{Z}) \wedge \mathcal{U}_{hk}^\kappa(\mathcal{Z}))_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Отсюда очевидно следует, что

$$\left\langle \vec{\mathcal{U}}_i^\sigma(\mathcal{Z}), \vec{\mathcal{U}}_k^\kappa(\overline{\mathcal{Z}}) \right\rangle_{\mathbf{x}} = \left\langle \vec{\mathcal{U}}_k^\kappa(\mathcal{Z}), \vec{\mathcal{U}}_i^\sigma(\overline{\mathcal{Z}}) \right\rangle_{\mathbf{x}}.$$

Используя свойства (39), а также тождества

$$\begin{aligned} *_\epsilon \mathcal{U}_e(\mathcal{Z}) \wedge \mathcal{Z} = 0, \\ *_\mu \mathcal{U}_h(\mathcal{Z}) \wedge \mathcal{Z} = 0, \end{aligned} \tag{42}$$

которые получаются из (38) умножением на $\mathcal{Z}$, нетрудно доказать соотношения ортогональности при $i = 0$ а также при $i \neq k$. Таким образом, нам осталось проверить условия ортогональности при $i = k \neq 0$, $\sigma = +$, $\kappa = -$.

$$\left\langle \vec{\mathcal{U}}_1^+(\mathcal{Z}), \vec{\mathcal{U}}_1^-(\overline{\mathcal{Z}}) \right\rangle_{\mathbf{x}} =$$

$$= *(*_\epsilon \mathcal{U}_e(\mathcal{Z}) \wedge \mathcal{U}_e(\mathcal{Z}) - *_\mu \mathcal{U}_h(\mathcal{Z}) \wedge \mathcal{U}_h(\mathcal{Z}))_{\mathbf{x}} = 0.$$

$$\left\langle \vec{\mathcal{U}}_2^+(\mathcal{Z}), \vec{\mathcal{U}}_2^-(\overline{\mathcal{Z}}) \right\rangle_{\mathbf{x}} =$$

$$= *(\varrho^{-4} *_\epsilon \mathcal{U}_h(\mathcal{Z}) \wedge \mathcal{U}_h(\mathcal{Z}) - *_\mu \mathcal{U}_e(\mathcal{Z}) \wedge \mathcal{U}_e(\mathcal{Z}))_{\mathbf{x}} =$$

$$= \varrho^{-2} * (*_\mu \mathcal{U}_h(\mathcal{Z}) \wedge \mathcal{U}_h(\mathcal{Z}) - *_\epsilon \mathcal{U}_e(\mathcal{Z}) \wedge \mathcal{U}_e(\mathcal{Z}))_{\mathbf{x}} = 0.$$

Условия ортогональности доказаны.

Шаг 5. Введем нормализованные собственные вектора

$$\begin{aligned}
&\vec{\mathcal{V}}_0^+(\mathcal{Z}) = \varrho{-}1/2\vec{\mathcal{U}}_0^+(\mathcal{Z}),\\
&\vec{\mathcal{V}}_0^-(\mathcal{Z}) = \varrho^{1/2}\vec{\mathcal{U}}_0^-(\mathcal{Z}),\\
&\vec{\mathcal{V}}_1^\pm(\mathcal{Z}) = (*(2 *_\epsilon \mathcal{U}_e(\mathcal{Z}) \wedge \mathcal{U}_e(\mathcal{Z})))^{-1/2}\vec{\mathcal{U}}_1^\pm(\mathcal{Z}),\\
&\vec{\mathcal{V}}_2^\pm(\mathcal{Z}) = (*(2\varrho^{-2} *_\epsilon \mathcal{U}_e(\mathcal{Z}) \wedge \mathcal{U}_e(\mathcal{Z})))^{-1/2}\vec{\mathcal{U}}_2^\pm(\mathcal{Z}).
\end{aligned} \tag{43}$$

Элементарные вычисления показывают, что для $\sigma = \pm$, $i = 0, 1, 2$,

$$\left\langle \vec{\mathcal{V}}_i^\sigma(\mathcal{Z}), \vec{\mathcal{V}}_i^\sigma(\overline{\mathcal{Z}}) \right\rangle_{\mathbf{x}} = 1.$$

Тогда из условий ортогональности (41) мы получаем условия нормировки (33).

Очевидно, что $\vec{\mathcal{V}}_i^\sigma(\mathcal{Z})$ аналитичны по $\mathcal{Z}$ в $W$ как элементы $\Lambda_2^1(U)$, поскольку это верно для векторов $\vec{\mathcal{U}}_i^\sigma(\mathcal{Z})$, и нормирующие множители в (43) тоже аналитичны по $\mathcal{Z}$ в $W$ для $\mathbf{x} \in U$.

Поскольку $\vec{\mathcal{U}}_i^\sigma(\mathcal{Z})$, $\sigma = \pm$, $i = 0, 1, 2$, образуют базис, то же самое справедливо и для $\vec{\mathcal{V}}_i^\sigma(\mathcal{Z})$, $\sigma = \pm$, $i = 0, 1, 2$.

Свойство (2) теоремы следует из условий симметрии для $\mathcal{U}_e(\mathcal{Z})$ и $\mathcal{U}_h(\mathcal{Z})$ и аналогичных условий для нормирующих множителей в (43).

