Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 282, 2001 г.

М. Ф. Гамаль

КВАЗИПОДОБНЫЕ СЛАБЫЕ СЖАТИЯ ИМЕЮТ ИЗОМОРФНЫЕ РЕШЕТКИ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ

§1. Введение

Пусть H – гильбертово пространство, $I = I_H$ – тождественный оператор в H, если E – подпространство пространства H, то символом P_E обозначается ортогональный проектор из H на E. Под подпространством здесь всегда подразумевается линейное замкнутое множество.

Пусть $T : H \to H$ – линейный ограниченный оператор. Символом $\operatorname{Lat} T$ обозначается решетка инвариантных подпространств оператора T.

Оператор T называется *сжатием*, если $\|T\| \leqslant 1$. Сжатие T называется *слабым*, если его спектр не покрывает круг $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и оператор $I - T^*T$ является ядерным.

Пусть H_1, H_2 – гильбертовы пространства, $X : H_1 \to H_2$ – линейный ограниченный оператор. Оператор X называется *деформацией*, если $\operatorname{Ker} X = \{0\}$ и $\operatorname{clos} X H_1 = H_2$.

Если имеются операторы $T_1 : H_1 \to H_1$, $T_2 : H_2 \to H_2$ и $X : H_1 \to H_2$, такие, что $XT_1 = T_2X$, то говорят, что X *сплетает* операторы T_1 и T_2. Определим отображение

$$\mathcal{I}_X : \operatorname{Lat} T_1 \to \operatorname{Lat} T_2, \quad \mathcal{I}_X E = \operatorname{clos} XE, \quad E \in \operatorname{Lat} T_1.$$

Если $\mathcal{I}_X$ является биекцией, то $\mathcal{I}_X$ является изоморфизмом решеток $\operatorname{Lat} T_1$ и $\operatorname{Lat} T_2$ (см. [4, гл. VII п. 1.19]).

Операторы $T_1 : H_1 \to H_1$ и $T_2 : H_2 \to H_2$ называются *квазиподобными*, если существуют деформации $X : H_1 \to H_2$ и $Y : H_2 \to H_1$ такие, что $XT_1 = T_2X$ и $T_1Y = YT_2$.

В работе доказано следующее утверждение. Пусть слабые сжатия T_1 и T_2 действуют в *сепарабельных* гильбертовых пространствах H_1 и H_2. Если T_1 и T_2 квазиподобны, то существует

Работа частично поддержана ФЦП "Интеграция" рег. номер 326.53 и грантом "Научные школы" No. 00-15-96-022.

деформация $X : H_1 \to H_2$, сплетающая операторы T_1 и T_2 и такая, что $\mathcal{I}_X : \operatorname{Lat} T_1 \to \operatorname{Lat} T_2$ является изоморфизмом решеток.

Приводятся примеры, показывающие, что для произвольной деформации X, сплетающей квазиподобные слабые сжатия, отображение $\mathcal{I}_X$ может не быть изоморфизмом их решеток; отображение, обратное изоморфизму решеток $\mathcal{I}_X$, может быть не представимо в виде $\mathcal{I}_Y$ ни для какого ограниченного оператора Y (см. §4).

Доказательства основаны на применении результатов обзорной статьи [2] и книги [4].

Автор выражает искреннюю благодарность В. И. Васюнину и В. В. Капустину за полезные обсуждения.

§2. Основное утверждение

Основным утверждением работы является теорема 1, из нее выводится приведенный в заголовке результат.

Все рассматриваемые гильбертовы пространства предполагаются сепарабельными. Символами H^2 и H^∞ обозначаются пространства Харди в единичном круге $\mathbb{D}$.

Сжатие T называется C_0-сжатием, если существует функция $\varphi \in H^\infty$, $\varphi \not\equiv 0$, такая, что $\varphi(T) = 0$. Такая функция φ называется аннулятором C_0-сжатия T. В качестве аннулятора всегда можно взять *внутреннюю* функцию φ, то есть такую, что $|\varphi| = 1$ п.в. на $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$.

Для внутренней функции θ из H^∞ определим оператор M_θ следующим образом:

$$M_\theta : K_\theta \to K_\theta, \quad M_\theta f = P_\theta z f, \quad f \in K_\theta, \quad K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2,$$

P_θ – ортогональный проектор из H^2 на K_θ.

Всякое C_0-сжатие квазиподобно своей *жордановой модели*, то есть оператору вида $\sum_{n=1}^\infty \oplus M_{\theta_n}$, где $\theta_n \in H^\infty$, функции θ_n – внутренние, θ_{n+1} делит θ_n для всех $n \geqslant 0$; возможно, $\theta_n \equiv 1$ для n, больших некоторого n_0.

Пусть C_0-сжатие T имеет жорданову модель $\sum_{n\geqslant 0} \oplus M_{\theta_n}$. Говорят, что T *обладает свойством (P)*, если совокупность внутренних функций $\{\theta_n\}_{n\geqslant 0}$ не имеет нетривиального общего делителя.

Пусть $A : H \to H$ и $B : K \to K$ – вполне неунитарные сжатия, $X : H \to K$ – сплетающая их деформация. Если одно из сжатий A и B является C_0-сжатием, то C_0-сжатием является и другое, и их жордановы модели совпадают. Если A и B обладают свойством (P), то $\mathcal{I}_X : \operatorname{Lat} A \to \operatorname{Lat} B$ является изоморфизмом решеток.

Все приведенные здесь факты о C_0-сжатиях содержатся в [4, гл. II, III, гл. VII п. 1.9, 1.21; 3, гл. III п. 4.6], см. также [2].

