Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 278, 2001 г.

В. Н. Солев, А. Зербет

УСЛОВИЕ ЛОКАЛЬНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ НОРМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ГАУССОВСКИХ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

1. Введение

Пусть $x(t)$ стационарный гауссовский процесс с нулевым средним, $\mathbf{E}\,x(t) = 0$, и спектральной мерой μ (см. подробнее [1, 4]). Иначе говоря, x такая функция

$$x : \mathbb{R}^1 \to \Gamma \subset L^2(dP),$$

что

$$R(t,s) = \mathbf{E}\,x(t)x(s) = R_x(t-s) \tag{1.1}$$

и

$$R_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{itu\}\,\mu(du), \tag{1.2}$$

где $L^2(dP)$ – L^2-пространство, построенное по вероятностной мере P, Γ – гауссовское подпространство пространства $L^2(dP)$, μ – конечная мера.

Мы будем также рассматривать функционалы $\mathbf{x}[\varphi]$,

$$\mathbf{x}[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)x(t)\,dt, \tag{1.3}$$

определенные для всех функций φ таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\overline{\varphi(s)}R_x(t-s)\,dtds < \infty.$$

Ясно, что

$$\mathbf{E}\,|\mathbf{x}[\varphi]|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\overline{\varphi(s)}R(t-s)\,dtds = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(u)|^2\,\mu(du). \tag{1.4}$$

где $\hat{\varphi}$–преобразование Фурье функции φ.

В общем случае $\mathbf{x}[\cdot]$–обобщенный стационарный гауссовский процесс , то есть такой линейный оператор

$$\mathbf{x}[\cdot] : D(\mathbb{R}^1) \longrightarrow \Gamma,$$

из пространства $D(\mathbb{R}^1)$ бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ с компактным носителем в Γ, что

$$R(\varphi, \psi) = \mathbf{E}\,\mathbf{x}[\varphi]\overline{x[\psi]} = \mathbf{E}\,x[\tau_s\varphi]\overline{\mathbf{x}[\tau_s\psi]}$$

Здесь τ_s оператор сдвига: $[\tau_s\varphi]\,(t) = \varphi(t+s)$. Как известно, существует такая неотрицательная мера μ (называемая спектральной мерой процесса $\mathbf{x}$), что

$$\mathbf{E}\,x[\varphi]\overline{\mathbf{x}[\psi]} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(u)\overline{\hat{\psi}(u)}\,\mu(du). \tag{1.5}$$

Относительно меры μ мы предполагаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(du)}{(1+u^2)^n} < \infty, \tag{1.6}$$

для некоторого целого n.

Рассмотрим спектральное представление процесса $\mathbf{x}$ (см. подробнее [4]):

$$\mathbf{x}[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(u)\; Z(du), \tag{1.7}$$

где $Z(\cdot)$ – такая ортогональная (гауссовская) мера, что

$$\mathbf{E}\,Z(A)\cdot\overline{Z(B)} \;=\; \mu\{A \cap B\}, \quad \mathbf{E}\,Z(A) \;=\; 0. \tag{1.8}$$

В случае, когда обобщенный процесс $\mathbf{x}$ строится по “обычному” процессу x (как это сделано в (1.3)), мы имеем

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{itu\}\; Z(du). \tag{1.9}$$

Положим $\mathbf{X} = \overline{sp}\{\mathbf{x}[\varphi],\, \varphi \in D(\mathbb{R}^1)\}$. Как это следует из (1.5) линейный оператор $U : \mathbf{X} \to L^2(d\mu)$, определенный соотношением

$$U\mathbf{x}[\varphi] = \hat{\varphi}, \tag{1.10}$$

является унитарной изометрией.

Для измеримого $S \subset \mathbb{R}^1$ обозначим

$$\mathbf{X}_S \; = \; \overline{sp}\{\mathbf{x}[\varphi] : \operatorname{supp}\varphi \in S\}. \tag{1.11}$$

где $\overline{sp}\{M\}$ замыкание (здесь в метрике пространства $L^2(dP)$) линейной оболочки M. Так что $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\mathbf{R}^1}$.

Если $S = [a, b]$, $a < b$ мы будем писать

$$\mathbf{X}_a^b \; = \; \mathbf{X}_{[a,b]}.$$

В специальном случае, когда $S = [-t, t], t \geq 0$ мы будем писать

$$\mathbf{X}(t) \; = \; \mathbf{X}_{[-t,t]}.$$

Пусть $\mathbf{x}[\cdot]$ обобщенный гауссовский процесс со спектральной плотностью f, $\mathcal{F}$ наименьшая $\sigma-$алгебра, относительно которой измеримы величины $\mathbf{x}[\varphi]$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^1)$, $\mathcal{F}_t$, $t > 0$, $\sigma-$алгебра, порожденная величинами $\mathbf{x}[\varphi]$, $(\operatorname{supp})\,\varphi \in [-t, t]$. Обозначим $\mathcal{P}(f)$ меру на $\mathcal{F}$, индуцированную процессом $\mathbf{x}$. Пусть $\mathcal{P}_t(f)$– сужение меры $\mathcal{P}(f)$ на $\mathcal{F}_t$.

