Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 284, 2002 г.

Л. Ю. Колотилина

ОЦЕНКИ И НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПЕРРОНОВСКОГО КОРНЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

§1. Введение

Этой статьей мы начинаем серию публикаций, в которых переосмысливаются и обобщаются некоторые классические результаты из трех взаимосвязанных разделов теории матриц. К ним относятся критерии вырожденности/невырожденности комплексных матриц, описание областей, содержащих или не содержащих собственные значения комплексных матриц, а также оценки и неравенства для перроновского корня неотрицательной матрицы. В отличие от общепринятого подхода, мы начинаем с результатов, относящихся к перроновскому корню, а затем, основываясь на них, мы получим критерии вырожденности/невырожденности и соответствующие теоремы локализации для собственных значений произвольных матриц.

В этой статье мы рассматриваем те оценки и неравенства для перроновского корня, которые могут быть получены на основе его свойства монотонности (см. теорему 1.1 ниже). Контурные версии этих результатов будут представлены в следующей статье.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, – неотрицательная матрица. Напомним, что, по определению, перроновский корень $\rho(A)$ матрицы A – это неотрицательное собственное значение A, совпадающее с ее спектральным радиусом, т.е.

$$\rho(A) = \max_{i\in\langle n\rangle} |\lambda_i(A)|,$$

где $\{\lambda_i(A)\}_{i=1}^{n}$ – множество собственных значений матрицы A, а $\langle n\rangle = \{1,\dots,n\}$, $n \geqslant 1$, – индексное множество.

Как хорошо известно (см., например, [1, следствие 2.1.5]), перроновский корень обладает следующим простым, но принципиально важным свойством монотонности.

Теорема 1.1. *Пусть* $A = (a_{ij})$ *и* $B = (b_{ij})$ *– неотрицательные матрицы порядка* $n \geqslant 1$ *и пусть* $A \geqslant B$, *т.е.*

$$a_{ij} \geqslant b_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$\rho(A) \geqslant \rho(B),$$

а если матрица A *неприводима и* $B \neq A$, *то*

$$\rho(A) > \rho(B).$$

Ниже мы приведем некоторые из классических оценок и неравенств для перроновского корня неотрицательной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка $n \geqslant 1$, которые встретятся в последующих параграфах. Эти результаты формулируются в терминах диагональных элементов матрицы A и либо строчных и/или столбцовых сумм

$$r_i(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$c_i(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

либо усеченных сумм

$$r'_i(A) = r_i(A) - a_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$c'_i(A) = c_i(A) - a_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ji}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Простейшая нижняя оценка

$$\rho(A) \geqslant \max_{i \in \langle n \rangle} a_{ii} \tag{1.1}$$

и простейшие двусторонние оценки

$$\min_{i \in \langle n \rangle} r_i(A) \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} r_i(A) \tag{1.2}$$

принадлежат Фробениусу [5]. Конечно же, поскольку

$$\rho(A) = \rho(A^T)$$

и для любого $i \in \langle n \rangle$

$$c_i(A) = r_i(A^T),$$

из оценок (1.2) следуют их столбцовые аналоги

$$\min_{i \in \langle n \rangle} c_i(A) \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} c_i(A). \tag{1.3}$$

Оценка (1.1) была улучшена Брауэром и Джентри, показавшими [4], что перроновский корень неприводимой матрицы A удовлетворяет нижней оценке

$$\rho(A) > \frac{1}{2} \max_{i \neq j} \{a_{ii} + a_{jj} + [(a_{ii} - a_{jj})^2 + 4a_{ij}a_{ji}]^{1/2}\}. \tag{1.4}$$

Островский в работе [11] доказал, что для любого $\alpha \in [0, 1]$ каждое собственное значение λ произвольной матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 1$, при некотором $i \in \langle n \rangle$ удовлетворяет неравенству[1]

$$|\lambda - a_{ii}| \leqslant r'_i(A)^\alpha c'_i(A)^{1-\alpha}.$$

В частности, если A – неотрицательная матрица, то для любого $\alpha \in [0, 1]$ найдется индекс $i \in \langle n \rangle$, такой что

$$|\rho(A) - a_{ii}| \overset{(1.1)}{=} \rho(A) - a_{ii} \leqslant r'_i(A)^\alpha c'_i(A)^{1-\alpha},$$

откуда следует, что

$$\rho(A) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} \{a_{ii} + r'_i(A)^\alpha c'_i(A)^{1-\alpha}\}, \quad \alpha \in [0, 1]. \tag{1.5}$$

Далее, поскольку в силу неравенства Гельдера мы имеем

$$\begin{aligned} a_{ii} + r'_i(A)^\alpha c'_i(A)^{1-\alpha} &= a_{ii}^\alpha a_{ii}^{1-\alpha} + r'_i(A)^\alpha c'_i(A)^{1-\alpha} \\ &\leqslant [a_{ii} + r'_i(A)]^\alpha [a_{ii} + c'_i(A)]^{1-\alpha} = r_i(A)^\alpha c_i(A)^{1-\alpha}, \end{aligned}$$

из (1.5) следует, что для $\rho(A)$ также справедлива и оценка

$$\rho(A) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} \{r_i(A)^\alpha c_i(A)^{1-\alpha}\}, \quad \alpha \in [0, 1]. \tag{1.6}$$

[1] Если матрица A не является неотрицательной, то величины $r_i(A)$, $r'_i(A)$, $c_i(A)$ и $c'_i(A)$ определяются как суммы абсолютных величин соответствующих элементов A.

Особенностью оценок (1.5) и (1.6), отличающей их от оценок Фробениуса (1.2), является то обстоятельство, что в них одновременно участвуют как строчные, так и столбцовые (усеченные) суммы. В дальнейшем оценки такого типа мы будем называть смешанными.

Следующее улучшение оценок Фробениуса (1.2) для случая неприводимых матриц было предложено Брауэром и Джентри [3]:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\min_{i\neq j}\{a_{ii}+a_{jj}+[(a_{ii}-a_{jj})^2+4r_i'(A)r_j'(A)]^{1/2}\} \\ \leqslant \rho(A)\leqslant \frac{1}{2}\max_{i\neq j}\{a_{ii}+a_{jj}+[(a_{ii}-a_{jj})^2+4r_i'(A)r_j'(A)]^{1/2}\}. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Заметим, что верхняя оценка в (1.7) непосредственно следует из более общего результата Островского [10] и Брауэра [2], утверждающего, что каждое собственное значение λ произвольной комплексной матрицы A порядка $n\geqslant 2$ при некоторых $i\neq j$ удовлетворяет неравенству

$$|\lambda-a_{ii}|\,|\lambda-a_{jj}|\leqslant r_i'(A)r_j'(A). \tag{1.8}$$

Упомянем, наконец, что неравенство (1.8) было обобщено Островским [11], доказавшим, что для любого $\alpha\in[0,1]$ собственное значение λ удовлетворяет и смешанному неравенству

$$|\lambda-a_{ii}|\,|\lambda-a_{jj}|\leqslant r_i'(A)^\alpha c_i'(A)^{1-\alpha}r_j'(A)^\alpha c_j'(A)^{1-\alpha}, \tag{1.9}$$

где $i,j\in\langle n\rangle$, $i\neq j$.

В применении к перроновскому корню неравенство (1.9) принимает вид

$$\begin{gathered} [\rho(A)-a_{ii}]\,[\rho(A)-a_{jj}] \\ \leqslant r_i'(A)^\alpha c_i'(A)^{1-\alpha}r_j'(A)^\alpha c_j'(A)^{1-\alpha},\quad i\neq j,\quad \alpha\in[0,1]. \end{gathered} \tag{1.10}$$

Конечно же, для перроновского корня известно много других оценок, не упомянутых выше. Мы отобрали только те основные оценки, которые могут быть доказаны и обобщены с помощью подхода, предлагаемого в этой статье.

Статья построена следующим образом. В §2 приводятся некоторые нижние оценки $\rho(A)$, которые могут быть получены переходом к главным подматрицам A или заменой некоторых элементов

A нулями. Как мы убедимся, таким способом могут быть выведены как оценки Фробениуса (1.1), так и улучшенные оценки (1.4).

В §3 предложено обобщение двусторонних оценок Фробениуса (1.2).

Обобщения смешанных верхних оценок Островского (1.5) и (1.6) представлены в §4.

В §5 устанавливаются оценки и неравенства для перроновского корня, явно зависящие от структуры разреженности матрицы A или, другими словами, от множества дуг в ориентированном графе (орграфе) D_A матрицы A.

В заключительном §6 мы приводим оценки и неравенства для $\rho(A)$, зависящие от путей фиксированной длины $k \geqslant 1$ в $D(A)$ и обобщающие результаты §5.

Мы завершаем этот параграф сводкой обозначений, используемых в статье.

- I_n (или просто I) обозначает единичную матрицу порядка n.
- $e = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$ – единичный вектор.
- Векторы $r(A)$, $c(A)$, $r'(A)$ и $c'(A)$ определяются по формулам

$$r(A) = (r_i(A))_{i=1}^n, \quad c(A) = (c_i(A))_{i=1}^n,$$

$$r'(A) = (r'_i(A))_{i=1}^n, \quad c'(A) = (c'_i(A))_{i=1}^n.$$

- Если $v = (v_i)_{i=1}^n$ – некоторый вектор, то

$$D_v = \operatorname{diag}(v_1, \dots, v_n).$$

- Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ и $S_1, S_2 \subseteq \langle n \rangle$, то

$$A[S_1, S_2] = (a_{ij})_{\substack{i \in S_1 \\ j \in S_2}}$$

  – это подматрица матрицы A, определенная индексными подмножествами S_1 и S_2; главная подматрица $A[S, S]$ обозначается также через $A[S]$.
- Если $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, то D_A обозначает диагональную часть A, т.е.

$$D_A = \operatorname{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}).$$

§2. Оценки через перроновский корень главных подматриц и их дополнений

Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$. Из свойства монотонности перроновского корня легко следует, что для любого собственного подмножества $S \subset \langle n \rangle$ множества индексов справедливо неравенство

$$\rho(A) \geqslant \rho(A[S]). \tag{2.1}$$

Более того, если матрица A неприводима, то неравенство (2.1) является строгим.

В частности, взяв

$$S_i = \{i\}, \quad i \in \langle n \rangle,$$

мы немедленно получаем нижнюю оценку Фробениуса (1.1):

$$\rho(A) \geqslant \max_{i \in \langle n \rangle} a_{ii}, \tag{2.2}$$

причем для неприводимой матрицы A порядка $n \geqslant 2$ эта оценка является строгой.

Если $n \geqslant 2$, то, полагая в (2.1)

$$S_{ij} = \{i, j\}, \quad i \neq j, \quad i, j \in \langle n \rangle,$$

мы приходим к нижней оценке

$$\rho(A) \geqslant \max_{i \neq j} \rho\left(\begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{bmatrix}\right). \tag{2.3}$$

Поскольку, как легко видеть,

$$\rho\left(\begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\{a_{ii} + a_{jj} + [(a_{ii} - a_{jj})^2 + 4a_{ij}a_{ji}]^{1/2}\},$$

то для произвольной неотрицательной матрицы A порядка $n \geqslant 2$ из (2.3) следует нижняя оценка

$$\rho(A) \geqslant \frac{1}{2}\max_{i \neq j}\{a_{ii} + a_{jj} + [(a_{ii} - a_{jj})^2 + 4a_{ij}a_{ji}]^{1/2}\}. \tag{2.4}$$

Кроме того, если $n > 2$ и матрица A неприводима, то, поскольку в этом случае

$$A \neq A[\{i, j\}],$$

теорема 1.1 гарантирует, что справедливо строгое неравенство

$$\rho(A) > \frac{1}{2}\max_{i \neq j}\{a_{ii} + a_{jj} + [(a_{ii} - a_{jj})^2 + 4a_{ij} - a_{ji}]^{1/2}\}, \tag{2.5}$$

совпадающее с оценкой (1.4).

Пусть S – некоторое подмножество множества индексов $\langle n\rangle$. Матрицу $A\{S\} = (\widehat{a}_{ij})_{i,j=1}^n$, где

$$\widehat{a}_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i,j \in S \\ a_{ij} & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad i,j \in \langle n\rangle,$$

будем называть дополнением главной подматрицы $A[S]$ в матрице A.

Если A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$ и S – непустое собственное подмножество множества $\langle n\rangle$, то, по свойству монотонности перроновского корня, мы имеем

$$\rho(A) \geqslant \rho(A\{S\}). \tag{2.6}$$

Кроме того, если матрица A неприводимы и $A[S] \neq 0$, то неравенство в (2.6) является строгим.

В частности, полагая

$$S = \langle n\rangle \setminus \{i\}, \quad i \in \langle n\rangle,$$

и применяя (2.6) к сдвинутой матрице $A - \alpha I_n$, где $\alpha = \min_{i\in\langle n\rangle} a_{ii}$, мы приходим к неравенству

$$\rho(A) \geqslant \rho\left(\begin{bmatrix} & & a_{1i} & & \\ & 0 & \vdots & 0 & \\ & & a_{i-1i} & & \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ & & a_{i+1i} & & \\ & 0 & \vdots & 0 & \\ & & a_{ni} & & \end{bmatrix}\right),$$

равносильному нижней оценке

$$\rho(A) \geqslant \frac{1}{2}\max_{i\in\langle n\rangle}\{a_{ii} - \alpha + [(a_{ii}-\alpha)^2 + 4\sum_{j\neq i} a_{ij}a_{ji}]^{1/2}\}, \tag{2.7}$$

предложенной в [6].

§3. Оценки типа Фробениуса

В начале этого параграфе мы приводим теорему, которая может рассматриваться как обобщение двусторонних оценок Фробениуса (1.2).