Теорема 1. *Пусть H, K, $\mathcal{H}$ – сепарабельные гильбертовы пространства, $A : H \to H$ и $B : K \to K$ – C_0-сжатия, $X : H \to K$ – деформация, $XA = BX$, $\sum_{n\geqslant 0} \oplus M_{\theta_n}$ – жорданова модель C_0-сжатий A и B ($\theta_n \in H^\infty$, функции θ_n – внутренние, $n \geqslant 0$), A и B обладают свойством (P), $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ – абсолютно непрерывное сжатие, I – тождественный оператор в $\mathcal{H}$.*

Тогда

$$\mathcal{I}_{\left(\begin{smallmatrix} X & 0 \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right)} : \operatorname{Lat} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \to \operatorname{Lat} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

– изоморфизм решеток.

Замечание (**Теорема 1$'$**) *Пусть R – абсолютно непрерывное сжатие в гильбертовом пространстве $\mathcal{K}$, $J : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ – деформация, такая, что $JT = RJ$ и $\mathcal{I}_J$ является изоморфизмом решеток* $\operatorname{Lat} T$ *и* $\operatorname{Lat} R$. *Если в формулировке теоремы* 1 *заменить I на J и $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$ на $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$, она остается верной.*

Доказательство теоремы $1'$ буквально такое же, как и доказательство теоремы 1. Однако, как будет показано в §3, для наших целей достаточно теоремы 1, и, чтобы не загромождать работу лишними обозначениями, будет приведено только ее доказательство.

Обозначение: пусть H и $\mathcal{H}$ – гильбертовы пространства, $\begin{pmatrix} H \\ \mathcal{H} \end{pmatrix}$ – ортогональная сумма пространств H и $\mathcal{H}$, $\mathcal{E}$ – подпространство пространства $\begin{pmatrix} H \\ \mathcal{H} \end{pmatrix}$. Положим

$$\begin{pmatrix} E_1(\mathcal{E}) \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{E} \cap \begin{pmatrix} H \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_2(\mathcal{E}) \\ 0 \end{pmatrix} = \operatorname{clos} \begin{pmatrix} I_H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{E},$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ L_1(\mathcal{E}) \end{pmatrix} = \mathcal{E} \cap \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{H} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ L_2(\mathcal{E}) \end{pmatrix} = \operatorname{clos} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{H}} \end{pmatrix} \mathcal{E},$$

где I_H и $I_{\mathcal{H}}$ – тождественные операторы в H и $\mathcal{H}$. Ясно, что $E_k(\mathcal{E})$ и $L_k(\mathcal{E})$ – подпространства пространств H и $\mathcal{H}$, $k = 1, 2$. Далее, если $A : H \to H$ и $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ – операторы в пространствах H и $\mathcal{H}$, то $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} H \\ \mathcal{H} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} H \\ \mathcal{H} \end{pmatrix}$ – оператор в пространстве $\begin{pmatrix} H \\ \mathcal{H} \end{pmatrix}$. Если $\mathcal{E} \in \operatorname{Lat} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$, то $E_k(\mathcal{E}) \in \operatorname{Lat} A$ и $L_k(\mathcal{E}) \in \operatorname{Lat} T$, $k = 1, 2$ (доказательство этого факта очевидно и опускается).

В формулировке теоремы 1 речь идет также о пространстве $\begin{pmatrix} K \\ \mathcal{H} \end{pmatrix}$. Для $\mathcal{F} \subset \begin{pmatrix} K \\ \mathcal{H} \end{pmatrix}$ аналогичные объекты будут обозначаться через $F_k(\mathcal{F})$ и $L_k(\mathcal{F})$, $k = 1, 2$.

Лемма 1. *Пусть T – оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, H_0, $H_1 \in \operatorname{Lat} T$, $H_0 \subset H_1$, $F \subset H_1 \ominus H_0$, $P_{H_1 \ominus H_0}$ – ортогональный проектор из $\mathcal{H}$ на $H_1 \ominus H_0$. Тогда $H_0 \oplus F \in \operatorname{Lat} T$ в том и только в том случае, если $F \in \operatorname{Lat} P_{H_1 \ominus H_0} T \big|_{H_1 \ominus H_0}$.* $\square$

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ – гильбертовы пространства, $X : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ – оператор, $H_0 \subset H_1 \subset \mathcal{H}$, $F \subset H_1 \ominus H_0$, $K_i = \operatorname{clos} X H_i$, $i = 0, 1$, $P_{K_1 \ominus K_0}$ – ортогональный проектор из $\mathcal{K}$ на $K_1 \ominus K_0$. Тогда $\operatorname{clos} X(H_0 \oplus F) = K_0 \oplus \operatorname{clos} \big(P_{K_1 \ominus K_0} X \big|_{H_1 \ominus H_0}\big) F$.* $\square$

Лемма 3. *Пусть H, $\mathcal{H}$ – гильбертовы пространства, $A : H \to H$ – C_0-сжатие, $\varphi \in H^\infty$, φ – аннулятор C_0-сжатия A, $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ – абсолютно непрерывное сжатие, $\mathcal{E} \in \operatorname{Lat} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$. Положим $L_k = L_k(\mathcal{E})$, $k = 1, 2$, и пусть $P_{L_2 \ominus L_1}$ – ортогональный проектор из $\mathcal{H}$ на $L_2 \ominus L_1$. Тогда $\varphi(T) L_2 \subset L_1$, и, следовательно, $P_{L_2 \ominus L_1} T \big|_{L_2 \ominus L_1}$ – C_0-сжатие, имеющее аннулятор φ.*

Доказательство. Положим $P_{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{H}} \end{pmatrix}$, тогда

$$\varphi \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(A) & 0 \\ 0 & \varphi(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varphi(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varphi(T) \end{pmatrix} P_{\mathcal{H}},$$

поэтому

$$\operatorname{clos} \varphi \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \mathcal{E} = \operatorname{clos} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varphi(T) \end{pmatrix} P_{\mathcal{H}} \mathcal{E} = \operatorname{clos} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varphi(T) \end{pmatrix} \operatorname{clos} P_{\mathcal{H}} \mathcal{E} =$$

$$= \operatorname{clos} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varphi(T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{clos} \varphi(T) L_2 \end{pmatrix}.$$

