Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 279, 2001 г.

С. В. Дужин

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ ДВУХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§1. Введение

Мы даем классификацию символов систем дифференциальных уравнений, состоящих из двух уравнений в частных производных первого порядка, наложенных на две функции двух переменных, относительно естественного действия группы локальных замен зависимых и независимых переменных.

Классификация оказывается конечной, она состоит из 5 типов в вещественном случае и 4 типов в комплексном случае. Помимо эллиптического, параболического и гиперболического типов, которые составляют классификацию символов уравнений второго порядка на функцию $u(x, y)$ (см. [1]), в нашем случае имеются еще два "вырожденных" типа, неэквивалентных между собой.

Бифуркационные диаграммы особых орбит в пространстве символов влекут определенные свойства особенностей линейных и квазилинейных систем рассматриваемого вида. Я признателен С. В. Чмутову, который разъяснил мне смысл версальных деформаций и бифуркационных диаграмм в общем контексте действия произвольной группы Ли на многообразии.

В заключительном §6 для каждого типа символа мы описываем топологический тип соответствующего интегрального грассманиана – объекта, имеющего большое значение для исследования особенностей решений дифференциальных уравнений [5].

Все теоремы, приводимые в настоящей заметке, доказываются прямыми вычислениями, и мы, вместо подробных доказательств, ограничиваемся лишь краткими набросками.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 98-01-00555a, РФФИ 00-15-96084 и NWO-RFBR 047-008-005.

§2. Классификация символов

Система уравнений в частных производных порядка k относительно m неизвестных функций n независимых переменных определяет подмногообразие $\mathcal{E}$ в пространстве струй $J_k(X,Y)$, где $\dim X = n$, $\dim Y = m$ (см. [2, 4, 5]). *Символ* системы в точке $\theta \in \mathcal{E}$ определяется как пересечение касательного пространства к $\mathcal{E}$ и касательного пространства к слою F_θ естественной проекции $J_k \to J_{k-1}$, содержащему точку θ. Если $a \in X$ и $b \in Y$ – соответственно источник и цель струи θ, то касательное пространство $T_\theta(F_\theta)$ естественно изоморфно тензорному произведению $S^kV^* \otimes W$, где $V = T_a(X)$, $W = T_b(Y)$, а S^k обозначает k-ю симметрическую степень. В этом смысле символ можно понимать как линейное подпространство в $S^k(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^m$.

Обозначим через G_θ группу локальных диффеоморфизмов пары $\big(X \times Y, (a,b)\big)$, поднятие которых в пространство струй $J_k(X,Y)$ оставляет точку θ неподвижной. В следующей теореме перечислены свойства групп G_θ, вытекающие из известных фактов геометрии пространств струй (см. [4]).

Теорема 1. *Пусть $\theta, \theta' \in \pi_{k,0}^{-1}(a,b)$ – две точки, принадлежащие одному слою проекции $\pi_{k,0} : J_k(X,Y) \to J_0(X,Y) = X \times Y$. Тогда:*

1. *В окрестности точки $(a,b) \in X \times Y$ существует локальный диффеоморфизм φ с $\varphi^{(k)}(\theta) = \theta'$.*
2. *Группы G_θ и $G_{\theta'}$ сопряжены посредством φ.*
3. *Действие G_θ в касательном пространстве $T_\theta(F_\theta)$ согласовано с действием $G_{\theta'}$ в $T_{\theta'}(F_{\theta'})$ при отождествлении $T_\theta(F_\theta) \cong T_{\theta'}(F_{\theta'}) \cong S^kV^* \otimes W$.*
4. *В координатном случае $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ и $\theta = (0,0,\ldots,0)$ группа $G = G_\theta$ состоит из тех и только тех локальных диффеоморфизмов $(x,y) \mapsto (\tilde{x},\tilde{y})$, которые удовлетворяют соотношениям $\partial^s \tilde{y}_j / \partial x_i^s = 0$ в точке $(0,\ldots,0)$ для всех $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m$ и $s \leqslant k$.*
5. *Действие группы G в $T_\theta(F_\theta)$ зависит только от линейной части диффеоморфизма и имеет следующее разложение:*

$$G \to \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W) \to \mathrm{GL}(T_\theta(F_\theta)),$$

где последняя стрелка представляет собой естественное левоправое действие прямого произведения $\mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W)$ в $S^kV^* \otimes W$.

Таким образом, проблема классификации символов допускает следующую чисто алгебраическую формулировку.