Теорема 3.1. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ и пусть*

$$\Delta = \mathrm{diag}\,(\delta_1, \dots, \delta_n), \quad \delta_i > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$\rho(\Delta^{-1}A) \min_{i \in \langle n \rangle} \delta_i \leqslant \rho(A) \leqslant \rho(\Delta^{-1}A) \max_{i \in \langle n \rangle} \delta_i. \tag{3.1}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то оба неравенства в (3.1) *являются равенствами тогда и только тогда, когда Δ – скалярная матрица, т.е. $\Delta = c\,I_n$. В противном случае оба неравенства в* (3.1) *являются строгими.*

Доказательство. Поскольку, очевидно,

$$\min_{i \in \langle n \rangle} \delta_i \ \Delta^{-1}A \leqslant A = \Delta(\Delta^{-1}A) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} \delta_i \ \Delta^{-1}A,$$

то неравенства (3.1) немедленно следуют из теоремы 1.1. Если $\Delta = c\,I_n$ – скалярная матрица, то

$$\max_{i \in \langle n \rangle} \delta_i = \min_{i \in \langle n \rangle} \delta_i = c,$$

и оба неравенства в (3.1) являются равенствами.

Обратно, пусть матрица A неприводима и справедливо равенство

$$\rho(A) = \max_{i \in \langle n \rangle} \delta_i \ \rho(\Delta^{-1}A).$$

В этом случае из теоремы 1.1 необходимо следует, что

$$A = \max_{i \in \langle n \rangle} \delta_i \ \Delta^{-1}A,$$

откуда мы получаем, что

$$\Delta = \max_{i \in \langle n \rangle} \delta_i \ I_n.$$

Случай, когда левое неравенство в (3.1) выполняется с равенством, рассматривается аналогично. □

В дальнейшем мы многократно будем использовать следующий элементарный результат.

Лемма 3.1. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ и пусть D – произвольная диагональная матрица с положительными элементами на главной диагонали. Если матрица A не имеет нулевых строк, то*

$$\rho(D^{-1}_{r(D^{-1}AD)}A) = 1.$$

Аналогично, если A не имеет нулевых столбцов, то

$$\rho(D^{-1}_{c(D^{-1}AD)}A) = 1.$$

Доказательство. Обозначим

$$C = D^{-1}AD.$$

Поскольку A не содержит нулевых строк, вектор $r(C)$ положителен, и выполнено равенство

$$D^{-1}_{r(C)}C = D^{-1}(D^{-1}_{r(C)}A)D,$$

из которого следует, что

$$\rho(D^{-1}_{r(C)}A) = \rho(D^{-1}_{r(C)}C).$$

С другой стороны, поскольку

$$D^{-1}_{r(C)}C\,e = D^{-1}_{r(C)}\,r(C) = e,$$

вектор e является собственным вектором матрицы $D^{-1}_{r(C)}C$ и отвечает ее собственному значению $\lambda = 1$. Следовательно (см., например, [1, следствие 2.1.12]), мы можем заключить, что

$$\rho(D^{-1}_{r(C)}A) = \rho(D^{-1}_{r(C)}C) = 1.$$

Оставшееся утверждение устанавливается таким же образом. □

Предположим, что матрица A не содержит нулевых строк. Применяя теорему 3.1 с матрицей $\Delta = r(D^{-1}AD)$ и используя лемму 3.1, мы тотчас же приходим к двусторонним оценкам

$$\min_{i\in\langle n\rangle} r_i(D^{-1}AD) \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} r_i(D^{-1}AD). \tag{3.2}$$

Если же матрица A имеет нулевые строки, то левое неравенство в (3.2) выполняется тривиальным образом. Для того, чтобы распространить верхнюю оценку из (3.2) на этот общий случай, мы воспользуемся следующим хорошо известным результатом (см., например, [1, следствие 2.1.6.(в)].

Лемма 3.2. *Пусть A – приводимая неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$. Тогда существует непустое собственное подмножество $S \subsetneqq \langle n \rangle$ множества индексов $\langle n \rangle$, такое что подматрица $A[S]$ является неприводимой, и справедливо равенство*

$$\rho(A[S]) = \rho(A).$$

Следовательно, если подмножество S выбрано, как в лемме 3.2, то, принимая во внимание тот очевидный факт, что в неприводимой матрице $A[S]$ нет нулевых строк, и используя (3.2), мы выводим:

$$\rho(A) = \rho(A[S]) \leqslant \max_{i \in S} r_i(\{D^{-1}AD\}[S]) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} r_i(D^{-1}AD).$$

Таким образом, мы установили, что из теоремы 3.1 вытекает следующий результат Фробениуса [5].

Следствие 3.1. *Если A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ и D – диагональная матрица порядка n с положительными элементами на главной диагонали, то*

$$\min_{i \in \langle n \rangle} r_i(D^{-1}AD) \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} r_i(D^{-1}AD). \tag{3.3}$$

Далее, если матрица A неприводима, то либо оба эти неравенства являются строгими, либо

$$r_i(D^{-1}AD) = \rho(A), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Предполагая, что матрица A не имеет нулевых строк и применяя следствие 3.1 к матрице A и

$$D = D_{r(A)},$$

мы приходим к двусторонним оценкам Минка [9, теорема 1.2]:

$$\min_{i \in \langle n \rangle} \frac{r_i(A^2)}{r_i(A)} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} \frac{r_i(A^2)}{r_i(A)}. \tag{3.4}$$

Заметим, что оценки (3.4) улучшают оценки Фробениуса (3.3) с $D = I_n$, поскольку

$$r_i(A^2) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_j(A) \leqslant \max_{j \in \langle n \rangle} r_j(A) r_i(A)$$

и, аналогично,

$$r_i(A^2) \geqslant \min_{j \in \langle n \rangle} r_j(A) r_i(A).$$

В более общем случае, предполагая что вектор $r(A)$ положителен (откуда тривиально следует положительность $r(A^k)$ при $k \geqslant 0$), полагая

$$D = D_{r(A^k)}, \quad k \geqslant 0,$$

и применяя следствие 3.1 к матрице A^s, $s \geqslant 1$, мы приходим к следующему результату, установленному в [12].

Следствие 3.2. *Если A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ без нулевых строк, то*

$$\min_{i \in \langle n \rangle} \left[\frac{r_i(A^{k+s})}{r_i(A^k)} \right]^{1/s} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} \left[\frac{r_i(A^{k+s})}{r_i(A^k)} \right]^{1/s}, \quad k \geqslant 0, \ s \geqslant 1. \tag{3.5}$$

§4. Обобщения верхних оценок Островского

В этом параграфе мы выведем обобщения верхних оценок Островского (1.5) и (1.6). С этой целью мы воспользуемся следующими двумя леммами.

Лемма 4.1. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ и пусть*

$$\Delta_i = \operatorname{diag}(\delta_1^{(i)}, \ldots, \delta_n^{(i)}), \quad i = 1, \ldots, k, \quad k \geqslant 1,$$

– диагональные матрицы с положительными диагональными элементами. Если

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \in [0, 1], \quad i = 1, \ldots, k,$$

то

$$\rho\left(\prod_{i=1}^{k} \Delta_i^{-\alpha_i} A \right) \leqslant \prod_{i=1}^{k} \rho(\Delta_i^{-1} A)^{\alpha_i}. \tag{4.1}$$

Доказательство. Обозначим

$$B_s = \Delta_s^{-1} A, \quad s = 1, \ldots, k.$$

Сперва мы допустим, что матрица A неприводима. В этом случае матрицы B_s, $s = 1, \dots, k$, также неприводимы, и по теореме Перрона–Фробениуса (см., например, [1, теорема 2.1.1]) они имют положительные правые перроновские векторы $u^{(s)} = (u_i^{(s)})_{i=1}^n$, $s = 1, \dots, k$. Таким образом,

$$B_s u^{(s)} = \rho(B_s) u^{(s)}, \quad s = 1, \dots, k.$$

Положим

$$B = \prod_{s=1}^{k} \Delta_s^{-\alpha_s} A,$$

$$d_i = \prod_{s=1}^{k} (u_i^{(s)})^{\alpha_s}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$$

и, наконец,

$$\widetilde{B} = D^{-1} B D.$$

Используя приведенные выше соотношения и неравенство Гельдера, мы выводим:

$$\begin{aligned}
r_i(\widetilde{B}) &= d_i^{-1} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} d_j \\
&= d_i^{-1} \sum_{j=1}^{n} \prod_{s=1}^{k} (\delta_i^{(s)})^{-\alpha_s} a_{ij} \prod_{s=1}^{k} (u_j^{(s)})^{\alpha_s} \\
&= d_i^{-1} \sum_{j=1}^{n} \prod_{s=1}^{k} \left[(\delta_i^{(s)})^{-1} a_{ij}\, u_j^{(s)} \right]^{\alpha_s} \\
&= d_i^{-1} \sum_{j=1}^{n} \prod_{s=1}^{k} \left[(B_s)_{ij} u_j^{(s)} \right]^{\alpha_s} \\
&\leqslant d_i^{-1} \prod_{s=1}^{k} \left[\sum_{j=1}^{n} (B_s)_{ij} u_j^{(s)} \right]^{\alpha_s}
\end{aligned}$$

$$= \prod_{s=1}^{k} (u_i^{(s)})^{-\alpha_s} \prod_{s=1}^{k} \left[\rho(B_s) u_i^{(s)}\right]^{\alpha_s}$$

$$= \prod_{s=1}^{k} \rho(B_s)^{\alpha_s}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, применяя следствие 3.1 с $D = I_n$, мы получаем

$$\rho(B) = \rho(\widetilde{B}) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} r_i(\widetilde{B}) \leqslant \prod_{s=1}^{k} \rho(B_s)^{\alpha_s},$$

что и доказывает требуемое неравенство в неприводимом случае.

Если же матрица A приводима, то B также приводима. В этом случае, используя лемму 3.2, мы можем выбрать собственное подмножество S множества индексов $\langle n \rangle$ так, что $B[S]$ является неприводимой компонентой B, причем

$$\rho(B) = \rho(B[S]).$$

Теперь, применяя (4.1) к неприводимой матрице $B[S]$ и используя (2.1), мы выводим:

$$\rho(B) = \rho(B[S]) \leqslant \prod_{s=1}^{k} \rho(B_s[S])^{\alpha_s} \leqslant \prod_{s=1}^{k} \rho(B_s)^{\alpha_s}.$$

Лемма 4.1 доказана полностью. □

Лемма 4.2. *Пусть $A = D_A + P$ – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$ и пусть*

$$\rho(A) > \max_{i \in \langle n \rangle} a_{ii}. \tag{4.2}$$

Тогда

$$\rho([\rho(A) I_n - D_A]^{-1} P) = 1. \tag{4.3}$$

Доказательство. По теореме Перрона–Фробениуса, найдется неотрицательный вектор $u \neq 0$, такой что

$$Au = \rho(A) u,$$

откуда следует, что

$$Pu = [\rho(A) I_n - D_A] u,$$

а также (поскольку матрица $\rho(A)I_n - D_A$ неотрицательна и обратима ввиду (4.2)), что

$$[\rho(A)I_n - D_A]^{-1}Pu = u.$$

Таким образом, вектор u является неотрицательным собственным вектором неотрицательной матрицы $[\rho(A)I_n - D_A]^{-1}P$ и отвечает собственному значению $\lambda = 1$, откуда и следует (4.3) (см., например, [1, следствие 2.1.12]). □

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть* $A = (a_{ij}) = D_A + P$ *– неотрицательная матрица порядка* $n \geqslant 1$ *и пусть*

$$\Delta_s = \mathrm{diag}\,(\delta_1^{(s)}, \dots, \delta_n^{(s)}), \quad s = 1, \dots, k, \quad k \geqslant 1,$$

– диагональные матрицы с положительными диагональными элементами. Тогда для любых $\alpha_s \in [0,1]$, $s = 1, \dots, k$, *таких что*

$$\sum_{s=1}^{k} \alpha_s = 1,$$

для $\rho(A)$ *справедливы верхние оценки*

$$\rho(A) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} \left\{ \prod_{s=1}^{k} \left[\delta_i^{(s)} \rho(\Delta_s^{-1} A)\right]^{\alpha_s} \right\} \tag{4.4}$$

и

$$\rho(A) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} \left\{ a_{ii} + \prod_{s=1}^{k} \left[\delta_i^{(s)} \rho(\Delta_s^{-1} P)\right]^{\alpha_s} \right\}. \tag{4.5}$$

Доказательство. В обозначениях леммы 4.1 мы имеем

$$A = \prod_{s=1}^{k} \Delta_s^{\alpha_s} B.$$

Поскольку, очевидно,

$$\prod_{s=1}^{k} \Delta_s^{\alpha_s} B \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} \left\{ \prod_{s=1}^{k} [\delta_i^{(s)}]^{\alpha_s} \right\} B,$$

то оценка (4.4) тривиально следует из свойства монотонности перроновского корня и леммы 4.1.