Так как $\mathcal{E} \in \operatorname{Lat}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$, то $\operatorname{clos}\varphi\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$, таким образом, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \operatorname{clos}\varphi(T)L_2 \end{smallmatrix}\right) \subset \mathcal{E}$. По определению, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ L_1 \end{smallmatrix}\right) = \mathcal{E} \cap \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \mathcal{H} \end{smallmatrix}\right)$, и мы получили, что $\operatorname{clos}\varphi(T)L_2 \subset L_1$. $\square$

Лемма 4. *Пусть T_1 и T_2 – операторы в гильбертовых пространствах H_1 и H_2, $\mathcal{F} \in \operatorname{Lat}\left(\begin{smallmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{smallmatrix}\right)$, пусть*

$$\operatorname{clos}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathcal{F} = \begin{pmatrix} H_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{clos}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ H_2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\mathcal{F} \cap \begin{pmatrix} H_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{F} \cap \begin{pmatrix} 0 \\ H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Положим

$$X_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Big|_{\mathcal{F}}, \quad X_1 : \mathcal{F} \to \begin{pmatrix} H_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\Big|_{\mathcal{F}}, \quad X_2 : \mathcal{F} \to \begin{pmatrix} 0 \\ H_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда X_1, X_2 – деформации, X_1 сплетает $\left(\begin{smallmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{smallmatrix}\right)\big|_{\mathcal{F}}$ и T_1, X_2 сплетает $\left(\begin{smallmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{smallmatrix}\right)\big|_{\mathcal{F}}$ и T_2. $\square$

Следствие. *Пусть в условиях леммы 4 T_1 и T_2 являются C_0-сжатиями. Тогда жордановы модели C_0-сжатий T_1, T_2 и $\left(\begin{smallmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{smallmatrix}\right)\big|_{\mathcal{F}}$ совпадают.*

Доказательство. Как уже отмечалось перед формулировкой теоремы 1, если существует деформация, сплетающая два C_0-сжатия, то жордановы модели этих C_0-сжатий совпадают. Следовательно, сжатия T_k, $k = 1, 2$, имеют ту же жорданову модель, что и сжатие $\left(\begin{smallmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{smallmatrix}\right)\big|_{\mathcal{F}}$. $\square$

Доказательство теоремы 1. Положим

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{X} : \begin{pmatrix} H \\ \mathcal{H} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} K \\ \mathcal{H} \end{pmatrix},$$

тогда $\mathcal{X}$ сплетает операторы $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & T \end{smallmatrix}\right)$ и $\left(\begin{smallmatrix} B & 0 \\ 0 & T \end{smallmatrix}\right)$. Как уже отмечалось в §1, для того чтобы доказать, что $\mathcal{I}_{\mathcal{X}}$ является изоморфизмом решеток $\operatorname{Lat}\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & T \end{smallmatrix}\right)$ и $\operatorname{Lat}\left(\begin{smallmatrix} B & 0 \\ 0 & T \end{smallmatrix}\right)$, достаточно проверить, что $\mathcal{I}_{\mathcal{X}}$ является биекцией [4, гл. VII п. 1.19].

1) Пусть $\mathcal{E} \in \operatorname{Lat}\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & T \end{smallmatrix}\right)$, положим

$$F_k = \operatorname{clos} X E_k(\mathcal{E}), \quad k = 1, 2, \quad E = E_2(\mathcal{E}) \ominus E_1(\mathcal{E}), \quad F = F_2 \ominus F_1,$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{E} \ominus \begin{pmatrix} E_1(\mathcal{E}) \\ L_1(\mathcal{E}) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G} = \operatorname{clos} \begin{pmatrix} P_F X\,\big|_E & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \mathcal{F}.$$

По лемме 2

$$\mathcal{I}_X \mathcal{E} = \begin{pmatrix} F_1 \\ L_1(\mathcal{E}) \end{pmatrix} \oplus \mathcal{G}.$$

Покажем, что

$$F_k = F_k(\mathcal{I}_X \mathcal{E}), \quad L_k(\mathcal{E}) = L_k(\mathcal{I}_X \mathcal{E}), \quad k = 1, 2. \tag{3}$$

Положим $L = L_2(\mathcal{E}) \ominus L_1(\mathcal{E})$. Применим леммы 1 и 3 к сжатиям $P_E A\big|_E$ и $P_L T\big|_L$ и подпространству $\mathcal{F} \subset \left(\begin{smallmatrix} E \\ L \end{smallmatrix}\right)$. Получим, что $P_E A\big|_E$, $P_L T\big|_L$ и $\mathcal{F}$ удовлетворяют условиям следствия леммы 4, поэтому жордановы модели C_0-сжатий $P_E A\big|_E$ и $P_L T\big|_L$ совпадают. Пусть $\sum_{n\geqslant 0} \oplus M_{\theta_n}$ – жорданова модель C_0-сжатия $P_E A\big|_E$. Положим $\vartheta_{2n} = \vartheta_{2n+1} = \theta_n$, $n \geqslant 0$. Ясно, что операторы

$$\begin{pmatrix} \sum_{n\geqslant 0} \oplus M_{\theta_n} & 0 \\ 0 & \sum_{n\geqslant 0} \oplus M_{\theta_n} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \sum_{n\geqslant 0} \oplus M_{\vartheta_n}$$

унитарно эквивалентны, поэтому $\sum_{n\geqslant 0} \oplus M_{\vartheta_n}$ является жордановой моделью C_0-сжатия

$$\begin{pmatrix} P_E A\big|_E & 0 \\ 0 & P_L T\big|_L \end{pmatrix}.$$

По условию теоремы C_0-сжатие A обладает свойством (P), из [4, гл. VII п. 1.17] следует, что свойством (P) обладает и C_0-сжатие $P_E A\big|_E$, то есть совокупность внутренних функций $\{\theta_n\}_{n\geqslant 0}$ не имеет нетривиального общего делителя. Тогда и совокупность $\{\vartheta_n\}_{n\geqslant 0}$ не имеет нетривиального общего делителя, то есть свойством (P) обладает и C_0-сжатие

$$\begin{pmatrix} P_E A\big|_E & 0 \\ 0 & P_L T\big|_L \end{pmatrix}.$$

Покажем, что оператор

$$\begin{pmatrix} P_F X\big|_E & 0 \\ 0 & I_L \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} E \\ L \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} F \\ L \end{pmatrix}$$