Предположим, что неотрицательные функции f и g выбраны так, что гауссовские меры $\mathcal{P}_t(f)$ и $\mathcal{P}_t(g)$ взаимно абсолютно непрерывны, и обозначим

$$\mathcal{D}_t(f, g) = \ln \frac{d\mathcal{P}_t(f)}{d\mathcal{P}_t(g)}.$$

Нас интересует случай, когда t велико, а гауссовские меры $\mathcal{P}_t(f)$ и $\mathcal{P}_t(g)$ близки. Точнее нас интересует случай, когда функция $g(u)$ фиксирована, t–велико, а функция $f(u) = f_t(u)$ в следующем смысле близка к функции g.

Для локально интегрируемой функции φ, определенной на вещественной оси, обозначим $||\varphi||_*$ – BMO норму φ (см. [6, 7]):

$$||\varphi||_* = \sup_I \frac{1}{|I|} \int\limits_I |\varphi(u) - \varphi_I| \, du \tag{1.12}$$

где супремум берется по всем конечным интервалам I, $|I|$ – длина I,

$$\varphi_I = \frac{1}{I} \int\limits_I \varphi(u) \, du.$$

Обозначим через $\mathcal{L}$ пространство с нормой

$$||\varphi||_{\mathcal{L}} = ||\varphi||_* + \left[\int\limits_{\mathbb{R}^1} |\varphi(u)|^2\, du\right]^{1/2}. \qquad (1.13)$$

Мы предполагаем, что $f = f_t = h_t g$, где

$$\ln h_t(u) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left[\varphi(u) + r_t(u)\right].$$

Здесь функции φ, r_t лежат в пространстве $\mathcal{L}$, причем $||r_t||_{\mathcal{L}} \to 0$, когда $t \to \infty$. В этих условиях (при дополнительном предположении, что функция g удовлетворяет условию Макенхаупта) мы устанавливаем асимптотическую нормальность величины $\mathcal{D}_t(f, g)$.

Отсюда, разумеется, следует, что если семейство гауссовских мер, отвечает стационарным процессам со спектральными плотностями

$$f(u) \in \{f :\ f(u) = f(\theta; u), \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^n\},$$

удовлетворяющими условию Макенхаупта и гладко зависящими от параметра θ, то это семейство удовлетворяет условию локальной асимптотической нормальности (ЛАН). Здесь слова "гладко зависящими" означают, что функция $\psi(\theta; \cdot) = \ln f(\theta; \cdot)$ как функция из Θ в $\mathcal{L}$ дифференцируема в метрике пространства $\mathcal{L}$. Последнее означает, что существует такая вектор-функция $D(u) = D(\theta_0; u)$ (из $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^n$)с координатами из пространства $\mathcal{L}$, что

$$\psi(\theta; \cdot) - \psi(\theta_0; \cdot) = (D, \theta - \theta_0)_{\mathbf{R}^n} + r(\theta_0, \theta; u),$$

где

$$||r(\theta_0, \theta; \cdot)||_{\mathcal{L}} = o(||\theta - \theta_0||_{\mathbf{R}^n}),$$

$(\cdot, \cdot)_{\mathbf{R}^n}, ||\cdot||_{\mathbf{R}^n}$ – скалярное произведение и норма в $\mathbb{R}^n$

2. Воспроизводящее ядро

Пусть R_+ верхняя полуплоскость $\{z : (\mathrm{Im})\, z > 0\}$. Будем писать $h \in H(R_+) = H_+$ если h такая аналитическая функция на R_+, что существует предел

$$\lim_{y \searrow 0} h(x + iy) \ = \ h(x), \qquad (2.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln\,|h(x)|\,\frac{dx}{1+x^2}\ > -\infty, \tag{2.2}$$

и

$$\lg|h(x+iy)| \le \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|h(t)|\,\frac{dt}{(x-t)^2+y^2}, \qquad y>0. \tag{2.3}$$

Функции из H_+ ,будем отождествлять с их "граничными значениями", определенными в (2.1).

Для нижней полуплоскости $R_- = \{z : (\mathrm{Im})\,z < 0\}$ пространство Харди $H(R_-) = H_-$ определяется аналогичным образом. Понятно, что в этом случае неравенство (2.3) переходит в неравенство

$$\lg|h(x+iy)| \le \frac{|y|}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|h(t)|\,\frac{dt}{(x-t)^2+y^2}, \qquad y<0,$$

Будем обозначать $H^2_+ = L^2 \cap H_+, H^2_- = L^2 \cap H_-$.

Будем писать $e_t(u) = e^{itu}$. Обозначим через H_t пересечение

$$H_t = e_{-t}H_+ \cap e_t H_-.$$

Ясно, что в H_t лежат целые функции конечной степени, где степень $t = t_g$ целой функции g определяется соотношением

$$t\ =\ \lim_{r\to\infty}\frac{\ln\,\max_{|z|=r}|g(z)|}{r}.$$

Для неотрицательной функции f (определенной на вещественной прямой) обозначим через L^2_f L^2-пространство, построенное по мере с плотностью f. Будем писать L^2, если $f(t) = \mathbf{1}(t) \equiv 1$. Обозначим

$$H(t) = \{\varphi:\ \varphi\in L^2,\ \varphi(u) = \int_{-t}^{t} a(s)e^{isu}\,ds\}.$$

Положим

$$H_t(f) = \overline{H(t)\cap L^2_f},$$

где замыкание берется в метрике пространства L^2_f.

