Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 282, 2001 г.

А. П. Калупин, В. Л. Олейник

ЛЕМНИСКАТА КАК СПЕКТР ВОЗМУЩЕННОГО СДВИГА

1. Введение

В данной работе установлены условия, которые необходимо наложить на функцию $a\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$, чтобы спектр возмущенного оператора двустороннего сдвига

$$T\colon f(n) \longmapsto f(n+1) + a(n)\, f(n),$$

действующего на пространстве последовательностей $\ell^2(\mathbf{Z})$, представлял собою обобщенную лемнискату. Условие, когда функция $a(n)$ является периодической, рассмотрено в работах [2, 3, 8, 9]. Здесь же мы имеем дело с более общим случаем. В частности, качественное отличие предлагаемой работы от указанных работ заключается в том, что мы допускаем не только финитные деформации периодической функции $a(n)$, но и достаточно произвольные, с редким расположением вдоль оси $\mathbf{Z}$.

1.1. Лемниската. Основные свойства.

Существенная часть спектра рассматриваемого нами оператора лежит на лемнискате. Следуя [7], дадим ее определение:

Определение 1. *Пусть* $z_s \in \mathbf{C}$; $z_m \neq z_k$ *при* $m \neq k$; $\alpha_s > 0$; $s = 1, 2 \ldots, N$; $\sum_{s=1}^N \alpha_s = 1$; $r > 0$. *Линия уровня функции*

$$p(z) = \prod_{s=1}^{N} |z - z_s|^{\alpha_s}, \tag{1.1.1}$$

то есть множество

$$l_r = \{z \in \mathbf{C} : p(z) = r\}, \tag{1.1.2}$$

называется обобщенной лемнискатой. Точки z_s *называются фокусами лемнискаты.*

В дальнейшем будем опускать слово "обобщенная". Положим: $l := l_1$.

Отметим простые свойства лемнискаты.

(1) Лемниската состоит из одной или нескольких, но не более, чем из N замкнутых жордановых кривых. При $N > 1$ и при всех достаточно малых значениях r лемниската является несвязной, а именно, состоит из N континуумов, попарно не имеющих общих точек, и является связной при больших r.

(2) Каждая компонента лемнискаты содержит внутри себя по крайней мере один фокус.

(3) Каждая жорданова дуга, соединяющая фокус z_s с бесконечно удаленной точкой, пересекает лемнискату.

Для рациональных α_s мы получаем классическое определение лемнискаты [1, 5]. При этом семейство лемнискат, задаваемое уравнением $|z^2-1| = r^2$, называется овалами Кассини, среди которых особенно выделяется лемниската Бернулли ($r = 1$), которая имеет точку самопересечения и выглядит как знак бесконечности ∞.

Лемниската в действительности может представлять из себя достаточно замысловатую кривую. В 1897 году Д. Гильберт показал, что для любой ограниченной односвязной области G и для всякого $\varepsilon > 0$ существует лемниската $l_r \subset G$, представляющая собою связную кривую, такая, что граница ∂G лежит в ε-расширении лемнискаты l_r, и лемниската l_r лежит в ε-расширении ∂G:

$$\partial G \subset \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{dist}(z, l_r) < \varepsilon\}, \ l_r \subset \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{dist}(z, \partial G) < \varepsilon\}.$$

Гильберт имел в виду "классическую" лемнискату с рациональными показателями степеней. Доказательство теоремы и ее обобщение на многосвязный случай можно найти в монографии [5].

1.2. Оператор сдвига.

Пусть последовательность f определена на множестве целых чисел, $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$.

Определение 2. *Оператором двустороннего сдвига S называется оператор, действующий по правилу:*

$$(Sf)(n) = f(n+1), \ n \in \mathbf{Z}.$$

Оператор S является унитарным оператором на пространстве

$$\ell^2(\mathbf{Z}) = \left\{ f : \|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(n)|^2 < \infty \right\}.$$

Единичная окружность на комплексной плоскости с центром в нуле является спектром оператора S.

Пусть далее комплекснозначная функция $a(n)$ определена на множестве целых чисел: $a : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$.