Свойство (5) теоремы следует из тождеств (39) и (42). Наконец приведем формулы для собственных векторов $\vec{\mathcal{V}}_i^\pm(\mathcal{Z})$, которые выражают эти вектора через $e_i(\mathcal{Z})$. Они получаются подстановкой представлений (35) в формулы (43).

$$\vec{\mathcal{V}}_0^+(\mathcal{Z}) = \begin{pmatrix} \varrho^{-1/2} e_0(\mathcal{Z}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathcal{V}}_0^-(\mathcal{Z}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varrho^{1/2} e_0(\mathcal{Z}) \end{pmatrix},$$

$$\vec{\mathcal{V}}_1^\pm(\mathcal{Z}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varrho^{-1/2} e_1(\mathcal{Z}) \\ \mp\varrho^{1/2} e_2(\mathcal{Z}) \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathcal{V}}_2^\pm(\mathcal{Z}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varrho^{-1/2} e_2(\mathcal{Z}) \\ \pm\varrho^{1/2} e_1(\mathcal{Z}) \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Теорема доказана.

**Уравнение Гамильтона–Якоби.**

В предыдущем параграфе мы изучили свойства собственных значений и собственных векторов оператора $\mathcal{N}(\mathcal{Z})$. Используя полученные результаты, мы, в частности, получаем из уравнения (16), что $\partial_t\theta$ совпадает с одним из собственных чисел оператора $\mathcal{N}(d\theta)$. Таким образом, система (16) разрешима в том и только том случае, когда

$$\partial_t\theta = 0 \quad or \quad \partial_t\theta = \pm h(d\theta).$$

Легко показать (см, например, [4]), что не существует решений уравнений Максвелла в виде (5) с $\theta$, не зависящей от времени. Далее мы будем рассматривать лишь случай

$$\partial_t\theta = -h(d\theta). \tag{45}$$

Случай противоположного знака может быть рассмотрен аналогично. В локальной карте $(U, X)$ уравнение (45) примет вид

$$\partial_t\theta(\mathbf{x}, t) + h(d\theta)(\mathbf{x}) = 0. \tag{46}$$

Анализ уравнения Гамильтона–Якоби в основном повторяет аналогичный анализ, данный в параграфе 2.4 книги [4]. Поэтому здесь мы опишем лишь основные идеи и результаты без детальных доказательств.

Гауссовы пучки есть решения уравнений Максвелла вида (5) с фазовой функцией, удовлетворяющей дополнительным условиям

$$\begin{gathered} \Im\theta(\mathbf{x}(t), t) = 0, \\ \Im\theta(\mathbf{x}, t) > 0, \quad for \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}(t). \end{gathered} \tag{47}$$

Указанное решение в каждый момент времени будет сосредоточено в окрестности точки $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ для любого $t \in R$ и экспоненциально мало в области $\Im\theta >> \delta$. В связи с этим мы можем ограничиться исследованием функции $\theta$ в малой окрестности точки $\mathbf{x}(t)$ для всех $t$. Более того, мы можем ограничится рассотрением лишь конечным числом членов разложения Тейлора фазовой и амплитудных функций в окрестности $\mathbf{x}(t)$.

Для построения разложений Тейлора мы используем какую-нибудь локальную систему координат $(U, X)$. Будем искать разложения Тейлора в этой системе координат в виде

$$\theta(\mathbf{x}, t) = \theta_0(\mathbf{y}; t) + \theta_1(\mathbf{y}; t) + \theta_2(\mathbf{y}; t) =$$

$$= \theta_0(t) + p_i(t)y^i + \frac{1}{2}H_{ij}(t)y^i y^j + \cdots, \tag{48}$$

где $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}(t)$ и $\theta_l(\mathbf{y}; t)$, $l = 1, \ldots,$ – однородные многочлены степени $l$ по $\mathbf{y}$. Свойства (47) будут удовлетворены, если мы построим $\theta$, у которой коэффициенты удовлетворяют следующим соотношениям для любого $t$

$$\Im\theta_0(t) = 0, \quad \Im\mathbf{p}(t) = 0, \quad \Im H(t) > 0. \tag{49}$$

Подставляя разложение (48) в уравнение Гамильтона–Якоби (46) и приравнивая при последовательных степенях однородных многочленов, мы получим последовательность дифференциальных уравнений для однородных многочленов $\theta_l(\mathbf{y}; t)$. Наиболее важные и интересные среди них являются уравнения для $\theta_l(\mathbf{y}; t)$, $l = 0, 1, 2$, поскольку эти члены описывают основные свойства фазовой функции.

**Лемма 4.** *Фазовая функция $\theta(\mathbf{x}, t)$, заданная в виде разложения* (47) *и удовлетворяющая уравнению Гамильтона–Якоби* (45) *и условиям* (48) *имеет следующие свойства*

(1)

$$\theta_0(y; t) = \theta_0(t) = const, \tag{50}$$

(2) $\mathbf{x}(t)$ *и* $\mathbf{p}(t)$ *удовлетворяют системе уравнений Гамильтона с гамильтонианом*

$$h(p_i dx^i)(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sqrt{g^{ij}(\mathbf{x}) p_i p_j}, \tag{51}$$

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial h(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial p_i},$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial h(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial x^i} \tag{52}$$

(3) *Комплекснозначная матричная функция $H(t)$ удовлетворяет матричному уравнению Риккати*

$$\frac{dH}{dt} + D + (BH + HB^t) + HCH = 0, \tag{53}$$

*где*

$$B^j_l = \frac{\partial^2 h}{\partial x^l \partial p_j}, \quad C^{jl} = \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_l}, \quad D_{jl} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^j \partial x^l}. \tag{54}$$

*Правые части соотношений (54) вычисляются на решении* $(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$ *системы уравнений Гамильтона.*

Поскольку уравнения Максвелла линейны, мы можем считать без потери общности, что

$$\theta_0(\mathbf{y};t) = 0.$$

Чтобы найти решение системы уравнений Гамильтона (52) мы должны задать начальные условия

$$\mathbf{x}|_{t=0} = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{p}|_{t=0} = \mathbf{p}_0. \tag{55}$$

Так как $h(\mathbf{x},\mathbf{p})$ является положительно однородной функцией порядка 1 по $\mathbf{p}$, траектория $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ не зависит от длины вектора $\mathbf{p}_0$, и мы можем добавить дополнительное условие на $\mathbf{p}_0$

$$\langle \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_0 \rangle = h^2(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0) = g^{ij}(\mathbf{x}_0) p_{i0} p_{j0} = 1.$$

Поскольку гамильтониан постоянен на траектории, $h(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) = 1$.