Функционал $l_z\varphi = \varphi(z)$ определен на $H(t)$,а потому определен на плотном множестве в $H_t(f)$. По известной альтернативе М. Г. Крейна [?] реализуются только две возможности:

1) $H_t(f) = L_f^2$ и функционал l_z неограничен на $H_t(f)$

или

2) $H_t(f) \neq L_f^2$, функционал l_z ограничен на $H_t(f)$, причем

$$H_t(f) = H_t \cap L_f^2.$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что функция f удовлетворяет условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln f(u)}{1+u^2}\, du > -\infty. \tag{2.4}$$

Обозначим $\tilde{\varphi}$-функцию,гармонически сопряженную с φ,

$$\tilde{\varphi}(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbf{R}^1} \frac{x-u}{(x-u)^2+y^2}\varphi(u)\, du,\ z = x+iy, y \geq 0 \tag{2.5}$$

если $\varphi \in L^p, 1 \leq p < \infty$, и соотношением, если $\varphi \in L^\infty$

$$\tilde{\varphi}(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbf{R}^1} \left[\frac{x-u}{(x-u)^2+y^2} + \frac{u}{1+u^2}\right]\varphi(u)\, du,\ z = x+iy, \tag{2.6}$$

если $\varphi \in L^\infty$ (см. [7]).

При условиие (2.4) $H_t(f) \neq L_f^2$ (см. [7]), а потому функционал l_z ограничен на $H_t(f)$ и, следовательно, существует воспроизводящее ядро $G_t^f(u,v)$ на $H_t(f)$:

$$\left(\varphi, G_t^f(u,\cdot)\right)_f = \varphi(u),\ \varphi \in H_t(f).$$

Ясно, что

$$G_t^f(u,u) = ||G_t(u,\cdot)||_f$$

и для $\varphi \in H_t(f)$

$$|\varphi(z)|^2 \leq ||\varphi||_f^2 G_t^f(z,z).$$

Поскольку для функции $\varphi(v) = \left[G_t^f(u,u)\right]^{-1} G_t^f(u,v)$ мы имеем

$$\varphi(u) = 1,\ ||\varphi||_f^2 = \left[G_t^f(u,u)\right]^{-1},$$

то получаем

$$G_t^f(u,u) = \sup_{\varphi:\varphi\in H_t(f),|\varphi(u)|=1} \frac{1}{||\varphi||_f^2} = \left[\inf_{\varphi:\varphi\in H_t(f),|\varphi(u)|=1} ||\varphi||_f^2\right]^{-1}.$$

Здесь и далее мы обозначаем $(\cdot,\cdot)_f$, $||\cdot||_f$ скалярное произведение и норму в L_f^2. Поэтому,

Лемма 2.1. *Если* $\underline{f}(v) \le f(v) \le \overline{f}(u)$ *(почти всюду), то*

$$G_t^{\overline{f}}(u,u) \le G_t^f(u,u) \le G_t^{\underline{f}}(u,u) \text{ для всех } u. \tag{2.5}$$

Хорошо известно, что

$$G_t(u,v) = \frac{\sin t(u-v)}{\pi(u-v)}, \text{ где } G_t(u,v) = G_t^{\mathbf{1}}(u,v).$$

Теперь предположим, что f и g неотрицательные функции и $f = hg$.

Лемма 2.2..

$$G_t^g(u,u)\left\{\frac{1}{G_t^g(u,u)}\int |G_t^g(u,v)|^2\, h(v)g(v)\,dv\right\}^{-1} \le G_t^f(u,u) \le$$

$$\le G_t^g(u,u)\left\{\frac{1}{G_t^g(u,u)}\int |G_t^g(u,v)|^2\, \frac{1}{h(v)}g(v)\,dv\right\}$$

Доказательство. Левое неравенство. Для фиксированного u возьмем функцию

$$\varphi(v) = \frac{1}{G_t^g(u,u)}G_t^g(u,v).$$

Если $\varphi \notin L_f^2$ левое неравенство тривиально. Пусть $\varphi \in L_f^2$ и поэтому $\varphi \in H_t(f)$. Так как $\varphi(u) = 1$, получаем

$$1 = |\varphi(u)|^2 \le \frac{1}{[G_t^g(u,u)]^2}\int |G_t^g(u,v)|^2\, h(v)g(v)\,dv \times G_t^f(u,u).$$

Правое неравенство. Для фиксированного u возьмем функцию

$$\varphi(v) = \frac{1}{h(v)}G_t^g(u,v).$$

Если $\varphi \notin L_f^2$ правое неравенство тривиально. Пусть $\varphi \in L_f^2$. Так как

$$(\psi, \varphi)_f = \psi(u), \ \psi \in H_t(f) \cap H_t(g),$$

то

$$P_t^f \varphi = G_t(u, \cdot),$$

где P_t^f ортопроектор в L_f^2 на $H_t(f)$. Поэтому

$$G_t^f(u,u) = ||G_t(u,\cdot)||_f^2 \leq ||\varphi||_f^2 =$$

$$G_t^g(u,u)\left\{\frac{1}{G_t^g(u,u)}\int \left|G_t^g(u,v)\right|^2 \frac{1}{h(v)} g(v)\,dv\right\}.$$

В случае, когда $g(u) \equiv 1$ получаем

Лемма 2.3.

