Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 279, 2001 г.

В. С. Итенберг, И. В. Итенберг

СИММЕТРИЧНЫЕ СЕКСТИКИ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ КОНИКИ

*Александру Александровичу Иванову и
Виктору Абрамовичу Залгаллеру
к 80-летию*

§1. Введение

Предмет статьи – симметричные кривые степени 6 на вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Плоская проективная вещественная алгебраическая кривая A называется *симметричной*, если множество ее комплексных точек $\mathbb{C}A \subset \mathbb{C}P^2$ инвариантно относительно голоморфной инволюции $-1 : [z_0 : z_1 : z_2] \mapsto [-z_0 : z_1 : z_2]$ комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$. Мы рассматриваем здесь только неособые симметричные кривые.

Интересным является вопрос о том, какие классы жестких изотопий неособых кривых заданной степени в $\mathbb{R}P^2$ содержат симметричные кривые. (Две неособые кривые степени m в $\mathbb{R}P^2$ *жестко изотопны*, если соответствующие точки в пространстве $\mathbb{R}C_m$ кривых степени m в $\mathbb{R}P^2$ принадлежат одной и той же компоненте связности дополнения дискриминантной гиперповерхности.)

Первый нетривиальный результат, относящийся к симметричным кривым, был получен В. М. Харламовым [12] (см. также статьи [10, 11], которые тесно связаны с рассматриваемым вопросом). Он доказал, что неособая кривая степени 6 в $\mathbb{R}P^2$, имеющая вещественную схему $\langle 5 \amalg 1\langle 5\rangle\rangle$ (см. рис. 1), не может быть симметричной. Систематическое изучение симметричных кривых было начато Т. Фидлером [2]. В частности, он доказал, что для максимальной симметричной кривой степени $2k$ в $\mathbb{R}P^2$ имеет место сравнение

$$p - n \equiv k^2 \mod 16,$$

где p и n – числа четных и нечетных овалов соответственно. (Любая компонента связности множества вещественных точек неособой кривой четной степени в $\mathbb{R}P^2$ является *овалом*, т.е. вложена в $\mathbb{R}P^2$ двусторонне; овал называется *(не)четным*, если он лежит внутри (не)четного числа других овалов.) Неособая кривая степени m в $\mathbb{R}P^2$ называется *максимальной* или *M-кривой*, если множество ее вещественных точек имеет максимально возможное для заданной степени число компонент связности; для степени m, согласно теореме Харнака [15], это число равно $(m-1)(m-2)/2+1$. Для максимальной кривой степени $2k$ в $\mathbb{R}P^2$ имеет место сравнение Гудкова–Рохлина:

$$p - n \equiv k^2 \mod 8$$

(см. [6]). В качестве следствия сравнения Фидлера можно снова получить, что неособая кривая степени 6 в $\mathbb{R}P^2$, имеющая вещественную схему $\langle 5 \amalg 1\langle 5\rangle\rangle$, не является симметричной. Изучение симметричных кривых было продолжено С. Триллем [19], который доказал несколько сравнений для симметричных $(M-1)$- и $(M-2)$-кривых четной степени (неособая кривая степени m в $\mathbb{R}P^2$ называется *$(M-i)$-кривой*, если множество ее вещественных точек имеет $(m-1)(m-2)/2+1-i$ компонент связности).

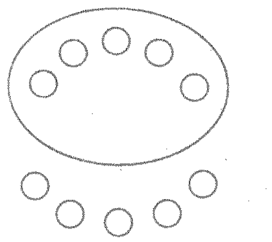

Рис. 1.

Ответ на вопрос о классах жестких изотопий неособых кривых степени 6 в $\mathbb{R}P^2$, допускающих симметричные кривые, содержится в [16]. Статья [16] посвящена вычислению групп монодромии неособых кривых степени 6 в $\mathbb{R}P^2$. Группа монодромии неособой кривой A степени m в $\mathbb{R}P^2$ есть подгруппа $g(\pi_1(U,a))$ группы перестановок овалов кривой A, где a – точка пространства

$\mathbb{R}C_m$, соответствующая A, U – содержащая a компонента связности дополнения дискриминантной гиперповерхности в $\mathbb{R}C_m$, а g – естественный гомоморфизм. Ясно, что группа монодромии инвариантна относительно жестких изотопий. Связь между группой монодромии неособой кривой A степени 6 в $\mathbb{R}P^2$ и существованием симметричной кривой в классе жестких изотопий кривой A следующая. Любой класс жестких изотопий, содержащий кривые степени 6 в $\mathbb{R}P^2$ с $\leqslant 3$ овалами, допускает симметричную кривую. Неособая кривая степени 6 в $\mathbb{R}P^2$ с тривиальной группой монодромии и имеющая $\geqslant 4$ овалов не может быть симметричной. Из доказательства основной теоремы работы [16] следует, что каждый класс жестких изотопий, содержащий кривые степени 6 в $\mathbb{R}P^2$ с нетривиальной группой монодромии, содержит симметричную кривую.