является деформацией, сплетающей сжатия

$$\begin{pmatrix} P_E A\big|_E & 0 \\ 0 & P_L T\big|_L \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} P_F B\big|_F & 0 \\ 0 & P_L T\big|_L \end{pmatrix}.$$

Действительно, то, что этот оператор сплетает указанные сжатия, очевидно, плотность его образа следует из леммы 2. Чтобы проверить тривиальность его ядра, используем тот факт, что $\mathcal{I}_X : \operatorname{Lat} A \to \operatorname{Lat} B$ является изоморфизмом решеток. Именно, пусть $e \in E$, $l \in L$ и

$$\begin{pmatrix} P_F X\big|_E & 0 \\ 0 & I_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тогда $l = 0$ и $P_F X e = 0$, то есть $Xe \in F_1$. Рассмотрим наименьшее инвариантное подпространство E_0 оператора A, содержащее e и $E_1(\mathcal{E})$, тогда $\mathcal{I}_X E_0 = \operatorname{clos} X E_0 = F_1$, и, так как $\mathcal{I}_X$ является изоморфизмом, то $E_0 = E_1(\mathcal{E})$. Отсюда $e \in E_1(\mathcal{E})$, то есть $e = 0$.

Мы получили, что деформация $\begin{pmatrix} P_F X|_E & 0 \\ 0 & I_L \end{pmatrix}$ дает изоморфизм $\mathcal{T}$ решеток

$$\operatorname{Lat} \begin{pmatrix} P_E A\big|_E & 0 \\ 0 & P_L T\big|_L \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \operatorname{Lat} \begin{pmatrix} P_F B\big|_F & 0 \\ 0 & P_L T\big|_L \end{pmatrix}.$$

Как уже отмечалось, $\mathcal{F} \in \operatorname{Lat} \begin{pmatrix} P_E A|_E & 0 \\ 0 & P_L T|_L \end{pmatrix}$, и для $\mathcal{F}$ выполнены равенства (1), (2). Используя изоморфизм $\mathcal{T}$, легко доказать, что (2) выполнено и для $\mathcal{G}$. В самом деле, $\mathcal{G} = \mathcal{T}\mathcal{F}$,

$$\mathcal{G} \cap \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{T}\mathcal{T}^{-1}\Big(\mathcal{G} \cap \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}\Big),$$

а

$$\mathcal{T}^{-1}\left(\mathcal{G} \cap \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{G} \cap \mathcal{T}^{-1}\begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{F} \cap \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда $\mathcal{G} \cap \binom{F}{0} = \binom{0}{0}$. Так же доказывается и равенство $\mathcal{G} \cap \binom{0}{L} = \binom{0}{0}$. Равенства (1) для $\mathcal{G}$ можно проверить непосредственно.

Наконец, выполнение равенств (3) равносильно выполнению равенств (1), (2) для $\mathcal{G}$.

2) Докажем, что отображение $\mathcal{I}_X$ взаимно-однозначно. Пусть $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in \operatorname{Lat}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$ и $\mathcal{I}_X \mathcal{E}_1 = \mathcal{I}_X \mathcal{E}_2$. Для $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ выполнены равенства (3), из которых сразу получаем следующее:

$$L_k(\mathcal{E}_1) = L_k(\mathcal{E}_2), \quad \mathcal{I}_X E_k(\mathcal{E}_1) = \mathcal{I}_X E_k(\mathcal{E}_2), \quad k = 1, 2.$$

Так как $E_k(\mathcal{E}_i) \in \operatorname{Lat} A$, k, $i = 1,2$, а $\mathcal{I}_X : \operatorname{Lat} A \to \operatorname{Lat} B$ – взаимно-однозначное отображение, то $E_k(\mathcal{E}_1) = E_k(\mathcal{E}_2)$, $k = 1,2$.

Положим

$$\mathcal{F}_i = \mathcal{E}_i \ominus \begin{pmatrix} E_1(\mathcal{E}_1) \\ L_1(\mathcal{E}_1) \end{pmatrix}, \qquad E = E_2(\mathcal{E}_1) \ominus E_1(\mathcal{E}_1),$$
$$F = F_2(\mathcal{I}_{\mathcal{X}}\mathcal{E}_1) \ominus F_1(\mathcal{I}_{\mathcal{X}}\mathcal{E}_1), \qquad L = L_2(\mathcal{E}_1) \ominus L_1(\mathcal{E}_1),$$

$\mathcal{T}$ – изоморфизм из п. 1). Имеем:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{X}}\mathcal{E}_i = \begin{pmatrix} F_1(\mathcal{I}_{\mathcal{X}}\mathcal{E}_1) \\ L_1(\mathcal{E}_1) \end{pmatrix} \oplus \mathcal{T}\mathcal{F}_i, \quad i = 1,2.$$

По условию $\mathcal{I}_{\mathcal{X}}\mathcal{E}_1 = \mathcal{I}_{\mathcal{X}}\mathcal{E}_2$, следовательно, $\mathcal{T}\mathcal{F}_1 = \mathcal{T}\mathcal{F}_2$. Так как $\mathcal{T}$ – изоморфизм, то $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$, поэтому $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ и взаимная однозначность отображения $\mathcal{I}_{\mathcal{X}}$ доказана.

