Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 282, 2001 г.

В. А. Солонников

ОЦЕНКА ОБОБЩЕННОЙ ЭНЕРГИИ В ЗАДАЧЕ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

§1. Введение

Работа посвящена задаче, описывающей эволюцию изолированной жидкой массы, ограниченной лишь свободной поверхностью, на которой действуют силы поверхностного натяжения. Задача состоит в нахождении неизвестной ограниченной области $\Omega_t \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$, а также векторного поля скоростей $\vec{v}(x,t) = (v_1, v_2, v_3)$ и давления $p(x,t)$, удовлетворяющих в Ω_t уравнениям Навье–Стокса

$$\vec{v}_t + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} - \nu\nabla^2\vec{v} + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad x \in \Omega_t, \quad t > 0, \tag{1.1}$$

по заданному в начальный момент времени векторному полю $\vec{v}$ и области Ω_0:

$$\vec{v}(x,0) = \vec{v}_0(x), \quad x \in \Omega_0. \tag{1.2}$$

Предполагается, что на границе $\Gamma_t = \partial\Omega_t$ выполняются динамические и кинематические краевые условия

$$T(\vec{v},p)\vec{n} - \sigma H\vec{n} = 0, \quad V_n = \vec{v} \cdot \vec{n}, \quad x \in \Gamma_t, \tag{1.3}$$

где $\vec{n}$ – единичная внешняя нормаль к Γ_t, V_n – скорость эволюции поверхности Γ_t в направлении $\vec{n}$, H – удвоенная средняя кривизна, которая считается отрицательной для выпуклых поверхностей, $T(\vec{v},p) = -pI + \nu S(\vec{v})$ – тензор напряжений, $S(\vec{v}) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)_{i,j=1,2,3}$ – удвоенный тензор скоростей деформации. Через ν и σ обозначены положительные постоянные коэффициенты вязкости и поверхностного натяжения; плотность жидкости положена равной единице.

Известно [1, 2], что при любой области Ω_0, граница которой Γ_0 должна обладать некоторой регулярностью, и любом соленоидальном поле $\vec{v}_0(x)$, удовлетворяющем естественным условиям

Работа поддержана грантом РФФИ No. 01-01-00330.

согласования

$$S(\vec{v}_0)\vec{n} - \vec{n}\big(\vec{n} \cdot S(\vec{v}_0)\vec{n}\big)\big|_{\Gamma_0} = 0,$$

задача (1.1)–(1.3) однозначно разрешима на некотором конечном интервале времени, но если область Ω_0 близка к шару, а поле $\vec{v}_0(x)$ достаточно мало, то решение определено при всех $t > 0$, и предельным режимом при $t \to \infty$ является вращение жидкости как твердого тела вокруг некоторой оси, определяемой начальными данными. Наша цель состоит в том, чтобы доказать разрешимость задачи (1.1)–(1.3) на бесконечном интервале времени при меньших ограничениях на начальные данные. Отметим, что решение задачи (1.1)–(1.3) подчиняется законам сохранения

$$|\Omega_t| = |\Omega_0|, \tag{1.4}$$
$$\int\limits_{\Omega_t} \vec{v}(x,t)dx = \int\limits_{\Omega_0} \vec{v}_0(x)dx,$$
$$\int\limits_{\Omega_t} (\vec{v} \times \vec{x})dx = \int\limits_{\Omega_0} (\vec{v}_0 \times \vec{x})dx,$$

причем без ограничения общности можно считать, что

$$\int\limits_{\Omega_t} \vec{v}(x,t)dx = \int\limits_{\Omega_0} \vec{v}_0(x)dx = 0, \tag{1.5}$$

$$\int\limits_{\Omega_t} \big(\vec{v}(x,t) \times \vec{x}\big)dx = \int\limits_{\Omega_0} (\vec{v}_0 \times \vec{x})dx = \beta\vec{e}_3 \equiv \beta(0,0,1), \tag{1.6}$$

$$\int\limits_{\Omega_t} \vec{x}dx = 0. \tag{1.7}$$

Скорость жидкости, равномерно вращающейся вокруг оси x_3 с угловой скоростью ω, определяется формулой

$$\vec{v}_\infty = \omega(-x_2, x_1, 0).$$

Вместе с давлением $p_\infty(x) = \frac{\omega^2}{2}|x'|^2 + p_1$, где $p_1 = \mathrm{const}$, $|x'|^2 = x_1^2 + x_2^2$, поле $\vec{v}_\infty(x)$ удовлетворяет соотношениям (1.1), (1.3), если только граница Γ_∞ области Ω_∞, заполняемой вращающейся жидкостью, подчиняется уравнению

$$\sigma H_\infty + \frac{\omega^2}{2}|x'|^2 + p_1 = 0, \quad x \in \Gamma_\infty, \tag{1.8}$$

определяющему так называемую фигуру равновесия вращающейся жидкости (см., например, [3]). Чтобы функция $\vec{v}_\infty$ удовлетворяла условию (1.6), угловая скорость ω должна быть связана с β соотношением

$$-\omega \int\limits_{\Omega_\infty} |x'|^2 dx = \beta. \tag{1.9}$$

Таким образом, в (1.8) следует положить $\omega^2 = \frac{\beta^2}{I_\infty^2}$, где $I_\infty = \int\limits_{\Omega_\infty} |x'|^2 dx$. Кроме того, область Ω_∞ должна удовлетворять условиям (1.4), (1.7), т.е.

$$|\Omega_\infty| = |\Omega_0|, \tag{1.10}$$

$$\int\limits_{\Omega_\infty} y_k dy = 0, \quad k = 1, 2, 3; \tag{1.11}$$

последнее условие означает, что центр тяжести области Ω_∞ находится в начале координат.

Уравнение (1.8) является уравнением Эйлера для функционала

$$G = \sigma|\Gamma| - \frac{\omega^2}{2} \int\limits_{\Omega} (x_1^2 + x_2^2) dx - p_1|\Omega|, \tag{1.12}$$

в котором $\omega = -\beta I_\infty$ считается заданной величиной, а Γ – поверхность, близкая к Γ_∞ и такая, что ограничиваемая ею область Ω обладает свойствами (1.4), (1.7). Постоянная p_1 может быть рассмотрена как множитель Лагранжа, соответствующий ограничению $|\Omega| = |\Omega_0|$. Можно было бы ввести множители Лагранжа $p^{(k)}$, соответствующие ограничениям (1.7), и рассмотреть функционал

$$G' = |\Gamma| - \frac{\omega^2}{2} \int\limits_{\Omega} |x'|^2 dx - p_1|\Omega| - \sum_{k=1}^{3} p^{(k)} \int\limits_{\Omega} x_k dx.$$

Пусть Ω'_∞ – фигура равновесия, определяемая уравнением Эйлера $\delta G' = 0$, т.е.

$$\sigma H'_\infty + \frac{\omega^2}{2}|y'|^2 + p_1 + \sum_{k=1}^{3} p^{(k)} y_k = 0$$

(см. §2). Умножая это уравнение на N'_j (компоненту вектора нормали к Γ'_∞), интегрируя по Γ'_∞ и пользуясь теоремой Гаусса, получаем

$$|\Omega'_\infty| p^{(j)} = -\omega^2 \int\limits_{\Omega'_\infty} y_j \, dy (1 - \delta_{3j}),$$

откуда видно, что (1.11) влечет за собой равенство $p^{(j)} = 0$. Разрешимость уравнения (1.12) при заданном малом β и при дополнительных условиях (1.10), (1.11) была доказана в работе [2]. Теперь мы отказываемся от условия малости β и постулируем существование гладкой вращательно симметричной фигуры равновесия Ω_∞, удовлетворяющей (1.8), (1.10), (1.11), причем ω определяется соотношением (1.9).

Любая поверхность Γ, достаточно близкая к Γ_∞, может быть задана уравнением

$$x = y + N(y)\rho(y), \quad y \in \Gamma_\infty, \tag{1.13}$$

где $\rho(y)$ – некоторая достаточно малая функция, а N – внешняя единичная нормаль к Γ_∞. В теории фигур равновесия критерием устойчивости области Ω_∞ считается положительность второй вариации функционала (1.12) (см. [3]), который мы будем рассматривать как функционал, зависящий от ρ. Ниже, в §2, эта зависимость будет указана явно.

Положим

$$\vec{v}\,'(x,t) = \vec{v}\,(x,t) - \vec{v}_\infty(y), \quad p'(x,t) = p(x,t) - p_\infty(x),$$

и перейдем во вращающуюся систему координат, т.е. введем новые переменные y, $\vec{w}$, q согласно формулам

$$x = Z(t)y, \quad \vec{w}(y,t) = Z^{-1}(t)\vec{v}\,'(Zy,t), \quad q(y,t) = p'(Zy,t),$$

где

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что при этом задача (1.1)–(1.3) перейдет в

$$\begin{aligned}
&\vec{w}_t + (\vec{w}\cdot\nabla)\vec{w} + 2(\vec{w}\cdot\nabla)\vec{v}_\infty(y) - \nu\nabla^2\vec{w} + \nabla q = 0,\\
&\nabla\cdot\vec{w} = 0, \quad y\in\Omega'_t, \quad t>0,\\
&\vec{w}\big|_{t=0} = \vec{v}_0(y) - \vec{v}_\infty(y) \equiv \vec{w}_0(y), \quad y\in\Omega_0,\\
&T(\vec{w},q)\vec{n} = \big(\sigma H + p_\infty(y)\big)\vec{n},\\
&V_n = \vec{w}\cdot\vec{n}, \quad y\in\Gamma'_t,
\end{aligned} \tag{1.14}$$

где $\Omega'_t = Z^{-1}\Omega_t$, $\Gamma'_t = \partial\Omega'_t$, $\vec{n}$ – нормаль к Γ'_t.