Оказывается, что группы монодромии неособых кривых степени 6 в $\mathbb{R}P^2$ могут быть описаны в терминах простейших вырождений этих кривых (см. [16]).

Доказательства в [16] основаны на изучении вещественных $K3$-поверхностей и следуют подходу, развитому В. Харламовым [9, 10] и В. Никулиным [4, 5]. В настоящей статье мы используем более элементарный подход для получения списка классов жестких изотопий неособых кривых степени 6 в $\mathbb{R}P^2$, которые допускают симметричную кривую. Для доказательства того, что кривая в данном классе жестких изотопий не может быть симметричной, мы изучаем положение кривой по отношению к вспомогательным коникам. Некоторые из этих коник являются препятствиями для определенных простейших вырождений кривой. Это приводит к доказательству асимметрии кривой (подробности см. в §3).

Рассмотрение вспомогательных кривых при изучении жестких изотопий вещественных алгебраических кривых впервые было применено О. Я. Виро [3] и Т. Фидлером [7]. Вспомогательные коники и кубики успешно использовались в топологии вещественных алгебраических кривых (см., например, [13, 14]). Можно надеяться, что подход, развитый в настоящей статье, окажется полезным при изучении симметричных кривых большей степени, например, степени 7.

§2. Стандартные сведения о секстиках в $\mathbb{R}P^2$

Из теоремы Безу следует, что неособая кривая степени 6 в $\mathbb{R}P^2$

имеет одну из следующих вещественных схем: $\langle\emptyset\rangle$, $\langle 1\langle 1\langle 1\rangle\rangle\rangle$ или $\langle\alpha \amalg 1\langle\beta\rangle\rangle$ (в обозначениях, предложенных Виро [1]). Напомним, что в последнем случае

$$\alpha+\beta\leq 10,$$
$$\text{если } \alpha+\beta=10, \text{ то } \alpha-\beta\equiv 0 \mod 8,$$
$$\text{если } \alpha+\beta=9, \text{ то } \alpha-\beta\equiv \pm 1 \mod 8,$$

в соответствии с неравенством Харнака и сравнениями Гудкова–Рохлина и Гудкова–Крахнова–Харламова (ср. [2]). Это дает полный список вещественных схем неособых кривых степени 6 в $\mathbb{R}P^2$. Класс жестких изотопий неособой кривой степени 6 в $\mathbb{R}P^2$ определяется вещественной схемой и типом (I или II) кривой [4].

Рассмотрим неособую кривую A степени 6 в $\mathbb{R}P^2$ с вещественной схемой $\langle\alpha \amalg 1\langle\beta\rangle\rangle$, где $\alpha\geq 2$, $\beta\geq 2$ и $\alpha+\beta\geq 5$. Обозначим непустой овал кривой A через $\mathcal{O}$, внешние пустые овалы – через $O_1,\dots,O_\alpha$ и внутренние пустые овалы – через $O_{\alpha+1},\dots,O_{\alpha+\beta}$. Выберем точку внутри каждого пустого овала кривой A таким образом, чтобы все $\alpha+\beta$ выбранных точек были в общем положении. Обозначим точку, выбранную внутри O_k, через o_k. Для любой точки p обозначим через $\mathcal{L}(p)$ пучок прямых, проходящих через p.

Любой пучок $\mathcal{L}(o_k)$, где O_k – внутренний пустой овал кривой A, определяет циклический порядок $\mathrm{Ord}_c(o_k)$ на всех пустых овалах кривой A, за исключением O_k. Этот циклический порядок определен с точностью до обращения. Назовем такой порядок *обратимым циклическим*. Пусть теперь O_k – внешний пустой овал кривой A, и $\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(o_k)$ – отрезок пучка $\mathcal{L}(o_k)$, состоящий из прямых, пересекающих непустой овал $\mathcal{O}$. Этот отрезок пучка определяет обратимый циклический порядок $\mathrm{Ord}_c(o_k)$ на пустых овалах кривой A, имеющих непустое пересечение с объединением прямых отрезка $\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(o_k)$ и отличных от O_k. Ясно, что любой внутренний пустой овал кривой A имеет непустое пересечение с некоторыми прямыми отрезка $\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(o_k)$.