3) Осталось доказать, что $\mathcal{I}_{\mathcal{X}}$ является отображением “на”, то есть

$$\mathcal{I}_{\mathcal{X}} \operatorname{Lat} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} = \operatorname{Lat} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}.$$

Для этого используем лемму 1.20 из [4, гл. VII]: $\mathcal{I}_{\mathcal{X}}$ является отображением “на” тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{I}_{\mathcal{X}^*} : \operatorname{Lat} \begin{pmatrix} B^* & 0 \\ 0 & T^* \end{pmatrix} \to \operatorname{Lat} \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ 0 & T^* \end{pmatrix}$$

является взаимно-однозначным отображением. Операторы A^*, B^*, T^*, X^* удовлетворяют условиям теоремы, и требуемая однозначность уже доказана в п. 2). Таким образом, теорема полностью доказана. $\square$

§3. Сведение вопроса о квазиподобии и изоморфизме решеток инвариатных подпространств слабых сжатий к теореме 1

Эта часть работы состоит в последовательном применении результатов, большинство из которых можно найти в [2].

1. Отделение сингулярной части. Пусть $T_{01} : \mathcal{H}_{01} \to \mathcal{H}_{01}$ и $T_{02} : \mathcal{H}_{02} \to \mathcal{H}_{02}$ – квазиподобные сжатия, $\mathcal{X} : \mathcal{H}_{01} \to \mathcal{H}_{02}$ и $\mathcal{Y} : \mathcal{H}_{02} \to \mathcal{H}_{01}$ – сплетающие их деформации. Хорошо известно, что всякое сжатие в гильбертовом пространстве представимо в виде прямой суммы абсолютно непрерывного сжатия и сингулярного унитарного оператора. Положим

$$\mathcal{H}_{0k} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_k \\ G_k \end{pmatrix}, \quad T_{0k} = \begin{pmatrix} T_k & 0 \\ 0 & V_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2,$$

где $\mathcal{H}_k$, G_k – гильбертовы пространства, T_k – абсолютно непрерывные сжатия в $\mathcal{H}_k$, V_k – сингулярные унитарные операторы в G_k. Из теоремы 8 и замечания 3 из [2, §3] вытекает, что не существует ненулевых операторов, сплетающих T_k и V_j, k, $j = 1, 2$. Используя этот факт, покажем, что операторы $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ диагональны относительно разложений пространств $\mathcal{H}_{0k} = \left(\begin{smallmatrix} \mathcal{H}_k \\ G_k \end{smallmatrix}\right)$, $k = 1, 2$. В самом деле, запишем $\mathcal{X}$ в виде $\mathcal{X} = \left(\begin{smallmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{smallmatrix}\right)$, тогда равенство $T_{02}\mathcal{X} = \mathcal{X}T_{01}$ равносильно равенству

$$\begin{pmatrix} T_2X_1 & T_2X_2 \\ V_2X_3 & V_2X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1T_1 & X_2V_1 \\ X_3T_1 & X_4V_1 \end{pmatrix},$$

откуда видно, что X_2 сплетает V_1 и T_2, X_3 сплетает T_1 и V_2, поэтому $X_2 = 0$ и $X_3 = 0$. Аналогично доказывается диагональность оператора $\mathcal{Y}$. Следовательно, T_1 и T_2 квазиподобны, V_1 и V_2 квазиподобны, и, так как V_1 и V_2 унитарны, то V_1 и V_2 унитарно эквивалентны (см. [3, гл. II п. 3.4]). Далее, в теореме 8, §3 из [2] показано, что $\operatorname{Lat} T_{0k} = \operatorname{Lat} T_k \oplus \operatorname{Lat} V_k$, $k = 1, 2$. Поэтому, если T_1 и T_2 таковы, что решетки $\operatorname{Lat} T_1$ и $\operatorname{Lat} T_2$ изоморфны, то решетки $\operatorname{Lat} T_{01}$ и $\operatorname{Lat} T_{02}$ также изоморфны.

Таким образом, вместо произвольных слабых сжатий достаточно рассматривать абсолютно непрерывные слабые сжатия.

2. Псевдоподобие. Я не привожу здесь точного определения псевдоподобия. Отметим только тот факт, который будет непосредственно использоваться. Пусть T_1 и T_2 – операторы в гильбертовых пространствах H_1 и H_2. Если T_1 и T_2 псевдоподобны, то существуют деформации $X : H_1 \to H_2$ и $Y : H_2 \to H_1$ такие, что $XT_1 = T_2X$, $YT_2 = T_1Y$, и отображения $\mathcal{I}_X : \operatorname{Lat} T_1 \to \operatorname{Lat} T_2$ и $\mathcal{I}_Y : \operatorname{Lat} T_2 \to \operatorname{Lat} T_1$ являются обратными друг к другу изоморфизмами решеток.

Приведем формулировку теоремы 2, §6 из [2].

Пусть T – абсолютно непрерывное слабое сжатие. Тогда существует C_0-сжатие A и абсолютно непрерывный унитарный оператор U, такие, что операторы T и $A \oplus U = \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & U \end{smallmatrix}\right)$ псевдоподобны.

В качестве оператора A берется C_0-часть сжатия T (определение см. в [2, §6; 3, гл. VIII §2]). В [3, гл. VIII §2] показано, что C_0-часть слабого сжатия является слабым сжатием.

Теперь видно, что в рассматриваемой задаче можно заменить абсолютно непрерывные слабые сжатия на прямые суммы слабого C_0-сжатия и абсолютно непрерывного унитарного оператора.

3. Квазиподобие прямых сумм C_0-сжатия и абсолютно непрерывного унитарного оператора.