Зафиксируем четверку натуральных чисел n, m, k, r. Пусть V и W – векторные пространства размерностей n и m над некоторым полем. Описать орбиты группы $\mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W)$ в грассманиане r-мерных плоскостей пространства $S^k V^* \otimes W$ по отношению к действию, порожденному естественным лево-правым действием этой группы в самом пространстве $S^k V^* \otimes W$.

В такой постановке проблема имеет смысл над любым полем; ниже мы рассматриваем только вещественное поле $\mathbb{R}$ и комплексное поле $\mathbb{C}$.

В частном случае $m = 1$, $k = 2$, $r = 1$ (что соответствует одному уравнению второго порядка) мы приходим к проблеме классификации квадратичных форм n переменных. Хорошо известное решение этой задачи приводит к понятию типа (гиперболического, параболического, эллиптического) для уравнений второго порядка.

В следующем параграфе мы рассмотрим задачу классификации символов для значений параметров $n = 2$, $m = 2$, $k = 1$, $r = 2$: классификация двумерных пространств линейных операторов на плоскости относительно независимых линейных замен в области определения и в области значений.

Эта задача, насколько нам известно, никогда раньше не рассматривалась в литературе, несмотря на естественность постановки, простоту решения и изящество ответа.

Проблема. *Составить полный список всех четверок (n, m, k, r), для которых классификация символов конечна.*

§3. Плоскости линейных операторов на плоскости

Прямое произведение $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^2) \times \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ действует в пространстве линейных операторов $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ по правилу

$$(X, Y) \cdot A = XAY.$$

Найдем орбиты соответствующего действия на множестве двумерных подпространств четырехмерного пространства $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$.

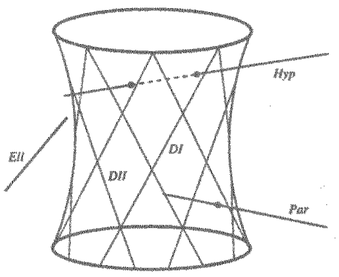
В пространстве $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ выделим трехмерный конус K, состоящий из всех вырожденных операторов. След конуса K на двумерной плоскости $L \subset \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$, т.е. пересечение $L \cap K$, рассматриваемое с точностью до линейных преобразований плоскости L, является важным инвариантом этой плоскости. След, как квадратичный конус на плоскости, может принимать одно из четырех значений: точка, прямая, пара прямых и вся плоскость. В каждом из первых трех случаев легко доказать, что две плоскости, имеющие одинаковый след, эквивалентны между собой. Плоскость операторов, целиком лежащая в K, может относиться к одному из двух неэквивалентных типов: все операторы с одним и тем же одномерным ядром или все операторы с одним и тем же одномерным образом.

Эти соображения приводят к следующей теореме.

Теорема 2. *Множество всех двумерных плоскостей линейных операторов в* $\mathbb{R}^2$ *относительно группы независимых линейных замен в образе и прообразе распадается на 5 орбит. Следовательно, символ системы дифференциальных уравнений с параметрами* $k = 1$, $n = m = r = 2$ *принадлежит одному из 5 типов: гиперболическому* (Hyp), *эллиптическому* (Ell), *параболическому* (Par) *первому вырожденному* (DI) *или второму вырожденному* (DII). *В таблице приведены названия типов, размерности орбит и нормальные формы плоскостей линейных операторов и систем уравнений.*

Тип	$\dim(\mathcal{O})$	$L \cap K$	Нормальная формаL	Система д.у.
Hyp	4	две прямых	$\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$	$\begin{cases} u_y = 0 \\ v_x = 0 \end{cases}$
Ell	4	одна точка	$\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$	$\begin{cases} v_x = -u_y \\ v_y = u_x \end{cases}$
Par	3	одна прямая	$\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle$	$\begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = u_x \end{cases}$
DI	1	вся плоскость	$\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$	$\begin{cases} u_y = 0 \\ v_y = 0 \end{cases}$
DII	1	вся плоскость	$\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle$	$\begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = 0 \end{cases}$

Дадим наглядное изображение приведенной классификации в терминах элементарной проективной геометрии. Грассманиан двумерных плоскостей в $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ изоморфен многообразию проективных прямых в трехмерном проективном пространстве $P(\mathrm{End}\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}P^3$. Конус вырожденных операторов выглядит как невырожденная квадрика $Q \subset \mathbb{R}P^3$. Действие группы левых и правых линейных замен сводится к проективным преобразованиям $\mathbb{R}P^3$, сохраняющим квадрику Q.