Для доказательства неравенства (4.5) заметим сперва, что оно выполняется тривиальным образом, если $\rho(A) = a_{ii}$ для некоторого $i \in \langle n \rangle$. Поэтому, принимая во внимание неравенство (2.2), мы можем предположить, что

$$\rho(A) > \max_{i \in \langle n \rangle} a_{ii}.$$

В этом предположении матрица

$$D = \rho(A) I_n - D_A$$

обратима. Применяя при $n \geqslant 2$ неравенство (4.4) к матрице $D^{-1}P$ с заменой Δ_s на $D^{-1}\Delta_s$ и используя лемму 4.2, мы выводим:

$$\begin{aligned} 1 = \rho(D^{-1}P) &\leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} \left\{ \prod_{s=1}^{k} \left[\frac{\delta_i^{(s)}}{\rho(A) - a_{ii}} \rho([D^{-1}\Delta_s]^{-1}[D^{-1}P]) \right]^{\alpha_s} \right\} \\ &= \max_{i \in \langle n \rangle} \left\{ \frac{\prod_{s=1}^{k} [\delta_i^{(s)} \rho(\Delta_s^{-1}P)]^{\alpha_s}}{\rho(A) - a_{ii}} \right\}. \end{aligned}$$

Доказанное неравенство означает, что для некоторого $i \in \langle n \rangle$ справедливо неравенство

$$\rho(A) \leqslant a_{ii} + \prod_{s=1}^{k} [\delta_i^{(s)} \rho(\Delta_s^{-1}P)]^{\alpha_s}.$$

В случае $n = 1$ мы имеем $P = 0$, $\rho(\Delta_s^{-1}P) = 0$, и неравенство (4.5) очевидно верно. Теорема 4.1 доказана. □

Теперь мы покажем, что верхние оценки Островского (1.5) и (1.6) следуют из теоремы 4.1.

Следствие 4.1. *Если A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$, то для любого $\alpha \in [0, 1]$ справедливы неравенства*

$$\rho(A) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} \{ r_i(A)^{\alpha} c_i(A)^{1-\alpha} \}, \tag{4.6}$$

$$\rho(A) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} \{ a_{ii} + r_i'(A) c_i'(A)^{1-\alpha} \}. \tag{4.7}$$

Доказательство. Заметим, что при $n = 1$ оба неравенства (4.6) и (4.7) очевидны. Поэтому будем считать, что $n \geqslant 2$. Предположим сперва, что у матрицы A нет ни нулевых строк, ни нулевых столбцов. В этом случае, применяя оценку (4.4) с $k = 2$, $\Delta_1 = D_{r(A)}$ и $\Delta_2 = D_{c(A)}$ и используя лемму 3.1, мы выводим:

$$\begin{aligned}\rho(A) &\leqslant \max_{i \in \langle n \rangle}\{r_i(A)^{\alpha} c_i(A)^{1-\alpha}\}\rho(D_{r(A)}^{-1}A)^{\alpha}\rho(D_{c(A)}^{-1}A)^{1-\alpha} \\ &= \max_{i \in \langle n \rangle}\{r_i(A)^{\alpha} c_i(A)^{1-\alpha}\}.\end{aligned}$$

Аналогично, если оба вектора $r'(A)$ и $c'(A)$ положительны, то, применяя оценку (4.5) с $k = 2$, $\Delta_1 = D_{r'(A)} = D_{r(P)}$ и $\Delta_2 = D_{c'(A)} = D_{c(P)}$, мы получаем:

$$\begin{aligned}\rho(A) &\leqslant \max_{i \in \langle n \rangle}\{a_{ii} + r_i'(A)^{\alpha} c_i'(A)^{1-\alpha}\rho(D_{r(P)}^{-1}P)^{\alpha}\rho(D_{c(P)}^{-1}P)^{1-\alpha}\} \\ &= \max_{i \in \langle n \rangle}\{a_{ii} + r_i'(A)^{\alpha} c_i'(A)^{1-\alpha}\}.\end{aligned}$$

Таким образом, при $n \geqslant 2$ обе оценки (4.6) и (4.7) установлены, в частности, для неприводимых матриц, для которых векторы $r'(A)$ и $c'(A)$ всегда положительны. Теперь, если A – приводимая неотрицательная матрица, то, по лемме 3.2, найдется подмножество $S \subsetneqq \langle n \rangle$, $|S| \geqslant 1$, такое что матрица $A[S]$ неприводима, и

$$\rho(A) = \rho(A[S]).$$

Следовательно, применяя (4.6) к матрице $A[S]$, мы выводим:

$$\begin{aligned}\rho(A) = \rho(A[S]) &\leqslant \max_{i \in S}\{r_i(A[S])^{\alpha} c_i(A[S])^{1-\alpha}\} \\ &\leqslant \max_{i \in \langle n \rangle}\{r_i(A)^{\alpha} c_i(A)^{1-\alpha}\}.\end{aligned}$$

Аналогично, применяя к $A[S]$ неравенство (4.7), мы получаем:

$$\begin{aligned}\rho(A) = \rho(A[S]) &\leqslant \max_{i \in S}\{a_{ii} + r_i'(A[S])^{\alpha} c_i'(A[S])^{1-\alpha}\} \\ &\leqslant \max_{i \in \langle n \rangle}\{a_{ii} + r_i'(A)^{\alpha} c_i'(A)^{1-\alpha}\}.\end{aligned}$$

Следствие 4.1 доказано полностью. $\square$

Из теоремы 4.1 с помощью лемм 3.1 и 3.2 легко вывести обобщение следствия 4.1, приводимое ниже.

Следствие 4.2. *Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$. Тогда для произвольных $\alpha_s \in [0,1]$, $s = 1, \dots, k+l$, где $k, l \geqslant 0$ и $k + l \geqslant 1$, таких что*

$$\sum_{s=1}^{k+l} \alpha_s = 1,$$

и для произвольных диагональных матриц D_s, $s = 1, \dots, k+l$, порядка n с положительными диагональными элементами, справедливы следующие верхние оценки для $\rho(A)$:

$$\rho(A) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} \left\{ \prod_{s=1}^{k} r_i(D_s^{-1} A D_s)^{\alpha_s} \prod_{s=k+1}^{k+l} c_i(D_s^{-1} A D_s)^{\alpha_s} \right\}, \tag{4.8}$$

$$\rho(A) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} \left\{ a_{ii} + \prod_{s=1}^{k} r'_i(D_s^{-1} A D_s)^{\alpha_s} \prod_{s=k+1}^{k+l} c'_i(D_s^{-1} A D_s)^{\alpha_s} \right\}. \tag{4.9}$$

Доказательство. Поскольку при $n = 1$ обе оценки (4.8) и (4.9) очевидно справедливы, будем предполагать, что $n \geqslant 2$. Для доказательства (4.8) в случае неприводимой матрицы A положим

$$\Delta_s = \begin{cases} D_{r(D_s^{-1} A D_s)}, & s = 1, \dots, k, \\ D_{c(D_s^{-1} A D_s)}, & s = k+1, \dots, k+l. \end{cases}$$

Тогда (4.8) вытекает из (4.4) и леммы 3.1. Аналогично, неравенство (4.9) вытекает из (4.5), если положить

$$\Delta_s = \begin{cases} D_{r'(D_s^{-1} A D_s)}, & s = 1, \dots, k, \\ D_{c'(D_s^{-1} A D_s)}, & s = k+1, \dots, k+l. \end{cases}$$

Переход от неприводимых матриц к матрицам общего вида осуществляется на основе леммы 3.2, как в доказательстве следствия 4.1. □

Следствие 4.2 позволяет “смешивать” не только строчные и столбцовые суммы $r_i(A)$ и $c_i(A)$ (или $r'_i(A)$ и $c'_i(A)$) матрицы A, но и аналогичные суммы для различных матриц, диагонально сопряженных с A. Например, в частном случае $k = 2$, $l = 0$,

$D_1 = I_n$, $D_2 = D_{r(A)}$, неравенство (4.8) дает нам верхнюю оценку

$$\begin{aligned}\rho(A) &\leqslant \max_{i\in\langle n\rangle}\left\{r_i(A)^\alpha\left[\frac{r_i(A^2)}{r_i(A)}\right]^{1-\alpha}\right\}\\ &= \max_{i\in\langle n\rangle}\left\{r_i(A)^{2\alpha-1}r_i(A^2)^{1-\alpha}\right\},\quad \alpha\in[0,1].\end{aligned}\tag{4.10}$$

Эта оценка сводится к верхней оценке Фробениуса из (1.2) при $\alpha = 1$, к оценке

$$\rho(A) \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle}[r_i(A^2)]^{1/2}$$

при $\alpha = 1/2$ и к верхней оценке Минка (3.4) при $\alpha = 0$.

§5. Оценки и неравенства, зависящие от дуг

Оценки для перроновского корня $\rho(A)$ неотрицательной матрицы A, полученные в предыдущих параграфах, не учитывали структуру разреженности матрицы $A = (a_{ij})$ за исключением того, что в некоторых случаях мы требовали, чтобы A не содержала нулевых строк или столбцов или чтобы A была неприводима.

Оценки для $\rho(A)$, которые будут получены в этом параграфе, будут выражаться через максимум или минимум некоторых величин по всем парам индексов $i, j \in \langle n\rangle$, таким что $a_{ij} \neq 0$. Поскольку, по определению орграфа $D(A)$ матрицы A, $a_{ij} \neq 0$ тогда и только тогда, когда в $D(A)$ есть дуга, ведущая из вершины i в вершину j, мы будем говорить об оценках подобного типа как об оценках, зависящих от дуг.

Вывод оценок, зависящих от дуг, будет базироваться на следующем результате.

Теорема 5.1. *Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ и пусть*

$$\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n),\quad \delta_i > 0,\quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда для любого $\alpha \in [0,1]$ справедливы неравенства

$$\min_{i,j:a_{i,j}\neq 0}\{\delta_i^\alpha\delta_j^{1-\alpha}\}\rho(\Delta^{-1}A) \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{i,j:a_{ij}\neq 0}\{\delta_i^\alpha\delta_j^{1-\alpha}\}\rho(\Delta^{-1}A).\tag{5.1}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то оба неравенства в (5.1) являются равенствами, а, следовательно,

$$\rho(A) = c\rho(\Delta^{-1}A),\tag{5.2}$$

где

$$\delta_i^\alpha \delta_j^{1-\alpha} = c \quad \textit{для всех} \quad i, j, \quad \textit{таких что} \quad a_{ij} \neq 0, \tag{5.3}$$

тогда и только тогда, когда либо

$$\Delta = c\, I_n,$$

либо одновременно выполнены следующие условия:

(i) $\alpha = 1/2$;

(ii) $\langle n \rangle = S_1 \cup S_2$, *где*

$$S_1 = \{i \in \langle n \rangle : \delta_i > c\}, \quad S_2 = \{i \in \langle n \rangle : \delta_i < c\};$$

(iii) $A[S_1] = 0$, $A[S_2] = 0$;

(iv) *существует* $\gamma > 1$, *такое что*

$$\delta_i = \begin{cases} c\gamma, & i \in S_1, \\ c\gamma^{-1}, & i \in S_2; \end{cases}$$

в противном случае оба неравенства в (5.1) *являются строгими.*

Замечание 5.1 Условия (ii) и (iii) означают, что A – 2-циклическая матрица.

Доказательство. Введем обозначения:

$$B = \Delta^{-1} A, \quad \widetilde{A} = \Delta^{-(1-\alpha)} A \Delta^{1-\alpha}.$$

Тогда, очевидно,

$$\widetilde{A} = \Delta^\alpha B \Delta^{1-\alpha},$$

и мы имеем:

$$\min_{i,j : a_{ij} \neq 0} \{\delta_i^\alpha \delta_j^{1-\alpha}\} B \leqslant \widetilde{A} \leqslant \max_{i,j : a_{ij} \neq 0} \{\delta_i^\alpha \delta_j^{1-\alpha}\} B.$$

Принимая во внимание тот факт, что

$$\rho(A) = \rho(\widetilde{A}),$$

и применяя теорему 1.1, мы приходим к (5.1).

Допустим теперь, что матрица A неприводима. В этом случае, в силу теоремы 1.1, либо оба неравенства в (5.1) одновременно являются равенствами, либо оба они строгие. Таким образом, нам необходимо показать, что оба неравенства в (5.1) являются равенствами тогда и только тогда, когда либо Δ – скалярная матрица, либо одновременно выполнены условия (i)–(iv).

Достаточность. Если $\Delta = cI_n$, то оба неравенства в (5.1) очевидно являются равенствами. Предположим, что выполнены условия (i)–(iv). В этом случае из равенства

$$Ax = \rho(A)x,$$

где x – положительный перроновский вектор, следуют соотношения

$$A[S_1, S_2]x[S_2] = \rho(A)x[S_1],$$

$$A[S_2, S_1]x[S_1] = \rho(A)x[S_2],$$

где через $x[S]$, $S \subseteq \langle n \rangle$, мы обозначаем подвектор $(x_i)_{i\in S}$ вектора x. Из этих соотношений вытекает, что

$$c^{-1}\gamma^{-1}A[S_1, S_2]\gamma x[S_2] = c^{-1}\rho(A)x[S_1],$$
$$c^{-1}\gamma A[S_2, S_1]x[S_1] = c^{-1}\rho(A)\gamma x[S_2],$$

где $\gamma > 1$ – константа из (iv). Если мы определим положительный вектор $y = (y_i)_{i=1}^n$, положив

$$y_i = \begin{cases} x_i, & i \in S_1, \\ \gamma x_i, & i \in S_2, \end{cases}$$

то, ввиду (iv), последние два соотношения можно записать в виде

$$\Delta^{-1}Ay = c^{-1}\rho(A)y.$$

Отсюда следует, что

$$\rho(\Delta^{-1}A) = c^{-1}\rho(A).$$

Поскольку из условий (i)–(iv) легко следует, что

$$\delta_i^{\alpha}\delta_j^{1-\alpha} = c \quad \text{для всех} \quad i, j, \quad \text{таких что} \quad a_{ij} \neq 0,$$

мы можем заключить, что как левая, так и правая части (5.1) обе совпадают с $\rho(A)$, что и завершает доказательство достаточности.