Пусть $(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$ есть единственное решение задачи Коши (52), (55), которое существует при любом $t \in R$. Траектория $\mathbf{x}(t)$ есть нормальная геодезическая в метрике, соответствующей оператору Ходжа $*$ и $t$ – канонический параметр на этой геодезической. При замене координат $\mathbf{p}(t)$ преобразуется как ковектор в точке $\mathbf{x}(t)$, так что $p_i dx^i$ есть 1-форма в точке $\mathbf{x}(t)$. Более того, $\mathbf{p}(t)$ есть ковариантное представление вектора скорости на нормальной геодезической $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$.

Заметим, что матрица $H(t)$ не преобразуется как тензор в точке $\mathbf{x}(t)$. Однако мнимая часть $H(t)$ есть 2-ковариантный тензор в точке $\mathbf{x}(t)$. В частности, если мы докажем неравенство три в (49) в какой-нибудь системе координат, то оно будет выполняться и во всех других системах координат.

Возвратимся к уравнению Риккати (53) и рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dH}{dt} + D + (BH + HB^t) + HCH = 0, \\ \hfill H|_{t=0} = H_0, \end{cases} \tag{56}$$

где матрица $H_0$ удовлетворяет дополнительным условиям

$$H_0^t = H_0, \quad \Im H_0 > 0. \tag{57}$$

Решение задачи Коши для матричного уравнения Риккати может быть сведено к решению задачи Коши для линейной системы уравнений

$$\frac{dY}{dt} = B^t \cdot Y + C \cdot Z, \quad Y|_{t=0} = E,$$

$$\frac{dZ}{dt} = -D \cdot Y - B \cdot Z, \quad Z|_{t=0} = H_0. \tag{58}$$

Легко доказать следующую лемму

**Лемма 5.** *Пусть $Y(t)$, $Z(t)$ – комплекснозначные матричные функции, являющиеся решением задачи Коши* (58). *Тогда*

(1)

$$\det Y(t) \neq 0, \quad t \in R,$$

(2)

$$\widetilde{H}(t) = Z(t)Y^{-1}(t)$$

*является решением задачи Коши* (56)–(57) *для матричного уравнения Риккати.*

(3)

$$\widetilde{H}^t(t) = \widetilde{H}(t), \quad \Im\widetilde{H}(t) > 0, \quad t \in R.$$

*Поскольку решение задачи Коши для уравнения Риккати единственно $H(t) = \widetilde{H}(t)$. Таким образом, если мы возьмем начальную матрицу $H_0$, которая удовлетворяет условиям* (57), *тогда $H(t)$ будет удовлетворять третьему условию* (49).

Для нахождения однородных многочленов $\theta_l(\mathbf{y};t)$, $l \geq 3$, необходимо последовательно решить дифференциальные уравнения первого порядка в частных производных. Эти уравнения могут быть упрощены, если использовать линейную замену переменных $\tilde{\mathbf{y}} = Y^{-1}(t)\mathbf{y}$. В этом случае линейное дифференциальное уравнение для $\tilde{\theta}_l(\tilde{\mathbf{y}};t) = \theta_l(\mathbf{y};t)$, $l \geq 3$, становится обыкновенным дифференциальным уравнением вдоль геодезической $\gamma : \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$.

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\theta}_l = \tilde{\mathcal{F}}_l, \quad \tilde{\theta}_l\Big|_{t=0} = \theta_l(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, 0).$$

Комбинируя все эти результаты, получим следующую лемму

**Лемма 6.** *Пусть функция* $\theta^0(\mathbf{x})$ *имеет следующее асимптотическое разложение*

$$\theta^0(\mathbf{x}) = \sum_{l\geq 1} \theta_l^0(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = p_{0i}(x^i - x_0^i) + \frac{1}{2}H_{0ij}(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) + \cdots$$

*в некоторой системе координат* $(U, X)$ *вблизи* $\mathbf{x}_0$. *Здесь* $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$, $\mathbf{p}_0$ *– единичный ковектор в точке* $\mathbf{x}_0$ *и матрица* $H_0$ *удовлетворяет условиям*

$$H_0^t = H_0, \quad \Im H_0 > 0.$$

*Тогда существует скалярная функция* $\theta(\mathbf{x}, t)$, *которая асимптотически удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби, начальному условию*

$$\theta(\mathbf{x}, t)|_{t=0} = \theta^0(\mathbf{x}),$$

*и свойствам* (47). *Более того для, любого* $t \in R$ $\theta(\mathbf{x}, t)$ *имеет место асимптотическое разложение* (48), *где* $\mathbf{x}(t)$ *есть нормальная геодезическая метрики* $g$, *проходящая через точку* $\mathbf{x}_0$ *при* $t = 0$ *с начальным ковектором скорости* $\mathbf{p}_0$ *и каноническим параметром* $t$. *При этом выполняются свойства* (49).