Прямая l относится к эллиптической, параболической или гиперболической орбите, если она пересекает квадрику Q по 0, 1 или 2 точкам, соответственно. Два семейства прямолинейных образующих квадрики соответствуют двум вырожденным типам.

§4. Версальные деформации

Предположим, что группа Ли G гладко действует на многообразии M. *Версальная деформация* [3] точки $p \in M$ – это локальное отображение $f : (\Lambda, 0) \to (M, p)$ некоторого пространства параметров $\Lambda \cong \mathbb{R}^s$ в M, образ которого трансверсален орбите $G(p)$ и имеет размерность, равную коразмерности орбиты $G(p)$.

Разбиение пространства параметров Λ на подмножества, отвечающие разным орбитам, называется *бифуркационной диаграммой.*

Если орбита точки p содержит некоторую окрестность точки p, то бифуркационная диаграмма точки p тривиальна, и у нее нет версальной деформации с $s > 0$. Такие точки называются *стабильными.*

Теорема 3. *Версальные деформации нормальных форм, перечисленных в теореме 2, можно выбрать следующим образом:*
1. *Гиперболический тип стабилен.*
2. *Эллиптический тип стабилен.*
3. *Для параболического типа:* $\{v_x = \lambda u_y,\ v_y = u_x\}$.

4. *Для первого вырожденного типа:*

$$\{u_y = \lambda_1 v_x,\ v_y = \lambda_2 u_x + \lambda_3 v_x\}.$$

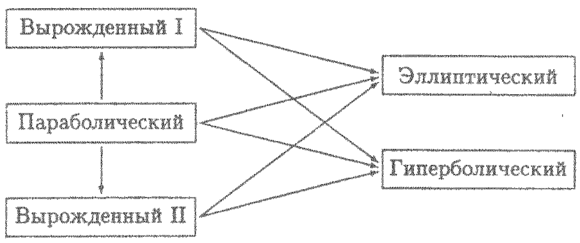
5. *Для второго вырожденного типа:*

$$\{v_x = \lambda_1 u_y,\ v_y = \lambda_2 u_x + \lambda_3 u_y\}.$$

Бифуркационная диаграмма параболической точки одномерна и состоит из гиперболической области по одну сторону от рассматриваемой точки и эллиптической области – по другую.

Бифуркационные диаграммы обоих вырожденных типов одинаковы: они представляют собой окрестность нуля в трехмерном пространстве параметров $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, разбитую конусом $\lambda_3^2 + 4\lambda_1\lambda_2 = 0$, состоящим из параболических точек, на эллиптическую область внутри и гиперболическую область снаружи.

Следовательно, диаграмма примыканий орбит имеет такой вид:



В комплексном случае все эти результаты сохраняются с одним изменением: эллиптическая и гиперболическая орбиты сливаются в одну.

§5. Вырождение символов линейных и квазилинейных систем

До сих пор мы изучали символ системы $\mathcal{E} \subset J_1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ в одной фиксированной точке $\theta \in \mathcal{E}$. Что можно сказать о зависимости символа $\sigma(\mathcal{E}, \theta)$ от точки θ?

Для общей нелинейной системы семейство символов $\{\sigma(\mathcal{E}, \theta)\}$ – шестипараметрическое, поскольку многообразие $\mathcal{E}$ шестимерно.

Если система квазилинейна, т.е. имеет вид

$$\begin{aligned} a_1(x,y,u,v)u_x + b_1(x,y,u,v)u_y + c_1(x,y,u,v)v_x + d_1(x,y,u,v)v_y = 0,\\ a_2(x,y,u,v)u_x + b_2(x,y,u,v)u_y + c_2(x,y,u,v)v_x + d_2(x,y,u,v)v_y = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

то семейство символов постоянно вдоль слоев проекции $J_1 \to J_0$ и, следовательно, зависит только от 4 параметров.

Линейная система

$$\begin{cases} a_1(x,y)u_x + b_1(x,y)u_y + c_1(x,y)v_x + d_1(x,y)v_y = 0, \\ a_2(x,y)u_x + b_2(x,y)u_y + c_2(x,y)v_x + d_2(x,y)v_y = 0 \end{cases} \tag{2}$$

имеет, вообще говоря, двухпараметрическое семейство символов.

Результаты §4 приводят к таким следствиям относительно поведения областей в пространстве параметров, в которых символ системы относится к тому или иному типу.