Необходимость. Пусть матрица A неприводима и пусть справедливы соотношения (5.2) и (5.3). Нам требуется показать, что либо $\Delta = c\,I_n$, либо выполнены условия (i)–(iv). Для этого мы сперва заметим, что, не теряя общности, можно считать, что

$$Ae = \rho(A)e. \tag{5.4}$$

Действительно, если

$$Ax = \rho(A)x, \quad x \neq e,$$

то от A можно перейти к матрице

$$A' = D_x^{-1} A D_x,$$

которая по-прежнему неприводима, имеет ту же структуру разреженности, что и A, и удовлетворяет равенству

$$\rho(A') = c\rho(\Delta^{-1}A').$$

Определим диагональную матрицу

$$D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n),$$

положив

$$d_i = \delta_i / c, \quad i = 1, \dots, n. \tag{5.5}$$

Тогда соотношения (5.3) можно записать в виде

$$d_i^{\alpha} d_j^{1-\alpha} = 1, \quad a_{ij} \neq 0, \tag{5.6}$$

и мы имеем:

$$S_1 = \{i \in \langle n \rangle \,:\, d_i > 1\}, \quad S_2 = \{i \in \langle n \rangle \,:\, d_i < 1\}. \tag{5.7}$$

Определим множество S_3 следующим образом:

$$S_3 = \{i \in \langle n \rangle \,:\, d_i = 1\}. \tag{5.8}$$

Из (5.6) и (5.7) легко следует, что

$$A[S_1] = 0 \quad \text{и} \quad A[S_2] = 0,$$

что доказывает (iii). Аналогично, из (5.6), (5.7) и (5.8) мы получаем, что

$$A[S_1 \cup S_2,\, S_3] = 0 \quad \text{и} \quad A[S_3,\, S_1 \cup S_2] = 0.$$

Поскольку матрица A неприводима, последние два равенства могут выполняться тогда и только тогда, когда либо $\langle n \rangle = S_3$, так что $D = I_n$ и $\Delta = c\,I_n$, либо $\langle n\rangle = S_1 \cup S_2$. В последнем случае мы определим положительный вектор $u = (u_i)_{i=1}^n$ по формуле

$$u_i = \begin{cases} 1, & i \in S_1, \\ d_i^{1-\alpha}, & i \in S_2. \end{cases} \tag{5.9}$$

Используя (5.9), (iii), (5.6) и (5.4), мы выводим:

$$r_i(D_u^{-1} D^\alpha A D_u)$$
$$= \begin{cases} d_i^\alpha \sum_{j\in S_2} a_{ij} d_j^{1-\alpha} = \sum_{j\in S_2} a_{ij} = \rho(A), & i \in S_1; \\ d_i^{-(1-\alpha)} d_i^\alpha \sum_{j\in S_1} a_{ij} = d_i^{2\alpha-1} \sum_{j\in S_1} a_{ij} = d_i^{2\alpha-1}\rho(A), & i \in S_2. \end{cases} \tag{5.10}$$

Аналогично, если $v = (v_i)_{i=1}^n$, где

$$v_i = \begin{cases} d_i^{1-\alpha}, & i \in S_1, \\ 1, & i \in S_2, \end{cases} \tag{5.11}$$

то мы имеем:

$$r_i(D_v^{-1} D^\alpha A D_v) = \begin{cases} d_i^{2\alpha-1}\rho(A), & i \in S_1, \\ \rho(A), & i \in S_2. \end{cases} \tag{5.12}$$

Допустим, что $\alpha \geqslant 1/2$. Применяя двусторонние оценки Фробениуса (3.3) к $D^\alpha A$ и используя (5.10) и (5.12), мы выводим цепочки неравенств

$$\begin{aligned} \min_{i\in\langle n\rangle} r_i(D_u^{-1} D^\alpha A D_u) = \min_{i\in S_2} d_i^{2\alpha-1}\rho(A) \leqslant \rho(D^\alpha A) \\ \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} r_i(D_u^{-1} D^\alpha A D_u) = \rho(A) \end{aligned} \tag{5.13}$$

и

$$\begin{aligned} \min_{i\in\langle n\rangle} r_i(D_v^{-1} D^\alpha A D_v) = \rho(A) \leqslant \rho(D^\alpha A) \\ \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} r_i(D_v^{-1} D^\alpha A D_v) = \max_{i\in S_1} d_i^{2\alpha-1}\rho(A). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Из (5.13) и (5.14) немедленно следует, что

$$\rho(D^\alpha A) = \rho(A),$$

но тогда правое неравенство в (5.13) и левое неравенство в (5.14) оба являются равенствами. Поскольку матрица $D^\alpha A$ неприводима, в силу следствия 3.1 оставшиеся два неравенства из (5.13) и (5.14) также являются равенствами, так что

$$\min_{i\in S_2} d_i^{2\alpha-1}\rho(A) = \rho(A) = \max_{i\in S_1} d_i^{2\alpha-1}\rho(A).$$

Принимая во внимание определение (5.7) множеств S_1 и S_2 и учитывая, что $\rho(A) \neq 0$, мы приходим к заключению, что $2\alpha - 1 = 0$, т.е. $\alpha = 1/2$. Тем самым условие (i) выполнено.

В случае, когда $\alpha \leqslant 1/2$, аналогично выводятся неравенства

$$\min_{i \in S_1} d_i^{2\alpha-1}\rho(A) \leqslant \rho(D^\alpha A) \leqslant \rho(A) \leqslant \rho(D^\alpha A) \leqslant \max_{i \in S_2} d_i^{2\alpha-1}\rho(A),$$

из которых с помощью тех же рассуждений выводится, что $\alpha = 1/2$.

Для $\alpha = 1/2$ соотношения (5.10) и (5.12) принимают вид

$$D^{1/2}Au = \rho(A)u, \tag{5.15}$$

$$D^{1/2}Av = \rho(A)v. \tag{5.16}$$

Поскольку, по теореме Перрона–Фробениуса, правый перроновский вектор неприводимой матрицы $D^{1/2}A$ единственен с точностью до скалярного множителя, из равенств (5.15) и (5.16) следует, что при $\alpha = 1/2$ положительные векторы u и v, определенные в (5.9) и (5.11) соответственно, коллинеарны. Иначе говоря, найдется константа $\zeta > 0$, для которой $\zeta u = v$. Это соотношение равносильно равенствам

$$d_i^{1/2} = \zeta, \quad i \in S_1,$$

$$\zeta d_i^{1/2} = 1, \quad i \in S_2,$$

которые, ввиду (5.5), могут быть записаны в виде

$$\delta_i = \begin{cases} c\zeta^2, & i \in S_1, \\ c\zeta^{-2}, & i \in S_2. \end{cases}$$

Тем самым условие (iv) также выполнено, и теорема доказана полностью. □

Замечание 5.2. Если все диагональные элементы матрицы A положительны, то неравенства (5.1) совпадают с неравенствами (3.1).

Выведем теперь некоторые следствия из теоремы 5.1.

В предположении, что у матрицы A нет нулевых строк, мы можем положить

$$\Delta = D_{r(A)}.$$

Учитывая, что по лемме 3.1

$$\rho(D_{r(A)}^{-1}A) = 1,$$

и применяя теорему 5.1, мы приходим к следующему результату, обобщающему следствие 3.1.

Следствие 5.1. *Пусть* $A = (a_{ij})$ *– неотрицательная матрица порядка* $n \geqslant 1$*, не содержащая нулевых строк. Тогда для любого* $\alpha \in [0,1]$ *справедливы неравенства*

$$\min_{i,j:a_{ij}\neq 0}\{r_i(A)^\alpha r_j(A)^{1-\alpha}\} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{i,j:a_{ij}\neq 0}\{r_i(A)^\alpha r_j(A)^{1-\alpha}\}. \quad (5.17)$$

Кроме того, если матрица A *неприводима, то оба неравенства в* (5.17) *являются равенствами тогда и только тогда, когда либо*

$$r_i(A) = \rho(A), \quad i = 1, \dots, n,$$

либо одновременно выполнены следующие условия:

(i) $\alpha = 1/2$*;*

(ii) $\langle n\rangle = S_1 \cup S_2$*, где*

$$S_1 = \{i \in \langle n\rangle : r_i(A) > \rho(A)\}, \quad S_2 = \{i \in \langle n\rangle : r_i(A) < \rho(A)\};$$

(iii) $A[S_1] = 0$*,* $A[S_2] = 0$*;*

(iv) *существует число* $\gamma > 1$*, такое что*

$$r_i(A) = \begin{cases} \rho(A)\gamma, & i \in S_1, \\ \rho(A)\gamma^{-1}, & i \in S_2. \end{cases}$$

В противном случае оба неравенства в (5.17) *являются строгими.*

Конечно же, столбцовые аналоги неравенств (5.17) также справедливы, если матрица A не содержит нулевых столбцов.

Замечание 5.3. Верхняя оценка для $\rho(A)$ в (5.17) справедлива для любой неотрицательной матрицы A. Действительно, если в A есть нулевые строки, то A приводима. По лемме 3.2, существует подмножество $S \subsetneqq \langle n\rangle$, такое что матрица $A[S]$ неприводима, и

$$\rho(A) = \rho(A[S]).$$

Но тогда, применяя следствие 5.1 к матрице $A[S]$, не содержащей нулевых строк, мы имеем:

$$\begin{aligned}\rho(A) = \rho(A[S]) &\leqslant \max_{i,j\in S:a_{ij}\neq 0}\{r_i(A[S])^\alpha\, r_j(A[S])^{1-\alpha}\} \\ &\leqslant \max_{i,j:a_{ij}\neq 0}\{r_i(A)^\alpha\, r_j(A)^{1-\alpha}\}.\end{aligned}$$

Верхнюю оценку из следствия 5.1 можно обобщить следующим образом.

Следствие 5.2. *Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ и пусть D_s, $s = 1, \dots, k+l$, $k, l \geqslant 0$, $k + l \geqslant 1$ – диагональные матрицы порядка n с положительными диагональными элементами. Тогда для произвольных $\alpha_s \in [0,1]$, $s = 1, \dots, k+l$, таких, что $\sum_{s=1}^{k+l} \alpha_s = 1$, и для произвольного $\alpha \in [0,1]$, справедливо неравенство*

$$\begin{aligned}\rho(A) \leqslant \max_{i,j\,:\,a_{ij}\neq 0} \Bigg\{ &\prod_{s=1}^{k} [r_i(D_s^{-1}AD_s)^{\alpha} r_j(D_s^{-1}AD_s)^{1-\alpha}]^{\alpha_s} \\ &\times \prod_{s=k+1}^{k+l} [c_i(D_s^{-1}AD_s)^{\alpha} c_j(D_s^{-1}AD_s)^{1-\alpha}]^{\alpha_s} \Bigg\}. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Доказательство. Предположим, что матрица A не имеет ни нулевых строк, ни нулевых столбцов, и введем обозначения:

$$\Delta_s = \begin{cases} D_{r(D_s^{-1}AD_s)}, & s = 1, \dots, k, \\ D_{c(D_s^{-1}AD_s)}, & s = k+1, \dots, k+l; \end{cases}$$

$$\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n) = \prod_{s=1}^{k+l} \Delta_s^{\alpha_s}.$$

Тогда, очевидно,

$$\delta_i = \prod_{s=1}^{k} r_i(D_s^{-1}AD_s)^{\alpha_s} \prod_{s=k+1}^{k+l} c_i(D_s^{-1}AD_s)^{\alpha_s}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Учитывая, что в силу лемм 4.1 и 3.1

$$\rho(\Delta^{-1}A) \leqslant \prod_{s=1}^{k+l} \rho(\Delta_s^{-1}A)^{\alpha_s} \leqslant 1,$$

и применяя теорему 5.1, мы приходим к (5.18).

Если же среди строк и/или столбцов матрица A есть нулевые, то она приводима. Воспользовавшись леммой 3.2, мы можем найти $S \subsetneqq \langle n \rangle$, такое что матрица $A[S]$ неприводима, и

$$\rho(A) = \rho(A[S]).$$

Поскольку для $A[S]$ оценка (5.18) уже установлена, доказательство легко завершается следующим образом:

$$\begin{aligned}\rho(A) &= \rho(A[S])\\ &\leqslant \max_{i,j\in S: a_{ij}\neq 0}\left\{\prod_{s=1}^{k}[r_i(\{D_s^{-1}AD_s\}[S])^{\alpha} r_j(\{D_s^{-1}AD_s\}[S])^{1-\alpha}]^{\alpha_s}\right.\\ &\times \left.\prod_{s=k+1}^{k+l}[c_i(\{D_s^{-1}AD_s\}[S])^{\alpha} c_j(\{D_s^{-1}AD_s\}[S])^{1-\alpha}]^{\alpha_s}\right\}\\ &\leqslant \max_{i,j: a_{ij}\neq 0}\left\{\prod_{s=1}^{k}[r_i(D_s^{-1}AD_s)^{\alpha} r_j(D_s^{-1}AD_s)^{1-\alpha}]^{\alpha_s}\right.\\ &\times \left.\prod_{s=k+1}^{k+l}[c_i(D_s^{-1}AD_s)^{\alpha} c_j(D_s^{-1}AD_s)^{1-\alpha}]^{\alpha_s}\right\}.\end{aligned}$$

□

Заметим, что в случае $\alpha = 1$ (или $\alpha = 0$) оценка (5.18) сводится к оценке (4.8).

В частности, при $k = l = 1$, $D_1 = D_2 = I_n$ и $\alpha_1 = \beta$, из (5.18) следует оценка

$$\rho(A) \leqslant \max_{i,j: a_{ij}\neq 0}[r_i(A)^{\alpha} r_j(A)^{1-\alpha}]^{\beta}[c_i(A)^{\alpha} c_j(A)^{1-\alpha}]^{1-\beta}, \quad \alpha,\beta\in[0,1]. \tag{5.19}$$

Оценка (5.19) сводится к (5.17) (или ее столбцовому аналогу), если $\beta = 1$ (или $\beta = 0$), и к оценке (4.6), если $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$.