Определение 3. *Возмущенным оператором сдвига T будем называть оператор, действующий по правилу:*

$$Tf = (S+a)f, \text{ то есть } (Tf)(n) = f(n+1) + a(n) f(n), \ n \in \mathbf{Z}.$$

В работе [8], см. также [2, 3, 9], показано, что для периодической функции $a(n+m) = a(n)$ спектр оператора T заполняет лемнискату с фокусами в точках, являющихся значениями функции $a(n)$. Ясно, что в периодическом случае множество значений функции a конечно, и мы имеем дело лишь с рациональными показателями α_s или, иными словами, функция $p(z)$ в определении лемнискаты является дробной степенью модуля некоторого полинома $\mathcal{P}(z)$, нули которого образуют множество значений $a(n)$, то есть

$$p(z) = \left|\mathcal{P}(z)\right|^{1/m}.$$

Наша цель – рассмотреть случай, когда значения функции a встречаются в последовательности $\{a(n)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ с иррациональными "частотами". Здесь допускается редкое распределение некоторых значений функции a, то есть нулевые частоты.

Основной результат формулируется в параграфе 2, в параграфе 3 приводится его доказательство.

2. Основная теорема

2.1. Условия, налагаемые на функцию $a(n)$.

Пусть функция $a(n)$ принимает на $\mathbf{Z}$ конечное число N различных значений:

$$\operatorname{Im}(a) = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\} \subset \mathbf{C}. \tag{2.1.1}$$

Для целых $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$; $n_1 \leqslant n_2$, положим:

$$[n_1, n_2] := \{n \in \mathbf{Z} : \ n_1 \leqslant n \leqslant n_2\}$$

и рассмотрим величину, равную числу точек, в которых функция $a(n)$ принимает фиксированное значение a_s на промежутке $[n, n+j]$:

$$m_s(n,j) := \#\{t \in [n, n+j] : \ a(t) = a_s\}; \quad s = 1, 2, \ldots, N; \ n \in \mathbf{Z}; \ j = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2.1.2}$$

Заметим, что

$$\sum_{s=1}^{N} m_s(n,j) = \#\{t \in [n, n+j]\} = j+1; \ n \in \mathbf{Z}; \ j = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2.1.3}$$

С каждым числом a_s свяжем неотрицательное число $\alpha_s \geqslant 0$, которое имеет смысл частоты появления числа a_s в последовательности $\{a(n)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$. Точнее, мы полагаем, что

$$\sum_{s=1}^{N} \alpha_s = 1;$$

$$m_s(n,j) = \alpha_s j + \beta_s(n,j); \ j = 0, 1, 2, \ldots ; \ s = 1, 2, \ldots, N; \tag{2.1.4}$$

причем $\beta_s(n,j) = o(j)$, и $\beta_s(n-j, j) = o(j)$ при $j \to \infty$.

Величины $\beta_s(n,j)$ могут принимать значения любых знаков. Однако, если $\alpha_s = 0$, то $\beta_s(n,j) = m_s(n,j) \geqslant 0$. Кроме того, так как $0 \leqslant m_s(n,j) \leqslant j+1$, то

$$-\alpha_s j \leqslant \beta_s(n,j) \leqslant j+1,$$

в частности,

$$\max_{s,n} |\beta_s(n,j)| \leqslant j+1.$$

И, наконец, из (2.1.3) следует, что $\sum_{s=1}^{N} \beta_s(n,j) = 1$.

Определение 4. *Будем говорить, что функция $a = a(n)$:*

1) *принадлежит классу $\mathcal{A}$, если для всех $s = 1, 2, \ldots, N$ при $j \to \infty$ величины $\beta_s(n,j)/j$ равномерно по n стремятся к нулю, то есть*

$$\lim_{j \to \infty} \left(\frac{1}{j} \max_{s,\ n} |\beta_s(n,j)| \right) = 0; \tag{2.1.5}$$

2) *принадлежит классу $\mathcal{B}$, если величины $\beta_s(n,j)$ равномерно ограничены, то есть*

$$\max_{s,n,j} |\beta_s(n,j)| < \infty. \tag{2.1.6}$$

Понятно, что $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Здесь следует отметить, что все функции a, рассматриваемые в работах [2, 3, 8, 9], попадают в класс $\mathcal{B}$.

2.2. Формулировка основной теоремы.

В дальнейшем будем полагать, что

$$p(z) = p_a(z) := \prod_{s:\ \alpha_s \neq 0} |z - a_s|^{\alpha_s}. \tag{2.2.1}$$

Через $\tau(a)$ обозначим объединение лемнискаты $l = \{z : p(z) = 1\}$ и множества тех точек a_s, которые лежат в компоненте связности дополнения лемнискаты, содержащей бесконечно удаленную точку, то есть

$$\tau(a) = \{z \in \mathbf{C} : p(z) = 1\} \bigcup \{a_s : p(a_s) > 1\}. \tag{2.2.2}$$

Теорема. *Пусть $a \in \mathcal{A}$. Тогда:*

1) *множество $\mathbf{C} \setminus \tau(a)$ содержится в резольвентном множестве оператора T;*
2) *если $a \in \mathcal{B}$, то спектр $\sigma(T)$ оператора T совпадает с множеством $\tau(a)$, то есть $\sigma(T) = \tau(a)$.*

3. Доказательство основной теоремы

3.1. Неоднородное уравнение.