Одним из основных результатов работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что задача* (1.14) *имеет классическое решение, определенное на интервале времени* $(0,T)$*, причем поверхности* Γ'_t *определяются уравнением типа* (1.13)*, т.е.*

$$x = y + N(y)\rho(y,t), \quad y\in\Gamma_\infty, \tag{1.15}$$

а поверхность Γ_∞ *гладкая и обладает вращательной симметрией относительно оси* y_3*. Далее, пусть*

$$\sup_{t<T}\big|\rho(\,\cdot\,,t)\big|_{C^1(\Gamma_\infty)} = \sup_{\Gamma_\infty\times(0,T)}|\rho(y,t)| + \sup_{\Gamma_\infty\times(0,T)}|\nabla_{\Gamma_\infty}\rho(y,t)| \leqslant \delta \tag{1.16}$$

с некоторым малым δ*, а производные* $\nabla_{\Gamma_\infty}\nabla_{\Gamma_\infty}\rho$*,* $\nabla_{\Gamma_\infty}\rho_t$ *(*$\nabla_{\Gamma_\infty}\rho$ *– градиент функции* ρ *на поверхность* Γ_∞*) равномерно ограничены. Наконец, предположим, что*

$$c_1\big\|\rho\big\|_{W_2^1(\Gamma_\infty)} \leqslant \delta^2 G[\rho] \leqslant c_2\big\|\rho\big\|_{W_2^1(\Gamma_\infty)}, \tag{1.17}$$

если только поверхности сравнения обладают свойствами (1.4) *и* (1.7)*. Тогда существует функция* $\mathcal{E}(t)$ *(обобщенная энергия), удовлетворяющая неравенствам*

$$\begin{aligned}
c_3\Big(\big\|\vec{w}(\,\cdot\,,t)\big\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \big\|\rho(\,\cdot\,,t)\big\|^2_{W_2^1(\Gamma_\infty)}\Big) \leqslant \mathcal{E}(t) \leqslant\\
\leqslant c_4\Big(\big\|\vec{w}(\,\cdot\,,t)\big\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \big\|\rho(\,\cdot\,,t)\big\|^2_{W_2^1(\Gamma_\infty)}\Big)
\end{aligned} \tag{1.18}$$

и

$$\mathcal{E}(t) \leqslant e^{-bt}\mathcal{E}(0), \quad b>0. \tag{1.19}$$

Оценка (1.19) показывает, что при условии (1.16) $(\vec{v}_\infty, p_\infty, \Omega_\infty)$ является предельным режимом в задаче (1.14) при $t \to \infty$. Работа построена по следующему плану.

В §2 приводится детальный вывод формул для первой и второй вариаций функционала G (в частности, потому, что получаемые формулы отличаются от аналогичных формул, выведенных в [4, 5] и в некоторых других работах, см. литературу, цитированную в [5]). В §3 доказывается теорема 1. Следует отметить, что для некоторых задач гидродинамики, в том числе со свободными границами, обобщенная энергия была введена и оценена, например, в [6–8]. Наконец, в §4 приводится схема доказательства разрешимости задачи (1.14) на бесконечном интервале времени. Более полное доказательство будет дано в совместной работе автора и профессора М. Падулы.

§2. Вспомогательные построения и вычисление выриаций δG и $\delta^2 G$

Если поверхность Γ задается уравнением (1.13), то функционал (1.12) зависит от ρ и от $\nabla_{\Gamma_\infty}\rho$. Чтобы указать эту зависимость явно, мы отобразим область $\Omega \equiv \Omega(\rho)$, ограниченную поверхностью Γ, на область Ω_∞ с помощью преобразования, обратное к которому задается формулой

$$x = y + N^*(y)\rho^*(y) \equiv e_\rho(y), \quad y \in \Omega_\infty, \tag{2.1}$$

где $N^*(y)$ и $\rho^*(y)$ – продолжения функций $N(y)$ и $\rho(y)$ внутрь Ω_∞. Хорошо известно, что любая точка некоторой λ_0-окрестности поверхности Γ_∞ может быть представлена в виде

$$z = y + N(y)\lambda, \quad y \in \Gamma_\infty, \quad |\lambda| \leqslant \lambda_0,$$

и для любой такой точки мы полагаем

$$N^*(z) = N(y), \quad \rho^*(z) = \rho(y)\psi_{\delta_1}(\lambda),$$

где $\psi_{\delta_1}(\lambda)$ – гладкая срезающая функция, равная единице при $|\lambda| < \delta_1/2$ и нулю при $|\lambda| \geqslant 3\delta_1/4$. Вне указанной окрестности мы полагаем $\rho^*(y) = 0$, определяя тем самым преобразование (2.1) во всей области Ω'_∞. Отметим, что на поверхности Γ_∞ и вблизи нее

$$\frac{\partial N^*}{\partial N} = (N \cdot \nabla)N^* = 0, \quad \frac{\partial \rho^*}{\partial N} = N \cdot \nabla\rho^* = 0. \tag{2.2}$$

Если функция ρ достаточно мала, например,

$$\left|\rho\right|_{C^1(S)} \leqslant \delta \ll 1,$$

то преобразование $e_\rho(y)$ обратимо. Пусть $\mathcal{L}_\rho$ – его матрица Якоби:

$$\mathcal{L}_\rho(y) = \left(\frac{\partial e_\rho(y)}{\partial y}\right) = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial N_i^* \rho^*}{\partial y_j}\right)_{i,j=1,2,3}.$$

Пусть $L_\rho = \det \mathcal{L}_\rho(y)$, а $\widehat{\mathcal{L}}_\rho$ – взаимная матрица, т.е.

$$\widehat{\mathcal{L}}_\rho(y) = L_\rho \mathcal{L}_\rho^{-1}(y).$$

Все эти матрицы зависят от ρ^* и $\nabla\rho^*$.

Введем на поверхности Γ_∞ локальные координаты, т.е. представим Γ_∞ в виде

$$\Gamma_\infty = \bigcup_{k=1}^{M} \gamma_k$$

и предположим, что $\gamma_k = \{y = y(\xi_1, \xi_2), \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \leqslant d\}$. В качестве ξ можно взять декартовы координаты на касательной плоскости в некоторой точке $y_k \in \gamma_k$ и предположить, что γ_k задается уравнением

$$\xi_3 = F^{(k)}(\xi'), \quad \xi' = (\xi_1, \xi_2), \quad |\xi'| \leqslant d$$

(координата ξ_3 откладывается вдоль $N(y_k)$). Тем самым локальные координаты задаются на подмножестве

$$\gamma_k' = \{y + N(y)\rho, y \in \gamma_k\} \subset \Gamma.$$

Теперь мы можем определить метрический тензор g на Γ с элементами

$$g_{ij} = \frac{\partial x}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi_j} = \frac{\partial (y + \rho N)}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial (y + \rho N)}{\partial \xi_j}, \quad i, j = 1, 2, \tag{2.3}$$

и тогда $dS = \sqrt{\det g}\, d\xi$ и

$$\int\limits_\Gamma f(x) dx = \int\limits_{\Gamma_\infty} f(e_\rho(y)) \sqrt{\frac{\det g}{\det g_0}}\, dS, \tag{2.4}$$

где $f(x)$ – произвольная функция и

$$g_0 = \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi_j}\right)_{i,j=1,2}.$$

Следовательно,

$$G[\rho] = \sigma \int\limits_{\Gamma_\infty} \sqrt{\frac{\det g}{\det g_0}}\, dS - \frac{\omega_\infty^2}{2} \int\limits_{\Omega_\infty} |e'_\rho(y)|^2 L_\rho dy - p_1 \int\limits_{\Omega_\infty} L_\rho dy, \qquad (2.5)$$

где $|e'_\rho(y)|^2 = (y_1 + N_1\rho^*)^2 + (y_2 + N_2\rho^*)^2$. Ясно, что G зависит от ρ^* и $\nabla\rho^*$. Имеем

$$G[\rho] - G[0] = \int\limits_0^1 \frac{d}{d\lambda} G[\lambda\rho] d\lambda = \delta_0 G[\rho] + \int\limits_0^1 d\lambda \int\limits_0^\lambda \frac{d^2}{d\mu^2} G[\mu\rho] d\mu$$

$$= \delta_0 G[\rho] + \frac{1}{2}\delta_0^2 G[\rho] + \int\limits_0^1 (1-\mu)\left(\frac{d^2}{d\mu^2} G[\mu\rho] - \frac{d^2}{d\mu^2} G[\mu\rho]\Big|_{\mu=0}\right) d\mu,$$

где

$$\delta_0 G[\rho] = \frac{d}{d\lambda} G[\lambda\rho]\Big|_{\lambda=0}, \qquad \delta_0^2 G[\rho] = \frac{d^2}{d\mu^2} G[\mu\rho]\Big|_{\mu=0}.$$

Кроме того, мы положим

$$\delta G[\rho; r] = \frac{d}{d\lambda} G[\rho + \lambda r]\Big|_{\lambda=0}, \qquad \delta^2 G[\rho; r] = \frac{d}{d\mu} \delta G[\rho + \mu r; r]\Big|_{\mu=0},$$

так что

$$\delta_0 G[\rho] = \delta G[\rho]\Big|_{\rho=0, r=\rho}, \qquad \delta_0^2 G[\rho] = \delta\big(\delta G[\rho; r]\big)\Big|_{\rho=0, r=\rho}.$$

Переходим к вычислению вариаций $\delta_0 G$ и $\delta_0^2 G$. Пусть l_{ij} и l^{ij} – элементы матриц $\mathcal{L}_\rho$ и $\mathcal{L}_\rho^{-1}$, соответственно, а $\widehat{L}_{ij}$ – элементы матрицы $\widehat{\mathcal{L}}_\rho = L_\rho \mathcal{L}_\rho^{-1}$. Ясно, что при $\rho = 0$ имеем $l_{ij} = l^{ij} = \widehat{L}_{ij} = \delta_{ij}$, $L_\rho = 1$. Из формулы для производной определителя и из соотношения $\mathcal{L}_\rho^{-1}\mathcal{L}_\rho = I$ следует, что

$$\delta L_\rho[\rho; r] = \sum_{i,j=1}^{3} \delta l_{ij} \widehat{L}_{ji} = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial N_i^* r^*}{\partial y_j} \widehat{L}_{ji}, \qquad (2.6)$$

$$\delta \mathcal{L}_\rho^{-1} = -\mathcal{L}_\rho^{-1} \delta \mathcal{L}_\rho \mathcal{L}_\rho^{-1},$$