Возвращаемся к решению системы уравнений (16). Пусть $\theta^0(\mathbf{x})$ есть начальная фаза для $\theta$, удовлетворяющая условиям леммы 5. Тогда для любого $T > 0$ существует окрестность $W$ отрезка геодезической $\gamma[0, T]$ такая, что функция $\theta(\mathbf{x}, t)$ есть решение уравнения Гамильтона–Якоби (46) и удовлетворяет условиям (49) в окрестности $W$. В этом случае оператор $\mathcal{N} = \mathcal{N}(d\theta)$ имеет собственное значение $\partial_t\theta$ в этой окрестности. Основные члены разложения для 1-формы $d\theta$ и скалярной функции $\partial_t\theta$ могут быть легко получены из разложения (48). Например,

$$d\theta|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} = \omega_0(t) = e_{i0}(t)dx^i = p_i(t)dx^i, \tag{59}$$

$$\partial_t\theta|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} = -p_i(t)\frac{dx^i}{dt} = -h(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) = -1. \tag{60}$$

Заметим, что из формулы (60) следует, что можно выбрать $W$ так, что $\partial_t\theta \neq 0$ в $W$. Тогда собственный вектор $\vec{\mathcal{U}}_{(0)}$ оператора $\mathcal{N}(\theta)$, соответствующий собственному значению

$$\lambda(d\theta) = -h(d\theta),$$

имеет вид

$$\vec{\mathcal{U}}_{(0)}(\mathbf{x},t)=\Phi^1_{(0)}(\mathbf{x},t)\vec{\mathcal{V}}_1^-(d\theta)(\mathbf{x})+\Phi^2_{(0)}(\mathbf{x},t)\vec{\mathcal{V}}_2^-(d\theta)(\mathbf{x}), \tag{61}$$

где $\Phi^1_{(0)}$ и $\Phi^2_{(0)}$ – произвольные скалярные функции, а $\vec{\mathcal{V}}_1^-$ и $\vec{\mathcal{V}}_2^-$ определяются формулами (43) или (44).

В дальнейшем нам потребуются формулы для $\vec{\mathcal{V}}_i^-(d\theta)$, $i=1,2$, при $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$. Для этого нам нужно вычислить значения $e_i(d\theta)(\mathbf{x}(t))$. До этого момента 1-форма $e_1(d\theta)$ а, следовательно, и $e_1(d\theta)$ имели значительный произвол в выборе, ограниченный лишь вещественностью $e_1(\mathcal{Z})$ при вещественной $\mathcal{Z}$ и условиям (27). На этом этапе мы упростим вычисления, несколько уменьшив произвол в выборе.

Прежде всего из формулы (59) следует, что

$$e_0(d\theta)(\mathbf{x}(t))=\omega_0(t)=p_i(t)dx^i. \tag{62}$$

Заметим, что 1-форма $\omega_0(t)\in\Lambda^1(\mathbf{x}(t))$ получается параллельным переносом 1-формы $\omega_0(0)=p_{i0}dx^i$ вдоль геодезической $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$. Рассмотрим вешественную 1-форму $\omega_1(0)$ ортогональную $\omega_0(0)$,

$$*(*e_0(0)\wedge e_1(0))=0 \tag{63}$$

такую, что

$$*(*e_1(0)\wedge e_1(0))=1. \tag{64}$$

Рассмотрим также 1-форму

$$\omega_2(0)=*(\omega_0(0)\wedge\omega_1(0)). \tag{65}$$

Осуществим параллельный перенос 1-форм $\omega_i(0)$, $i=0,1,2$, вдоль геодезической $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$. В результате получим 1-формы $\omega_i(t)$. Поскольку параллельный перенос сохраняет длины и углы, из формул (62)–(65) следует, что 1-формы $\omega_i(t)$, $i=0,1,2$, образуют ортонормированный базис 1-форм в $\Lambda^1(\mathbf{x}(t))$. Тогда в окрестности отрезка геодезической $\gamma[0,T]$ и в окрестности 1-формы $d\theta$ мы можем определить оператор $e_1(\mathcal{Z})$, так что

$$e_1(d\theta)(\mathbf{x}(t))=\omega_1(t) \tag{66}$$

Из формул (28) и (65) следует, что

$$e_2(d\theta)(\mathbf{x}(t))=\omega_2(t) \tag{67}$$

Справедлива лемма

**Лемма 7.** *Вещественнозначные 1-формы $e_i(d\theta)(\mathbf{x}(t)) = \omega_i(t)$, $i = 0,1,2$. образуют ортонормированный базис в $\Lambda^1(\mathbf{x}(t))$*

$$*(*\omega_i(t) \wedge \omega_j(t)) = \delta_{ij}, \quad i,j = 0,1,2.$$

*1-формы $\omega_i(t)$ получаются параллельным переносом вещественнозначных 1-форм $e_i(d\theta)(\mathbf{x}(0)) = \omega_i(0)$, $i = 0,1,2$, вдоль геодезической $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$. Кроме того,*

$$\begin{aligned} \omega_2(t) &= *(\omega_0(t) \wedge \omega_1(t)), \\ \omega_0(t) &= *(\omega_1(t) \wedge \omega_2(t)), \\ \omega_1(t) &= *(\omega_2(t) \wedge \omega_0(t)). \end{aligned} \tag{68}$$