Чтобы исследовать спектр оператора T, необходимо построить его резольвенту. Для этого на $\ell^2(\mathbf{Z})$ рассмотрим неоднородное уравнение:

$$(T - z) f = g, \ \ g \in \ell^2(\mathbf{Z}). \tag{3.1.1}$$

Будем искать те значения параметра z, при которых существует решение $f \in \ell^2(\mathbf{Z})$. В более подробной записи уравнение (3.1.1) выглядит следующим образом:

$$f(n+1) + (a(n) - z) f(n) = g(n), \ \ n \in \mathbf{Z}. \tag{3.1.2}$$

Это – линейное неоднородное разностное уравнение первого порядка (см. [4]).

Введем в рассмотрение полином:

$$P(n, j; z) := \prod_{k=0}^{j} (z - a(n+k)); \quad n \in \mathbf{Z}; j = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.1.3}$$

Заметим, что

$$P(n-j, j-1; z) = \prod_{k=1}^{j} (z - a(n-k)); \quad n \in \mathbf{Z}; j = 1, 2, 3, \ldots. \tag{3.1.4}$$

Рассматриваемый полином обладает свойствами:

$$\begin{gathered} P(n, j+1; z) = P(n, j; z)\,(z - a(n+j+1)), \\ P(n, j; z) = (z - a(n))\, P(n+1, j-1; z), \\ \bigl|P(n, j; z)\bigr| = p(z)^j\, B(n, j; z), \end{gathered} \tag{3.1.5}$$

где

$$B(n, j; z) := \prod_{s=1}^{N} |z - a_s|^{\beta_s(n,j)}; \quad n \in \mathbf{Z};\, j = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.1.6}$$

Вне множества $\tau(a)$ для всякой финитной последовательности $g = g(n)$ определим последовательность $V_g(n, z)$:

$$V_g(n, z) := -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{g(n+j)}{P(n, j; z)}, \quad \text{если} \quad p(z) > 1, z \notin \{a_s\}_{s=1}^{N}, \tag{3.1.7}$$

то есть точка z принадлежит внешности лемнискаты l и не совпадает ни с одним из значений функции $a(n)$;

$$V_g(n, z) := g(n-1) + \sum_{j=1}^{\infty} g(n-j-1)\, P(n-j, j-1; z), \quad \text{если} \quad p(z) < 1, \tag{3.1.8}$$

то есть точка z принадлежит внутрености лемнискаты l.

Мы покажем, что последовательность V_g является решением неоднородного уравнения (3.1.1) и принадлежит $\ell^2(\mathbf{Z})$, когда $g \in \ell^2(\mathbf{Z})$. Сходимость рядов (3.1.7) и (3.1.8) для $g \in \ell^2(\mathbf{Z})$ вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Для любого числа $z \in \mathbf{C} \setminus \tau(a)$ существует постоянная $C(z)$ такая, что для всякой финитной последовательности $g = g(n)$ имеет место неравенство:*

$$\|V_g(z)\| \leqslant C(z)\, \|g\|. \tag{3.1.9}$$

Доказательство. Будем рассматривать точки z, различающиеся расположением по отношению к лемнискате.

Случай 1. Точка z принадлежит внешности лемнискаты l и не совпадает ни с одним из значений функции $a(n)$, то есть $p(z) > 1$, $z \notin \{a_s\}_{s=1}^{N}$.

Пусть указанная точка z фиксирована. Оценим $\left|V_g(n)\right|^2$. Используя определение $p(z)$ в (2.2.1) и учитывая (2.1.4), (3.1.3), (3.1.6), в силу неравенства Коши–Буняковского получаем:

$$|V_g(n)|^2 \leqslant \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|g(n+j)|}{|P(n,j;z)|}\right)^2 = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|g(n+j)|}{p(z)^j\, B(n,j;z)}\right)^2$$

$$\leqslant \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p(z)^j\, B(n,j;z)^2}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|g(n+j)|^2}{p(z)^j}\right). \qquad (3.1.10)$$