т.е.

$$\delta l^{ij}[\rho; r] = -\sum_{m,s=1}^{3} l^{im} \frac{\partial N_m^* r^*}{\partial y_s} l^{sj}, \qquad (2.7)$$

а значит

$$\delta \widehat{L}_{ij}[\rho; r] = L_\rho \delta l^{ij} + l^{ij} \delta L_\rho =$$

$$= \sum_{m,s=1}^{3} \Big(- l^{im} \frac{\partial N_m^* r^*}{\partial y_s} \widehat{L}_{sj} + l^{ij} \frac{\partial N_m^* r^*}{\partial y_s} \widehat{L}_{sm} \Big). \tag{2.8}$$

Вычислим теперь разность

$$\int\limits_{\Omega(\rho)} f(x)dx - \int\limits_{\Omega_\infty} f(y)dy = \int\limits_{\Omega_\infty} f\big(e_\rho(y)\big) L_\rho(y)dy - \int\limits_{\Omega_\infty} f(y)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 ds \int\limits_{\Omega_\infty} \frac{d}{ds}\Big(f\big(e_{s\rho}(y)\big) L_{s\rho}(y)\Big) dy =$$

$$= \int\limits_0^1 ds \int\limits_{\Omega_\infty} \Big(\nabla f\big(e_{s\rho}(y)\big) \cdot N^* \rho^* L_{s\rho}(y) + f\big(e_{s\rho}(y)\big) \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial N_i^* \rho}{\partial y_j} \widehat{L}_{ji}(y; s\rho) \Big) dy$$

для произвольной дифференцируемой функции $f(x)$. Интегрируя по частям во втором члене и принимая во внимание равенства

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_j} \widehat{L}_{ji} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

получаем

$$\int\limits_{\Omega(\rho)} f(x)dx - \int\limits_{\Omega_\infty} f(y)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 ds \int\limits_{\Gamma_\infty} f\big(e_{s\rho}(y)\big) \sum_{i,j=1}^{3} N_i N_j \rho \widehat{L}_{ij}(y; s\rho) dS_y. \tag{2.9}$$

Вычислим вариации $\delta_0 \Lambda(y,\rho)$ и $\delta_0^2 \Lambda(y,\rho)$ выражения $\Lambda(y,\rho) = \sum\limits_{i,j=1}^{3} N_i N_j \widehat{L}_{ij}(y;\rho)$, считая $y \in \Gamma_\infty$. Вследствие формулы (2.8),

$$\delta\Lambda(\rho; r) = \sum_{m,s,j,i=1}^{3} \Big(- l^{im} N_i \frac{\partial N_m r}{\partial y_s} \widehat{L}_{sj} N_j + N_i N_j l^{ij} \frac{\partial N_m r}{\partial y_s} \widehat{L}_{sm} \Big),$$

откуда, принимая во внимание (2.2), заключаем, что

$$\delta_0\Lambda = \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial N_m\rho}{\partial y_m} = -H_\infty\rho \tag{2.10}$$

и

$$\delta_0^2\Lambda = \sum_{m,s,i=1}^{3} \Big(-\delta_0 l^{im} N_i \frac{\partial N_m\rho}{\partial y_s} N_s - N_m \frac{\partial N_m\rho}{\partial y_s} \delta_0 \widehat{L}_{si} N_i + $$
$$ + N_i N_s \delta_0 l^{is} \frac{\partial N_m\rho}{\partial y_m}\Big) + \sum_{m,s=1} \frac{\partial N_m\rho}{\partial y_s} \delta_0 \widehat{L}_{sm}.$$

Вследствие (2.2), первая сумма исчезает, а формула (2.8) приводит к

$$\delta_0^2\Lambda = \Big(\sum_{m=1}^{3} \frac{\partial N_m\rho}{\partial y_m}\Big)^2 - \sum_{m,s=1}^{3} \frac{\partial N_m\rho}{\partial y_s}\,\frac{\partial N_s\rho}{\partial y_m} = \mathcal{K}(y)\rho^2,$$

$$\mathcal{K} = \sum_{m=1}^{3} \Big(\frac{\partial N_m}{\partial y_m}\Big)^2 - \sum_{m,s=1}^{3} \frac{\partial N_m}{\partial y_s}\,\frac{\partial N_s}{\partial y_m}.$$

Покажем, что последнее выражение равно удвоенной гауссовой кривизне K_∞ поверхности Γ_∞. Очевидно,

$$\mathcal{K} = \sum_{m=1}^{3} (\partial_m N_m)^2 - \sum_{m,s=1}^{3} \partial_s N_m\, \partial_m N_s, \tag{2.11}$$

где $\partial_m = \frac{\partial}{\partial y_m} - N_m \frac{\partial}{\partial N}$. Выражения $\partial_s N_m$ зависят только от значения N на Γ_∞, но не от способа продолжения функции N внутрь области Ω_∞, который может быть теперь изменен. Возьмем произвольную точку $x_0 \in \Gamma_\infty$ и введем местную декартову систему координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 с центром в x_0 и с осью ξ_3, направленной вдоль $N(x_0)$. Пусть $\xi_3 = F(\xi_1, \xi_2)$ – уравнение поверхности Γ_∞ вблизи x_0. Очевидно, $\nabla F\big|_{\xi=0} = 0$ и

$$N(\xi) = \Big(-\frac{F_{\xi_1}}{\sqrt{1+|\nabla F|^2}},\ -\frac{F_{\xi_2}}{\sqrt{1+|\nabla F|^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla F|^2}}\Big).$$

Положим $F(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = F(\xi_1,\xi_2)$ вблизи x_0. В местной системе функция $\mathcal{K}$ также записывается в форме (2.11) $\big($при $\partial_m = \frac{\partial}{\partial \xi_m} -$

$N_m \frac{\partial}{\partial N}\big)$ или, что то же самое,

$$\begin{aligned}\mathcal{K} =& 2\big(\partial_1 N_1 \partial_2 N_2 - \partial_1 N_2 \partial_2 N_1\big) + \\ &+2\big(\partial_1 N_1 \partial_3 N_3 + \partial_2 N_2 \partial_3 N_3 - \partial_1 N_3 \partial_3 N_1 - \partial_2 N_3 \partial_3 N_2\big).\end{aligned}$$

Элементарный подсчет показывает, что

$$\mathcal{K}(x_0) = 2\Big(F_{\xi_1\xi_1}\, F_{\xi_2\xi_2} - \big(F_{\xi_1\xi_2}\big)^2\Big)\Big|_{\xi=0} = 2K_\infty(x_0).$$

Так как точка x_0 была выбрана произвольно, мы имеем

$$\delta_0^2 \Lambda(y;\rho) = 2K_\infty(y)\rho^2.$$

Поскольку Λ является полиномом второй степени относительно ρ и ρ_{y_k}, справедлива формула

$$\Lambda(y;\rho) = 1 + \delta_0\Lambda + \frac{1}{2}\delta_0^2\Lambda = 1 - \rho H_\infty(y) + K_\infty(y)\rho^2,$$

а значит, из (2.9) следует соотношение

$$\int\limits_{\Omega(\rho)} f(x)dx - \int\limits_{\Omega_\infty} f(y)dy = \int\limits_0^1 ds \int\limits_{\Gamma_\infty} f\big(e_{s\rho}(y)\big)\rho\big(1 - s\rho H_\infty + s^2\rho^2 K_\infty\big)dS_y.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что условия постоянства объема и положения барицентра $\Omega(\rho)$ записываются в виде

$$\int\limits_{\Omega(\rho)} dx - \int\limits_{\Omega_\infty} dy = \int\limits_{\Gamma_\infty} \eta(y,\rho)dS_y = 0, \tag{2.12}$$

$$\int\limits_{\Omega(\rho)} x_k dx - \int\limits_{\Omega_\infty} y_k dy = \int\limits_{\Gamma_\infty} \psi_k(y,\rho)dS_y = 0, \quad k = 1,2,3, \tag{2.13}$$

где

$$\eta(y,\rho) = \rho - \frac{\rho^2}{2}H_\infty(y) + \frac{\rho^3}{3}K_\infty(y), \tag{2.14}$$

$$\psi_k(y,\rho) = y_k\eta(y,\rho) + N_k(y)\bigg(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3}H_\infty(y) + \frac{\rho^4}{4}K_\infty(y)\bigg). \tag{2.15}$$

Кроме того,

$$\delta_0 \int\limits_{\Omega(\rho)} f(x)dx = \int\limits_{\Gamma_\infty} f(y)\rho dS_y, \tag{2.16}$$

$$\delta_0^2 \int\limits_{\Omega(\rho)} f(x)dx = \int\limits_{\Gamma_\infty} \left(\frac{\partial f(y)}{\partial N} - f(y)H_\infty(y)\right)\rho^2 dS_y \tag{2.17}$$

и, если $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, то

$$\left|\int\limits_{\Omega(\rho)} f(x)dx - \delta_0 \int\limits_{\Omega(\rho)} f(x)dx - \frac{1}{2}\delta_0^2 \int\limits_{\Omega(\rho)} f(x)dx\right| \leqslant c\int\limits_{\Gamma_\infty} |\rho|^3 dS_y. \tag{2.18}$$