Теорема 4. *Для линейной системы* (2) *вырождение символа типа* I *или* II *устраняется малым шевелением. Параболические точки типичной линейной системы образуют кривую на плоскости* (x, y), *с одной стороны от которой символ эллиптичен, а с другой – гиперболичен. Эта картина устойчива относительно малых деформаций в классе линейных систем.*

Для типичной квазилинейной системы (1) *все вырождения символа устойчивы. В окрестности точки* (x, y, u, v), *в которой символ относится к вырожденным типам* I *или* II, *есть целая кривая точек того же типа; в пространстве, трансверсальном этой кривой, всегда найдутся параболические, эллиптические и гиперболический точки, которые, с точностью до диффеоморфизма, заполняют поверхность квадратичного конуса, его внутренность и его внешность, соответственно.*

§6. Интегральный грассманиан

Согласно В. В. Лычагину [5], с каждой точкой θ подмногообразия $\mathcal{E} \subset J_k(X, Y)$ можно связать алгебраическое многообразие $\mathrm{IG}(\mathcal{E}, \theta)$, состоящее из всех n-плоскостей ($n = \dim X$), касательных к $\mathcal{E}$ и интегральных для метасимплектической структуры, естественным образом определенной на расслоении струй. Более точно, пусть $C \subset T(J_k(X, Y))$ – распределение Картана, т.е. контактная структура порядка k (см. [4, 5]). Плоскость этого распределения C_θ в каждой точке $\theta \in J_k(X, Y)$ определяется как множество нулей набора 1-форм

$$\omega_\sigma^j = du_\sigma^j - \sum_{i=1}^{n} u_{\sigma i}^j dx_i.$$

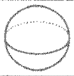
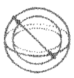
Тогда

$$\mathrm{IG}(\mathcal{E},\theta) = \{L \subset C_\theta \cap T(\mathcal{E}_\theta) : \dim L = n,\ d\omega^j_\sigma|_L = 0\}.$$

Многообразие $\mathrm{IG}(\mathcal{E},\theta)$ называется *интегральным грассманианом* уравнения $\mathcal{E}$ в точке θ; его топология содержит важную информацию об особенностях, которые могут иметь решения данного уравнения. В частном случае тривиального скалярного уравнения в частных производных первого порядка $\mathcal{E} = J_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ интегральный грассманиан превращается в лагранжев грассманиан $\Lambda(n)$ (см. [6]).

Легко проверить, что алгебраический (и, следовательно, топологический) тип интегрального грассманиана $\mathrm{IG}(\mathcal{E},\theta)$ полностью определяется типом символа $\sigma(\mathcal{E},\theta)$ в смысле классификации, данной выше. Таким образом, теорема 2 позволяет описать все возможные типы интегральных грассманианов для систем первого порядка с 2 зависимыми и 2 независимыми переменными.

Теорема 5. *Интегральный грассманиан системы двух уравнений первого порядка относительно двух функций от двух переменных имеет один из следующих топологических типов, в зависимости от типа символа системы:*

Тип символа	Интегральный грассманиан	
Эллиптический		Сфера S^2
Гиперболический		Тор $S^1 \times S^1$
Параболический		Перетянутый тор
Вырожденный I		Две пересекающиеся плоскости в $\mathbb{R}P^3$
Вырожденный II		3-многообразие $S^2\times[0,1]/(x,0) \sim (-x,1)$

Любопытно, что во всех случаях, кроме последнего, интегральный грассманиан двумерен. Последнее многообразие в таблице – это не что иное, как обычный лагранжев грассманиан $\Lambda(2)$ (см. [6]).

Литература

1. И. Г. Петровский, *Лекции об уравнениях с частными производными.* Физматгиз, М., 1961.
2. H. Goldshmidt, *Intergrability criteria for systems of nonlinear partial differential equations.* J. Diff. Geometry **1** (1967), 269–307.
3. В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений.* Т. 1. Наука, М., 1982.
4. А. М. Виноградов, И. С. Красильщик, В. В. Лычагин, *Геометрия пространств джетов и нелинейные дифференциальные уравнения.* М.: Наука, 1986.
5. V. V. Lychagin, *Topological aspects of geometrical theory of differential equations.* Lecture Notes Math., **1214**, 1985.
6. В. И. Арнольд, *О характеристическом классе, входящем в условие квантования.* Функц. анализ и его прилож., **1**(1) (1967), 1–14.

Duzhin S. V. Infinitesimal classification of systems of two PDE of first order.

Systems of two PDE of the first order with respect to two functions of two variables are considered. A classification of symbols of such systems with respect to the natural action of the group of local changes of dependable and independent variables is given.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 20 декабря 2000 г.