$$\frac{t}{\pi}\left\{\int \frac{\sin^2 t(u-v)}{t\pi \sin^2(u-v)} h(v) g(v)\,dv\right\}^{-1} \leq G_t^f(u,u) \leq$$

$$\leq \frac{t}{\pi}\left\{\int \frac{\sin^2 t(u-v)}{t\pi \sin^2(u-v)} \frac{1}{h(v)} g(v)\,dv\right\}$$

Следует заметить, что ядро $\mathcal{K}_t(u,v)$,

$$\mathcal{K}_t(u,v) = \frac{1}{G_t^g(u,u)}\left|G_t^g(u,v)\right|^2,$$

удовлетворяет условию

$$\int \mathcal{K}_t(u,v) g(v)\,dv = 1.$$

Поэтому

$$\tau_t(u) = \left\{\int \mathcal{K}_t(u,v)\frac{1}{h(v)} g(v)\,dv\right\} \times \left\{\int \mathcal{K}_t(u,v) h(v) g(v)\,dv\right\} \geq 1.$$

3. Классы A_p

Неотрицательная локально интегрируемая функция w лежит в классе A_p $(p \geq 1)$,если (см. [6, 7])

$$\sup_I \frac{1}{|I|}\int_I w(u)\,du \cdot \left[\frac{1}{|I|}\int_I [w(u)]^{-q/p}\,du\right]^{p/q} = C(p,w) < \infty, \qquad (3.1)$$

где супремум берется по всем интервалам I, $|I|$-длина I, $1/p + 1/q = 1$.

Неотрицательная локально интегрируемая функция w лежит в пространстве $A_p\,(p \geq 1)$, в единственном случае, когда (см. [7]) для любой неотрицательной функции f

$$(f_I)^p \leq K(p,w)\frac{1}{W(I)}\int\limits_I f^p(u)w(u)\,du, \tag{3.2}$$

где

$$f_I = \frac{1}{|I|}\int\limits_I f(u)\,du,\ W(I) = \int\limits_I w(u)\,du.$$

В (3.2) в качестве $K(p,w)$ можно взять $C(p,w)$ из (3.1).

Для функции w из $A_p\,(p \geq 1)$ верно (см. [6, 7]) обращенное неравенство Иенсена

$$\frac{1}{|I|}\int\limits_I w(u)\,du \leq C(p,w)\exp\left\{\frac{1}{|I|}\int\limits_I \ln\, w(u)\,du\right\}$$

и, стало быть, для любого $r > 1$ верно обращенное неравенство Гёльдера

$$\frac{1}{|I|}\int\limits_I w(u)\,du \leq C(p,w)\left[\frac{1}{|I|}\int\limits_I [w(u)]^{1/r}\,du\right]^r. \tag{3.3}$$

Поскольку (см. [6, 7]) для некоторого $q = q(w) > 1$ функция $w^q \in A_p$, если $w \in A_p$, то для достаточно малого $q > 1$

$$\left[\frac{1}{|I|}\int\limits_I w^q(u)\,du\right]^{1/q} \leq 2C(p,w)\frac{1}{|I|}\int\limits_I w(u)\,du. \tag{3.4}$$

Пусть φ неотрицательная функция, ψ – наименьшая четная монотонно убывающая на $\mathbb{R}^1_+$ мажоранта для φ:

$$\psi(u) = \sup_{|v|\geq|u|} |\varphi(v)|.$$

Предположим, что

$$\int\limits_{\mathbf{R}^1} \varphi(u)\,du = 1, \quad \int\limits_{\mathbf{R}^1} \psi(u)\,du < \infty. \tag{3.4}$$

Обозначим $\varphi * h$-свертку функций φ и h. Определим оператор T_ε соотношением $T_\varepsilon h = \varphi_\varepsilon * h$, где $\varphi_\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)$. Имеет место следующая теорема (см. [6]).

Теорема 3.1. *Пусть функция $f \in A_p, p \geq 1$, а функция φ удовлетворяет условию (3.4). Тогда*

$$\int\limits_{\mathbf{R}^1} |T_\varepsilon h(u)|^p f(u)\,du < C_p(f) \int\limits_{\mathbf{R}^1} |h(u)|^p f(u)\,du. \tag{3.5}$$

Для неотрицательной функции f обозначим

$$F(E) = \int\limits_E f(u)\,du,\ G(E) = \int\limits_E \frac{1}{f(u)}\,du. \tag{3.6}$$

Лемма 3.1. *Пусть $f \in A_2$, тогда существует такие константы $C_*(f)$ и $1 < \alpha < 2$, что для любых конечных интервалов $E \subset I$*

$$F(I) \leq C_*(f)\left(\frac{|I|}{|E|}\right)^\alpha F(E),\ G(I) \leq C_*(f)\left(\frac{|I|}{|E|}\right)^\alpha G(E). \tag{3.7}$$

При этом $C_*(f) = C_*(f_u)$ для любого $u \in \mathbb{R}^1$, где $f_u(v) = f(v-u)$.

Доказательство. Как известно (см. [6, 7]), если $f \in A_2$, то при некоторых $C_f, 1 > \beta > 0$ для любых интервалов $E \in I$

$$\frac{G(E)}{G(I)} \leq C_f\left(\frac{|E|}{|I|}\right)^\beta. \tag{3.8}$$

При этом $C_f = C_{f_u}$. Отсюда следует первое из неравенств, если учесть, что

$$G(I) \leq C(2,f)\frac{1}{F(I)}|I|^2,\ G(E) > \frac{1}{F(E)}|E|^2, \tag{3.9}$$

и очевидное соотношение $C(2,f) = C(2,f_u)$ для любого $u \in \mathbb{R}^1$. Второе доказывается аналогично.