В частности,

$$\delta_0|\Omega_\rho| = \int\limits_{\Gamma_\infty} \rho dS_y, \quad \delta_0^2|\Omega_\rho| = -\int\limits_{\Gamma_\infty} H_\infty(y)\rho^2 dS_y, \tag{2.19}$$

$$\delta_0 \int\limits_{\Omega(\rho)} (x_1^2 + x_2^2)dx = \int\limits_{\Gamma_\infty} (y_1^2 + y_2^2)\rho dS_y, \tag{2.20}$$

$$\delta_0^2 \int\limits_{\Omega(\rho)} (x_1^2+x_2^2)dx = \int\limits_{\Gamma_\infty} \big(2(y_1N_1+y_2N_2)-(y_1^2+y_2^2)H_\infty(y)\big)\rho^2 dS_y. \tag{2.21}$$

Нам осталось вычислить первую и вторую вариации функционала $|\Gamma|$. Для этого, прежде всего, выразим $\sqrt{\frac{\det g}{\det g_0}}$ через функции, связанные с преобразованием (2.1). Для произвольной гладкой функции $f(x)$ имеем

$$\int\limits_{\Gamma(\rho)} f(x)dS = \int\limits_{\Omega(\rho)} \nabla\cdot\vec{w}(x)dx,$$

где $\vec{w}(x)$ – векторное поле, удовлетворяющее условию $\vec{w}\cdot\vec{n}\big|_{\Gamma(\rho)} = f$. Перейдя к новым переменным интегрирования $y \in \Omega_\infty$ по формуле (2.1), получаем

$$\int\limits_{\Gamma(\rho)} f(x)dS_x = \sum_{k,m=1}^{3} \int\limits_{\Omega_\infty} \frac{\partial w_k}{\partial y_m}\,\frac{\partial y_m}{\partial x_k}L_\rho dy = \sum_{k,m=1}^{3} \int\limits_{\Omega_\infty} \frac{\partial w_k}{\partial y_m}\widehat{L}_{mk}dy =$$

$$= \sum_{k,m} \int\limits_{\Gamma_\infty} w_k N_m \widehat{L}_{mk} dS_y = \int\limits_{\Gamma_\infty} f(e_\rho(y)) |\widehat{\mathcal{L}}^T \vec{N}| dS_y,$$

поскольку $\vec{n} = \frac{1}{|\widehat{\mathcal{L}}^T \vec{N}|} \widehat{\mathcal{L}}^T \vec{N}$. Сравнивая получившуюся формулу с (2.4), заключаем, что

$$\sqrt{\frac{\det g}{\det g_0}} = |\widehat{\mathcal{L}}^T \vec{N}|.$$

Таким образом,

$$\delta|\Gamma|(\rho; r) = \int\limits_{\Gamma_\infty} \delta|\widehat{\mathcal{L}}^T \vec{N}| dS_y = \int\limits_{\Gamma_\infty} \frac{1}{|\widehat{\mathcal{L}}^T \vec{N}|} \sum_{k,m,i} N_k \widehat{L}_{ki} N_m \delta \widehat{L}_{mi} dS_y, \quad (2.22)$$

так что

$$\delta_0|\Gamma| = \int\limits_{\Gamma_\infty} \sum_{i,m=1}^{3} N_i N_m \delta_0 \widehat{L}_{mi} dS_y = -\int\limits_{\Gamma_\infty} H_\infty \rho dS_y,$$

$$\delta^2|\Gamma|(\rho; r) = \int\limits_{\Gamma_\infty} \Bigg[-\frac{1}{|\widehat{\mathcal{L}}^T \vec{N}|^3} \Big(\sum_{k,m,i} N_k \widehat{L}_{ki} N_m \delta \widehat{L}_{mi} \Big)^2 +$$

$$+ \frac{1}{|\widehat{\mathcal{L}}^T \vec{N}|} \sum_{i=1}^{3} \Big(\sum_{m=1}^{3} N_m \delta \widehat{L}_{mi} \Big)^2 + \frac{1}{|\widehat{\mathcal{L}}^T \vec{N}|} \sum_{k,m,i} N_k \widehat{L}_{ki} N_m \delta^2 \widehat{L}_{mi} \Bigg] dS_y.$$

Отсюда вытекает, во-первых, что

$$\delta_0^2|\Gamma| = \int\limits_{\Gamma_\infty} \Bigg[-(\delta_0 \Lambda)^2 + \sum_{i=1}^{3} \Big(\sum_{m=1}^{3} N_m \delta_0 \widehat{L}_{mi} \Big)^2 + \delta_0^2 \Lambda \Bigg] dS =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_\infty} \Bigg[-\rho^2 H_\infty^2 + \sum_{i=1}^{3} (\partial_i \rho + N_i H_\infty \rho)^2 + 2K_\infty \rho^2 \Bigg] dS =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_\infty} \big(|\nabla_{\Gamma_\infty} \rho|^2 + 2K_\infty \rho^2 \big) dS. \quad (2.23)$$

Кроме того,

$$\big| \delta^2|\Gamma|(s\rho, \rho) - \delta_0^2|\Gamma| \big| \leqslant c\delta \big\| \rho \big\|^2_{W_2^1(\Gamma_\infty)}, \quad s \in [0, 1],$$

и, следовательно,

$$\Big| |\Gamma| - |\Gamma_\infty| - \delta_0|\Gamma| - \frac{1}{2}\delta_0|\Gamma| \Big| \leqslant c\delta \big\|\rho\big\|^2_{W_2^1(\Gamma_\infty)},$$

если $\big|\rho\big|_{C^1(\Gamma_\infty)} \leqslant \delta$.

Формула (2.22) может быть также записана в виде

$$\delta|\Gamma|(\rho;r) = \sum_{i,m=1}^{3} \int\limits_{\Gamma_\infty} n_i N_m \, \delta \, \widehat{L}_{mi} dS_y =$$

$$= \sum_{i,m,k,s}^{3} \int\limits_{\Gamma_\infty} \left(- n_i N_m \widehat{L}_{mk} \frac{\partial N_k r}{\partial y_s} l^{si} + n_i N_m \widehat{L}_{mi} \frac{\partial N_k r}{\partial y_s} l^{sk} \right) dS_y =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_\infty} \left(- \sum_{i,k,s} n_i n_k \frac{\partial N_k r}{\partial y_s} l^{si} + \frac{\partial N_k r}{\partial y_s} l^{sk} \right) \big| \,\widehat{\mathcal{L}}^T \vec{N} \,\big| dS_y .$$

Вспоминая, что $l^{si} = \frac{\partial y_s}{\partial x_i}$, получаем

$$\delta|\Gamma|(\rho;r) = \int\limits_{\Gamma(\rho)} \sum_{k=1}^{3} \partial_k N_k r dS_x, \tag{2.24}$$

где

$$\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k} - n_k \frac{\partial}{\partial n} = \sum_{j=1}^{3} n_j \left(n_j \frac{\partial}{\partial x_k} - n_k \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

С помощью формулы Стокса можно “проинтегрировать по частям” в (2.24) и придти к

$$\delta|\Gamma|(\rho;r) = - \int\limits_{\Gamma(\rho)} \sum_{k,j} N_k r \left(n_j \frac{\partial}{\partial x_k} - n_k \frac{\partial}{\partial x_j} \right) n_j dS =$$

$$= \int\limits_{\Gamma(\rho)} r(\vec{N} \cdot \vec{n}) \sum_j \partial_j n_j dS = - \int\limits_{\Gamma(\rho)} r(\vec{N} \cdot \vec{n}) H dS =$$

$$= - \int\limits_{\Gamma_\infty} \Lambda(y;\rho) H r dS_y . \tag{2.25}$$

Мы воспользуемся этим соотношением в следующем параграфе. Заметим, что из (2.25) можно получить (2.23), если воспользоваться соотношением (2.10) и известной формулой для вариации кривизны (см. [9], §117). В наших обозначениях она имеет вид

$$\delta_0 H = \big(H_\infty^2 - 2K_\infty\big)\rho + \Delta_{\Gamma_\infty}\rho. \tag{2.26}$$

Вследствие (2.25) и (2.10), имеем:

$$\delta_0^2|\Gamma| = -\int\limits_{\Gamma_\infty} \Big(\delta_0\Lambda H_\infty + H_\infty^2\rho - 2K_\infty\rho + \Delta_{\Gamma_\infty}\rho\Big)\rho dS_y =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_\infty} \Big(2K_\infty\rho^2 + \nabla(\rho,\rho)\Big) dS_y$$

(Δ_{Γ_∞} – оператор Лапласа–Бельтрами на Γ_∞).

Эта формула для $\delta_0^2|\Gamma|$ приведена в [9], §116. Квадратичная форма $\nabla(\rho,\rho)$ в локальных координатах имеет вид

$$\nabla(\rho,\rho) = \sum_{\beta,\gamma=1}^{2} g^{\alpha\beta}(\xi)\frac{\partial\rho}{\partial\xi_\alpha}\,\frac{\partial\rho}{\partial\xi_\beta},$$

где $g^{\alpha\beta}$ – элементы матрицы, обратной к $\Big(g_{ij} = \frac{\partial\vec{y}}{\partial\xi_i}\cdot\frac{\partial\vec{y}}{\partial\xi_j}\Big)_{i,j=1,2}$. Выбирая локальные координаты так же, как выше, убеждаемся в том, что

$$\nabla(\rho,\rho) = \sum_{j=1}^{3}(\partial_j\rho)^2 = |\nabla_{\Gamma_\infty}\rho|^2.$$

Итак, для функционала (1.12) имеем

$$\delta_0 G = -\int\limits_{\Gamma_\infty}\Big(H_\infty + \frac{\omega^2}{2}|y'|^2 + p_1\Big)\rho dS_y = 0,$$

в силу (1.8); кроме того, вследствие (2.17), (2.23),

$$\delta_0^2 G = \int\limits_{\Gamma_\infty}\bigg(|\nabla_{\Gamma_\infty}\rho|^2 + 2K_\infty\rho^2 -$$

$$- \frac{\omega^2}{2}\big(2(y_1N_1 + y_2N_2) - |y'|^2H_\infty\big)\rho^2 + p_1H_\infty\rho^2\bigg)dS_y, \tag{2.27}$$

$$\left| G - G_\infty - \partial_0 G - \frac{1}{2}\partial_0^2 G \right| \leqslant c\delta \|\rho\|^2_{W_2^1(\Gamma_\infty)}, \tag{2.28}$$

если $|\rho|_{C^1(\Gamma_\infty)} \leqslant \delta$.