Для оценки первого сомножителя положим:

$$K = K(z) := \max_s \left(\max\left\{\frac{1}{|z-a_s|}, |z-a_s|\right\}\right). \qquad (3.1.11)$$

Заметим, что $K > 1$, и так как $z \notin \{a_s\}_{s=1}^N$, то $K < \infty$. В силу (2.1.5), для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер J, что при $j > J$ для всех $n \in \mathbf{Z}$ и $s = 1, 2, \ldots, N$ выполняется неравенство:

$$|\beta_s(n,j)| < \varepsilon j.$$

Положим:

$$C_1(z) := \max_n \sum_{j=0}^{J} \frac{1}{p(z)^j\, B(n,j;z)^2}.$$

Для рассматриваемых z имеем: $C_1(z) < \infty$. Тогда, поскольку из (3.1.11) следует выполнение соотношения

$$\frac{1}{|z-a_s|^{2\beta_s(n,j)}} \leqslant K^{2\varepsilon j},$$

получаем оценку для первого сомножителя в последней части (3.1.10):

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p(z)^j\, B(n,j;z)^2} \leqslant$$

$$\leqslant C_1(z) + \sum_{j=J+1}^{\infty} \frac{K^{2\varepsilon j N}}{p(z)^j} = C_1(z) + \sum_{j=J+1}^{\infty} \left(\frac{K^{2\varepsilon N}}{p(z)}\right)^j.$$

Поскольку рассматривается случай $p(z) > 1$, выберем $\varepsilon = \varepsilon(z) < 1$ таким, чтобы выполнялось условие:

$$K^{2\varepsilon N} = (1-\varepsilon)\, p(z)$$

– и по этому ε найдем соответствующий номер $J = J(z)$. Имеем окончательную оценку:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p(z)^j\, B(n,j;z)^2} \leqslant C_1(z) + \frac{1}{\varepsilon(z)}.$$

Обозначим:

$$C_2(z) := C_1(z) + \frac{1}{\varepsilon(z)}.$$

Подставляя в (3.1.10), имеем:

$$|V_g(n)|^2 \leqslant C_2(z) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|g(n+j)|^2}{p(z)^j}.$$

Далее:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |V_g(n)|^2 \leqslant C_2(z) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|g(n+j)|^2}{p(z)^j}$$

$$= C_2(z) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p(z)^j} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |g(n+j)|^2$$

$$= C_2(z)\, \|g\|^2 \frac{1}{1-1/p(z)} = C_2(z)\, \frac{p(z)}{p(z)-1} \|g\|^2.$$

Полагая

$$C(z)^2 = C_2(z)\, \frac{p(z)}{p(z)-1},$$

получаем требуемую оценку.

Случай 2. Точка z принадлежит внутренности лемнискаты l и не совпадает ни с одним из ее фокусов, то есть $p(z) < 1$, $z \notin \{a_s : \alpha_s > 0\}_{s=1}^{N}$. Пусть указанная точка z фиксирована. Имеем:

$$|V_g(n)|^2 \leqslant \left(|g(n-1)| + \sum_{j=1}^{\infty} |g(n-j-1)| \left| P(n-j, j-1; z) \right| \right)^2 .$$

Используя неравенство $(a+b)^2 \leqslant 2\left(a^2+b^2\right)$, получаем:

$$|V_g(n)|^2 \leqslant$$

$$2\left(|g(n-1)|^2 + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |g(n-j-1)|\left|P(n-j,j-1;z)\right|\right)^2\right). \qquad (3.1.12)$$

С учетом (2.1.4) и (3.1.4), $\left|P(n-j,j-1;z)\right|$ в (3.1.12) можно разбить на произведения вида $|z-a_s|$, где $s=1,2,\ldots,N$, двух типов: первый тип содержит фокусы лемнискаты, то есть такие a_s, что $\alpha_s>0$, а второй – такие a_s, что $\alpha_s=0$. Ниже нам потребуется оценивать сомножители $|z-a_s|$ при $\alpha_s=0$ только сверху. То есть мы допускаем, что $|z-a_s|=0$ при $\alpha_s=0$. Поскольку

$$\left|P(n-j,j-1;z)\right| = p(z)^{j-1} B(n-j,j-1;z), \qquad (3.1.13)$$

где $B(n-j,j-1;z)$ есть произведение сомножителей двух указанных выше типов, получаем:

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}|g(n-j-1)|\left|P(n-j,j-1;z)\right|\right)^2$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{\infty}|g(n-j-1)|p(z)^{j-1} B(n-j,j-1;z)\right)^2 \qquad (3.1.14)$$

$$\leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty}p(z)^{j-1} B(n-j,j-1;z)^2\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}|g(n-j-1)|^2 p(z)^{j-1}\right).$$