Следующие леммы хорошо известны и были впервые доказаны В. М. Харламовым [12].

Лемма 2.1. *Для любого пустого овала O_k кривой A внутренние пустые овалы (за исключением O_k, если он внутренний) являются последовательными в обратимом циклическом порядке $\mathrm{Ord}_c(o_k)$. Кроме того, любая прямая (o_i,o_j), где O_i и O_j – внешние пустые овалы, либо не пересекается с внутренностью овала $\mathcal{O}$, либо делит*

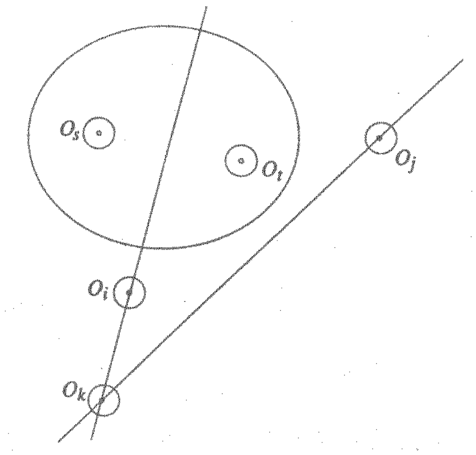

Рис. 2.

его внутренность на две части, одна из которых пуста, т.е. не содержит овалов кривой A).

Доказательство. Предположим, что существуют два внешних пустых овала O_i и O_j, разделяющих два внутренних пустых овала O_s и O_t в порядке $\mathrm{Ord}_c(o_k)$ (см. рис. 2). Рассмотрим конику Q, которая проходит через пять точек o_k, o_i, o_j, o_s и o_t. Заметим, что дуга $\mathbb{R}Q \setminus o_k$ (где $\mathbb{R}Q$ – вещественная часть коники Q) проходит через o_i, o_j, o_s и o_t в порядке, заданном $\mathrm{Ord}_c(o_k)$. Таким образом, Q пересекает A по крайней мере в 14 точках. Противоречие.

Для доказательства второго утверждения леммы предположим, что прямая (o_i, o_j), где O_i и O_j – внешние пустые овалы, делит внутренность овала $\mathcal{O}$ на две непустые части; одна из этих частей содержит внутренний пустой овал O_s, а другая содержит внутренний пустой овал O_t. Выберем произвольный пустой овал O_r, отличный от O_i, O_j, O_s и O_t. Коника, проходящая через o_i, o_j, o_s, o_t и o_r, пересекает A по крайней мере в 14 точках. •

Из леммы 2.1 следует, что любой пучок $\mathcal{L}(o_k)$, где O_k - внешний пустой овал, определяет линейный порядок $\mathrm{Ord}_l(o_k)$ на внутренних пустых овалах. Этот порядок также определен с точностью до обращения. Назовем такой порядок *обратимым линейным*. Далее, любой пучок $\mathcal{L}(o_k)$, где O_k – внутренний пустой овал, определяет обратимый линейный порядок $\mathrm{Ord}_l(o_k)$ на внешних пустых

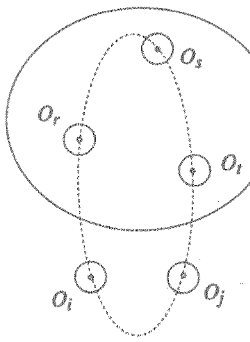

Рис. 3.

овалах.

Лемма 2.2. *Обратимые линейные порядки, определяемые пучками $\mathcal{L}(o_1)$, ..., $\mathcal{L}(o_\alpha)$ на внутренних пустых овалах кривой A, совпадают.*

Доказательство. Пусть O_i и O_j – два внешних пустых овала, и пусть O_r, O_s и O_t – три внутренних пустых овала кривой A. Рассмотрим конику Q, проходящую через o_i, o_j, o_r, o_s и o_t (см. рис. 3). Вещественная часть коники Q пересекает внутренность овала $\mathcal{O}$ по дуге. Эта дуга определяет обратимый линейный порядок на O_r, O_s и O_t. Ясно, что этот порядок совпадает с порядками, определяемыми отрезками пучков $\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(o_i)$ и $\mathcal{L}^{\mathcal{O}}(o_j)$. Отсюда следует доказываемое утверждение. $\bullet$