Рассмотрим ядро Пуассона $(y > 0)$

$$P_y(u-v) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{(u-v)^2 + y^2}.$$

Поскольку $P_{y_1} * P_{y_2} = P_{y_1+y_2}$, то оператор A_y, определенный соотношением

$$[A_y h](u) = \int\limits_{\mathbf{R}^1} P_y(u-v)h(v)\,dv,$$

удовлетворяет условию $A_{y_1+y_2} = A_{y_1}A_{y_2}$.

Заметим, что

$$\frac{1}{t\pi}\frac{sin^2 tx}{x^2} \le \frac{2}{\pi}\frac{1/t}{x^2+1/t^2}.$$

Свяжем с неотрицательной функцией f функцию

$$F(y) = \int\limits_{[-y,y]} f(x)\,dx, \; y \ge 0.$$

Лемма 3.2. *Имеет место равенство*

$$\int\limits_{\mathbf{R}^1} \frac{t}{\pi(x^2+t^2)} f(x)\,dx = 2\int\limits_0^\infty \frac{tx}{\pi(x^2+t^2)^2} F(x)\,dx =$$

$$= \frac{2}{t}\int\limits_o^\infty \frac{x}{\pi(x^2+1)^2} F(tx)\,dx. \tag{3.10}$$

Доказательство. Пусть для $t > 0$

$$q_t(x) = \frac{t|x|}{\pi(x^2+t^2)^2}. \tag{3.11}$$

Тогда, очевидно,

$$\int\limits_{\{|y|>|x|\}} q_t(y)\,dy = \int\limits_{|x|}^\infty \frac{2ty}{\pi(y^2+t^2)^2}\,dy = P_t(x),$$

а потому

$$2\int\limits_0^\infty q_t(x)F(x)\,dx = \int\limits_{\mathbf{R}^1} q_t(x)F(x)\,dx$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^1}\int\limits_{\mathbf{R}^1} q_t(x)\mathbf{1}_{\{|x|>|y|\}} f(y)\,dxdy =$$

$$\int\limits_{\mathbf{R}^1}\left[\int\limits_{|x|>|y|} q_t(x)\,dx\right] f(y)dy = \int\limits_{\mathbf{R}^1} P_t(y)f(y)\,dx.$$

Таким образом,

$$\frac{2}{t^2}\int\limits_0^\infty \frac{x}{\pi(x^2+1)^2}F(tx)\,dx = 2\int\limits_0^\infty \frac{tx}{\pi(x^2+t^2)^2}F(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^1} \frac{t}{\pi(x^2+t^2)}f(x)\,dx.$$

Нам понадобится также другой вариант леммы 3.2. Свяжем с неотрицательной функцией f и точкой $u \in \mathbb{R}^1$ функцию

$$F(y,u) = \int\limits_{[-y,y]} f(u-x)\,dx,\ y \geq 0.$$

Лемма 3.2*. *Имеет место равенство*

$$\int\limits_{\mathbf{R}^1} \frac{t}{\pi\left((x-u)^2+t^2\right)}f(x)\,dx = \int\limits_{\mathbf{R}^1} \frac{t}{\pi\left(x^2+t^2\right)}f(u-x)\,dx =$$

$$2\int\limits_0^\infty \frac{tx}{\pi(x^2+t^2)^2}F(x,u)\,dx = \frac{2}{t}\int\limits_o^\infty \frac{x}{\pi(x^2+1)^2}F(tx,u)\,dx$$

Лемма 3.2 *следует из леммы* 3.1.

Лемма. 3.3. *Пусть* $f \in A_2$, *тогда*

$$\sup_{y>0,u\in\mathbf{R}^1}\int\limits_{\mathbf{R}^1} P_y(u-v)f(v)\,dv \times \int\limits_{\mathbf{R}^1} P_y(u-v)\frac{1}{f(v)}\,dv = K(f) < \infty. \quad (3.12)$$

Доказательство. Достаточно оценить величину

$$C(f) = \sup_{y>0}\int\limits_{\mathbf{R}^1} P_y(v)f(v)\,dv \times \int\limits_{\mathbf{R}^1} P_y(v)\frac{1}{f(v)}\,dv.$$

Если при этом окажется, что $C(f) < K_*(f)$ и $K_*(f) = K_*(f_u), u \in \mathbb{R}^1$, где $f_u(v) = f(v-u)$, то неравенство $K(f) < \infty$ станет следствием неравенства $C(f) < \infty$, поскольку

$$\int\limits_{\mathbf{R}^1} P_y(u-v)f(v)\,dv \times \int\limits_{\mathbf{R}^1} P_y(u-v)\frac{1}{f(v)}\,dv =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^1} P_y(v)f_u(v)\,dv \times \int\limits_{\mathbf{R}^1} P_y(v)\frac{1}{f_u(v)}\,dv.$$

Из леммы 3.2 получаем

$$C(f) = 2\sup_{y>0}\frac{1}{y^2}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{s}{\pi(s^2+1)^2}F(ys)\frac{t}{\pi(t^2+1)^2}G(yt)\,dsdt,$$