Для оценки первого сомножителя положим:

$$Q(z) := \max_k |z-a_k|.$$

Тогда для любых $s=1,2,\ldots,N$ имеет место следущая оценка:

$$|z-a_s| \leqslant Q(z).$$

Далее, рассматривая лишь фокусы, положим:

$$q(z) := \min_{k:\alpha_k>0} |z-a_k|.$$

Для всех s, таких, что $\alpha_s > 0$, справедлива оценка:

$$|z - a_s| \geqslant q(z) > 0.$$

Наибольшую из величин $Q(z)$ и $1/q(z)$ обозначим через L:

$$L = L(z) := \max\left\{Q(z), \frac{1}{q(z)}\right\}.$$

Тогда для всех s, n, j выполнено:

$$|z - a_s|^{\beta_s(n-j, j-1)} \leqslant L^{|\beta_s(n-j, j-1)|}. \tag{3.1.15}$$

В силу (2.1.5) для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер J, что если $j > J$, то при всех $n \in \mathbf{Z}$, $s = 1, 2, \ldots, N$ выполняется неравенство:

$$|\beta_s(n-j, j-1)| < \varepsilon j.$$

Положим:

$$C_3(z) := \max_n \sum_{j=1}^{J} (p(z))^{j-1} B(n-j, j-1; z)^2.$$

Имеем: $C_3(z) < \infty$.

Из (3.1.15) следует, что для всех $s = 1, 2, \ldots, N$ выполняется неравенство:

$$|z - a_s|^{2\beta_s(n-j, j-1)} \leqslant L^{2\varepsilon j}.$$

Поэтому:

$$\sum_{j=1}^{\infty} p(z)^{j-1} B(n-j, j-1; z)^2 \leqslant C_3(z) + \sum_{j=J+1}^{\infty} p(z)^{j-1} L^{2\varepsilon j N}.$$

Поскольку рассматривается случай $0 < p(z) < 1$, выберем $\varepsilon = \varepsilon(z)$ таким, чтобы выполнялось условие:

$$L^{2\varepsilon N} = \frac{1 - \varepsilon}{p(z)}$$

– и по этому ε найдем соответствующий номер $J = J(z)$. Получаем:

$$\sum_{j=J+1}^{\infty} p(z)^{j-1} L^{2\varepsilon j N} = \sum_{j=J+1}^{\infty} \frac{p(z)^{j-1}(1-\varepsilon)^j}{p(z)^j}$$

$$= \frac{1}{p\,(z)} \sum_{j=J+1}^{\infty} (1-\varepsilon)^j \leqslant \frac{1}{p\,(z)\,\varepsilon\,(z)}.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} p\,(z)^{j-1}\, B\,(n-j, j-1; z)^2 \leqslant C_3\,(z) + \frac{1}{p\,(z)\,\varepsilon\,(z)}.$$

Обозначим:

$$C_4\,(z) := C_3\,(z) + \frac{1}{p\,(z)\,\varepsilon\,(z)}.$$

Подставляя в (3.1.14), получим:

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |g\,(n-j-1)| \big| P\,(n-j, j-1; z) \big| \right)^2$$

$$\leqslant C_4\,(z) \sum_{j=1}^{\infty} |g\,(n-j-1)|^2 p\,(z)^{j-1}.$$

Наконец, используя последнее неравенство, из (3.1.12) получаем:

$$|V_g\,(n)|^2 \leqslant 2 \left(|g\,(n-1)|^2 + C_4\,(z) \sum_{j=1}^{\infty} |g\,(n-j-1)|^2 p\,(z)^{j-1} \right).$$

Далее:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |V_g\,(n)|^2 \leqslant 2 \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |g\,(n-1)|^2 \right.$$

$$\left. + C_4\,(z) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |g\,(n-j-1)|^2 p\,(z)^{j-1} \right)$$

$$= 2 \left(\|g\|^2 + C_4\,(z) \sum_{j=1}^{\infty} p\,(z)^{j-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |g\,(n-j-1)|^2 \right)$$

$$= 2 \left(\|g\|^2 + C_4\,(z)\, \|g\|^2 \frac{1}{1-p\,(z)} \right) = 2 \left(1 + \frac{C_4\,(z)}{1-p\,(z)} \right) \|g\|^2.$$

Положив

$$C(z)^2 := 2\left(1+\frac{C_4(z)}{1-p(z)}\right)\|g\|^2,$$

получаем требуемое.