Лемма 2.3. *Обратимые линейные порядки, определяемые на внешних пустых овалах кривой A пучками $\mathcal{L}(o_{\alpha+1})$, ..., $\mathcal{L}(o_{\alpha+\beta})$, совпадают.*

Доказательство полностью аналогично доказательству леммы 2.2. $\bullet$

В дальнейшем мы предполагаем, что овалы O_1, ..., O_α (соответственно, $O_{\alpha+1}$, ..., $O_{\alpha+\beta}$) пронумерованы согласно вышеуказанным обратимым линейным порядкам. Заметим, что эти порядки инвариантны относительно жестких изотопий.

Рассмотрим три внутренних пустых овала O_r, O_s и O_t. Прямые (o_r, o_s), (o_r, o_t) и (o_s, o_t) делят проективную плоскость на 4 части. Ровно одна из этих частей содержится внутри $\mathcal{O}$. Назовем ее *треугольником* $o_r o_s o_t$. Объединение треугольников $o_r o_s o_t$, где (O_r, O_s, O_t) пробегает все тройки внутренних пустых овалов кривой A, называется *выпуклой оболочкой* точек $o_{\alpha+1}, \ldots, o_{\alpha+\beta}$. Выпуклая оболочка C точек $o_{\alpha+1}, \ldots, o_{\alpha+\beta}$ является выпуклой в следующем смысле. Рассмотрим сторону $[o_s, o_t]$ оболочки C. Прямая (o_s, o_t) делит внутренность овала $\mathcal{O}$ на две части. Ясно, что одна из них не содержит ни одной из точек o_k.

Лемма 2.4. *Ни один из треугольников $o_r o_s o_t$, где O_r, O_s и O_t - внутренние пустые овалы кривой A, не содержит внутри себя овалов кривой A. Точки $o_{\alpha+1}, \ldots, o_{\alpha+\beta}$ являются последовательными вершинами своей выпуклой оболочки.*

Доказательство. Предположим, что треугольник $o_r o_s o_t$, где O_r, O_s и O_t – внутренние пустые овалы кривой A, содержит внутри себя овал O_u (см. рис. 4). Выберем произвольный пустой овал O_i кривой A, отличный от O_r, O_s, O_t и O_u. Тогда коника, проходящая через o_r, o_s, o_t, o_u и o_i, пересекает A по крайней мере в 14 точках.

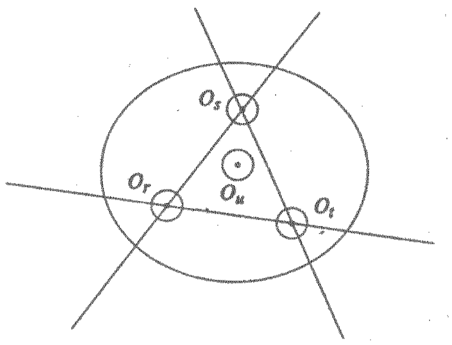

Рис. 4.

Для доказательства второго утверждения леммы достаточно показать, что обратимый линейный порядок, определяемый пучком $\mathcal{L}(o_{\alpha+1})$ на овалах $O_{\alpha+2} \ldots, O_{\alpha+\beta}$, совпадает со стандартным порядком $O_{\alpha+2}, \ldots, O_{\alpha+\beta}$. Выберем среди овалов $O_{\alpha+2}, \ldots, O_{\alpha+\beta}$ три овала O_r, O_s и O_t и выберем один внешний пустой овал O_i.

Пусть Q – коника, проходящая через $o_{\alpha+1}$, o_r, o_s, o_t и o_i. Заметим, что дуга $\mathbb{R}Q \setminus o_i$ проходит через $o_{\alpha+1}$, o_r, o_s и o_t в порядке, задаваемом $\mathrm{Ord}_l(o_i)$. Таким образом, пучок $\mathcal{L}(o_{\alpha+1})$ определяет на o_r, o_s и o_t тот же самый обратимый линейный порядок, что и $\mathrm{Ord}_l(o_i)$. Это доказывает требуемое утверждение. •

§3. Симметричные секстики: основная теорема

Теорема 3.1. *Класс жестких изотопий неособых кривых степени* 6 *в* $\mathbb{R}P^2$ *не содержит симметричной кривой в том и только в том случае, если кривые этого класса имеют вещественную схему* $\langle \alpha \amalg 1\langle\beta\rangle\rangle$, *где* $\alpha \geq 2$, $\beta \geq 3$ *и* $\max(\alpha, \beta) \geq 4$.