Лемма 5. *Пусть $A : H \to H$ и $B : K \to K$ – C_0-сжатия, $U_1 : G_1 \to G_1$ и $U_2 : G_2 \to G_2$ – абсолютно непрерывные унитарные операторы, $\mathcal{X} : \binom{H}{G_1} \to \binom{K}{G_2}$ – деформация, сплетающая $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}$. Тогда оператор $\mathcal{X}$ диагонален относительно разложений пространств $\binom{H}{G_1}$ и $\binom{K}{G_2}$, и, следовательно, A и B квазиподобны, U_1 и U_2 унитарно эквивалентны.*

Доказательство. Так как A и B – C_0-сжатия, то существует внутренняя функция φ из H^∞, являющаяся аннулятором сжатий A и B. Так как U_1 и U_2 – абсолютно непрерывные унитарные операторы, то операторы $\varphi(U_1)$ и $\varphi(U_2)$ корректно определены и унитарны. Так как $\mathcal{X}$ сплетает $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & U_1 \end{smallmatrix}\right)$ и $\left(\begin{smallmatrix} B & 0 \\ 0 & U_2 \end{smallmatrix}\right)$, то $\mathcal{X}$ сплетает $\varphi\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & U_1 \end{smallmatrix}\right)$ и $\varphi\left(\begin{smallmatrix} B & 0 \\ 0 & U_2 \end{smallmatrix}\right)$.

Запишем $\mathcal{X}$ в виде $\mathcal{X} = \left(\begin{smallmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{smallmatrix}\right)$. Имеем:

$$\mathcal{X}\varphi\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varphi(U_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & X_2\varphi(U_1) \\ 0 & X_4\varphi(U_1) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\varphi\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}\mathcal{X} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varphi(U_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi(U_2)X_3 & \varphi(U_2)X_4 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

поэтому $X_2\varphi(U_1) = 0$, $\varphi(U_2)X_3 = 0$, и, так как $\varphi(U_1)$ и $\varphi(U_2)$ унитарны, получаем, что $X_2 = 0$ и $X_3 = 0$. Для завершения доказательства осталось применить [4, гл. III п. 5.32] и [3, гл. II п. 3.4]: если имеется деформация, сплетающая C_0-сжатия A и B, то A и B квазиподобны; если имеется деформация, сплетающая унитарные операторы U_1 и U_2, то U_1 и U_2 унитарно эквивалентны. $\square$

Для того чтобы свести вопрос о квазиподобии и изоморфизме решеток слабых сжатий к теореме 1, остается убедиться, что слабое C_0-сжатие обладает свойством (P). Это доказано в [4, гл. VII п. 1.7].

§4. Примеры

Пример 1. Как уже отмечалось, в [4, гл. VII п. 1.21] показано, что если T_1 и T_2 – C_0-сжатия, обладающие свойством (P), то отображение $\mathcal{I}_X : \operatorname{Lat} T_1 \to \operatorname{Lat} T_2$ является изоморфизмом для *любой* деформации X, сплетающей T_1 и T_2. Следующий простой (и хорошо известный) пример показывает, что для слабых сжатий подобное утверждение, вообще говоря, неверно.

Пусть U – оператор умножения на независимую переменную в пространстве $L^2 = L^2(\mathbb{T})$. Ясно, что оператор U – унитарный (и, следовательно, слабое сжатие). Пусть X – оператор в L^2. Следующие утверждения равносильны:

(i) $X : L^2 \to L^2$ – деформация, $UX = XU$;

(ii) существует функция $w \in L^\infty = L^\infty(\mathbb{T})$, $w \not\equiv 0$ п.в. на $\mathbb{T}$, такая, что $Xf = wf$ для всех $f \in L^2$.

Если X удовлетворяет условиям (i), (ii), то $\mathcal{I}_X : \operatorname{Lat} U \to \operatorname{Lat} U$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\log|w| \in L^1(\mathbb{T})$. Действительно, последнее включение равносильно существованию функций $g \in H^\infty$ и $\delta_0 \in L^\infty$, $|\delta_0| = 1$ п.в. на $\mathbb{T}$, таких, что $w = \delta_0 g$, и тогда $\mathcal{I}_X E = \delta_0 E$ для любого $E \in \operatorname{Lat} U$, поэтому $\mathcal{I}_X$ является изоморфизмом. Если же функция w не представима в указанном виде, то $\mathcal{I}_X \delta H^2 = \operatorname{clos} w\delta H^2 = L^2$ для любой функции $\delta \in L^\infty$, $|\delta| = 1$ п.в. на $\mathbb{T}$, поэтому $\mathcal{I}_X$ не является изоморфизмом.

Пример 2. В §§2 и 3 показано, что если два слабых сжатия $T_1 : H_1 \to H_1$ и $T_2 : H_2 \to H_2$ квазиподобны, то существует деформация $\mathcal{X} : H_1 \to H_2$, сплетающая T_1 и T_2 и такая, что $\mathcal{I}_{\mathcal{X}} : \operatorname{Lat} T_1 \to \operatorname{Lat} T_2$ является изоморфизмом решеток. Как уже отмечалось (см. [2, §4]), для псевдоподобных операторов T_1 и T_2 найдутся такие сплетающие их деформации $X : H_1 \to H_2$ и $Y : H_2 \to H_1$, что отображения $\mathcal{I}_X$ и $\mathcal{I}_Y$ являются изоморфизмами, обратными друг к другу.

Приведем пример квазиподобных слабых сжатий T_1 и T_2, для которых верно следующее: для любой деформации $\mathcal{X} : H_1 \to H_2$, сплетающей T_1 и T_2 и такой, что $\mathcal{I}_{\mathcal{X}} : \operatorname{Lat} T_1 \to \operatorname{Lat} T_2$ является изоморфизмом, обратное отображение к $\mathcal{I}_{\mathcal{X}}$ не представимо в виде $\mathcal{I}_{\mathcal{Y}}$ ни для какого ограниченного оператора $\mathcal{Y}: H_2 \to H_1$.

Пусть $\theta_1, \theta_2 \in H^\infty$, θ_1, θ_2 – взаимно простые внутренние функции, такие, что функция $\theta_1 f_1 + \theta_2 f_2$ не является внешней ни для каких $f_1, f_2 \in H^2$. Примеры таких θ_1 и θ_2 можно найти в [1]. Пусть U – оператор умножения на независимую переменную в пространстве $L^2 = L^2(\mathbb{T})$. Положим

$$T_1 = \begin{pmatrix} M_{\theta_1\theta_2} & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} M_{\theta_1} \oplus M_{\theta_2} & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что T_1 и T_2 являются слабыми сжатиями. Так как функции θ_1 и θ_2 взаимно просты, то операторы $M_{\theta_1\theta_2}$ и $M_{\theta_1} \oplus M_{\theta_2}$ квазиподобны (см. [4, гл. II]), следовательно, T_1 и T_2 квазиподобны.