§3. Доказательство теоремы 1

При доказательстве оценки (1.19) будет использовано следующее вспомогательное предложение.

Лемма 1. *По любой заданной на Γ_t функции $f(x,t)$, обладающей свойствами*

$$f(\,\cdot\,,t) \in W_2^{1/2}(\Gamma_t), \quad f_t(\,\cdot\,,t) \in L_2(\Gamma_t), \quad \int\limits_{\Gamma_t} f(x,t)dS = 0, \tag{3.1}$$

можно построить в Ω_t векторное поле $\vec{V}(x,t)$, такое, что

$$\nabla \cdot \vec{V}(x,t) = 0, \quad x \in \Omega_t, \quad \vec{V} \cdot \vec{n}\Big|_{\Gamma_t} = f, \tag{3.2}$$

$$\int\limits_{\Omega_t} \vec{V} \cdot \vec{\eta}_i(x)dx = 0, \quad i = 1,2,3, \quad \vec{\eta}_i = \vec{e}_i \times \vec{x}, \tag{3.3}$$

и

$$\|\vec{V}(\,\cdot\,,t)\|_{W_2^1(\Omega_t)} \leqslant c\|f\|_{W_2^{1/2}(\Gamma_t)}, \tag{3.4}$$

$$\|\vec{V}(\,\cdot\,,t)\|_{L_2(\Omega_t)} \leqslant c\|f\|_{L_2(\Gamma_t)}, \tag{3.5}$$

$$\|\vec{V}_t(\,\cdot\,,t)\|_{L_2(\Omega_t)} \leqslant c\Big(\|f_t\|_{L_2(\Gamma_t)} + \|f\|_{L_2(\Gamma_t)}\Big). \tag{3.6}$$

Доказательство. Построим сначала соленоидальное векторное поле $\vec{V}$, удовлетворяющее соотношениям (3.2) и оценкам (3.4)–(3.6). Введем замену переменных (2.1) и положим

$$\vec{V}_0 = \widehat{\mathcal{L}}_\rho \vec{V}_0, \tag{3.7}$$

где $\mathcal{L}_\rho$ – матрица Якоби этого преобразования (см. §2). Легко проверить, что (3.2) переходит в

$$\nabla_y \cdot \vec{V}_0' = 0, \quad y \in \Omega_\infty, \quad \vec{V}_0 \cdot \vec{N}\Big|_{\Gamma_\infty} = f_0, \tag{3.8}$$

где
$$f_0 = f(e_\rho(y;t))\big|\,\widehat{\mathcal{L}_\rho}^T\,\vec{N}\,\big|. \tag{3.9}$$
Необходимое условие $\int\limits_{\Gamma_\infty} f_0 dS = 0$ вытекает из (3.1).

Область Ω_∞ не зависит от t, и существование векторного поля $\vec{V}'$, удовлетворяющего условиям (3.8) и неравенствам
$$\begin{aligned}
&\big\|\vec{V}_0\big\|_{W_2^{1/2}(\Omega_\infty)} \leqslant c\big\|f_0\big\|_{W_2^1(\Gamma_\infty)},\\
&\big\|\vec{V}_0\big\|_{L_2(\Omega_\infty)} \leqslant c\big\|f_0\big\|_{L_2(\Gamma_\infty)},\\
&\big\|\vec{V}_{0t}\big\|_{L_2(\Omega_\infty)} \leqslant c\big\|f_{0t}\big\|_{L_2(\Gamma_\infty)}
\end{aligned} \tag{3.10}$$
очевидно. В силу (3.7) и (3.9), оценки (3.4)–(3.6) для векторного поля $\vec{V}' = (1/L_\rho)\mathcal{L}_\rho\vec{V}_0$ следуют из (3.10). Заметим, что постоянные в этих оценках зависят от максимумов модулей функций ρ^*, $\nabla\rho^*$, $\nabla\rho_t$ и вторых производных $D_x^2\rho$ (через C^1-норму величины $|\widehat{\mathcal{L}}^T N|$).

Чтобы добиться выполнения условий (3.3), положим
$$\vec{V} = \vec{V}' - \sum_{i=1}^{3} c_i \operatorname{rot}\vec{e}_i\mathcal{A}(x), \tag{3.11}$$
где $\mathcal{A}(x)$ – гладкая функция с не зависящим от t носителем $\operatorname{supp}\vec{\mathcal{A}}_i \Subset \Omega_t$. Условие (3.3) сводится к
$$\int\limits_{\Omega_t} \vec{V}'\cdot\vec{\eta}_j\,dx = \sum_{i=1}^{3} c_i \int\limits_{\Omega_t} \vec{e}_i\mathcal{A}\cdot\operatorname{rot}\vec{\eta}_j\,dx = 2c_j\int\limits_{\Omega_t}\mathcal{A}(x)dx.$$
Выбирая $\mathcal{A}(x)$ так, что $\int\limits_{\Omega_t}\mathcal{A}dx = 1/2$, получаем
$$c_j = \int\limits_{\Omega_t}\vec{V}'\cdot\vec{\eta}_j\,dx = c_j(t).$$
Очевидно, векторное поле (3.11) также удовлетворяет условиям (3.4)–(3.6). Предложение доказано.

Переходим к доказательству оценки (1.19). Умножим уравнение $(1.14)_1$ на $\vec{w}$ и проинтегрируем по Ω_t, заметив, что
$$(\vec{w}\cdot\nabla)\vec{v}_\infty\cdot\vec{w} = \sum_{i,k=1}^{3} w_i w_k\frac{\partial v_{\infty i}}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} w_i w_k\left(\frac{\partial v_{\infty i}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{\infty k}}{\partial x_i}\right) = 0.$$

После интегрирования по частям получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{w}\|^2_{L_2(\Omega_t)}+\frac{\nu}{2}\|S(\vec{w})\|^2_{L_2(\Omega_t)}-\sigma\int\limits_{\Gamma_t}H\vec{w}\cdot\vec{n}\,dS-\frac{\omega^2}{2}\int\limits_{\Gamma_t}|x'|^2\vec{w}\cdot\vec{n}dS=0,$$

или (так как $-\int\limits_{\Gamma_t}H\vec{w}\cdot\vec{n}dS=\frac{d}{dt}|\Gamma_t|$ и $\int\limits_{\Gamma_t}|x'|^2\vec{w}\cdot\vec{n}dS=2\int\limits_{\Omega_t}\sum\limits_{i=1}^{2}w_ix_idx=\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_t}|x'|^2dx$):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\vec{w}(\,\cdot\,,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)}+|\Gamma_t|-\frac{\omega^2}{2}\int\limits_{\Omega_t}|x'|^2dx\right)+\frac{\nu}{2}\|S(\vec{w})\|^2=0.$$

Ясно, что это равенство можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\vec{w}(\,\cdot\,,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)}+G(t)-G_\infty\right)+\frac{\nu}{2}\|S(\vec{w})\|^2_{L_2(\Omega_t)}=0. \qquad (3.12)$$

Из полученного соотношения еще не следует оценка (1.19). В качестве следующего шага мы умножаем $(1.14)_1$ на векторное поле $\vec{V}$, удовлетворяющее соотношениям (3.2) и (3.3) с $f(e_\rho(y))=\eta(y,\rho)|\widehat{\mathcal{L}}^T\vec{n}_0|$, где $\eta(y,\rho)$ – функция (2.14), и, интегрируя по Ω_t, получаем после простых преобразований

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_t}\vec{w}\cdot\vec{V}dx-\int\limits_{\Omega_t}\vec{w}(\vec{V}_t+(\vec{w}\cdot\nabla)\vec{V})dx+2\int\limits_{\Omega_t}(\vec{w}\cdot\nabla)\vec{v}_\infty\cdot\vec{V}dx+$$

$$+\frac{\nu}{2}\int\limits_{\Omega_t}S(\vec{w}):S(\vec{V})dx-\int\limits_{\Gamma_\infty}\left[\sigma(H-H_\infty)+\frac{\omega^2}{2}(|x'|^2-|y'|^2)\right]\eta(y,\rho)dS=0.$$

Это соотношение мы умножаем на малое число $\gamma>0$ и складываем с (3.12), что приводит к

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t)+\mathcal{E}_1(t)=0, \qquad (3.13)$$

где

$$\mathcal{E}(t)=\frac{1}{2}\|\vec{w}(\,\cdot\,,t)\|^2_{L_2(\Omega_t)}+\gamma\int\limits_{\Omega_t}\vec{w}\cdot\vec{V}dx+G(t)-G(\infty),$$

$$\mathcal{E}_1(t)=\frac{\nu}{2}\|S(\vec{w})\|^2-\gamma\int\limits_{\Omega_t}\left[\vec{w}\cdot\vec{V}_t-2(\vec{w}\cdot\nabla)\vec{v}_\infty\cdot\vec{V}\right]dx-$$

$$-\gamma \int\limits_{\Omega_t} \vec{w} \cdot (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{V}\,dx + \frac{\nu}{2}\gamma \int\limits_{\Omega_t} S(\vec{w}) : S(\vec{V})dx -$$

$$-\gamma \int\limits_{\Gamma_\infty} \Big[\sigma(H - H_\infty) + \frac{\omega^2}{2}(|x'|^2 - |y'|^2)\Big]\eta(y,\rho)dS. \tag{3.14}$$