Замечание. В таблице работы [16], содержащей группы монодромии неособых кривых степени 6 в $\mathbb{R}P^2$, ошибочно утверждается, что группа монодромии кривых типа II с вещественной схемой $\langle 3 \amalg 1\langle 3\rangle\rangle$ тривиальна. На самом деле эта группа монодромии изоморфна $\mathbb{Z}/2$, и соответствующий класс жестких изотопий содержит симметричную кривую.

Пусть A – неособая кривая степени 6 в $\mathbb{R}P^2$ с вещественной схемой $\langle \alpha \amalg 1\langle\beta\rangle\rangle$, где $\beta\rangle 0$. Пустой овал O_k кривой A называется *мобильным* если существует путь $I : [0,1] \to \mathbb{R}C_6$ в пространстве $\mathbb{R}C_6$ всех вещественных плоских проективных кривых степени 6 такой, что

(1) $I(0)$ – кривая A,
(2) каждая кривая $I(t)$, $t \in [0,1)$, неособа,
(3) кривая $I(1)$ имеет ровно одну особую точку, и эта точка невырожденная двойная,
(4) при возмущении $I(1-t')$, $t' \in [0,1]$, особой кривой $I(1)$ компонента связности множества вещественных точек кривой $I(1)$, содержащая особую точку, превращается в две компоненты связности множества вещественных точек кривой $I(0)$, одна из которых является овалом O_k, другая – непустым овалом кривой A.

Лемма 3.2. *Пусть* A *– неособая кривая степени* 6 *в* $\mathbb{R}P^2$ *с вещественной схемой* $\langle \alpha \amalg 1\langle\beta\rangle\rangle$, *где* $\alpha \geq 2$ *и* $\beta \geq 4$. *Тогда по крайней мере один из овалов* $O_{\alpha+2}$ *и* $O_{\alpha+\beta-1}$ *(в обозначениях §2) – мобильный.*

Лемма 3.3. *Пусть A – неособая кривая степени 6 в $\mathbb{R}P^2$ с вещественной схемой $\langle\alpha \amalg 1\langle\beta\rangle\rangle$, где $\alpha \geq 4$ и $\beta = 3$. Тогда по крайней мере один из овалов O_2 и $O_{\alpha-1}$ (в обозначениях §2) мобильный. Кроме того, овал $O_{\alpha+2}$ является мобильным.*

Леммы 3.2 и 3.3 можно доказать с помощью построения (используя, например, малые возмущения объединения трех эллипсов, касающихся друг друга в двух точках [20]) подходящих представителей в каждом классе жестких изотопий неособых кривых степени 6 в $\mathbb{R}P^2$ с вещественными схемами $\langle\alpha \amalg 1\langle\beta\rangle\rangle$, где $\alpha \geq 2$ и $\beta \geq 4$ (соответственно, $\alpha \geq 4$ и $\beta = 3$).

Доказательство теоремы 3.1. Возьмем неособую кривую A степени 6 в $\mathbb{R}P^2$ с вещественной схемой $\langle\alpha \amalg 1\langle\beta\rangle\rangle$, где $\alpha \geq 2$, $\beta \geq 3$ и $\max(\alpha, \beta) \geq 4$. Обозначим внешние (соответственно, внутренние) пустые овалы кривой A через $O_1, \ldots, O_\alpha$ (соответственно, $O_{\alpha+1}, \ldots, O_{\alpha+\beta}$) согласно обратимым линейным порядкам, введенным в §2. Для любого пустого овала O_k кривой A выберем точку o_k внутри O_k таким образом, чтобы все выбранные точки были в общем положении.

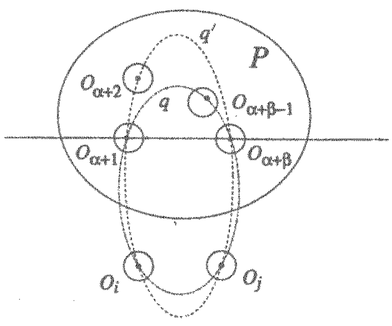

Рис. 5.