Лемма 6. *Пусть $\theta_1, \theta_2 \in H^\infty$, θ_1, θ_2 – взаимно простые внутренние функции,*

$$X : K_{\theta_1\theta_2} \to \begin{pmatrix} K_{\theta_1} \\ K_{\theta_2} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Y : \begin{pmatrix} K_{\theta_1} \\ K_{\theta_2} \end{pmatrix} \to K_{\theta_1\theta_2}$$

– операторы, $XM_{\theta_1\theta_2} = (M_{\theta_1} \oplus M_{\theta_2})X$, $Y(M_{\theta_1} \oplus M_{\theta_2}) = M_{\theta_1\theta_2}Y$. Тогда существуют такие функции $\psi \in H^\infty$ и $f_1, f_2 \in H^2$, что $YX = \psi(M_{\theta_1\theta_2})$ и $\psi = \theta_1 f_1 + \theta_2 f_2$.

Доказательство. Легко видеть, что $YXM_{\theta_1\theta_2} = M_{\theta_1\theta_2}YX$, поэтому существует функция $\psi \in H^\infty$ такая, что $YX = \psi(M_{\theta_1\theta_2})$. Далее,

$$K_{\theta_1\theta_2} = \theta_2 K_{\theta_1} \oplus K_{\theta_2} = \begin{pmatrix} \theta_2 K_{\theta_1} \\ K_{\theta_2} \end{pmatrix},$$

и для любой функции $\varphi \in H^\infty$ оператор $\varphi(M_{\theta_1\theta_2})$ имеет вид

$$\varphi(M_{\theta_1\theta_2}) = \begin{pmatrix} \varphi(M_{\theta_1\theta_2})\big|_{\theta_2 K_{\theta_1}} & * \\ 0 & \varphi(M_{\theta_2}) \end{pmatrix}.$$

Запишем операторы X и Y в виде $X = \left(\begin{smallmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{smallmatrix}\right)$, $Y = \left(\begin{smallmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{smallmatrix}\right)$, тогда из равенств

$$X\theta_1(M_{\theta_1\theta_2}) = \theta_1(M_{\theta_1} \oplus M_{\theta_2})X \quad \text{и} \quad \theta_1(M_{\theta_1\theta_2})\big|_{\theta_2 K_{\theta_1}} = 0$$

получаем:

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & \theta_1(M_{\theta_2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \theta_1(M_{\theta_2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix},$$

откуда $\theta_1(M_{\theta_2})X_3 = 0$. Так как θ_1 и θ_2 взаимно просты, то $\operatorname{Ker}\theta_1(M_{\theta_2}) = \{0\}$, следовательно, $X_3 = 0$. Аналогично $Y_3 = 0$.

Теперь имеем:

$$YX = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & X_4Y_4 \end{smallmatrix}\right) = \psi(M_{\theta_1\theta_2}) = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & \psi(M_{\theta_2}) \end{smallmatrix}\right),$$

поэтому $X_4Y_4 = \psi(M_{\theta_1\theta_2})$. Кроме того, равенство $Y_3 = 0$ означает, что $P_{\theta_2}Y\Big|\left(\begin{smallmatrix} K_{\theta_1} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 0$, но тогда и $P_{\theta_1}Y\Big|\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ K_{\theta_2} \end{smallmatrix}\right) = 0$, то есть $Y\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ K_{\theta_2} \end{smallmatrix}\right) \subset \theta_1 K_{\theta_2}$. Покажем, что $\psi(M_{\theta_2})K_{\theta_2} \subset P_{\theta_2}\theta_1 K_{\theta_2}$. Действительно,

$$\begin{aligned} \psi(M_{\theta_2})K_{\theta_2} &= Y_4X_4K_{\theta_2} = \\ &= P_{\theta_2}Y\Big|_{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ K_{\theta_2} \end{smallmatrix}\right)} P_{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ K_{\theta_2} \end{smallmatrix}\right)} XK_{\theta_2} \subset P_{\theta_2}Y\begin{pmatrix} 0 \\ K_{\theta_2} \end{pmatrix} \subset P_{\theta_2}\theta_1 K_{\theta_2}. \end{aligned}$$

Имеем:

$$\psi(M_{\theta_2})K_{\theta_2} = P_{\theta_2}\psi K_{\theta_2} \subset P_{\theta_2}\theta_1 K_{\theta_2} \subset P_{\theta_2}\theta_1 H^2,$$

откуда

$$P_{\theta_2}\psi H^2 \subset P_{\theta_2}\theta_1 H^2, \ \ \psi H^2 \subset \theta_1 H^2 + \theta_2 H^2 \text{ и } \psi = \theta_1 f_1 + \theta_2 f_2,$$

где $f_1,\ f_2 \in H^2$. $\square$

Пусть теперь

$$\mathcal{X} : \begin{pmatrix} K_{\theta_1\theta_2} \\ L^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} K_{\theta_1} \oplus K_{\theta_2} \\ L^2 \end{pmatrix}$$

– деформация, $\mathcal{X}T_1 = T_2\mathcal{X}$, и $\mathcal{I}_\mathcal{X}$ – изоморфизм решеток $\operatorname{Lat} T_1$ и $\operatorname{Lat} T_2$. Предположим, что существует такой ограниченный оператор

$$\mathcal{Y} : \begin{pmatrix} K_{\theta_1} \oplus K_{\theta_2} \\ L^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} K_{\theta_1\theta_2} \\ L^2 \end{pmatrix},$$