Так как

$$G(t) - G_\infty(\infty) = \delta_0 G(t) + \frac{1}{2}\delta_0^2 G(t) + \mathfrak{G}(t) = \frac{1}{2}\delta_0^2 G(t) + \mathfrak{G}(t),$$

вторая вариация $\delta_0^2 G(t)$ удовлетворяет неравенству (1.17), а остаточный член $\mathfrak{G}$ – неравенству (2.28), т.е.

$$|\mathfrak{G}(t)| \leqslant c\delta|\delta_0^2 G(t)|,$$

то при малых γ и δ выражение $\mathcal{E}(t)$ оценивается сверху и снизу через

$$\mathrm{const}\,\Big(\big\|\vec{w}(\,\cdot\,,t)\big\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \big\|\rho(\,\cdot\,,t)\big\|^2_{W_2^1(\Gamma_\infty)}\Big).$$

Если показать, что

$$\mathcal{E}_1(t) \geqslant b\mathcal{E}(t) \tag{3.15}$$

с некоторым $b > 0$, то мы придем к неравенству $\mathcal{E}'(t) + b\mathcal{E}(t) \leqslant 0$, и, как следствие, к (1.19). Основными положительными членами в (3.14) являются первый и последний интегралы. Легко видеть, что

$$\sigma(H - H_\infty) = \sigma\big(H\Lambda(y,\rho) - H_\infty\big) - \sigma(H - H_\infty)(\Lambda(y,\rho) - 1) +$$

$$+\Big(\frac{\omega^2}{2}|y'|^2 + p_1\Big)(\Lambda(y,\rho) - 1), \tag{3.16}$$

где $\Lambda(y,\rho) = \sum_{i,j} N_i N_j \widehat{L}_{ij}(y;\rho)$ (см. §2), и вследствие (2.25) и (2.21),

$$-\int\limits_{\Gamma_\infty} \big(H\Lambda(y,\rho) - H_\infty\big)\rho dS_y = \delta|\Gamma_t|(\rho;\rho) - \delta_0|\Gamma_t|,$$

$$\int\limits_{\Gamma_\infty} \Big[\frac{\omega^2}{2}\big(2(y_1N_1 + y_2N_2)\big)\rho^2 - \Big(\frac{\omega^2}{2}|y'|^2 + p_1\Big)\rho^2 H_\infty\Big]dS_y =$$

$$= \delta_0^2 \int\limits_{\Omega_t} \left(\frac{\omega^2}{2}|x'|^2 + p_1\right) dx.$$

Поэтому

$$-\int\limits_{\Gamma_\infty} \left(\sigma(H - H_\infty) + \frac{\omega^2}{2}(|x'|^2 - |y'|^2)\right)\eta(y,\rho)dS_y = \delta_0^2 G(t) + \mathfrak{G}_1(t),$$

где

$$\mathfrak{G}_1(t) = -\int\limits_{\Gamma_\infty} \sigma(H - H_\infty)\Big(\eta(y,\rho) - \rho - \big(\Lambda(y,\rho) - 1\big)\Big)\rho dS_y -$$

$$-\int\limits_{\Gamma_\infty} \frac{\omega^2}{2}\Big(2\big(y_1 N_1 + y_2 N_2\big)\rho(\eta(y,\rho) - \rho) + (N_1^2 + N_2^2)\rho^2\eta\Big)dS_y - \quad (3.17)$$

$$-\int\limits_{\Gamma_\infty} \left(\frac{\omega^2}{2}|y'|^2 + p_1\right)\big((\Lambda - 1)\eta + \rho^2 H_\infty\big)dS_y + \sigma\big(\delta|\Gamma_t|(\rho;\rho) - \delta_0|\Gamma_t| - \delta_0^2|\Gamma_t|\big).$$

Последний член, равный

$$\sigma\int\limits_0^1 \left(\frac{d}{ds}\delta|\Gamma_t|(s\rho;\rho) - \delta_0^2|\Gamma_t|\right)ds,$$

оценивается в силу (2.28) через $c\delta\big\|\rho\big\|^2_{W_2^1(\Gamma_\infty)}$. Записывая $H - H_\infty$ в виде

$$\begin{aligned} H - H_\infty =& \vec{n}\cdot\Delta_{\Gamma_t}\vec{x} - \vec{N}\cdot\Delta_{\Gamma_\infty}\vec{y} = \\ =& \vec{n}\cdot\Delta_{\Gamma_t}\vec{N}\rho + (\vec{n} - \vec{N})\cdot\Delta_{\Gamma_t}\vec{y} + \vec{N}\cdot(\Delta_{\Gamma_t} - \Delta_{\Gamma_\infty})\vec{y}, \end{aligned}$$

где ∇_{Γ_t} – оператор Лапласа–Бельтрами на Γ_t, и интегрируя по частям, нетрудно получить такую же оценку для первого члена правой части формулы (3.17). Оценка остальных членов очевидна, и мы получаем

$$|\mathfrak{G}_1(t)| \leqslant c\delta\big\|\rho(\,\cdot\,,t)\big\|^2_{W_2^1(\Gamma_t)}$$

при условии (1.16).

При оценке остальных членов в (3.14) будем пользоваться неравенством Корна

$$\|\vec{w}\|_{W_2^1(\Omega_t)} \leqslant c\Big(\|S(\vec{w})\|_{L_2(\Omega_t)} + \Big|\int\limits_{\Omega_t} \vec{w}dx\Big| + \Big|\int\limits_{\Omega_t} (\vec{w}\times\vec{x})dx\Big|\Big). \quad (3.18)$$

Вследствие (1.5)–(1.7), имеем

$$\int\limits_{\Omega_t} \vec{w}dx = 0,$$

$$\int\limits_{\Omega_t} \vec{w}\times\vec{x}dx = \int\limits_{\Omega_t} (\vec{v}\times\vec{x})dx - \int\limits_{\Omega_t} \vec{v}_\infty dx = \int\limits_{\Omega_\infty} \vec{v}_\infty dx - \int\limits_{\Omega_t} \vec{v}_\infty dx,$$

так что

$$\Big|\int\limits_{\Omega_t} (\vec{w}\times\vec{x})dx\Big| \leqslant c\int\limits_{\Gamma_\infty} |\rho| dS.$$

Таким образом, (3.18) сводится к

$$\|\vec{w}\|_{W_2^1(\Omega_t)} \leqslant c\Big(\|S(\vec{w})\| + \int\limits_{\Gamma_\infty} |\rho| dS\Big), \quad (3.19)$$

и справедливы оценки

$$\Big|\int\limits_{\Omega_t} S(\vec{w}) : S(\vec{V})dx\Big| \leqslant c\|S(\vec{w})\|_{L_2(\Omega_t)}\|\rho\|_{W_2^1(\Omega_t)},$$

$$\Big|\int\limits_{\Omega_t} \vec{w}(\vec{w}\cdot\nabla)\vec{V}dx\Big| \leqslant c\|\vec{w}\|^2_{L_4(\Omega_t)}\|\rho\|_{W_2^1(\Gamma_\infty)} \leqslant$$

$$\leqslant c\Big(\|S(\vec{w})\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \|\rho\|^2_{L_2(\Gamma_\infty)}\Big)\|\rho\|_{W_2^1(\Gamma_\infty)} \leqslant$$

$$\leqslant c\delta\Big(\|S(\vec{w})\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \|\rho\|^2_{L_2(\Gamma_\infty)}\Big).$$

Осталось оценить интеграл

$$I = \int\limits_{\Omega_t} \Big[(\vec{w}\cdot\vec{V}_t - 2(\vec{w}\cdot\nabla)\vec{v}_\infty\cdot\vec{V}\Big]dx = \int\limits_{\Omega_t} \Big(\vec{w}\cdot\vec{V}_t + 2\omega\Sigma\vec{w}\cdot\vec{V}\Big)dx, \quad (3.20)$$

где
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Представим $\vec{w}$ в виде
$$\vec{w} = \sum_{i=1}^{3} C_i \vec{\eta}_i(x) + \vec{w}\,'(x),$$

подобрав $C_i(t)$ так, чтобы
$$\int\limits_{\Omega_t} \vec{w}\,' \cdot \vec{\eta}_k dx = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad \int\limits_{\Omega_t} \vec{w}\,' dx = 0, \tag{3.21}$$

т.е.
$$\int\limits_{\Omega_t} \vec{w} \cdot \vec{\eta}_k dx = \sum_{i=1}^{3} C_i \int\limits_{\Omega_t} \vec{\eta}_i(x) \cdot \vec{\eta}_k(x) dx.$$

Из этой системы числа C_i определяются однозначно. Ясно, что
$$I = \int\limits_{\Omega_t} \left(\vec{w}\,' \cdot \vec{V}_t + 2\omega \Sigma \vec{w}\,' \cdot \vec{V} \right) dx + \sum_{i=1}^{3} C_i(t) J_i(t),$$

где
$$J_i(t) = \int\limits_{\Omega_t} \left(\vec{\eta}_i \cdot \vec{V}_t + 2\omega \Sigma \vec{\eta}_i \cdot \vec{V} \right) dx,$$

и в силу (3.18)
$$\left| \int\limits_{\Omega_t} \left(\vec{w}\,' \cdot \vec{V}_t + 2\omega \Sigma \vec{w}\,' \cdot \vec{V} \right) dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant c \|\vec{w}\,'\|_{L_2(\Omega_t)} \left(\|\vec{V}_t\|_{L_2(\Omega_t)} + \|\vec{V}\|_{L_2(\Omega_t)} \right) \leqslant$$
$$\leqslant c \|S(\vec{w})\|_{L_2(\Omega_t)} \left(\|\vec{w} \cdot \vec{n}\|_{L_2(\Gamma_t)} + \|\rho\|_{L_2(\Gamma_\infty)} \right) \leqslant$$
$$\leqslant c \left(\|S(\vec{w})\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \|S(\vec{w})\|_{L_2(\Omega_t)} \|\rho\|_{L_2(\Gamma_\infty)} \right),$$