В случае, когда $\alpha = \beta = 1/2$, оценка (5.19) принимает простейший вид

$$\rho(A) \leqslant \max_{i,j: a_{ij}\neq 0}[r_i(A) r_j(A) c_i(A) c_j(A)]^{1/4}. \tag{5.20}$$

Следующая теорема – это аналог теоремы 5.1, использующий расщепление $A = D_A + P$.

Теорема 5.2. *Пусть $A = (a_{ij}) = D_A + P$ – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$ и пусть*

$$\Delta = \mathrm{diag}\,(\delta_1, \dots, \delta_n), \quad \delta_i > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Если

$$\rho(A) > \max_{i\in\langle n\rangle} a_{ii}, \tag{5.21}$$

то для любого $\alpha \in [0, 1]$, *справедливы неравенства*

$$\min_{i \neq j : a_{ij} \neq 0} \frac{\delta_i^\alpha \delta_j^{1-\alpha}}{[\rho(a) - a_{ii}]^\alpha [\rho(A) - a_{jj}]^{1-\alpha}} \rho(\Delta^{-1} P) \leqslant 1$$
$$\leqslant \max_{i \neq j : a_{ij} \neq 0} \frac{\delta_i^\alpha \delta_j^{1-\alpha}}{[\rho(A) - a_{ii}]^\alpha [\rho(A) - a_{jj}]^{1-\alpha}} \rho(\Delta^{-1} P). \tag{5.22}$$

Кроме того, если матрица A *неприводима, то оба неравенства в* (5.22) *обращаются в равенства тогда и только тогда, когда либо*

$$\Delta = c[\rho(A) I_n - D_A], \quad c > 0,$$

либо одновременно выполнены следующие условия:

(i) $\alpha = 1/2$;

(ii) $\langle n \rangle = S_1 \cup S_2$, *где*

$$S_1 = \{i \in \langle n \rangle : \delta_i > c[\rho(A) - a_{ii}]\}, \quad S_2 = \{i \in \langle n \rangle : \delta_i < c[\rho(A) - a_{ii}]\};$$

(iii) $P[S_1] = 0$, $P[S_2] = 0$;

(iv) *существует* $\gamma > 1$, *такое что*

$$\delta_i = \begin{cases} c[\rho(A) - a_{ii}]\gamma, & i \in S_1, \\ c[\rho(A) - a_{ii}]\gamma^{-1}, & i \in S_2; \end{cases}$$

в противном случае оба неравенства в (5.22) *являются строгими.*

Доказательство. Обозначим

$$D = \rho(A) I_n - D_A$$

и заметим, что в силу предположения (5.21) матрица D обратима. Применяя теорему 5.1 к матрицам $D^{-1}P$ и $D^{-1}\Delta$ и используя лемму 4.2, мы немедленно приходим к неравенствам (5.22).

Далее, если матрица A неприводима, то неприводима и матрица $D^{-1}P$, а тогда, по теореме 5.1, оба неравенства в (5.22) являются равенствами в том и только том случае, когда либо $D^{-1}\Delta = c I_n$, либо одновременно выполнены условия (i)–(iv), а иначе оба неравенства являются строгими. □

Следствие 5.3. *Пусть* $A = (a_{ij})$ – *неотрицательная матрица порядка* $n \geqslant 2$, *такая что вектор* $r'(A)$ *положителен. Тогда для любого* $\alpha \in [0, 1]$ *неравенство*

$$[\rho(A) - a_{ii}]^\alpha [\rho(A) - a_{jj}]^{1-\alpha} \leqslant r'_i(A)^\alpha r'_j(A)^{1-\alpha} \tag{5.23}$$

выполнено для некоторых $i \neq j$, *таких что* $a_{ij} \neq 0$, *а если матрица* A *неприводима, то выполнено и неравенство*

$$[\rho(A) - a_{kk}]^{\alpha}[\rho(A) - a_{ll}]^{1-\alpha} \geqslant r'_k(A)^{\alpha} r'_l(A)^{1-\alpha}, \qquad (5.24)$$

где $k \neq l$ *и* $a_{kl} \neq 0$.

Доказательство. Если матрица A неприводима, то вектор $r'(A)$ положителен, и выполнено условие (5.21). Положим $\Delta = D_{r'(A)}$. Тогда, по лемме 3.1,

$$\rho(\Delta^{-1}P) = 1,$$

и, применяя теорему 5.2, мы приходим к неравенствам

$$\min_{i\neq j:a_{ij}\neq 0} \frac{r'_i(A)^{\alpha} r'_j(A)^{1-\alpha}}{[\rho(A) - a_{ii}]^{\alpha}[\rho(A) - a_{jj}]^{1-\alpha}} \leqslant 1 \leqslant \max_{i\neq j:a_{ij}\neq 0} \frac{r'_i(A)^{\alpha} r'_j(A)^{1-\alpha}}{[\rho(A) - a_{ii}]^{\alpha}[\rho(A) - a_{jj}]^{1-\alpha}},$$

из которых утверждения следствия вытекают тривиальным образом.

Если же матрица A приводима, то, используя лемму 3.2, мы выберем $S \subsetneqq \langle n\rangle$, такое что матрица $A[S]$ неприводима

$$\rho(A) = \rho(A[S]). \qquad (5.25)$$

Если $|S| = 1$, т.е. $S = \{i\}$, $i \in \langle n\rangle$, то $\rho(A) = a_{ii}$, а поскольку $r'_i(A) > 0$, то найдется $j \neq i$, такое что $a_{ij} \neq 0$, и в этом случае неравенство (5.23) очевидно справедливо.

Если же $|S| \geqslant 2$, то, как мы уже установили, неравенство

$$[\rho(A[S]) - a_{ii}]^{\alpha}[\rho(A[S]) - a_{jj}]^{1-\alpha} \leqslant r'_i(A[S])^{\alpha} r'_j(A[S])^{1-\alpha}$$

справедливо для некоторых $i, j \in S$, $i \neq j$, таких что $a_{ij} \neq 0$. Но тогда, ввиду (5.25), мы имеем

$$[\rho(A) - a_{ii}]^{\alpha}[\rho(A) - a_{jj}]^{1-\alpha} \leqslant r'_i(A)^{\alpha} r'_j(A)^{1-\alpha}.$$

□

Замечание 5.4. Неравенство (5.23) выполнено при некоторых $i \neq j$ и без требования положительности вектора $r'(A)$. Однако при этом может случиться, что $a_{ij} = 0$. Действительно, если $\rho(A) = a_{kk}$, $k \in \langle n\rangle$ и $r'_k(A) = 0$, то при $\alpha > 0$ неравенство (5.23) справедливо для $i = k$ и любого $j \neq k$, но при этом $a_{ij} = 0$. Если же $\alpha = 0$, то можно взять $j = k$, $i \neq k$.

В частности, при $\alpha = 1/2$ неравенства (5.23) и (5.24) принимают вид

$$[\rho(A) - a_{ii}][\rho(A) - a_{jj}] \leqslant r'_i(A) r'_j(A), \ \ i \neq j, \ \ a_{ij} \neq 0, \tag{5.26}$$

$$[\rho(A) - a_{kk}][\rho(A) - a_{ll}] \geqslant r'_k(A) r'_l(A), \ k \neq l, \ a_{kl} \neq 0. \tag{5.27}$$

Заметим, что неравенство (5.26) – это частный случай дуговой версии теоремы Островского–Брауэра (см. [7]).

Неравенство (5.26) очевидно эквивалентно квадратному неравенству

$$\rho(A)^2 - (a_{ii} + a_{jj})\rho(A) + a_{ii}a_{jj} - r'_i(A) r'_j(A) \leqslant 0,$$

выполняющемуся при некоторых $i \neq j$, таких что $a_{ij} \neq 0$. Следовательно, $\rho(A)$ удовлетворяет неравенству

$$\rho(A) \leqslant \frac{1}{2}\left[a_{ii} + a_{jj} + \sqrt{(a_{ii} - a_{jj})^2 + 4 r'_i(A) r'_j(A)}\right]$$

и, тем более, неравенству

$$\rho(A) \leqslant \frac{1}{2} \max_{i \neq j : a_{ij} \neq 0} \left[a_{ii} + a_{jj} + \sqrt{(a_{ii} - a_{jj})^2 + 4 r'_i(A) r'_j(A)}\right]. \tag{5.28}$$

Верхняя оценка (5.28) справедлива для любой неотрицательной матрицы A, такой что вектор $r'(A)$ положителен, и улучшает хорошо известную оценку Брауэра и Джентри [3]

$$\rho(A) \leqslant \frac{1}{2} \max_{i \neq j} \left[a_{ii} + a_{jj} + \sqrt{(a_{ii} - a_{jj})^2 + 4 r'_i(A) r'_j(A)}\right]$$

за счет учета структуры разреженности матрицы A.

Аналогично, для неприводимой матрицы A из (5.27) следует, что для некоторых $k \neq l$, таких что $a_{kl} \neq 0$, перроновский корень $\rho(A)$ удовлетворяет квадратному неравенству

$$\rho(A)^2 - (a_{kk} + a_{ll})\rho(A) + a_{kk}a_{ll} - r'_k(A) r'_l(A) \geqslant 0,$$

так что либо

$$\rho(A) \geqslant \frac{1}{2}\left[a_{kk} + a_{ll} + \sqrt{(a_{kk} - a_{ll})^2 + 4 r'_k(A) r'_l(A)}\right], \tag{5.29}$$

либо

$$\begin{aligned}\rho(A) &\leqslant \frac{1}{2}\left[a_{kk}+a_{ll}-\sqrt{(a_{kk}-a_{ll})^2+4r'_k(A)r'_l(A)}\right]\\ &\leqslant \frac{1}{2}(a_{kk}+a_{ll}-|a_{kk}-a_{ll}|)\\ &=\min\{a_{kk},a_{ll}\}.\end{aligned} \tag{5.30}$$

Поскольку для неприводимой матрицы A мы имеем

$$\min\{a_{kk},a_{ll}\}\leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} a_{ii}<\rho(A),$$

неравенство (5.30) не может быть справедливым, и мы приходим к заключению, что $\rho(A)$ всегда удовлетворяет неравенству (5.29) для некоторых $k\neq l$, таких что $a_{kl}\neq 0$. Но тогда тем более справедлива и нижняя оценка

$$\rho(A)\geqslant \frac{1}{2}\min_{k\neq l:a_{kl}\neq 0}\left[a_{kk}+a_{ll}+\sqrt{(a_{kk}-a_{ll})^2+4r'_k(A)r'_l(A)}\right]. \tag{5.31}$$

Эта оценка верна для любой неприводимой неотрицательной матрицы и улучшает нижнюю оценку Брауэра и Джентри

$$\rho(A)\geqslant \frac{1}{2}\min_{k\neq l}\left[a_{kk}+a_{ll}+\sqrt{(a_{kk}-a_{ll})^2+4r'_k(A)r'_l(A)}\right],$$

доказанную в [3].

Теперь мы получим обобщение следствия 5.3. Предположим, что матрица A такова, что оба вектора $r'(A)$ и $c'(A)$ положительны. Заметим, что в этом предположении все неприводимые компонента матрицы A имеют порядок, не меньший двух[2], так что (см. §2)

$$\rho(A)>\max_{i\in\langle n\rangle} a_{ii}.$$

Положим

$$\Delta_s=\begin{cases} D_{r'(D_s^{-1}AD_s)}, & s=1,\dots,k, \quad k\geqslant 0,\\ D_{c'(D_s^{-1}AD_s)}, & s=k+1,\dots,k+l, \quad l\geqslant 0,\end{cases} \qquad k+l\geqslant 1,$$

[2]Такие матрицы принято называть слабо неприводимыми.

где D_s, $s = 1, \ldots, k+l$, – произвольные диагональные матрицы с положительными диагональными элементами, и определим матрицу

$$\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n) = \prod_{s=1}^{k+l} \Delta_s^{\alpha_s},$$

где $\alpha, \alpha_s \in [0,1]$, $s = 1, \ldots, k+l$, и $\sum_{s=1}^{k+l} \alpha_s = 1$, так что

$$\delta_i = \prod_{s=1}^{k} r_i'(D_s^{-1}AD_s)^{\alpha_s} \prod_{s=k+1}^{k+l} c_i'(D_s^{-1}AD_s)^{\alpha_s}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда, по леммам 4.1 и 3.1, мы имеем

$$\rho(\Delta^{-1}P) \leqslant 1,$$

и, применяя теорему 5.2, мы приходим к неравенству

$$1 \leqslant \max_{i \neq j : a_{ij} \neq 0} \left\{ \left[\frac{\prod_{s=1}^{k} r_i'(D_s^{-1}AD_s)^{\alpha_s} \prod_{s=k+1}^{k+l} c_i'(D_s^{-1}AD_s)^{\alpha_s}}{\rho(A) - a_{ii}} \right]^{\alpha} \times \left[\frac{\prod_{s=1}^{k} r_j'(D_s^{-1}AD_s)^{\alpha_s} \prod_{s=k+1}^{k+l} c_j'(D_s^{-1}AD_s)^{\alpha_s}}{\rho(A) - a_{jj}} \right]^{1-\alpha} \right\}.$$

Это неравенство означает, что, в указанных предположениях, найдутся $i \neq j$, такие что $a_{ij} \neq 0$, для которых справедливо неравенство

$$\begin{aligned} [\rho(A) - a_{ii}]^{\alpha} [\rho(A) - a_{jj}]^{1-\alpha} & \\ \leqslant \prod_{s=1}^{k} & \left[r_i'(D_s^{-1}AD_s)^{\alpha} r_j'(D_s^{-1}AD_s)^{1-\alpha} \right]^{\alpha_s} \\ \times \prod_{s=k+1}^{k+l} & \left[c_i'(D_s^{-1}AD_s)^{\alpha} c_j'(D_s^{-1}AD_s)^{1-\alpha} \right]^{\alpha_s}. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Таким образом, нами установлен следующий результат.