что $\mathcal{I}_\mathcal{Y} : \operatorname{Lat} T_2 \to \operatorname{Lat} T_1$ является изоморфизмом, обратным к $\mathcal{I}_\mathcal{X}$. Тогда для любого $E \in \operatorname{Lat} T_1$ имеем: $E = \mathcal{I}_\mathcal{Y}\mathcal{I}_\mathcal{X} E = \operatorname{clos}\mathcal{Y}\operatorname{clos}\mathcal{X}E = \operatorname{clos}\mathcal{Y}\mathcal{X}E$, отсюда видно, что $\operatorname{Lat} T_1 \subset \operatorname{Lat}\mathcal{Y}\mathcal{X}$. Оператор T_1 удовлетворяет условиям теоремы 5, §8 из [2], поэтому верно следующее: любой оператор Z, для которого $\operatorname{Lat} T_1 \subset \operatorname{Lat} Z$, имеет вид $Z = \varphi(T_1)$, где $\varphi \in H^\infty$. Поэтому $\mathcal{Y}\mathcal{X} = \varphi(T_1)$ для некоторой функции $\varphi \in H^\infty$. Теперь легко видеть, что $\mathcal{Y}T_2 = T_1\mathcal{Y}$. В самом деле, $T_1\mathcal{Y}\mathcal{X} = \mathcal{Y}\mathcal{X}T_1 = \mathcal{Y}T_2\mathcal{X}$, то есть $T_1\mathcal{Y} = \mathcal{Y}T_2$ на множестве $\mathcal{X}H_1$, плотном в H_2, по непрерывности это равенство продолжается на все H_2.

По лемме 5 операторы $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ диагональны. Положим

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & W_1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Y} = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & W_2 \end{pmatrix},$$

где

$$X\colon K_{\theta_1\theta_2} \to K_{\theta_1} \oplus K_{\theta_2},\ Y\colon K_{\theta_1} \oplus K_{\theta_2} \to K_{\theta_1\theta_2},$$

W_1, W_2 – операторы в L^2. По лемме 6 $YX = \psi(M_{\theta_1\theta_2})$, где $\psi = \theta_1 f_1 + \theta_2 f_2$, f_1, $f_2 \in H^2$. Положим $W = W_2 W_1$, тогда W удовлетворяет условию (i) из примера 1, следовательно, W удовлетворяет условию (ii) для некоторой функции $w \in L^\infty$. По предположению отображение $\mathcal{I}_{\mathcal{Y}\mathcal{X}}$ является тождественным на $\operatorname{Lat} T_1$, в частности, $H^2 = \mathcal{I}_W H^2 = \operatorname{clos} wH^2$, значит, w – внешняя функция из H^∞.

Имеем:

$$\mathcal{Y}\mathcal{X} = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & W_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & W_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} YX & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(M_{\theta_1\theta_2}) & 0 \\ 0 & w(U) \end{pmatrix},$$

с другой стороны,

$$\mathcal{Y}\mathcal{X} = \varphi(T_1) = \begin{pmatrix} \varphi(M_{\theta_1\theta_2}) & 0 \\ 0 & \varphi(U) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\varphi(U) = w(U)$, $\varphi = w$, значит, φ – внешняя. Кроме того, $\varphi(M_{\theta_1\theta_2}) = \psi(M_{\theta_1\theta_2})$, поэтому $\varphi \in \psi + \theta_1\theta_2 H^\infty$, и, так как $\psi = \theta_1 f_1 + \theta_2 f_2$ для некоторых f_1, $f_2 \in H^2$, то и $\varphi = \theta_1 g_1 + \theta_2 g_2$, где g_1, $g_2 \in H^2$. По условию, наложенному на функции θ_1 и θ_2, функция φ не может быть внешней.

Итак, предположив, что отображение $\mathcal{I}_{\mathcal{Y}}$ является обратным к $\mathcal{I}_{\mathcal{X}}$, мы получили противоречие. Следовательно, отображение $\mathcal{I}_{\mathcal{Y}}$ не может быть обратным к $\mathcal{I}_{\mathcal{X}}$ ни для какого ограниченного оператора $\mathcal{Y}$.

Литература

1. В. И. Васюнин, Н. Г. Макаров, *О квазиподобии модельных сжатий с неравными дефектами.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **149** (1986), 24–37.
2. В. В. Капустин, А. В. Липин, *Операторные алгебры и решетки инвариантных подпространств.* I, II. — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **178** (1989) 23–56, **190** (1991) 110–147.

3. Б. Сёкефальви-Надь, Ч. Фояш, *Гармонический анализ.* Мир, Москва (1970).
4. H. Bercovici, *Operator theory and arithmetic in* H^∞. — AMS, Math. Surveys and Monographs **26** (1988).

Gamal' M. F. Quasisimilar weak contractions have isomorphic lattices of invariant subspaces.

A contraction T acting on a Hilbert space H is called a *weak contraction* if the spectrum of T does not cover the unit disk $\mathbb{D}$ and the operator $I-T^*T$ is of trace class. The operators $T_1 : H_1 \to H_1$ and $T_2 : H_2 \to H_2$ are called *quasisimilar* if there exist operators $X : H_1 \to H_2$ and $Y : H_2 \to H_1$ such that $T_2X = XT_1$, $YT_2 = T_1Y$, and X and Y have zero kernels and dense ranges. It is proved that if two weak contractions T_1 and T_2 acting on separable spaces H_1 and H_2 are quasisimilar, then there exists an operator $X : H_1 \to H_2$ such that $XT_1 = T_2X$ and the mapping $\mathcal{I}_X : \operatorname{Lat} T_1 \to \operatorname{Lat} T_2$, $\mathcal{I}_X E = \operatorname{clos} XE$, $E \in \operatorname{Lat} T_1$, is a lattice isomorphism. An example is given of two quasisimilar weak contractions such that for any isomorphism $\mathcal{I}_X$ its inverse is not equal to $\mathcal{I}_Y$ for an arbitrary (bounded) operator Y.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
gamal@pdmi.ras.ru

Поступило 25 июня 2001 г.