так как $S(\vec{w}\,') = S(\vec{w})$. Для оценки интегралов J_i воспользуемся равенством (3.3), из которого вытекает соотношение

$$0 = \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_t} Z_1^T(t)\vec{\eta}\cdot\vec{V}\,dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_t}\Big(Z_1^T(t)\vec{\eta}\cdot\vec{V}_t + {Z_1'}^T(t)\vec{\eta}\cdot\vec{V}\Big)dx + \int\limits_{\Omega_t}(\vec{w}\cdot\nabla)\big(Z_1^T(t)\vec{\eta}\cdot\vec{V}\big)\,dx,$$

где $\vec{\eta}$ – произвольная линейная комбинация функций $\vec{\eta}_i(x)$. Первый интеграл правой части может быть записан в виде

$$\int\limits_{\Omega_t}\big(Z_1^T\vec{\eta}\cdot\vec{V}_t + {Z_1'}^T Z_1^{-T} Z_1^T\eta\cdot\vec{V}\big)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_t} Z_1^T\vec{\eta}\cdot\big(\vec{V}_t + Z_1^{-1}Z_1'\vec{V}\big)\,dx = \int\limits_{\Omega_t} Z_1^T(t)\vec{\eta}\cdot\big(\vec{V}_t + 2\omega\Sigma\vec{V}\big)\,dx,$$

где η – произвольная линейная комбинация функций $\vec{\eta}_i(x)$ и

$$Z_1(t) = \begin{pmatrix} \cos 2\omega t & \sin 2\omega t & 0\\ -\sin 2\omega t & \cos 2\omega t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, при любом фиксированном t

$$\int\limits_{\Omega_t} Z_1^T(t)\vec{\eta}\cdot\big(\vec{V}_t + 2\omega\Sigma\vec{V}\big)\,dx = -\int\limits_{\Omega_t}(\vec{w}\cdot\nabla)(Z_1^T\vec{\eta}\cdot\vec{V})\,dx,$$

а значит

$$|J_i(t)| \leqslant c\big\|\vec{w}\big\|_{L_2(\Omega_t)}\big\|\rho\big\|_{W_2^1(\Gamma_\infty)}.$$

Окончательно получаем

$$\Big|\int\limits_{\Omega_t}\Big[\vec{w}\cdot\vec{V}_t - (\vec{w}\cdot\nabla)\vec{v}_\infty\cdot\vec{V}\Big]\,dx\Big| \leqslant$$

$$\leqslant c\Big(\big\|S(\vec{w})\big\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \big\|S(\vec{w})\big\|_{L_2(\Omega_t)}\big\|\rho\big\|_{L_2(\Gamma_\infty)} + \big\|\vec{w}\big\|^2_{L_2(\Omega_t)}\big\|\rho\big\|_{W_2^1(\Omega_t)}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant c\Big(\big\|S(\vec{w})\big\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \big\|S(\vec{w})\big\|_{L_2(\Omega_t)}\big\|\rho\big\|_{L_2(\Gamma_\infty)} + \delta\big\|\rho\big\|^2_{L_2(\Gamma_\infty)}\Big).$$

Выбирая сначала γ, а затем δ достаточно малыми (по сравнению с константами в оценках), заключаем, что неравенство (3.15) выполняется при некотором $b > 0$. Теорема 1 доказана.

§4. О разрешимости задачи (1.14)

Справедлива следующая теорема о разрешимости задачи (1.14).

Теорема 2. *Предположим, что начальные данные в задаче* (1.14) *удовлетворяют условиям согласования:* $\nabla \cdot \vec{w}_0(x) = 0$ *и*

$$\Pi_0 S(\vec{w}_0)\vec{n}_0 \equiv S(\vec{w}_0)\vec{n}_0 - \vec{n}_0\big(\vec{n}_0 \cdot S(\vec{w}_0)\vec{n}_0\big)\Big|_{\Gamma_0} = 0,$$

где $\vec{n}_0$ *– нормаль к* Γ_0, *и кроме того, что*

$$\big|\vec{w}_0\big|_{C^{2+\alpha}(\Omega_0)} + \big|\rho_0\big|_{C^{3+\alpha}(\Gamma_\infty)} \leqslant \varepsilon \ll 1, \tag{4.1}$$

где $\rho_0(y)$ *– функция, задающая поверхность* Γ_0 *(посредством уравнения* (1.13)*). Тогда задача* (1.14) *имеет единственное решение, определенное при всех* $t > 0$, *и*

$$\big|\vec{w}_t(\,\cdot\,,t)\big|_{C(\Omega_t)} + \big|\vec{w}(\,\cdot\,,t)_{C^{2+\alpha}(\Omega_t)}\big| + \big|q(\,\cdot\,,t)\big|_{C^{1+\alpha}(\Omega_t)} +$$

$$+\big|\rho(\,\cdot\,,t)\big|_{C^{3+\alpha}(\Gamma_\infty)} \leqslant ce^{-bt}\Big(\big|\vec{w}_0\big|_{C^{2+\alpha}(\Omega_t)} + \big|\rho_0\big|_{C^{3+\alpha}(\Gamma_\infty)}\Big).$$

Приведем основные идеи доказательства этой теоремы. Прежде всего, легко убедиться в том, что задача (1.14) имеет решение, определенное на некотором конечном промежутке времени $[0,T)$. Для этого можно воспользоваться рассуждениями работы [9] и перейти к лагранжевым координатам по стандартным формулам

$$\vec{x} = \vec{\xi} + \int\limits_0^t \vec{u}(\xi,\tau)d\tau \equiv X(\xi,t), \quad \vec{u}(\xi,t) = \vec{v}(X(\xi,t),t), \quad \xi \in \Omega_0.$$

В силу (1.14), функции $\vec{u}(\xi,t)$ и $r(\xi,t) = q(X,t)$ удовлетворяют соотношениям

$$\vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla_u)\vec{u} + 2(\vec{u}\cdot\nabla_u)\vec{v}_\infty(X) - \nu\nabla_u^2\vec{u} + \nabla_u r = 0, \tag{4.2}$$

$$\nabla_u \cdot \vec{u} = 0, \quad \xi \in \Omega_0, \quad t > 0, \tag{4.3}$$

$$\vec{u}\big|_{t=0} = \vec{v}_0(\xi), \tag{4.4}$$

$$T_u(\vec{u},q)\vec{n} - \sigma\Delta(t)X(\xi,t) = p_\infty(X)\vec{n}, \quad \xi \in \Gamma_0, \tag{4.5}$$

где $\nabla_u = \mathcal{A}\nabla$, $\mathcal{A}$ – матрица алгебраических дополнений элементов

$$a_{ij}(\xi,t) = \frac{\partial X_i}{\partial \xi_j} = \delta_{ij} + \int\limits_0^t \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} d\tau,$$

$$T_u = -qI + \nu S_u(\vec{u}), \quad S_u(\vec{u}) = (\nabla_n \vec{u}) + (\nabla_u \vec{u})^T,$$

$\Delta(t)$ – оператор Лапласа–Бельтрами на $\Gamma_t = \{y + N(y)\rho(y,t), y \in \Gamma_\infty\}$. Разделяя тангенциальную и нормальную составляющие в краевом условии (4.5), можно записать это условие в виде

$$\Pi_0 \Pi S_u(\vec{u})\vec{n} = 0,$$

$$\vec{n}_0 \cdot T\vec{n} - \sigma n_0 \cdot \Delta(0) \int\limits_0^t \vec{u} d\tau = \sigma H_0(\xi) + p_\infty(\xi) +$$

$$+\sigma \int\limits_0^t \vec{n}_0 \cdot \left(\frac{\partial \Delta(t)}{\partial t} \vec{\xi} + (\Delta(\tau) - \Delta(0))\vec{u}(\xi,\tau) \right) d\tau +$$

$$+(\vec{n} \cdot \vec{n}_0) p_\infty(X) - p_\infty(\xi), \tag{4.6}$$

где $\Pi \vec{f} = \vec{f} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{f})$, $\Pi_0 \vec{f} = \vec{f} - \vec{n}_0(\vec{n}_0 \cdot \vec{f})$. Задача (4.2)–(4.4), (4.6) отличается от рассмотренной в работе [9] наличием младшего члена $2(\vec{u} \cdot \nabla_u)\vec{v}_\infty$ в уравнении Стокса и слагаемого $p_\infty(X)$ в краевом условии. Воспользовавщись уравнением (1.8), запишем сумму $\sigma H_0(\xi) + p_\infty(\xi)$ в виде

$$\sigma H_0(\xi) + p_\infty(\xi) = \sigma\big(H_0(\xi) - H_\infty(\eta)\big) + \frac{\omega^2}{2}(|\xi'|^2 - |\eta'|^2),$$

где η – точка поверхности Γ_∞, связанная с $\xi \in \Gamma_0$ соотношением $\xi = \eta + N(\eta)\rho_0(\eta)$. Ясно, что

$$\big|\sigma H_0 + p_\infty\big|_{C^{1+\alpha}(\Gamma_0)} \leqslant c\big|\rho_0\big|_{C^{3+\alpha}(\Gamma_\infty)}.$$

Поэтому, повторяя рассуждения §7 из [9], можно показать, что задача (4.2)–(4.5) разрешима на некотором интервале $t \in (0,T)$, и

$$\sup_{t<T} \big|\vec{u}_t(\,\cdot\,,t)\big|_{C^\alpha(\Omega_0)} + \sup\nolimits_{t<T} \big|\vec{u}(\,\cdot\,,t)\big|_{C^{2+\alpha}(\Omega_0)} + \sup\nolimits_{t<T} \big|r(\,\cdot\,,t)\big|_{C^{1+\alpha}(\Omega_0)} \leqslant$$

$$\leqslant C(T)\Big(\big|\vec{u}_0\big|_{C^{2+\alpha}(\Omega_0)} + \big|\rho_0\big|_{C^{3+\alpha}(\Gamma_\infty)}\Big).$$