**Доказательство.** Для доказательства леммы достаточно заметить, что формулы (68) следуют из формул (30), поскольку $h(d\theta)(\mathbf{x}(t)) = 1$. Используя это замечание, а также формулы (66), (67) и (44) мы получим выражения для $\vec{\mathcal{V}}_i^-(d\theta)(\mathbf{x}(t))$, $i = 1,2$,

$$\vec{\mathcal{V}}_1^-(\omega_0(t)) = 2^{-1/2} \begin{pmatrix} \varrho^{-1/2}(\mathbf{x}(t))\omega_1(t) \\ \varrho^{1/2}(\mathbf{x}(t))\omega_2(t) \end{pmatrix},$$

$$\vec{\mathcal{V}}_2^-(\omega_0(t)) = 2^{-1/2} \begin{pmatrix} \varrho^{-1/2}(\mathbf{x}(t))\omega_2(t) \\ -\varrho^{1/2}(\mathbf{x}(t))\omega_1(t) \end{pmatrix}. \tag{69}$$

В результате мы получаем следующее выражение для нулевого приближения электромагнитного поля при $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$

$$\vec{\mathcal{U}}_{(0)}(\mathbf{x}(t), t) = \widetilde{\Phi}^1_{(0)}(t)\vec{\mathcal{V}}_1^-(\omega_0(t)) + \widetilde{\Phi}^2_{(0)}(t)\vec{\mathcal{V}}_2^-(\omega_0(t)),$$

где функции

$$\widetilde{\Phi}^i_{(0)}(t) = \Phi^i_{(0)}(\mathbf{x}(t), t), \quad i = 1,2,$$

будут определены далее.

Следующие члены разложения Тейлора могут быть построены после построения следующих членов разложения для $e_1(d\theta)$, удовлетворяющих свойству ортогональности $d\theta$.

**Уравнения высших приближений.**

В этом параграфе мы рассмотрим процедуру решения уравнения (15) для $n \geq 1$. В основном мы будем исследовать это уравнение при $n = 1$. При $n \geq 2$ мы опишем рекуррентную процедуру для его решения. Анализируя уравнение (15) при $n = 1$, мы видим, что эта неоднородная система алгебраических уравнений с определителем равным нулю. Для существования решений этой системы мы должны выполнить соответствующие условия разрешимости.

**Лемма 8.** *Система* (15) *разрешима в том и только том случае, когда для любого* $\mathbf{x}$ *из окрестности геодезической* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ *имеем*

$$\left\langle \mathcal{J}^{-1}\mathcal{F}\vec{\mathcal{U}}_{(n-1)}, \vec{\mathcal{V}}_i^-(\overline{d\theta})\right\rangle_{\mathbf{x}} =$$

$$= *((\mathcal{F}\vec{\mathcal{U}}_{(n-1)})_e \wedge \mathcal{V}_{ie}^-(d\theta) + (\mathcal{F}\vec{\mathcal{U}}_{(n-1)})_h \wedge \mathcal{V}_{ih}^-(d\theta)) = 0, \qquad (70)$$

*при* $i = 1, 2$.

**Доказательство.** Пусть система уравнений (15) разрешима. Перепишем ее покомпонентно, умножив первое уравнение на $\mathcal{V}_{ie}^-(d\theta)$, а второе на $\mathcal{V}_{ih}^-(d\theta)$ и суммируя полученные выражения, получим

$$(d\theta \wedge \mathcal{V}_{ih}^-(d\theta) + h(d\theta) *_\epsilon \mathcal{V}_{ie}^-(d\theta)) \wedge \mathcal{U}_{(n)e} -$$

$$-(d\theta \wedge \mathcal{V}_{ie}^-(d\theta) - h(d\theta) *_\mu \mathcal{V}_{ih}^-(d\theta)) \wedge \mathcal{U}_{(n)h} = 0. \qquad (71)$$

На последнем шаге мы использовали, что $\vec{\mathcal{V}}_i^-(d\theta)$, $i = 1, 2$, являются собственными векторами $\mathcal{N}(d\theta)$, соответствующие собственному числу $-h(d\theta)$.

Пусть справедлива формула (71). Разложим $\mathcal{J}^{-1}\mathcal{F}\vec{\mathcal{U}}_{(n-1)}$ по базису $\vec{\mathcal{V}}_i^\pm(d\theta)$

$$\mathcal{J}^{-1}\mathcal{F}\vec{\mathcal{U}}_{(n-1)} = \sum_{\pm} d_0^\pm \vec{\mathcal{V}}_0^\pm(d\theta) + \sum_{i=1,2} d_i^- \vec{\mathcal{V}}_i^+(d\theta).$$

Будем искать $\vec{\mathcal{U}}_{(n)}$ в виде разложения по базису $\vec{\mathcal{V}}_i^\pm(d\theta)$, $i = 0, 1, 2$,

$$\vec{\mathcal{U}}_{(n)} = \sum_{i=0}^{2}\sum_{\pm} c_i^\pm \vec{\mathcal{V}}_i^\pm(d\theta). \qquad (72)$$

Подставляя разложение (72) в систему уравнений (15) и приравнивая коэффициенты при различных собственных векторах, получим

$$c_0^+ = d_0^+/h(d\theta), \qquad c_0^- = d_0^-/h(d\theta),$$
$$c_1^+ = d_1^+/(2h(d\theta)), \qquad c_2^+ = d_2^+/(2h(d\theta)).$$

Коэффициенты $c_1^-$ и $c_2^-$ не находятся на этом этапе. Лемма доказана.