Следствие 5.4. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$, такая что векторы $r'(A)$ и $c'(A)$ положительны, и пусть D_s, $s = 1, \ldots, k+l$, $k, l \geqslant 0$, $k + l \geqslant 1$, – произвольные диагональные матрицы порядка n с положительными диагональными элементами. Тогда для любого $\alpha \in [0,1]$ и любых $\alpha_s \in [0,1]$, $s = 1, \ldots, k+l$,* *удовлетворяющих условию* $\sum_{s=1}^{k+l}\alpha_s = 1$, *неравенство* (5.32) *справедливо при некоторых* $i \neq j$, *таких что* $a_{ij} \neq 0$.

В частности, если $k = 1$, $l = 0$ и $D_1 = I_n$, то неравенство (5.32) сводится к (5.23). Взяв $k = l = 1$, $D_1 = D_2 = I_n$ и $\alpha_1 = \beta$, мы приходим к неравенству

$$[\rho(A) - a_{ii}]^{\alpha}[\rho(A) - a_{jj}]^{1-\alpha} \leqslant [r_i'(A)^{\alpha} r_j'(A)^{1-\alpha}]^{\beta}[c_i'(A)^{\alpha} c_j'(A)^{1-\alpha}]^{1-\beta}, \quad \alpha, \beta \in [0,1], \tag{5.33}$$

справедливому при некоторых $i \neq j$, таких что $a_{ij} \neq 0$, которое при $\alpha = 1/2$ сводится к уточненному неравенству Островского (1.10):

$$[\rho(A) - a_{ii}][\rho(A) - a_{jj}] \leqslant [r_i'(A) r_j'(A)]^{\beta}[c_i'(A) c_j'(A)]^{1-\beta}, \quad i \neq j, \quad a_{ij} \neq 0. \tag{5.34}$$

Если же $\beta = 1/2$, то неравенство (5.33) принимает вид

$$[\rho(A) - a_{ii}]^{\alpha}[\rho(A) - a_{jj}]^{1-\alpha} \leqslant [r_i'(A) c_i'(A)]^{\frac{\alpha}{2}}[r_j'(A) c_j'(A)]^{\frac{1-\alpha}{2}}, \quad i \neq j, \quad a_{ij} \neq 0. \tag{5.35}$$

Докажем еще одну теорему.

Теорема 5.3. *Пусть* $A = (a_{ij})$ – *неотрицательная матрица порядка* $n \geqslant 1$ *и пусть*

$$D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n), \quad d_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n), \quad \delta_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда при любом $\alpha \in [0,1]$ *для перроновского корня* $\rho(A)$ *справедлива верхняя оценка*

$$\rho(A) \leqslant \max_{i,j:\, a_{ij} \neq 0}\{d_i^{\alpha}\delta_j^{1-\alpha}\}\rho(D^{-1}A)^{\alpha}\rho(\Delta^{-1}A)^{1-\alpha}. \tag{5.36}$$

Доказательство. Ввиду леммы 4.1 мы имеем:

$$\rho(D^{-\alpha}\Delta^{-(1-\alpha)}A) \leqslant \rho(D^{-1}A)^{\alpha}\rho(\Delta^{-1}A)^{1-\alpha}.$$

Принимая во внимание, что

$$\Delta^{-(1-\alpha)}A\Delta^{1-\alpha} = D^{\alpha}[D^{-\alpha}\Delta^{-(1-\alpha)}A]\Delta^{1-\alpha}$$

и, следовательно,

$$\Delta^{-(1-\alpha)} A \Delta^{1-\alpha} \leqslant \max_{i,j:a_{ij}\neq 0} \{d_i^{\alpha} \delta_j^{1-\alpha}\}[D^{-\alpha}\Delta^{-(1-\alpha)} A],$$

и используя свойство монотонности перроновского корня, мы выводим (5.36) следующим образом:

$$\begin{aligned}\rho(A) &= \rho(\Delta^{-(1-\alpha)} A \Delta^{1-\alpha}) \\ &\leqslant \max_{i,j:a_{ij}\neq 0} \{d_i^{\alpha} \delta_j^{1-\alpha}\}\rho(D^{-\alpha}\Delta^{-(1-\alpha)} A) \\ &\leqslant \max_{i,j:a_{ij}\neq 0} \{d_i^{\alpha} \delta_j^{1-\alpha}\}\rho(D^{-1}A)^{\alpha}\rho(\Delta^{-1}A)^{1-\alpha}.\end{aligned}$$

□

Следствие 5.5. *Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$. Тогда для любого $\alpha \in [0, 1]$ справедливы верхние оценки*

$$\rho(A) \leqslant \max_{i,j:a_{ij}\neq 0} \{r_i(A)^{\alpha} c_j(A)^{1-\alpha}\}, \tag{5.37}$$

$$\rho(A) \leqslant \max_{i,j:a_{ij}\neq 0} \{c_i(A)^{\alpha} r_j(A)^{1-\alpha}\}. \tag{5.38}$$

Доказательство. Если матрица A неприводима, то оба вектора $r(A)$ и $c(A)$ положительны, и мы можем положить

$$D = D_{r(A)}, \quad \Delta = D_{c(A)}$$

(или наоборот). Тогда неравенство (5.37) (или (5.38)) непосредственно следует из теоремы 5.3 и леммы 3.1.

Переход к случаю произвольной неотрицательной матрицы осуществляется, как и выше, на основе леммы 3.2. □

Используя тот же подход, что и при доказательстве следствия 5.2, нетрудно получить и обобщение следствия 5.5.

Следствие 5.6. *Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ и пусть D_s, $s = 1, \ldots, k + l$, $k, l \geqslant 0$, $k + l \geqslant 1$, и Δ_p, $p = 1, \ldots, r + q$, $r, q \geqslant 0$, $r + q \geqslant 1$ – произвольные диагональные матрицы с положительными диагональными элементами. Тогда для любого $\gamma \in [0, 1]$ и любых $\alpha_s, \beta_p \in [0, 1]$, $s = 1, \ldots, k+l$, $p = 1, \ldots, r+q$, таких что*

$$\sum_{s=1}^{k+l} \alpha_s = 1 = \sum_{p=1}^{r+q} \beta_p,$$

перроновский корень $\rho(A)$ удовлетворяет верхней оценке

$$\begin{aligned}\rho(A) \leqslant \max_{i,j:a_{ij}\neq 0} \Bigg\{ \left[\prod_{s=1}^{k} r_i(D_s^{-1}AD_s)^{\alpha_s} \prod_{s=k+1}^{k+l} c_i(D_s^{-1}AD_s)^{\alpha_s}\right]^{\gamma} \\ \times \left[\prod_{p=1}^{r} r_j(\Delta_p^{-1}A\Delta_p)^{\beta_p} \prod_{p=r+1}^{r+q} c_j(\Delta_p^{-1}A\Delta_p)^{\beta_p}\right]^{1-\gamma} \Bigg\}.\end{aligned} \tag{5.39}$$

Доказательство. Допустим, что матрица A неприводима, и положим

$$D = \prod_{s=1}^{k}(D_{r(D_s^{-1}AD_s)})^{\alpha_s} \prod_{s=k+1}^{k+l}(D_{c(D_s^{-1}AD_s)})^{\alpha_s},$$

$$\Delta = \prod_{p=1}^{r}(D_{r(\Delta_p^{-1}A\Delta_p)})^{\beta_p} \prod_{p=r+1}^{r+q}(D_{c(\Delta_p^{-1}A\Delta_p)})^{\beta_p}.$$

Тогда, в силу лемм 4.1 и 3.1, мы имеем:

$$\rho(D^{-1}A) \leqslant 1, \quad \rho(\Delta^{-1}A) \leqslant 1,$$

и требуемый результат немедленно вытекает из теоремы 5.3.

Переход к приводимому случаю осуществляется стандартным способом с использованием леммы 3.2. $\square$

Аналогом теоремы 5.3 для расщепленной матрицы $A = D_A + P$ является следующий результат.

Теорема 5.4. *Пусть $A = (a_{ij}) = D_A + P$ – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$ и пусть*

$$D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n), \quad d_i > 0, \quad i = 1, \dots, n,$$
$$\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n), \quad \delta_i > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Если

$$\rho(A) > \max_{i \in \langle n \rangle} a_{ii},$$

то для любого $\alpha \in [0, 1]$ найдутся $i \neq j$, такие что $a_{ij} \neq 0$ и справедливо неравенство

$$[\rho(A) - a_{ii}]^{\alpha}[\rho(A) - a_{jj}]^{1-\alpha} \leqslant d_i^{\alpha}\delta_j^{1-\alpha}\rho(D^{-1}P)^{\alpha}\rho(\Delta^{-1}P)^{1-\alpha}. \tag{5.40}$$

Доказательство. Заметим, что в условиях теоремы 5.4 матрица

$$\Sigma = \rho(A)I_n - D_A = \operatorname{diag}(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

обратима. Применяя теорему 5.3 к матрицам $\Sigma^{-1}P$, $\Sigma^{-1}D$ и $\Sigma^{-1}\Delta$ и используя лемму 4.2, мы можем вывести неравенство (5.40) следующим образом:

$$\begin{aligned}
1 &= \rho(\Sigma^{-1}P) \\
&\leqslant \max_{i,j:(P)_{ij}\neq 0} \left\{ \frac{d_i^\alpha \delta_j^{1-\alpha}}{\xi_i^\alpha \xi_j^{1-\alpha}} \right\} \rho([\Sigma^{-1}D]^{-1}[\Sigma^{-1}P])^\alpha \rho([\Sigma^{-1}\Delta]^{-1}[\Sigma^{-1}P])^{1-\alpha} \\
&= \max_{i\neq j:a_{ij}\neq 0} \left\{ \frac{d_i^\alpha\, \delta_j^{1-\alpha}}{[\rho(A)-a_{ii}]^\alpha [\rho(A)-a_{jj}]^{1-\alpha}} \right\} \rho(D^{-1}P)^\alpha \rho(\Delta^{-1}P)^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

□

Замечание 5.5. Если не требовать, чтобы индексы $i \neq j$ в неравенстве (5.40) удовлетворяли требованию $a_{ij} \neq 0$, то условие $\rho(A) > \max_{i\in\langle n\rangle} a_{ii}$ можно опустить. Действительно, если $\rho(A) = a_{kk}$ при некотором $k \in \langle n\rangle$, то неравенство (5.40) очевидно справедливо при $i = k$ и любом $j \neq k$, если $\alpha > 0$, а если $\alpha = 0$, то неравенство (5.40) верно при $j = k$ и любом $i \neq k$.

"Смешанный" аналог верхней оценки из следствия 5.3 имеет следующий вид.

Следствие 5.7. *Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$, такая что векторы $r'(A)$ и $c'(A)$ оба положительны. Тогда для любого $\alpha \in [0,1]$ неравенство*

$$[\rho(A) - a_{ii}]^\alpha [\rho(A) - a_{jj}]^{1-\alpha} \leqslant r_i'(A)^\alpha c_j'(A)^{1-\alpha} \tag{5.41}$$

справедливо при некоторых $i \neq j$, таких что $a_{ij} \neq 0$.

Доказательство. Если матрица $A = D_A + P$ неприводима, то, применяя теорему 5.4 с

$$D = D_{r'(A)} = D_{r(P)} \quad \text{и} \quad \Delta = D_{c'(A)} = D_{c(P)},$$

мы приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
&[\rho(A) - a_{ii}]^\alpha [\rho(A) - a_{jj}]^{1-\alpha} \\
&\qquad \leqslant r_i'(A)^\alpha c_j'(A)^{1-\alpha} \rho(D_{r(P)}^{-1}P)^\alpha \rho(D_{c(P)}^{-1}P)^{1-\alpha},
\end{aligned}$$

из которого, ввиду леммы 3.1, немедленно следует неравенство (5.41).

Для доказательства следствия в случае приводимой матрицы A следует заметить, что из условия положительности векторов $r'(A)$ и $c'(A)$ вытекает, что любая неприводимая компонента матрицы A имеет порядок, не меньший, чем два. Теперь доказательство завершается стандартным образом с помощью леммы 3.2. □

Замечание 5.6. Как легко убедиться, для любой неотрицательной матрицы A порядка $n \geqslant 2$ неравенство (5.41) справедливо при некоторых $i \neq j$, но при этом условие $a_{ij} \neq 0$ может быть и не выполнено.

В частности, при $\alpha = 1/2$ следствие 5.7 гарантирует, что при некоторых $i \neq j$, таких что $a_{ij} \neq 0$,

$$[\rho(A) - a_{ii}][\rho(A) - a_{jj}] \leqslant r'_i(A)c'_j(A)$$

или, равносильно,

$$\rho(A)^2 - (a_{ii} + a_{jj})\rho(A) + a_{ii}a_{jj} - r'_i(A)c'_j(A) \leqslant 0.$$

Следовательно, для $\rho(A)$ справедлива верхняя оценка

$$\rho(A) \leqslant \frac{1}{2}\left[a_{ii} + a_{jj} + \sqrt{(a_{ii} - a_{jj})^2 + 4r'_i(A)c'_j(A)}\right],$$

а значит тем более и оценка

$$\rho(A) \leqslant \frac{1}{2} \max_{i \neq j : a_{ij} \neq 0} \left[a_{ii} + a_{jj} + \sqrt{(a_{ii} - a_{jj})^2 + 4r'_i(A)c'_j(A)}\right], \quad (5.42)$$

являющаяся “смешанным” аналогом верхней оценки (5.28) и справедливая для неотрицательной матрицы A порядка $n \geqslant 2$, такой что векторы $r'(A)$ и $c'(A)$ оба положительны.