где

$$G(t) = \int\limits_{[-t,t]}\frac{1}{f(u)}\,du.$$

По лемме 3.1 при некотором $\alpha < 2$

$$\begin{aligned} F(ys)G(yt) &< F(y)G(y), && \text{если} \quad t, s \le 1;\\ F(ys)G(yt) &< C_*(f)F(y)G(y)t^\alpha, && \text{если} \quad s \le 1, t > 1;\\ F(ys)G(yt) &< C_*(f)F(y)G(y)s^\alpha, && \text{если} \quad t \le 1, s > 1;\\ F(ys)G(yt) &< C_*^2(f)F(y)G(y)(st)^\alpha, && \text{если} \quad s, t > 1. \end{aligned}$$

Поэтому при $C^*(f) = 1 + C_*(f) + C_*^2(f)$

$$F(ys)G(yt) \le C^*(f)F(ys)G(yt)z(t,s),$$

где

$$z(t,s) = 1 + t^\alpha + s^\alpha + (ts)^\alpha$$

Заметим, что, если $f \in A_2$,то

$$F(y)G(y) \le 4C(2,f)y^2.$$

Поэтому при $K(f) = 4C(2,f)C^*(f)$ получаем

$$F(ys)G(yt) \le K_1(f)y^2z(t,s).$$

Отсюда,

$$C(f) \le 2K_1(f)J = K_*(f),$$

где

$$J = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{s}{\pi(s^2+1)^2} \frac{t}{\pi(t^2+1)^2} z(t,s)\, dsdt < \infty.$$

Наконец, заметим, что $K_*(f) = K_*(f_u)$ для любого u. Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 3.4. *Пусть* $f \in A_2$, *тогда*

$$\ln \int\limits_{\mathbf{R}^1} P_y(u-v) f(v)\, dv \le K(f) \int\limits_{\mathbf{R}^1} P_y(u-v) \ln\, f(v)\, dv.$$

Доказательство. По лемме 3.3

$$\left[\int\limits_{\mathbf{R}^1} P_y(u-v) f(v)\, dv \exp\{- \int\limits_{\mathbf{R}^1} P_y(u-v) \ln\, f(v)\, dv\} \right] \times$$

$$\times \left[\int\limits_{\mathbf{R}^1} P_y(u-v) \frac{1}{f(v)}\, dv \exp\{ \int\limits_{\mathbf{R}^1} P_y(u-v) \ln\, f(v)\, dv\} \right] \le K(f)$$

По неравенству Иенсена каждый из сомножителей ≥ 1 и стало быть не больше $K(f) \ge 1$. Отсюда следует утверждение леммы.

4. Пространство БМО

Локально интегрируемая функция φ лежит в пространстве БМО (см. подробнее [6, 7]), если

$$||\varphi||_* = \sup_I \frac{1}{|I|} \int\limits_I |\varphi(t) - \varphi_I|\, dt < \infty. \tag{4.1}$$

Положим

$$\varphi^\sharp(u) = \sup_{I: u \in I} \frac{1}{|I|} \int\limits_I |\varphi(v) - \varphi_I|\, dv. \tag{4.2}$$

Как известно ([6]),

$$||\varphi^\sharp||_{L^\infty} = ||\varphi^\sharp||_*, \tag{4.3}$$

$$c_p ||\varphi^\sharp||_{L^p} \le ||\varphi||_{L^p} \le C_p ||\varphi^\sharp||_{L^p}. \tag{4.4}$$

5. Отношение правдоподобия

Пусть $\mathbf{x}[\cdot]$ обобщенный гауссовский процесс со спектральной плотностью f, $\mathcal{F}$ наименьшая $\sigma-$алгебра, относительно которой измеримы величины $\mathbf{x}[\varphi]$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^1)$, $\mathcal{F}_t$, $t > 0$, $\sigma-$алгебра, порожденная величинами $\mathbf{x}[\varphi]$, $(\mathrm{supp})\,\varphi \in [-t, t]$. Обозначим $\mathcal{P}(f)$ меру на $\mathcal{F}$, индуцированную процессом $\mathbf{x}$. Пусть $\mathcal{P}_t(f)$– сужение меры $\mathcal{P}(f)$ на $\mathcal{F}_t$.

Предположим, что неотрицательные функции f и g выбраны так, что гауссовские меры $\mathcal{P}_t(f)$ и $\mathcal{P}_t(g)$ взаимно абсолютно непрерывны, и обозначим

$$\mathcal{D}_t(f,g) = \ln \frac{d\mathcal{P}_t(f)}{d\mathcal{P}_t(g)}.$$

Напишем удобное нам представление для величины $\mathcal{D}_t(f,g)$ (см. [4, 14])

$$\mathcal{D}_t(f,g) = -\frac{1}{2} d_t(f,g) - \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ G_t^f(u,v) - G_t^g(u,v) \right\} \Phi(du,dv). \tag{5.1}$$

Здесь

$$d_t(f,g) = (\mathrm{tr})\,\left(\ln A_t(f,g) - I + A_t(f,g)\right), \tag{5.2}$$

$A_t = A_t(f,g)$ – неотрицательный оператор в $H_t(g)$, определенный соотношением

$$(\cdot,\cdot)_f = (A_t\cdot,\cdot)_g\,.$$

Как легко понять, $A_t(f,g) = P_t(g)\mathbf{h}P_t(g)$, где функция h определена соотношением $f = hg$, $P_t(g)$ – ортопроектор в L^2_g на подпространство $H_t(g)$, а $\mathbf{h}$ – оператор умножения на функцию h. В дальнейшем будем писать P_t вместо $P_t(\mathbf{1})$.