Согласно лемме 7 для разрешимости системы уравнений (15) при $n=1$ необходимо и достаточно выполнения условий разрешимости

$$*((\mathcal{F}\vec{\mathcal{U}}_{(0)})_e \wedge \mathcal{V}_{ie}^-(d\theta) + (\mathcal{F}\vec{\mathcal{U}}_{(0)})_h \wedge \mathcal{V}_{ih}^-(d\theta)) = 0$$

при $i=1,2$. Используя формулы (13) и (61) а также теорему 1, эти условия можно переписать в виде

$$\partial_t \Phi_{(0)}^i + \sum_{j=1}^{2} \{*(l_{ij} \wedge d\Phi_{(0)}^j) + a_{ij}\Phi_{(0)}^j\} = 0,$$

где $l_{ij}$, $i,j=1,2$, есть 2-формы,

$$l_{ij} = \mathcal{V}_{ie}^-(d\theta) \wedge \mathcal{V}_{jh}^-(d\theta) + \mathcal{V}_{je}^-(d\theta) \wedge \mathcal{V}_{ih}^-(d\theta),$$

а $a_{ij}$, $i,j=1,2$, – скалярные функции,

$$a_{ij} =< \partial_t \vec{\mathcal{V}}_j^-(d\theta), \vec{\mathcal{V}}_i^-(\overline{d\theta}) >_{\mathbf{x}} + *[d\mathcal{V}_{je}^-(d\theta) \wedge \mathcal{V}_{ih}^-(d\theta) - d\mathcal{V}_{jh}^-(d\theta) \wedge \mathcal{V}_{ie}^-(d\theta)].$$

Несложные вычисления показывают, что

$$l_{11} = l_{22} = h^{-1}(d\theta) * (d\theta),$$

$$l_{12} = l_{21} = \mathcal{V}_{1e}^-(d\theta) \wedge \mathcal{V}_{2h}^-(d\theta) + \mathcal{V}_{2e}^-(d\theta) \wedge \mathcal{V}_{1h}^-(d\theta) = 0,$$

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{2} * d(h^{-1}(d\theta) * d\theta).$$

Наконец

$$a_{21} = -a_{12} = -a,$$

где

$$a = -\frac{1}{2}h^{-1}(d\theta) * \{- * \partial_t(\mathcal{U}_h(d\theta)) \wedge \mathcal{U}_e(d\theta) + *\partial_t(\mathcal{U}_e(d\theta)) \wedge \mathcal{U}_h(d\theta) +$$

$$+ \varrho^{-1} d(\mathcal{U}_h(d\theta)) \wedge \mathcal{U}_h(d\theta) + \varrho d(\mathcal{U}_e(d\theta)) \wedge \mathcal{U}_e(d\theta)\}. \qquad (73)$$

**Лемма 9.** *Условия разрешимости ситемы уравнений* (15) *при* $n = 1$ *эквивалентны системе уравнений*

$$h\partial_t\Phi^i_{(0)} + *(*d\theta\wedge d\Phi^i_{(0)}) + \frac{1}{2}h*d(h^{-1}*d\theta)\Phi^i_{(0)} + (-1)^{i+1}ha\Phi^{3-i}_{(0)} = 0, \quad (74)$$

*где* $a$ *задается формулой* (73).

Для решения этой системы уравнений мы будем искать функции $\Phi^i_{(0)}$, $i = 1, 2$, в виде разложений Тейлора по $\tilde{\mathbf{y}}$, $\tilde{\mathbf{y}} = Y^{-1}\mathbf{y} = Y^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t))$,

$$\Phi^i_{(0)} = \sum_{l\geq 0}\Phi^i_{(0)l}(\tilde{\mathbf{y}}; t). \quad (75)$$

Здесь $\Phi^i_{(0)l}(\tilde{\mathbf{y}}; t)$, $l = 0, 1, \ldots,$ – однородные многочлены степени $l$ по $\tilde{\mathbf{y}}$ с коэффициентами, зависящими от $t$. Подставляя разложение (75) в систему уравнений (74) и используя систему уравнений Гамильтона (52) и линейную систему (58), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для $\Phi^i_{(0)l}$.

$$\partial_t\Phi^i_{(0)l} + \frac{1}{2}b_0(t)\Phi^i_{(0)l} + (-1)^{i+1}a_0\Phi^{3-i}_{(0)l} = \mathcal{G}^i_l. \quad (76)$$

Здесь

$$b_0(t) = *d(h^{-1}*d\theta)\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)},$$

$$a_0(t) = a\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)},$$

а $\mathcal{G}^i_l$ – однородные многочлены степени $l$ по $\tilde{\mathbf{y}}$ с коэффициентами, зависящими от однородных многочленов $\Phi^i_{(0)n}$, $n < l$.

Найдем теперь выражения для скалярных функций $b_0(t)$ и $a_0(t)$.

$$b_0(t) = *d(h^{-1}*d\theta)\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} = -*(dh\wedge *d\theta) + *d*d\theta\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} =$$

$$-g^{ij}\partial_i h\partial_j\theta + g^{-1/2}\partial_i(g^{ij}g^{1/2}\partial_j\theta)\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} =$$

$$= g^{ij}\frac{dp_i}{dt}p_j + \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^i}p_j + \frac{1}{2}\frac{\partial\ln g}{\partial x^i}g^{ij}p_j + g^{ij}H_{ir}\frac{dx^r}{dt}p_j + g^{ij}H_{ij} =$$

$$= tr\left[B^t + CH\right] + \frac{d}{dt}\ln\sqrt{g} = tr\left(\frac{dY}{dt}Y^{-1}\right) + \frac{d}{dt}\ln\sqrt{g} =$$

$$= \frac{d}{dt}\ln\det Y + \frac{d}{dt}\ln\sqrt{g} = \frac{d}{dt}\ln\left[\det Y\sqrt{g}\right].$$