Случай 3. Точка $z=z_0$ совпадает с одним из фокусов лемнискаты, то есть существует такой номер t, что $a_t=z_0, \alpha_t>0$. Покажем, что в рассматриваемом случае формула (3.1.8) содержит равномерно ограниченное число слагаемых, то есть существует номер $M \geqslant 1$ такой, что для любых $n \in \mathbf{Z}$ на промежутке $[n, n+M]$ функция $a(n)$ принимает значение z_0. Следовательно, $P(n, M; z_0) = 0$ для всех $n \in \mathbf{Z}$. Действительно, пусть произведение $P(n,j;z_0)$ отлично от нуля. Тогда

$$m_t(n,j) = \alpha_t j + \beta_t(n,j) = 0. \tag{3.1.16}$$

Соотношение (3.1.16) может быть выполнено только для промежутка $[n, n+j]$ ограниченной длины, так как оно эквивалентно равенству

$$\frac{\beta_t(n,j)}{j} = -\alpha_t,$$

а отношение в левой части этого равенства равномерно по n стремится к нулю при $j \to \infty$. Следовательно, существует такой номер M, что при всех $j \geqslant M$ и $n \in \mathbf{Z}$ выполняются соотношения:

$$\frac{|\beta_t(n,j)|}{j} < \alpha_t; \quad m_t(n,j) \geqslant 1; \quad P(n,j;z_0) = 0.$$

Таким образом, существование вышеупомянутого числа M доказано. Далее, положив

$$R := \max\left\{\max_{\substack{n\in\mathbf{Z}\\ 1\leqslant j\leqslant M}} \left|P(n-j, j-1; z_0)\right|, 1\right\},$$

имеем:

$$|V_g(n)|^2 \leqslant \left(|g(n-1)| + \sum_{j=1}^{M} |g(n-j-1)|\left|P(n-j, j-1; z_0)\right|\right)^2$$

$$\leqslant \left(|g(n-1)| + R\sum_{j=1}^{M} |g(n-j-1)|\right)^2 \leqslant R^2\left(\sum_{j=0}^{M} |g(n-j-1)|\right)^2$$

$$\leqslant R^2\,(M+1)\sum_{j=0}^{M}|g\,(n-j-1)|^2.$$

Далее:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|V_g\,(n)|^2\leqslant R^2\,(M+1)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{M}|g\,(n-j-1)|^2=$$

$$=R^2\,(M+1)\sum_{j=0}^{M}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|g\,(n-j-1)|^2=R^2\,(M+1)^2\,\|g\|^2.$$

Полагая

$$C\,(z):=R\,(M+1)\,,$$

вновь получаем требуемое. •

Продолжая по непрерывности преобразование $g\longmapsto V_g$ на все $\ell^2\,(\mathbf{Z})$, мы получаем следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $z\in\mathbf{C}\setminus\tau\,(a)$. *Тогда для произвольной последовательности* $g\in\ell^2\,(\mathbf{Z})$ *последовательность* $f\,(n):=V_g\,(n)$ *лежит в* $\ell^2\,(\mathbf{Z})$, *и кроме того,* f *является решением уравнения* (3.1.2).

Доказательство. Проверку второй части утверждения леммы проведем прямой подстановкой в уравнение.

Случай 1. Точка z принадлежит внешности лемнискаты l и не совпадает ни с одним из значений функции $a\,(n)$, то есть $p(z)>1$, $z\notin\{a\,(s)\}_{s=1}^{N}$. Имеем:

$$f\,(n)=-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{g\,(n+j)}{P\,(n,j;z)};\quad f\,(n+1)=-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{g\,(n+j+1)}{P\,(n+1,j;z)}.$$

С учетом (3.1.4) получаем:

$$(a\,(n)-z)\,f\,(n)=(z-a\,(n))\left(\frac{g\,(n)}{P\,(n,0;z)}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{g\,(n+j)}{P\,(n,j;z)}\right)$$

$$=g\,(n)+\sum_{j=1}^{\infty}(z-a\,(n))\,\frac{g\,(n+j)}{(z-a\,(n))\,P\,(n+1,j-1;z)}$$

$$= g(n) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g(n+j+1)}{P(n+1,j;z)} = g(n) - f(n+1),$$

то есть $f(n)$ – решение уравнения (3.1.2).