Мы будем использовать также другое представление для величины $\mathcal{D}_t(f,g)$. Пусть $\{x_j, j = 1, 2, ...\}$ такой ортонормированный базис в $X_{[-t,t]}$ (в метрике пространства $L^2(d\mathcal{P}(g))$), что

$$\int x_i \overline{x_j}\, d\mathcal{P}(f) = \sigma_j^2 \delta_{i,j},\ \sigma_j > 0.$$

Тогда (см. [4])

$$\mathcal{D}_t(f,g) = -\frac{1}{2} d_t(f,g) - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{x_j^2}{\sigma_j^2} - \frac{1}{\sigma_j^2} \right) - \sum_{j=1}^{\infty} \left(x_j^2 - 1\right) \right\} =$$

$$-\frac{1}{2}d_t(f,g)-\frac{1}{2}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left(x_j^2-1\right)\left(\frac{1}{\sigma_j^2}-1\right)\right\} \tag{5.3}$$

Заметим, что величины $\sigma_j = \sigma_j(t)$ зависят от t. Иногда для простоты мы будем опускать значек t. Основной результат работы состоит в следующих теоремах

Теорема 1. *Пусть функция $g \in A_2$, функция $f = f_t = hg$, а функция $h(u) = h_t(u)$ допускает представление*

$$h_t(u) = \exp\{\frac{1}{\sqrt{t}}\left[h^0(u) + r_t(u)\right]\}, \tag{5.4}$$

где $h^0, r_t \in \mathcal{L}$, причем $||r_t||_{\mathcal{L}} \to 0$ при $t \to \infty$. Тогда

$$\mathcal{D}_t(f,g) = \xi_t - 1/2\sigma^2 + R_t, \tag{5.5}$$

$\xi_t \in N(0, sigma^2)$,

$$\sigma^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |h^0(u)|^2\,du,$$

а величина R_t стремится к нулю (по верооятности), когда $t \to \infty$.

Предположим теперь, что мы имеем параметрическое семейства спектральных плотностей

$$f(u) \in \{f:\ f(u) = f(\theta;u), \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^n\}. \tag{$*$}$$

гладко зависящих от θ. Положим

$$\mathcal{D}_t(\theta;h) = \ln\,\frac{d\mathcal{P}_t(f(\theta;\cdot)}{d\mathcal{P}_t(f(\theta+\frac{1}{\sqrt{t}}h;\cdot))}.$$

Здесь слова "гладко зависящие" означают, что функция $\psi(\theta;\cdot) = \ln f(\theta;\cdot)$ как функция из Θ в $\mathcal{L}$ дифференцируема в метрике пространства $\mathcal{L}$. Последнее означает, что существует такая вектор-функция $D(u) = D(\theta_0;u)$ (из $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^n$)с координатами из пространства $\mathcal{L}$, что

$$\psi(\theta;\cdot) - \psi(\theta_0;\cdot) = (D, \theta-\theta_0)_{\mathbf{R}^n} + r(\theta_0,\theta;u),$$

где

$$||r(\theta_0,\theta;\cdot)||_{\mathcal{L}} = o(||\theta-\theta_0||_{\mathbf{R}^n}),$$

$(\cdot,\cdot)_{\mathbf{R}^n}, ||\cdot||_{\mathbf{R}^n}$ – скалярное произведение и норма в $\mathbb{R}^n$.

Положим

$$\sigma(\theta, h) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |(D(\theta; u), h)|^2 \, du.$$

Теорема 2. *Пусть семейство (*) дифференцируемо во внутренней точке θ в метрике пространства $\mathcal{L}$. Тогда*

$$\mathcal{D}_t(f, g) = \xi_t - 1/2\sigma^2 + R_t, \tag{5.6}$$

$\xi_t \in N(0, sigma^2(theta, h))$,*а величина R_t стремится к нулю (по верооятности), когда $t \to \infty$.*

Очевидно, теорема 2 следует из теоремы 1.

Заметим, что (как это следует из леммы 4.1, примененной сначала к функциям $g, \varphi = \ln h$, а потом к функциям $gh, \varphi = -\ln h$) в условиях теоремы 1 при $t \to \infty$

$$\inf_j \, \sigma_j(t) \to 1, \; \sup_j \, \sigma_j(t) \to 1.$$

Поэтому для доказательства теоремы 1 достаточно установить, что при $t \to \infty$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma_j^2} - 1 \right)^2 \to \sigma^2. \tag{5.7}$$

6. Доказательство теоремы 1

Всюду в этом пункте мы будем предполагать, что функция $g \in A_2$, функция $f = f_t = hg$, а функция $h(u) = h_t(u)$ допускает представление

$$h_t(u) = \exp\{\frac{1}{\sqrt{t}} [h_*(u) + r_t(u)]\}, \tag{6.1}$$

где $h_*, r_t \in \mathcal{L}$, причем $||r_t||_{\mathcal{L}} \to 0$ при $t \to \infty$. Поскольку нас интересуют только “большие” t, мы можем считать, что функции $f = f_t$ допускают представление

$$f = V + \overline{U}, \text{ где } ||U||_{L^\infty} \le C^1 < \infty, ||V||_{L^\infty} \le C^2 < \pi/2 \tag{6.2}$$