Наконец вычислим $a_0(t)$. Используя формулы (35), нетрудно получить следующее представление для $a_0(t)$

$$a_0(t) = -\frac{1}{2}\varrho(\mathbf{x}(t)) * \{*\partial_t e_2(d\theta) \wedge e_1(d\theta) - *\partial_t e_1(d\theta) \wedge e_2(d\theta) +$$

$$a_0(t) = -\frac{1}{2}\varrho(\mathbf{x}(t)) * \{-e_0(t)(d\theta) \wedge e_2(d\theta) \wedge \partial_t e_2(d\theta) -$$

$$-e_0(d\theta) \wedge e_1(d\theta) \wedge \partial_t(d\theta) + de_1(d\theta) + de_2(d\theta)\}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)}.$$

Выражение для $a_0(t)$ инварианто по отношению к замене координат. Поэтому выберем систему координат, в которой эти вычисления наиболее просты. Такой системой координат в данном случае является система координат Ферми вблизи геодезической $\gamma : \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$. Эти координаты могут быть введены посредством следующей процедуры. Пусть $E_i(t)$ есть ковекторные поля, параллельные вдоль геодезической $\gamma$ и соответствующие 1-формам $\omega_i(t)$. Тогда отображение

$$h(x^1, x^2, x^3) = \exp_{\gamma(x^3)} \sum_{i=1}^{2} x^i E_i \tag{77}$$

задает координаты Ферми в окрестности отрезка геодезической $\gamma[0, T]$. В этих координатах

$$g_{ij}(0, 0, x^3) = \delta_{ij}, \quad \partial_k g_{ij}(0, 0, x^3) = 0.$$

Используя эти координаты, получим

$$*(e_0(d\theta) \wedge e_2(d\theta) \wedge \partial_t e_2(d\theta))_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} =$$

$$= * \left( \omega_0(t) \wedge \omega_2(t) \wedge \left[ \frac{d\omega_2}{dt} - \frac{\partial e_2(d\theta)}{\partial y^i} \frac{dx^i}{dt} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} \right) = \left. \frac{\partial e_{21}}{\partial y^3} \right|_{\mathbf{y}=0}.$$

Аналогично,

$$*\,(e_0(d\theta) \wedge e_1(d\theta) \wedge \partial_t e_1(d\theta))_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} =$$

$$*(dx^3 \wedge dx^1 \wedge \left( -\frac{\partial e_1}{\partial y^i} \frac{dx^i}{dt} \right)) = - \left. \frac{\partial e_{12}}{\partial y^3} \right|_{\mathbf{y}=0}.$$

Далее

$$*(de_1(d\theta) \wedge e_1(d\theta))_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} = *(de_1(d\theta)_{\mathbf{y}=0} \wedge dx^1) = \left. \left( \frac{\partial e_{13}}{\partial y^2} - \frac{\partial e_{12}}{\partial y^3} \right) \right|_{\mathbf{y}=0},$$

$$*(de_2(d\theta)\wedge e_2(d\theta))_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} = \left(\frac{\partial e_{21}}{\partial y^3}-\frac{\partial e_{23}}{\partial y^1}\right)\bigg|_{\mathbf{y}=0}.$$

Используя эти формулы, получим

$$a_0(t) = -\frac{1}{2}\varrho(\mathbf{x}(t))\left\{-\frac{\partial e_{21}}{\partial y^3}+\frac{\partial e_{12}}{\partial y^3}+\frac{\partial e_{13}}{\partial y^2}-\frac{\partial e_{12}}{\partial y^3}+\frac{\partial e_{21}}{\partial y^3}-\right.$$

$$\left.\frac{\partial e_{23}}{\partial y^1}\right\}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} = -\frac{1}{2}\varrho(\mathbf{x}(t))\left\{\frac{\partial e_{13}}{\partial y^2}-\frac{\partial e_{23}}{\partial y^1}\right\}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)}. \qquad (78)$$

Используя формулу (28) и свойства координат Ферми, получим

$$e_{23j}y^j = -e_{02j}y^j = -H_{2j}y^j,$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial e_{23}}{\partial y^1}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} = -H_{21}(t). \qquad (79)$$

Аналогично, используя формулу (29), мы получим при $i = 0$, $j = 1$

$$\frac{\partial e_{13}}{\partial y^2}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} = -H_{12}(t). \qquad (80)$$

Подставляя формулы (79) и (80) в выражение (78), получим окончательно

$$a_0(t) = -\frac{1}{2}\varrho(\mathbf{x}(t))(-H_{12}(t)+H_{21}(t)) = 0.$$

В последнем равенстве мы использовали симметрию матрицы $H$.

Так как $a_0(t) = 0$, система уравнений (76) распадается на два независимых уравнения для $\Phi^i_{(0)l}$,

$$\partial_t\Phi^i_{(0)l} + \frac{1}{2}b_0(t)\Phi^i_{(0)l} = \mathcal{G}^i_l. \qquad (81)$$

Решая эти системы уравнений, мы последовательно найдем $\Phi^i_{(0)l}$, $i = 1, 2$, $l = 0, 1, \ldots$.

$$\Phi^i_{(0)l}(\mathbf{y};t) = (\det\, Y(t))^{-1/2}g^{-1/4}(\mathbf{x}(t))\times$$

$$\times\Big[(\det\, Y(0))^{1/2}g^{1/4}(\mathbf{x}(0))\Phi^i_{(0)l}(\mathbf{y};0)+$$

$$+ \int_0^t (\det\, Y(s))^{1/2} g^{1/4}(\mathbf{x}(s)) \mathcal{G}_l^i(\mathbf{y}; s) ds \Bigg] . \qquad (82)$$

В частности,

$$\Phi^i_{(0)0}(t) = \left[\frac{g(\mathbf{x}(0))}{g(\mathbf{x}(t))}\right]^{1/4} \sqrt{\frac{\det\, Y(0)}{\det\, Y(t)}} \Phi^i_{(0)0}(0). \qquad (83)$$

Заметим, что $\det Y(t) \neq 0$ для любого $t$, так что $\Phi^i_{(0)}$ являются гладкими функциями.