Случай 2. Точка z принадлежит внутренности лемнискаты l. В частности, она может совпадать с фокусом, как показано в лемме 1, и при этом условии функция f лежит в $\ell^2(\mathbf{Z})$, а формула (3.1.8) содержит лишь конечное число слагаемых. Имеем:

$$f(n) = g(n-1) + \sum_{j=1}^{\infty} g(n-j-1)\,P(n-j,j-1;z);$$

$$f(n+1) = g(n) + \sum_{j=1}^{\infty} g(n-j)\,P(n-j+1,j-1;z).$$

С учетом (3.1.4) получаем:

$$(a(n)-z)\,f(n)$$

$$= (z-a(n))\,g(n-1) - \sum_{j=1}^{\infty} g(n-j-1)\,(z-a(n))\,P(n-j,j-1;z)$$

$$= -\sum_{j=1}^{\infty} g(n-j)\,P(n-j+1,j-1;z) = g(n) - f(n+1),$$

то есть $f(n)$ – решение уравнения (3.1.2). •

Из лемм 1 и 2 получаем представление для резольвенты в области $\mathbf{C} \setminus \tau(a)$.

Следствие. *Резольвента оператора T записывается следующим образом:*

$$\left((T-z)^{-1}g\right)(n) = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{g(n+j)}{P(n,j;z)}, \tag{3.1.17}$$

если точка z принадлежит внешности лемнискаты l и не совпадает ни с одним из значений функции $a(n)$, то есть $p(z) > 1, z \notin \{a_s\}_{s=1}^{N}$;

$$\left((T-z)^{-1}g\right)(n) = g(n-1) + \sum_{j=1}^{\infty} g(n-j-1)\,P(n-j,j-1;z), \tag{3.1.18}$$

если точка z принадлежит внутренности лемнискаты l, то есть $p(z) < 1$.

Точки a_s, принадлежащие внешности лемнискаты l, являются изолированными особенностями резольвенты. Если $p(a_{s_0}) > 1$, и $\inf\{n\colon a(n) = a_{s_0}\} > -\infty$, то число $z = a_{s_0}$ будет собственным значением оператора T, а размерность соответствующего инвариантного подпространства совпадает с числом различных n, для которых $a(n) = a_{s_0}$ (ср. с [2], [9]).

Таким образом, пункт 1 теоремы доказан.

Из вышесказанного следует, что спектр оператора T состоит из точек, в которых выражение для резольвенты, стоящее в формуле (3.1.17), имеет особенности, то есть из точек a_s, таких, что $p(a_s) > 1$, а также – из точек, лежащих на лемнискате $l = \{z : p(a_s) = 1\}$.

3.2. Оценка нормы резольвенты вблизи лемнискаты.

Рассмотрим поведение нормы резольвенты $(T-z)^{-1}$ оператора T при приближении параметра z к лемнискате. Здесь мы предполагаем, что функция a принадлежит классу $\mathcal{B}$. Таким образом, нам дано, что для всех $j > 0; n \in \mathbf{Z}; s = 1, 2, \ldots, N$ числа $\beta_s(n,j)$ равномерно ограничены, то есть существует постоянная D такая, что

$$|\beta_s(n,j)| \leqslant D. \tag{3.2.1}$$

Лемма 3. *Пусть выполнено условие* (3.2.1). *На лемнискате* $l = \{z\colon p(z) = 1\}$ *выберем произвольную точку* ζ. *Тогда при стремлении точки* z *такой, что* $p(z) > 1$, *к точке* ζ, *норма оператора* $(T-z)^{-1}$ *неограниченно возрастает.*

Доказательство. Поскольку $p(z) > 1$, для резольвенты справедлива формула (3.1.17). Применим ее к функции

$$g(n) = \chi(n) := \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Получаем:

1) если $n \geqslant 1$, то $f(n) \equiv 0$.

2) если $n \leqslant 0$, то

$$f(n) = \left((T-z)^{-1}\chi\right)(n) = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\chi(n+j)}{P(n,j;z)} = -\frac{1}{P(n,|n|;z)}.$$

Следовательно, при $n \leqslant 0$ имеем:

$$|f(n)|^2 = \frac{1}{\left|P(n,|n|;z)\right|^2} = \frac{1}{p(z)^{2|n|}\,B(n,|n|;z)^2}.$$