Мы завершаем этот параграф следующим обобщением следствия 5.7.

Следствие 5.8. *Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$, такая что оба вектора $r'(A)$ и $c'(A)$ положительны, и пусть D_s, $s = 1, \dots, k+l$, $k, l \geqslant 0$, $k + l \geqslant 1$, и Δ_p, $p = 1, \dots, r+q$, $r, q \geqslant 0$, $r + q \geqslant 1$, – произвольные диагональные матрицы порядка n с положительными диагональными элементами. Тогда для любого*

$\gamma \in [0,1]$ и для любых $\alpha_s, \beta_p \in [0,1]$, $s = 1, \ldots, k+l$, $p = 1, \ldots, r+q$, таких что

$$\sum_{s=1}^{k+l} \alpha_s = 1 = \sum_{p=1}^{r+q} \beta_p,$$

неравенство

$$\begin{aligned}
&[\rho(A) - a_{ii}]^{\gamma} [\rho(A) - a_{jj}]^{1-\gamma} \\
&\qquad \leqslant \left[\prod_{s=1}^{k} r_i'(D_s^{-1} A D_s)^{\alpha_s} \prod_{s=k+1}^{k+l} c_i'(D_s^{-1} A D_s)^{\alpha_s} \right]^{\gamma} \\
&\qquad \times \left[\prod_{p=1}^{r} r_j'(\Delta_p^{-1} A \Delta_p)^{\beta_p} \prod_{p=r+1}^{r+q} c_j'(\Delta_p^{-1} A \Delta_p)^{\beta_p} \right]^{1-\gamma}
\end{aligned} \tag{5.43}$$

выполняется при некоторых $i \neq j$, таких что $a_{ij} \neq 0$.

Доказательство. В случае неприводимой матрицы неравенство (5.43) непосредственно следует из теоремы 5.4, если положить

$$D = \prod_{s=1}^{k} (D_{r'(D_s^{-1} A D_s)})^{\alpha_s} \prod_{s=k+1}^{k+l} (D_{c'(D_s^{-1} A D_s)})^{\alpha_s}$$

и

$$\Delta = \prod_{p=1}^{r} (D_{r'(\Delta_p^{-1} A \Delta_p)})^{\beta_p} \prod_{p=r+1}^{r+q} (D_{c'(\Delta_p^{-1} A \Delta_p)})^{\beta_p}$$

и воспользоваться леммами 4.1 и 3.1. В приводимом случае доказательство аналогично доказательству следствия 5.7. □

В частности, если $k = l = r = q = 1$, $D_1 = D_2 = \Delta_1 = \Delta_2 = I_n$, $\alpha_1 = \alpha$ и $\beta_1 = \beta$, то, по следствию 5.8, для некоторых $i \neq j$, таких что $a_{ij} \neq 0$, справедливо неравенство

$$\begin{gathered}
[\rho(A) - a_{ii}]^{\gamma} [\rho(A) - a_{jj}]^{1-\gamma} \\
\leqslant r_i'(A)^{\alpha\gamma} r_j'(A)^{\beta(1-\gamma)} c_i'(A)^{(1-\alpha)\gamma} c_j'(A)^{(1-\beta)(1-\gamma)}, \\
\alpha, \beta, \gamma \in [0,1],
\end{gathered} \tag{5.44}$$

если оба вектора $r'(A)$ и $c'(A)$ положительны.

Заметим, что при $\alpha = \beta$ неравенство (5.44) сводится к неравенству (5.33), а при $\gamma = 1/2$ оно принимает вид

$$[\rho(A) - a_{ii}][\rho(A) - a_{jj}] \leqslant r_i'(A)^{\alpha} r_j'(A)^{\beta} c_i'(A)^{1-\alpha} c_j'(A)^{1-\beta}, \quad \alpha, \beta \in [0,1]. \tag{5.45}$$

§6. Оценки и неравенства, зависящие от путей

Оценки для перроновского корня неотрицательной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n, рассмотренные в §5, зависели от множества

$$\{(i,j),\ \ i,j \in \langle n\rangle\ :\ a_{ij} \neq 0\} = \{(i,j),\ \ i,j \in \langle n\rangle\ :\ i \to j \in E_A\},$$

где E_A – множество дуг в орграфе $D(A)$, которое может рассматриваться как множество всех путей длины 1 в $D(A)$. В этом параграфе мы обобщим некоторые из дуговых оценок, получив оценки, связанные с множествами

$$\mathcal{P}_k(A) = \{(i_1, \dots, i_{k+1}), i_1, \dots, i_{k+1} \in \langle n\rangle\ :\ i_j \to i_{j+1} \in E_A,\\ j = 1, \dots, k\}, \quad k \geqslant 1,$$

всех путей длины $k \geqslant 1$ в орграфе матрицы A.

С этой целью сперва мы установим следующее обобщение неравенств (5.1) на случай произвольного $k \geqslant 1$.

Теорема 6.1. *Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ и пусть*

$$\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n), \quad \delta_i > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда для любого $\alpha \in [0,1]$ и любого фиксированного $k \geqslant 1$ перроновский корень $\rho(A)$ удовлетворяет двусторонним оценкам

$$\begin{aligned} &\rho(\Delta^{-1}A) \min_{(i_1,\dots,i_{k+1}) \in \mathcal{P}_k(A)} \left\{ \prod_{j=1}^{k} \delta_{i_j}^{\alpha} \prod_{j=2}^{k+1} \delta_{i_j}^{1-\alpha} \right\}^{1/k} \\ &\leqslant \rho(A) \leqslant \rho(\Delta^{-1}A) \max_{(i_1,\dots,i_{k+1}) \in \mathcal{P}_k(A)} \left\{ \prod_{j=1}^{k} \delta_{i_j}^{\alpha} \prod_{j=2}^{k+1} \delta_{i_j}^{1-\alpha} \right\}^{1/k}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то либо оба неравенства в (6.1) строгие, либо оба они являются равенствами.

Доказательство. Обозначим

$$B = \Delta^{-\alpha} A \Delta^{-(1-\alpha)}.$$

Тогда, очевидно,

$$\rho(B) = \rho(\Delta^{-1}A),$$

и для любого $k \geqslant 1$ мы имеем:

$$(B^k)_{ij} = \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_{k+1})\in\mathcal{P}_k(A):\\ i_1=i,\ i_{k+1}=j}} \delta_{i_1}^{-\alpha} a_{i_1 i_2} \delta_{i_2}^{-(1-\alpha)} \delta_{i_2}^{-\alpha} a_{i_2 i_3} \dots \delta_{i_k}^{-\alpha} a_{i_k i_{k+1}} \delta_{i_{k+1}}^{-(1-\alpha)}$$

$$= \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_{k+1})\in\mathcal{P}_k(A):\\ i_1=i,\ i_{k+1}=j}} \frac{a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_k i_{k+1}}}{\delta_{i_1}^{\alpha} \delta_{i_2} \dots \delta_{i_k} \delta_{i_{k+1}}^{1-\alpha}}, \quad i,j \in \langle n \rangle.$$

Из этих соотношений немедленно вытекают матричные неравенства

$$B^k \min_{(i_1,\dots,i_{k+1})\in\mathcal{P}_k(A)} \left\{ \prod_{j=1}^{k} \delta_{i_j}^{\alpha} \prod_{j=2}^{k+1} \delta_{i_j}^{1-\alpha} \right\} \leqslant A^k$$

$$\leqslant \max_{(i_1,\dots,i_{k+1})\in\mathcal{P}_k(A)} \left\{ \prod_{j=1}^{k} \delta_{i_j}^{\alpha} \prod_{j=2}^{k+1} \delta_{i_j}^{1-\alpha} \right\} B^k,$$

из которых утверждения теоремы следуют в силу теоремы 1.1. □

Заметим, что в случае $k = 1$ путевые оценки (6.1) сводятся к дуговым оценкам (5.1). Путевые обобщения дуговых оценок (5.17) имеют следующий вид.

Следствие 6.1. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$. Тогда для любого $\alpha \in [0,1]$ и любого фиксированного $k \geqslant 1$ справедлива верхняя оценка*

$$\rho(A) \leqslant \max_{(i_1,\dots,i_{k+1})\in\mathcal{P}_k(A)} \left\{ \prod_{j=1}^{k} r_{i_j}(A)^{\alpha} \prod_{j=2}^{k+1} r_{i_j}(A)^{1-\alpha} \right\}^{1/k}, \tag{6.2}$$

а если матрица A не содержит нулевых строк, то справедлива и нижняя оценка

$$\rho(A) \geqslant \min_{(i_1,\dots,i_{k+1})\in\mathcal{P}_k(A)} \left\{ \prod_{j=1}^{k} r_{i_j}(A)^{\alpha} \prod_{j=2}^{k+1} r_{i_j}(A)^{1-\alpha} \right\}^{1/k}. \tag{6.3}$$

В частности, (при $\alpha = 1$) мы имеем

$$\rho(A) \leqslant \max_{(i_1,\dots,i_k)\in\mathcal{P}_{k-1}(A)} \left\{ \prod_{j=1}^{k} r_{i_j}(A) \right\}^{1/k} \tag{6.4}$$

и, если A не содержит нулевых строк, то

$$\rho(A) \geqslant \min_{(i_1,\dots,i_k)\in\mathcal{P}_{k-1}(A)} \left\{ \prod_{j=1}^{k} r_{i_j}(A) \right\}^{1/k}. \tag{6.5}$$

(Для любой матрицы A порядка $n \geqslant 1$ множество $\mathcal{P}_0(A)$ по определению совпадает с $\langle n \rangle$.) Кроме того, если матрица A неприводима, то либо оба неравенства (6.2) и (6.3) являются строгими, либо оба они являются равенствами.

Доказательство. Если матрица A не содержит нулевых строк, то для доказательства оценок (6.2) и (6.3) достаточно положить $\Delta = D_{r(A)}$ и воспользоваться теоремой 6.1 и леммой 3.1. Утверждение теоремы, касающееся неприводимого случая, также следует из теоремы 6.1. Наконец, для того, чтобы распространить оценку (6.2) на произвольные неотрицательные матрицы, следует воспользоваться леммой 3.2, как это было сделано в замечании 5.3. $\square$

Теперь мы выведем аналог теоремы 6.1 для случая расщепленной матрицы. Итак, пусть $A = D_A + P$, $n \geqslant 2$. Обозначим

$$D = \rho(A) I_n - D_A$$

и предположим, что

$$\rho(A) > \max_{i\in\langle n\rangle} a_{ii}.$$

Применив теорему 6.1 к матрицам $D^{-1}P$ и $\widetilde{\Delta} = D^{-1}\Delta$ и воспользовавшись леммой 4.2, мы получаем неравенства

$$\rho(\widetilde{\Delta}^{\,-1} D^{-1} P) \min_{(i_1,\dots,i_{k+1})\in\mathcal{P}_k(P)} \left\{ \prod_{j=1}^{k} \widetilde{\delta}_{\,i_j}^{\,\alpha} \prod_{j=2}^{k+1} \widetilde{\delta}_{\,i_j}^{\,1-\alpha} \right\}^{1/k}$$

$$= \rho(\Delta^{-1} P) \min_{(i_1,\dots,i_{k+1})\in\mathcal{P}_k(P)} \left\{ \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{\delta_{i_j}}{d_{i_j}}\right)^{\alpha} \prod_{j=2}^{k+1} \left(\frac{\delta_{i_j}}{d_{i_j}}\right)^{1-\alpha} \right\}^{1/k} \leqslant \rho(D^{-1}P) = 1$$

$$\leqslant \rho(\Delta^{-1}P) \max_{(i_1,\ldots,i_{k+1})\in\mathcal{P}_k(P)} \left\{ \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{\delta_{i_j}}{d_{i_j}}\right)^{\alpha} \prod_{j=2}^{k+1} \left(\frac{\delta_{i_j}}{d_{i_j}}\right)^{1-\alpha} \right\}^{1/k}.$$

Учитывая, что

$$d_{i_j} = \rho(A) - a_{i_j i_j}, \quad j = 1, \ldots, k+1,$$

мы приходим к следующему результату.

Теорема 6.2. *Пусть* $A = (a_{ij}) = D_A + P$ *– неотрицательная матрица порядка* $n \geqslant 2$ *и пусть*

$$\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n), \quad \delta_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Если

$$\rho(A) > \max_{i\in\langle n\rangle} a_{ii},$$

то для любого $\alpha \in [0,1]$ *и любого фиксированного* $k \geqslant 1$ *справедливы неравенства*

$$\rho(\Delta^{-1}P) \min_{(i_1,\ldots,i_{k+1})\in\mathcal{P}_k(P)} \left\{ \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{\delta_{i_j}}{\rho(A) - a_{i_j i_j}}\right)^{\alpha} \right.$$

$$\left. \times \prod_{j=2}^{k+1} \left(\frac{\delta_{i_j}}{\rho(A) - a_{i_j i_j}}\right)^{1-\alpha} \right\}^{1/k} \leqslant 1 \leqslant \rho(\Delta^{-1}P) \tag{6.6}$$

$$\times \max_{(i_1,\ldots,i_{k+1})\in\mathcal{P}_k(P)} \left\{ \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{\delta_{i_j}}{\rho(A) - a_{i_j i_j}}\right)^{\alpha} \prod_{j=2}^{k+1} \left(\frac{\delta_{i_j}}{\rho(A) - a_{i_j i_j}}\right)^{1-\alpha} \right\}^{1/k}.$$

Кроме того, если матрица A *неприводима, то неравенства в* (6.6) *либо оба строгие, либо оба являются равенствами.*

Аналогично тому, как из теоремы 5.2 было выведено следствие 5.3, из теоремы 6.2 можно вывести следующее путевое обобщение следствия 5.3.