Рассмотрим два случая: $\beta \geq 4$ и $\beta = 3$.

Случай $\beta \geq 4$. Согласно лемме 3.2, один из овалов $O_{\alpha+2}$ и $O_{\alpha+\beta-1}$ – мобильный. Предположим, например, что это – овал $O_{\alpha+2}$. Покажем, что тогда $O_{\alpha+\beta-1}$ – не мобильный. Отсюда будет следовать, что кривая A – не симметричная. Выберем два внешних пустых овала O_i и O_j кривой A. Прямая $(o_{\alpha+1}, o_{\alpha+\beta})$ делит внутренность непустого овала $\mathcal{O}$ кривой A на две части. Согласно лемме 2.4 одна из этих частей содержит точки $o_{\alpha+2}$, $\dots$, $o_{\alpha+\beta-1}$ (см. рис. 5).

Обозначим эту часть через P и рассмотрим конику Q, проходящую через o_i, o_j, $o_{\alpha+1}$, $o_{\alpha+\beta-1}$ и $o_{\alpha+\beta}$. Дуга q вещественной части $\mathbb{R}Q$ коники Q, лежащая внутри $\mathcal{O}$ и соединяющая точки $o_{\alpha+1}$ и $o_{\alpha+\beta}$, проходит через $o_{\alpha+\beta-1}$ и, таким образом, содержится в P. Рассмотрим также конику Q', проходящую через o_i, o_j, $o_{\alpha+1}$, $o_{\alpha+2}$ и $o_{\alpha+\beta}$. Дуга q' ее вещественной части $\mathbb{R}Q'$, лежащая внутри $\mathcal{O}$ и соединяющая $o_{\alpha+1}$ и $o_{\alpha+\beta}$, также содержится в P (см. рис. 5). Так как овал $O_{\alpha+2}$ мобильный, он расположен вне области, ограниченной дугой q и отрезком $[o_{\alpha+1}, o_{\alpha+\beta}]$, содержащимся внутри $\mathcal{O}$ (см. рис. 5). Отсюда следует, что овал $O_{\alpha+\beta-1}$ расположен внутри области, ограниченной дугой q' и отрезком $[o_{\alpha+1}, o_{\alpha+\beta}]$. Таким образом, согласно теореме Безу, овал $O_{\alpha+\beta-1}$ – не мобильный.

Случай $\beta = 3$. Согласно лемме 3.3 один из овалов O_2 и $O_{\alpha-1}$ – мобильный. Предположим, например, что O_2 – мобильный. Покажем, что $O_{\alpha-1}$ – не мобильный. Отсюда будет следовать, что кривая A – не симметричная.

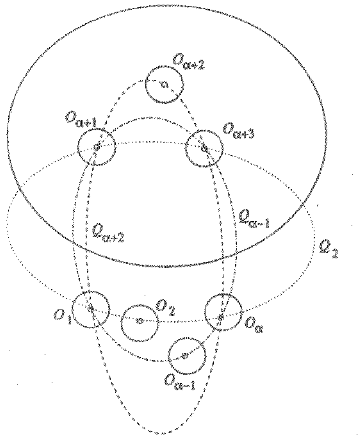

Рис. 6.

Пусть $\mathcal{Q}$ – пучок коник, проходящих через o_1, o_α, $o_{\alpha+1}$ и $o_{\alpha+3}$. Обозначим через Q_2, $Q_{\alpha-1}$ и $Q_{\alpha+2}$ коники пучка $\mathcal{Q}$, проходящие через o_2, $o_{\alpha-1}$ и $o_{\alpha+2}$, соответственно (см. рис. 6). Рассмотрим отрезок $\mathcal{Q}^{o_1,o_\alpha}$ пучка $\mathcal{Q}$, состоящий из коник, вещественная часть которых содержит дугу, такую, что

эта дуга соединяет точки o_1 и o_α,

дуга не проходит через другие базисные точки пучка.