Оценим последнее произведение снизу. Для этого необходимо оценить каждый из сомножителей вида $|z-a_s|$ сверху для $\beta_s(n,|n|) \geqslant 0$ и снизу для $\beta_s(n,|n|) < 0$. Положим:

$$A_1 := \max_{\zeta \in l} \max_s |\zeta - a_s|.$$

Рассмотрим точку z в окрестности лемнискаты. Для определенности положим: $\operatorname{dist}(z,l) < 1$. Тогда по неравенству треугольника имеем:

$$|z-a_s| \leqslant 1 + A_1.$$

При $\alpha_s = 0$ показатели степени $\beta_s(n,|n|) = m_s(n,|n|)$ неотрицательны, то есть для соответствующих точек a_s важна оценка расстояния $|z-a_s|$ лишь сверху. Если же a_s является фокусом лемнискаты, то в силу знаконеопределенности чисел $\beta_s(n,|n|)$ нужна двусторонняя оценка этого расстояния. Но все фокусы лежат внутри лемнискаты. Положим:

$$A_2 := \min_{s:\alpha_s > 0} \operatorname{dist}(l, a_s).$$

Тогда при $\alpha_s > 0$ получаем: $|z-a_s| \geqslant A_2 > 0$. Далее положим:

$$A := \min\left\{\frac{1}{A_1+1}, A_2, 1\right\}.$$

Окончательно, принимая во внимание условие (3.2.1), получим:

$$|f(n)|^2 = \frac{1}{p(z)^{2|n|}\,B(n,|n|;z)^2} \geqslant \frac{A^{2DN}}{p(z)^{2|n|}}.$$

Таким образом, учитывая, что $\|\chi\| = 1$, приходим к нужной оценке квадрата нормы резольвенты:

$$\|(T-z)^{-1}\|^2 \geqslant \|(T-z)^{-1}\chi\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |f(-k)|^2 \geqslant C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p(z)^{2k}}$$

$$= \frac{Cp(z)^2}{p(z)^2 - 1} = \frac{Cp(z)^2}{(p(z)+1)(p(z)-1)},$$

где $C = A^{2DN}$. При $z \to \zeta$ имеем $p(z)-1 \to 0$, $p(z)+1 \to 2$, а норма резольвенты оператора T при этом неограниченно возрастает. •

Лемма 3 показывает, что при дополнительном условии (3.2.1) все точки лемнискаты являются точками спектра оператора T.

Таким образом, доказано, что множество $\mathbf{C} \setminus \tau(a)$ является резольвентным множеством оператора T, а его спектр $\sigma(T)$ совпадает с множеством $\tau(a)$. Последнее завершает доказательство теоремы.

Авторы искренне благодарны Б. С. Павлову и М. М. Фаддееву за полезные обсуждения вопросов, излагаемых в данной статье и близких к ним.

Первый из авторов выражает признательность П. Н. Воронцову-Вельяминову за его доброе отношение, выразившееся, в частности, в предоставлении возможности использовать принадлежащие ему компьютеры для набора и правки текста.

Литература

1. А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций. Том 1.* Наука, М., 1967.
2. В. Л. Олейник, *Метод приближения сильной связи на лемнискате.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **270** (2000), 256–276.
3. В. Л. Олейник, *Рекуррентные соотношения и разностные уравнения.* Соросовский образовательный журнал, **7**, No. 2 (2001).
4. А. А. Самарский, *Введение в численные методы.* Наука, М. (1982).
5. Д. Л. Уолш, *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области.* Издательство иностранной литературы, М. (1966).
6. Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ.* Наука, М. (1969).
7. H. Grunsky, *Lectures on Theory of Functions in Multiply Connected Domains.* Vandenhoeck & Puprecht In Göttingen (1978).
8. V. L. Oleinik, B. S. Pavlov, *Hilbert Theorem on Lemniscates and the Spectrum of Perturbed Shift.* Department of Mathematics, University of Auckland, New Zealand, report series 417, May, 1999, pp. 1–11.
9. V. L. Oleinik, *Tight-binding Approximanion on the Lemniscate.* Department of Mathematics, University of Helsinki, Finland, preprint 243, November, 1999, pp. 1–12.

Kalupin A. P., Oleinik V. L. A Lemniscate as the spectrum of a perturbed shift.

The spectrum of the perturbed shift operator T, $T : f(n) \longmapsto f(n+1) + a(n) f(n)$, in $\ell^2(\mathbf{Z})$ is considered for $a(n)$ taking a finite set of values. It is proved that if all values of the function $a(n)$ have uniform frequencies on $\mathbf{Z}$, then the essential part of the spectrum fills a generalized lemniscate.

С.-Петербургский
государственный университет
sasha-k@usa.net
Vladimir.Oleinik@pobox.spbu.ru

Поступило 13 июня 2001 г.