Следствие 6.2. *Пусть $A = (a_{ij}) = D_A + P$ – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$, такая что вектор $r'(A)$ положителен. Тогда для любого $\alpha \in [0,1]$ и любого фиксированного $k \geqslant 1$ неравенство*

$$\begin{aligned}\prod_{s=1}^{k}[\rho(A) - a_{i_s i_s}]^{\alpha} \prod_{s=2}^{k+1}[\rho(A) - a_{i_s i_s}]^{1-\alpha} \\ \leqslant \prod_{s=1}^{k} r'_{i_s}(A)^{\alpha} \prod_{s=2}^{k+1} r'_{i_s}(A)^{1-\alpha}\end{aligned} \tag{6.7}$$

выполнено для некоторого пути $(i_1, \dots, i_{k+1}) \in \mathcal{P}_k(P)$, а если матрица A неприводима, то для некоторого пути $(j_1, \dots, j_{k+1}) \in \mathcal{P}_k(P)$ выполнено и неравенство

$$\begin{aligned}\prod_{s=1}^{k}[\rho(A) - a_{j_s j_s}]^{\alpha} \prod_{s=2}^{k+1}[\rho(A) - a_{j_s j_s}]^{1-\alpha} \\ \geqslant \prod_{s=1}^{k} r'_{j_s}(A)^{\alpha} \prod_{s=2}^{k+1} r'_{j_s}(A)^{1-\alpha}.\end{aligned} \tag{6.8}$$

В частности, взяв $\alpha = 1$, мы получаем, что для некоторых $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{P}_{k-1}(P)$ и $(j_1, \dots, j_k) \in \mathcal{P}_{k-1}(P)$ выполняются неравенства

$$\prod_{s=1}^{k}[\rho(A) - a_{i_s i_s}] \leqslant \prod_{s=1}^{k} r'_{i_s}(A) \tag{6.9}$$

и

$$\prod_{s=1}^{k}[\rho(A) - a_{j_s j_s}] \geqslant \prod_{s=1}^{k} r'_{j_s}(A). \tag{6.10}$$

Нашей следующей целью является вывод путевого обобщения теоремы 5.3.

Теорема 6.3. *Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ и пусть*

$$\begin{aligned}D &= \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n), \quad d_i > 0, \quad i = 1, \dots, n,\\ \Delta &= \operatorname{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n), \quad \delta_i > 0, \quad i = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Тогда для любого $\alpha \in [0,1]$ и любого фиксированного $k \geqslant 1$ перроновский корень $\rho(A)$ удовлетворяет верхней оценке

$$\rho(A) \leqslant \max_{(i_1,\dots,i_{k+1})\in\mathcal{P}_k(A)} \left\{ \prod_{j=1}^{k} d_{i_j}^{\alpha} \prod_{j=2}^{k+1} \delta_{i_j}^{1-\alpha} \right\}^{1/k} \rho(D^{-1}A)^{\alpha}\rho(\Delta^{-1}A)^{1-\alpha}. \tag{6.11}$$

Доказательство. Введем обозначения

$$B = \Delta^{-(1-\alpha)}A\Delta^{1-\alpha}, \quad C = D^{-\alpha}\Delta^{-(1-\alpha)}A. \tag{6.12}$$

Тогда, очевидно,

$$B = D^{\alpha}C\Delta^{1-\alpha},$$

и для $k \geqslant 1$ мы имеем:

$$\begin{aligned} B^k &= D^{\alpha}C(\Delta^{1-\alpha}D^{\alpha})C(\Delta^{1-\alpha}D^{\alpha})\dots(\Delta^{1-\alpha}D^{\alpha})C\Delta^{1-\alpha} \\ &\leqslant \max_{(i_1,\dots,i_{k+1})\in\mathcal{P}_k(A)} \left\{ d_{i_1}^{\alpha}\delta_{i_2}^{1-\alpha}d_{i_2}^{\alpha}\dots\delta_{i_k}^{1-\alpha}d_{i_k}^{\alpha}\delta_{i_{k+1}}^{1-\alpha} \right\} C^k \\ &= \max_{(i_1,\dots,i_{k+1})\in\mathcal{P}_k(A)} \left\{ \left(\prod_{j=1}^{k} d_{i_j} \right)^{\alpha} \left(\prod_{j=2}^{k+1} \delta_{i_j} \right)^{1-\alpha} \right\} C^k. \end{aligned}$$

В силу теоремы 1.1, из этого матричного неравенства следует, что

$$\rho(B) \leqslant \rho(C) \max_{(i_1,\dots,i_{k+1})\in\mathcal{P}_k(A)} \left\{ \left(\prod_{j=1}^{k} d_{i_j} \right)^{\alpha} \left(\prod_{j=2}^{k+1} \delta_{i_j} \right)^{1-\alpha} \right\}^{1/k},$$

откуда, ввиду (6.12) и леммы 4.1, и вытекает верхняя оценка (6.11). □

Из теоремы 6.3 мы выведем следующее путевое обобщение следствия 5.5.

Следствие 6.3. *Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$. Тогда для любого $\alpha \in [0,1]$ и любого фиксированного $k \geqslant 1$ перроновский корень $\rho(A)$ удовлетворяет верхним оценкам*

$$\rho(A) \leqslant \max_{(i_1,\dots,i_{k+1})\in\mathcal{P}_k(A)} \left\{ \prod_{j=1}^{k} r_{i_j}(A)^{\alpha} \prod_{j=2}^{k+1} c_{i_j}(A)^{1-\alpha} \right\}^{1/k} \tag{6.13}$$

и

$$\rho(A) \leqslant \max_{(i_1,\dots,i_{k+1})\in\mathcal{P}_k(A)} \left\{ \prod_{j=1}^{k} c_{i_j}(A)^{\alpha} \prod_{j=2}^{k+1} r_{i_j}(A)^{1-\alpha} \right\}^{1/k}. \qquad (6.14)$$

Доказательство. Если матрица A неприводима, то векторы $r(A)$ и $c(A)$ оба положительны, и мы полагаем

$$D = D_{r(A)}, \quad \Delta = D_{c(A)}$$

(или наоборот). В этом случае неравенства (6.13) и (6.14) непосредственно следуют из теоремы 6.3 и леммы 3.1.

Переход к общему приводимому случаю по-прежнему осуществляется на основе леммы 3.2. □

Последняя теорема этого параграфа представляет собой обобщение теоремы 5.4 на случай путей длинны $k \geqslant 1$.

Теорема 6.4. *Пусть $A = (a_{ij}) = D_A + P$ – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$ и пусть*

$$D = \operatorname{diag}(d_1,\dots,d_n), \quad d_i > 0, \quad i = 1,\dots,n,$$
$$\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1,\dots,\delta_n), \quad \delta_i > 0, \quad i = 1,\dots,n.$$

Если

$$\rho(A) > \max_{i\in\langle n\rangle} a_{ii},$$

то для любого $\alpha \in [0,1]$ и любого фиксированного $k \geqslant 1$ неравенство

$$\begin{aligned} &\prod_{j=1}^{k} [\rho(A) - a_{i_j i_j}]^{\alpha} \prod_{j=2}^{k+1} [\rho(A) - a_{i_j i_j}]^{1-\alpha} \\ &\leqslant \prod_{j=1}^{k} d_{i_j}^{\alpha} \prod_{j=2}^{k+1} \delta_{i_j}^{1-\alpha} \rho(D^{-1}P)^{\alpha k} \rho(\Delta^{-1}P)^{(1-\alpha)k} \end{aligned} \qquad (6.15)$$

справедливо для некоторого пути $(i_1,\dots,i_{k+1}) \in \mathcal{P}_k(P)$.

Доказательство. Заметим, что в условиях теоремы 6.4 матрица

$$\Sigma = \rho(A)I_n - D_A$$

обратима. Следовательно, можно определить матрицы

$$\widetilde{D} = \operatorname{diag}(\widetilde{d}_1,\dots,\widetilde{d}_n) = \Sigma^{-1}D$$

и

$$\widetilde{\Delta} = \operatorname{diag}(\widetilde{\delta}_1, \dots, \widetilde{\delta}_n) = \Sigma^{-1}\Delta.$$

Применяя теорему 6.3 к матрицам $\widetilde{D}$, $\widetilde{\Delta}$ и $\Sigma^{-1}P$ и используя лемму 4.2, мы приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
1 = \rho(\Sigma^{-1}P) &\leqslant \max_{(i_1,\dots,i_{k+1})\in\mathcal{P}_k(P)} \left\{ \prod_{j=1}^{k} \widetilde{d}_{i_j}^{\,\alpha} \prod_{j=2}^{k+1} \widetilde{\delta}_{i_j}^{\,1-\alpha} \right\}^{1/k} \\
&\quad \times \rho(\widetilde{D}^{\,-1}\Sigma^{-1}P)^{\alpha}\rho(\widetilde{\Delta}^{\,-1}\Sigma^{-1}P)^{1-\alpha} \\
= \max_{(i_1,\dots,i_{k+1})\in\mathcal{P}_k(P)} &\left\{ \prod_{j=1}^{k} \frac{d_{i_j}^{\,\alpha}}{[\rho(A)-a_{i_ji_j}]^{\alpha}} \prod_{j=2}^{k+1} \frac{\delta_{i_j}^{1-\alpha}}{[\rho(A)-a_{i_ji_j}]^{1-\alpha}} \right\}^{1/k} \\
&\quad \times \rho(D^{-1}P)^{\alpha}\rho(\Delta^{-1}P)^{1-\alpha},
\end{aligned}$$

из которого требуемое неравенство (6.15) вытекает тривиальным образом. □

Из теоремы 6.4 вытекает следующее обобщение следствия 5.7.

Следствие 6.4. *Пусть $A = (a_{ij}) = D_A + P$ – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$, такая что векторы $r'(A)$ и $c'(A)$ положительны. Тогда для любого $\alpha \in [0,1]$ и любого фиксированного $k \geqslant 1$ неравенство*

$$\begin{aligned}
&\prod_{j=1}^{k}[\rho(A)-a_{i_ji_j}]^{\alpha}\prod_{j=2}^{k+1}[\rho(A)-a_{i_ji_j}]^{1-\alpha} \\
&\qquad \leqslant \prod_{j=1}^{k} r'_{i_j}(A)^{\alpha}\prod_{j=2}^{k+1} c'_{i_j}(A)^{1-\alpha}
\end{aligned} \tag{6.16}$$

выполняется для некоторого пути $(i_1,\dots,i_{k+1}) \in \mathcal{P}_k(P)$.

Доказательство. Если матрица A неприводима, то оба вектора $r'(A)$ и $c'(A)$ положительны, и мы можем применить теорему 6.4, положив

$$D = D_{r'(A)}, \quad \Delta = D_{c'(A)}.$$

Ввиду леммы 3.1, из так полученного неравенства следует (6.16).

Переход к приводимому случаю осуществляется, как в доказательстве следствия 5.7. □

В частности, при $\alpha = 1/2$ неравенство (6.16) принимает вид

$$\prod_{j=1}^{k}[\rho(A) - a_{i_j i_j}] \prod_{j=2}^{k+1}[\rho(A) - a_{i_j i_j}] \leqslant \prod_{j=1}^{k} r'_{i_j}(A) \prod_{j=2}^{k+1} c'_{i_j}(A). \qquad (6.17)$$

В заключение этого параграфа заметим, что можно получить путевые обобщения также и для следствий 5.2, 5.4, 5.6 и 5.8, но мы их не приводим из-за громоздкости.

Литература

1. A. Berman, R. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences.* Academic Press, New York, 1979.
2. A. Brauer, *Limits for the characteristic roots of a matrix. II.* Duke Math. J., **14** (1947), 21–26.
3. A. Brauer, I. C. Gentry, *Bounds for the greatest characteristic root of an irreducible nonnegative matrix.* Linear Algebra Appl., **8** (1974), 105–107.
4. A. Brauer, I. C. Gentry, *Bounds for the greatest characteristic root of an irreducible nonnegative matrix II.* Linear Algebra Appl., **13** (1976), 109–114.
5. G. Frobenius, *Über Matrizen aus nichtnegativen Elementen.* Sitzungsber. Kön. uss. Akad. Wiss. Berlin (1912), pp. 465–477.
6. L. Yu. Kolotilina, *Lower bounds for the Perron root of a nonnegative matrix.* Linear Algebra Appl., **180** (1993), 133–151.
7. L. Yu. Kolotilina, *Generalizations of the Ostrowski–Brauer theorem.* — Linear Algebra Appl. (to appear).
8. M. Marcus, H. Minc, *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities.* Allyn and Bacon, Inc., Boston (1964).
9. H. Minc, *Nonnegative Matrices.* Wiley, New York (1988).
10. A. Ostrowski, *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale.* Comment. Math. Helv., **10** (1937), 69–97.
11. A. Ostrowski, *Ueber das Nichtverschwinden einer Klasse von Determinanten and die Lokalisierung der characteristischen Wurzels von Matrizen.* Compositio Math., **9** (1951), 209–226.
12. Shu-Lin Liu, *Bounds for the greatest characteristic root of a nonnegative matrix.* Linear Algebra Appl., **239** (1996), 151–160.

Kolotilina L. Yu. Bounds and inequalities for the Perron root of a nonnegative matrix.

In this paper, bounds and inequalities for the Perron root of a nonnegative matrix, extending and complementing the classical theorems of Frobenius and Ostrowski in terms of (deleted) row and column sums, are presented. All the results are derived by using the same approach, based on the monotonicity property of the Perron root.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова

Поступило 20 февраля 2002 г.