Коники Q_2, $Q_{\alpha-1}$ и $Q_{\alpha+2}$ принадлежат $\mathcal{Q}^{o_1,o_\alpha}$. Пусть q_2, $q_{\alpha-1}$ и $q_{\alpha+2}$ – дуги их вещественных частей $\mathbb{R}Q_2$, $\mathbb{R}Q_{\alpha-1}$ и $\mathbb{R}Q_{\alpha+2}$, соединяющие точки o_1 и o_α и не проходящие через другие базисные точки пучка. Заметим, что q_2, $q_{\alpha-1}$ и $q_{\alpha+2}$ расположены снаружи непустого овала $\mathcal{O}$ кривой A. Отрезок $\mathcal{Q}^{o_1,o_\alpha}$ определяет обратимый линейный порядок на Q_2, $Q_{\alpha-1}$ и $Q_{\alpha+2}$. Покажем, что этот порядок следующий: Q_2, $Q_{\alpha-1}$ и $Q_{\alpha+2}$. Если Q_2 расположена между $Q_{\alpha-1}$ и $Q_{\alpha+2}$, то овал O_2 содержится внутри области (гомеоморфной диску), ограниченной $q_{\alpha-1}$ и $q_{\alpha+2}$ (см. рис. 7). Это противоречит тому, что O_2 – мобильный.

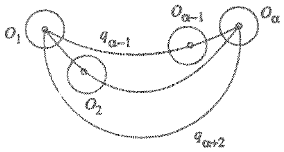

Рис. 7.

Предположим, что коника $Q_{\alpha+2}$ расположена между кониками Q_2 и $Q_{\alpha-1}$. Рассмотрим тогда дуги q_2' и $q_{\alpha-1}'$ их вещественных частей $\mathbb{R}Q_2$ и $\mathbb{R}Q_{\alpha-1}$, соединяющие $o_{\alpha+1}$ и $o_{\alpha+3}$ и расположенные внутри $\mathcal{O}$. Мы получаем, что овал $O_{\alpha+2}$ содержится внутри области (гомеоморфной диску), ограниченной q_2' и $q_{\alpha-1}'$ (см. рис. 8). Это противоречит лемме 3.3, утверждающей, что овал $O_{\alpha+2}$ – мобильный.

Таким образом, $Q_{\alpha-1}$ расположена между Q_2 и $Q_{\alpha+2}$. В этом случае овал $O_{\alpha-1}$ содержится внутри области (гомеоморфной диску), ограниченной q_2 и $q_{\alpha+2}$ (см. рис. 9). Отсюда мы получаем, что овал $O_{\alpha-1}$ – не мобильный.

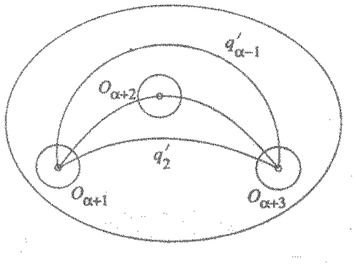

Рис. 8.

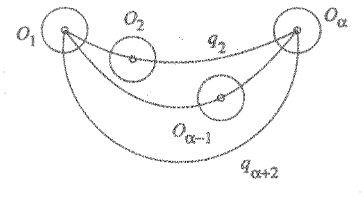

Рис. 9.

Мы доказали, что любая неособая кривая степени 6 в $\mathbb{R}P^2$, имеющая вещественную схему $\langle \alpha \amalg 1\langle\beta\rangle\rangle$ с $\alpha \geq 2$, $\beta \geq 3$ и $\max(\alpha, \beta) \geq 4$, не является симметричной.

Для каждого класса жестких изотопий, содержащего неособые кривые степени 6 в $\mathbb{R}P^2$ с другой вещественной схемой, легко построить симметричный представитель. Это можно сделать используя классические методы, малые возмущения трех эллипсов, касающихся друг друга в двух точках [20] и комбинаторное склеивание (см. [21, 17]). В качестве примера мы приводим здесь комбинаторное склеивание симметричной неособой кривой степени 6 в $\mathbb{R}P^2$ с вещественной схемой $\langle 6 \amalg 1\langle 2\rangle\rangle$ (см. рис. 10). $\bullet$

Благодарность. Часть настоящей работы была выполнена во время пребывания второго автора в Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, University of Cambridge. Второй автор благодарит этот Институт за гостеприимство и прекрасные условия для работы.

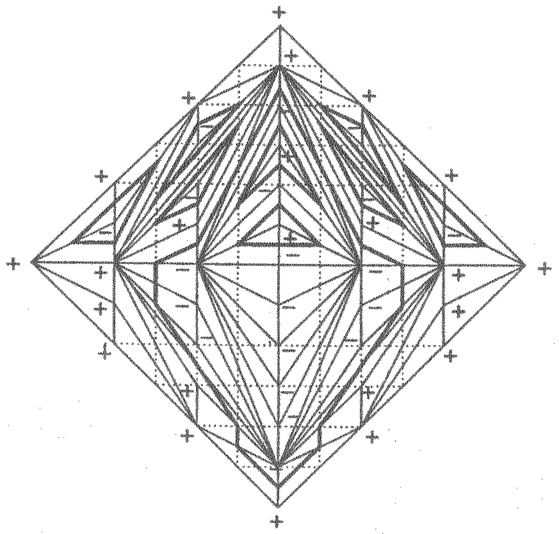

Рис. 10.