Умножая 4ю формулу в (1.14) скалярно на $\vec{n}$, получаем

$$\vec{n}\cdot T\vec{n} = \sigma\big(H(\xi,t) - H_\infty(\eta)\big) + \frac{\omega^2}{2}\big(\left|\xi'\right|^2 - |\eta'|^2\big), \tag{4.7}$$

где $\xi = \eta + N(\eta)\rho(\eta,t)$, $\eta \in \Gamma_\infty$, что можно рассмотреть как эллиптическое уравнение относительно ρ на Γ_∞, что позволяет вывести оценку

$$\sup_{t<T}\big|\rho(\,\cdot\,,t)\big|_{C^{3+\alpha}(\Gamma)} \leqslant c(T)\Big(\big|\vec{w}_0\big|_{C^{2+\alpha}(\Omega_0)} + \big|\vec{\rho}_0\big|_{C^{3+\alpha}(\Gamma_0)}.$$

Следовательно, при всех $t \leqslant T$

$$Y_t(\vec{w},q,\rho) = \big|\vec{w}_t(\,\cdot\,,t)\big|_{C^{\alpha}(\Omega_t)} + \big|\vec{w}(\,\cdot\,,t)\big|_{C^{2+\alpha}(\Omega_t)} + \big|q(\,\cdot\,,t)\big|_{C^{1+\alpha}(\Omega_t)} +$$

$$+\big|\rho(\,\cdot\,,t)\big|_{C^{3+\alpha}(\Gamma_\infty)} \leqslant\leqslant c(T)\Big(\big|\vec{w}_0\big|_{C^{2+\alpha}(\Omega_0)} + \big|\rho_0\big|_{C^{3+\alpha}(\Gamma_\infty)}\Big). \tag{4.8}$$

Величина интервала $(0,T)$ зависит от норм функций $\vec{w}_0$ и ρ_0 и стремится к бесконечности, когда эти нормы стремятся к нулю.

Следующим шагом является равномерная оценка нормы $Y_t(\vec{w}, q,\rho)$ при больших t. Она вытекает из (1.19) и следующего предложения.

Предложение 4.1. *Пусть решение задачи* (1.14) *определено на произвольном интервале времени* $t \in (0,T)$, $T \leqslant \infty$, *и*

$$Y_t(\vec{w},q,\rho) \leqslant \delta \ll 1. \tag{4.9}$$

Тогда при любом $t \geqslant 2\tau$

$$Y_t(\vec{w},r,\rho) \leqslant$$

$$\leqslant c(\tau)\Big(\sup_{t-\tau\leqslant s\leqslant t}\big\|\vec{w}(\,\cdot\,,s)\big\|_{L_2(\Omega_s)} + \sup\nolimits_{t-\tau\leqslant s\leqslant t}\big\|\rho(\,\cdot\,,s)\big\|_{L_2(\Gamma_\infty)}\Big), \tag{4.10}$$

где τ *– некоторое малое фиксированное число.*

Из (4.8), (4.10), (1.19) следует, что при условии (4.1) выполняется равномерная оценка

$$Y_t(\vec{w},r,\rho) \leqslant ce^{-bt}\Big(\big|\vec{w}_0\big|_{C^{2+\alpha}(\Omega_0)} + \big|\rho_0\big|_{C^{3+\alpha}(\Gamma_\infty)}\Big).$$

Поэтому решение задачи (1.14) можно продолжить на бесконечный промежуток времени, применяя последовательно теорему существования локального решения. Ясно, что условия (4.9), (1.16) выполняются при малом ε.

Неравенство (4.10) доказывается так же, как оценки (8.3), (9.13) работы [9]. Фиксируя произвольное $t_0 > 2T$ и переходя к лагранжевым координатам по формулам

$$\vec{x} = \vec{\xi} + \int_{t_1}^{t} \vec{u}(\xi,\tau)d\tau = X(\xi,t), \quad \vec{u}(\xi,t) = \vec{v}(X(\xi,t),t),$$

мы запишем задачу (1.14) в форме (4.2)–(4.5) при $t > t_1 = t_0 - 2\tau$. После этого можно показать, так же как в [9], что функции $\vec{u}_\lambda = \vec{u}\zeta_\lambda$, $r_\lambda = r\zeta_\lambda$, где $\zeta_\lambda(t)$ – гладкая функция от t такая, что $\zeta_\lambda(t) = 1$ при $t \geqslant t_1 + 2\lambda$, $\zeta_\lambda(t) = 0$ при $t \leqslant t_1 + \lambda$, $\zeta'_\lambda(t) \leqslant c\lambda^{-1}$, удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}
&\vec{u}_{\lambda t} + 2\big(\vec{u}_\lambda \cdot \nabla_u\big)\vec{v}_\infty(X) - \nu\nabla_u^2\vec{u}_\lambda + \nabla_u r_\lambda = \vec{u}_\lambda\zeta'_\lambda,\\
&\nabla_u \cdot \vec{u}_\lambda = 0,\\
&\Pi_0\Pi S_u(\vec{u}_\lambda)\vec{n} = 0,\\
&\vec{n}_0 \cdot T_u(\vec{u}_\lambda)\vec{n} - \sigma\vec{n}_0 \cdot \int_{t_1}^{t} \Delta(\tau)\vec{u}_\lambda(\xi,\tau) = \int_{t_1}^{t} B(\xi,\tau)d\tau,
\end{aligned}$$

где

$$\vec{B} = \zeta_\lambda\left(\sigma\vec{n}_0 \cdot \frac{\partial\Delta(t)}{\partial t}X(\xi,\tau) + \frac{\partial}{\partial t}\big(p_\infty(X)(\vec{n}\cdot\vec{n}_0)\big)\right).$$

Отсюда следует, что при малом τ

$$\sup_{t_1<s<t_0}\big|\vec{u}_{\lambda s}(\,\cdot\,,s)\big|_{C^\alpha(\Omega_{t_1})} + \sup_{t_1<s<t_0}\big|\vec{u}_\lambda(\,\cdot\,,s)\big|_{C^{2+\alpha}(\Omega_{t_1})} +$$

$$\sup_{t_1<s<t_0}\big|r_\lambda(\,\cdot\,,s)\big|_{C^{1+\alpha}(\Omega_1)} \leqslant c\lambda^{-1}\Big(\sup_{t_1+\lambda<s<t_0}\big|\vec{u}(\,\cdot\,,s)\big|_{C^{1+\alpha}(\Omega_{t_1})} +$$

$$+ \sup_{t_1+\lambda<s<t_0}\big|r(\,\cdot\,,s)\big|_{C^\alpha(\Gamma_{t_1})}\Big) + C\sup\nolimits_{t_1+\lambda<s<t_0}\big|\rho(\,\cdot\,,s)\big|_{C^{1+\alpha}(\Gamma_\infty)}.$$

Используя для оценки r на Γ_{t_1} краевое условие (4.6), а для оценки норм $|\vec{u}|_{C^{1+\alpha}(\Omega_t)}$ и $|\rho|_{C^{1+\alpha}(\Gamma_\infty)}$ – интерполяционные неравенства, мы получаем

$$y(\lambda) \equiv \sup_{t_1+2\lambda<s<t_0} \Big(\big|\vec{u}_s(\,\cdot\,,s)\big|_{C^\alpha(\Omega_{t_1})} + \big|\vec{u}(\,\cdot\,,s)\big|_{C^{2+\alpha}(\Omega_{t_1})} +$$
$$+ \big|r(\,\cdot\,,s)\big|_{C^{1+\alpha}(\Omega_1)} + \big|\rho(\,\cdot\,,s)\big|_{C^{3+\alpha}(\Gamma_\infty)} \leqslant \varepsilon y\Big(\frac{\lambda}{2}\Big) +$$
$$+ c(\varepsilon,\lambda) \sup_{t_1<\delta<t_0} \Big(\big\|\vec{u}(\,\cdot\,,s)\big\|_{L_2(\Omega_{t_1})} + \big\|\rho(\,\cdot\,,s)\big\|_{L_2(\Gamma_\infty)} \Big),$$

откуда, как и в [9], выводим (4.10).

Литература

1. В. А. Солонников, *О неустановившемся течении конечной массы жидкости, ограниченной свободной поверхностью.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **152** (1986), 137–157.
2. В. А. Солонников, *О неустановившемся движении конечной изолированной массы самогравитирующей жидкости.* — Алгебра и Анализ **1**, No. 1 (1989), 207–249.
3. П. Аппель, *Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости.* М.; Л (1936).
4. В. В. Румянцев, *К теории движения твердых тел с полостями, наполненными жидкостью.* — Прикл. мат. и мех. **30**, No. 1 (1966), 51–60.
5. А. Д. Мышкис (ред.), *Гидромеханика невесомости.* Наука, М. (1976).
6. M. Padula, *On the exponential stability of the rest state of a viscous isothermal fluid.* — J. Math. Fluid Mech. **1** (1999), 62–67.
7. M. Padula, V. A. Solonnikov, *On Rayleigh–Taylor stability.* — Ann. Univ. Ferrara, ser. VII-Sc. Mat. **46** (2000), 307–336.
8. M. Padula, V. A. Solonnikov, *On the global existence of nonstationary motions of a fluid drop and their exponential decay to a uniform rigid rotation* (to appear).
9. V. A. Solonnikov, *Lectures on evolution free boundary problems: classical solutions.* — In: *Mathematical Aspects of Evolving Interfaces*, Lecture Notes Math., Springer, to appear.

Solonnikov V. A. Generalized energy estimate in a free boundary problem for viscous incompressible fluid.

A generalized energy function is introduced and estimated for a problem of evolution of an isolated fluid mass with free boundary under surface tension force.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 25 июня 2001 г.