После решения уравнений разрешимости мы можем окончательно найти $\vec{\mathcal{U}}_{(0)}(\mathbf{x}, t)$, если нам заданы $\Phi^i_{(0)}(\mathbf{x}; 0)$ как разложения Тейлора по $\mathbf{y}$.

Теперь мы можем решить систему уравнений (15) при $n = 1$. Для этого мы будем искать $\vec{\mathcal{U}}_{(1)}$ в виде разложений по $\vec{\mathcal{V}}_i^{\pm}(d\theta)$

$$\vec{\mathcal{U}}_{(1)}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^{2} \sum_{\pm} \Phi^{i,\pm}_{(1)}(\mathbf{x}, t) \vec{\mathcal{V}}_i^{\pm}(d\theta).$$

Подставляя это разложение в систему уравнений (15) и умножая на $\vec{\mathcal{V}}_j^{\pm}(\overline{d\theta})$, $j = 0, 1, 2$, получим

$$\Phi^{0,\pm}_{(1)}(\mathbf{x}, t) = h^{-1}(d\theta) < \mathcal{J}^{-1}\mathcal{F}\vec{\mathcal{U}}_{(0)}, \vec{\mathcal{V}}_0^{\pm}(\overline{d\theta}) >_{\mathbf{x}},$$

$$\Phi^{i,+}_{(1)}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} h^{-1}(d\theta) < \mathcal{J}^{-1}\mathcal{F}\vec{\mathcal{U}}_{(0)}, \vec{\mathcal{V}}_i^{+}(\overline{d\theta}) >_{\mathbf{x}}, \quad i = 1, 2.$$

Функции $\Phi^{i,-}_{(1)}(\mathbf{x}, t)$, $i = 1, 2$, могут быть найдены из условий разрешимости системы уравнений (15) при $n = 2$. Условия разрешимости могут быть записаны как уравнения для функций $\Phi^{i,-}_{(1)}$ вида (74) но с правой частью, которая также зависит от $\vec{\mathcal{U}}_{(0)}$. Разлагая $\Phi^{i,-}_{(1)}(\mathbf{x}, t)$ в ряды Тейлора по $\tilde{\mathbf{y}}$ вида (75), мы получим систему уравнений

$$\partial_t \Phi^{i,-}_{(1)l} + \frac{1}{2} b_0(t) \Phi^{i,-}_{(1)l} = \mathcal{G}^i_{(1)l},$$

где $\mathcal{G}^i_{(1)l}$ зависит от $\Phi^{j,-}_{(1)k}$, $k < l$, $j = 1, 2$, и $\vec{\mathcal{U}}_{(0)}$.

Все остальные члены асимптотических разложений $\vec{\mathcal{U}}_{(n)}(\mathbf{x}, t)$ могут быть получены с помощью рекуррентной процедуры. В результате получаем следующую теорему

**Теорема 2.** *Пусть $\Theta^0(\mathbf{x})$ удовлетворяет условиям леммы 5 и последовательность функций $\Psi^i_{(j)}(\mathbf{x})$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1, \ldots$, задана их разложениями Тейлора*

$$\Psi^i_{(j)}(\mathbf{x}) = \sum_{l\geq 0} \Psi^i_{(j)l}(\mathbf{y}).$$

*Тогда существует асимптотическое решение $\vec{\mathcal{U}}(\mathbf{x}, t)$ уравнений Максвелла вида (5) с фазовой функцией, удовлетворяющей свойствам леммы 5 (решение в виде гауссового пучка). Это решение удовлетворяет начальным условиям*

$$< \vec{\mathcal{U}}_{(l)}(\mathbf{x}, t), \vec{\mathcal{V}}_i^-(\overline{d\theta}) >_{\mathbf{x}} \Big|_{t=0} = \Psi^i_{(l)}(\mathbf{x}),$$

*понимаемым в смысле равенства разложений Тейлора.*

Построение гауссовых пучков для уравнений Максвелла, т.е. решений уравнений (4) имеющих вид (5) с фазовой функцией, удовлетворяющей условиям (47), закончено.

## Литература


1. В. М. Бабич, Т. Ф. Панкратова , *Функция Грина смешанной задачи для волнового уравнения с переменным коэффициентом.* — Сб. Проблемы математической физики, ЛГУ **6** (1973 ), 9–27 .
2. В. М. Бабич, В. В. Улин , *Комплексные пространственно-временной лучевой метод и квазифотоны.* Зап. научн. семин. ПОМИ 117 (1981), 5–12 .
3. А. П. Качалов , *Нестационарные электромагнитные гауссовы пучки в неоднородных анизотропных средах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **264** (2000 ), 83–100 .
4. A. Katchalov, Y. Kurylev, and M. Lassas , *Inverse boundary spectral problems Chapman & Hall/ CRC.* 2001 , pp. 290 .
5. D. Baldomir, P. Hammond , *Geometry of Electromagnetic System.* 1996 .



Katchalov A. P. Gaussian beams for the Maxwell equations on a manifold.

Space-time Gaussian beams of the quasyphoton type for the Maxwell equations on a manifold were constructed in the case of multiple characteristics.



С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН


Поступило 4 марта 2002 г.