Литература

1. О. Я. Виро, *Кривые степени 7, кривые степени 8 и гипотеза Рэгсдейл.* — Докл. АН СССР **254** (1980), 1303–1310.
2. О. Я. Виро, *Успехи в топологии вещественных алгебраических многообразий за последние шесть лет.* — Успехи мат. наук **41**, № 3 (1986), 45–67.
3. О. Я. Виро, — Частное сообщение.
4. В. В. Никулин, *Целочисленные симметрические билинейные формы и некоторые их геометрические приложения.* — Изв. АН СССР, Сер. матем. **43**, № 1 (1979), 111–177.
5. В. В. Никулин, *Инволюции целочисленных квадратичных форм и их приложения к вещественной алгебраической геометрии.* — Изв. АН СССР, Сер. матем. **47**, № 1 (1983), 109–188.
6. В. А. Рохлин, *Сравнения по модулю* 16 *в шестнадцатой проблеме Гильберта.* — Функц. анализ и его прилож. **6**, № 4 (1972), 58–64.
7. Т. Фидлер, *Пучки прямых и топология вещественных алгебраических кривых.* — Изв. АН СССР, Сер. матем. **46**, № 4 (1982), 853–863.
8. Т. Фидлер, — Частное сообщение.
9. В. М. Харламов, *Топологические типы неособых поверхностей степени* 4 *в* $\mathbb{R}P^3$. — Функц. анализ и его прилож. **10**, № 4 (1976), 55–68.
10. В. М. Харламов, *Изотопические типы неособых поверхностей степени* 4 *в* $\mathbb{R}P^3$. — Функц. анализ и его прилож. **12**, № 1 (1978), 86–87.
11. В. М. Харламов, *К классификации неособых поверхностей степени* 4 *в* $\mathbb{R}P^3$

относительно жестких изотопий. — Функц. анализ и его прилож. **18**, № 1 (1984), 49–56.
12. В. М. Харламов, — Частное сообщение.
13. S. Fiedler-Le Touzé, *Orientations complexes des courbes algébriques réelles.* — Ph. D. Thesis, Rennes 2000.
14. S. Fiedler-Le Touzé and S. Orevkov, *A flexible affine M-sextic which is algebraically unrealizable.* — Preprint. Toulouse. 1999.
15. A. Harnack, *Über Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven.* — Math. Ann **10** (1876), 189–199.
16. I. Itenberg, *Groups of monodromy of nonsingular curves of degree 6.* Real Analytic and Algebraic Geometry, Proc., Trento 1992. W. de Gruyter, 1995, pp. 161–168.
17. I. Itenberg and O. Ya. Viro, *Patchworking algebraic curves disproves the Ragsdale conjecture.* — Math. Intelligencer **18** no. 4 (1996), 19–28.
18. V. M. Kharlamov, *Nonamphicheiral surfaces of degree* 4 *in* $\mathbb{R}P^3$. — Lect. Notes Math. **1346** (1988), 349–356.
19. S. Trilles, *Symétrie et entrelacs de courbes algébriques réelles.* — Ph. D. Thesis, Toulouse, 2000.
20. O. Ya. Viro, *Gluing of plane real algebraic curves and construction of curves of degrees* 6 *and* 7. — Lect. Notes Math. **1060** (1984), 187–200.
21. O. Ya. Viro, *Patchworking real algebraic varieties.* Preprint, Uppsala University, 1994.

Itenberg V. S., Itenberg I. V. Symmetric sextics and auxiliary conics.

Rigid isotopy classes of nonsingular curves of degree 6 in $\mathbb{R}P^2$ are considered. The previously-known list of all the classes containing symmetric curves is obtained by elementary means. The proof of the fact that a curve in a given rigid isotopy class cannot be symmetric involves studying the position of such a curve with respect to auxiliary conics.

С.-Петербургский государственный
университет экономики и финансов
Rennes University, France
email itenberg@maths.univ-rennes1.fr

Поступило 25 декабря 2000 г.