Сначала мы докажем, что

Лемма 6.1. *В условиях* (6.1), (6.2) *для любого* $0 < \delta < 1$ *и достаточно больших* t

$$(1-\delta)||\psi||_f \le ||\psi||_g(1+\delta)||\psi||_f,\ \varphi \in H_t(g). \tag{6.3}$$

Потом установим, что

Лемма 6.2. *В условиях* (6.1), (6.2)

$$||A_t||_2^2 \to \pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} |h_*(u)|^2\,du \tag{6.4}$$

где орератор $A_t = \mathbf{h} - I$.

Отсюда, как уже отмечалось, следует утверждение теоремы 1.

Доказательство леммы 6.1. Положим $\varphi = \ln h$. Прежде всего заметим, что по неравенству Иенсена

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{\varphi(v)\}|\psi(v)|^2 g(v)\,dv \ge \exp\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(v)|\psi(v)|^2 g(v)\,dv\right\}.$$

Поэтому достаточно доказать, что при некотором $r > 1$ для любого положительного δ и достаточно больших t

$$\sup_{\psi:\psi\in H_t(g),||\psi||_g=1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(v)|^r|\psi(v)|^2 g(v)\,dv \le \delta. \tag{6.5}$$

Очевидно без потери общности можно предполагать в дальнейшем, что функция φ-неотрицательная Заметим, что по лемме 2.3

$$||\psi(u)||^2 \le ||\psi||_g^2 G_t^g(u,u) \le \frac{t}{\pi}\left\{\int \frac{\sin^2 t(u-v)}{t\pi\sin^2(u-v)}\frac{1}{g(v)}\,dv\right\} \le$$

$$\le \frac{t}{\pi}\left\{\int \frac{2}{\pi}\frac{1/t}{(u-v)^2+1/t^2}\frac{1}{g(v)}\,dv\right\}.$$

Отсюда,

$$J = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi(v)|^2[\varphi(v)]^r g(v)\,dv \le$$

$$\leq \frac{2t}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1/t}{(u-v)^2 + 1/t^2} [\varphi(v)]^r \frac{g(v)}{g(u)} \, du dv. \tag{6.6}$$

Напомним, что для $y > 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{2y}{(u-v)^2 + 4y^2} h_1(v) h_2(u) \, du dv =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{(u-v)^2 + y^2} h_1(v) \, dv \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{(u-v)^2 + y^2} h_2(v) \, dv \right\} du.$$

Возьмем $h_1 = \varphi^r g, h_2 = 1/g$ и воспользуемся неравенством Гельдера (1/пЂ1/чı1)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{(u-v)^2 + y^2} |\varphi(v)|^r g(v) \, dv \leq$$

$$\leq \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{(u-v)^2 + y^2} [\varphi(v)]^{rp} \, dv \right]^{1/p} \times$$

$$\times \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{(u-v)^2 + y^2} g^q(v) \, dv \right]^{1/q}. \tag{6.7}$$

Получаем

$$J \leq \frac{2t}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} a_t(u) b_t(u) \, du, \tag{6.8}$$

где

$$a_t(u) = \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1/2t}{(u-v)^2 + (1/2t)^2} [\varphi(v)]^{rp} \, dv \right]^{1/p},$$

$$b_t(u) = \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1/2t}{(u-v)^2 + (1/2t)^2} g^q(v) \, dv \right]^{1/q} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1/2t}{(u-v)^2+(1/2t)^2} \frac{1}{g(v)}\, dv.$$

Если p достаточно велико, то $g^q \in A_2$ и удовлетворяет (4.3) (см. подробнее в [6, 7]),а потому (как это следует из лемм 3.3, 3.4)

$$\sup_{t>0, u\in \mathbf{R}^1} b_t(u) = L(c_1, c_2) \leq \infty.$$

Поэтому достаточно доказать, что для любого δ

$$\sup_{t>t_0} \int_{-\infty}^{\infty} a_t(u)\, du \leq K(c_3)\delta, \tag{6.9}$$

если t_0 достаточно велико.

В условиях леммы (см. [6, 7])

$$\varphi = \varphi_* + \overline{\varphi^*}, \text{ где } ||\varphi_*||_{L^\infty} \leq c_4 \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad ||\varphi^*||_{L^\infty} \leq c_4 \frac{1}{\sqrt{t}}. \tag{6.10}$$

Для функции $g \in L^2_{\mathrm{loc}}$ положим

$$g^\sharp(u) = \sup_{y>0} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{(u-v)^2+(y)^2} |f(v) - f(z)|^2\, dv \right\}^{1/2}, \ z = u + iy,$$

где при $(y > 0)$

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{(u-v)^2+(y)^2} g(v)\, dv.$$

Как известно, [7], $c^1||g||_* \leq ||g^\sharp||_{L^\infty} \leq c^2||g||_*$,

$$\sup_{y>0} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{(u-v)^2+(y)^2} |g(v) - g(z)|^p\, dv \right\}^{1/p} \leq c(p) g^\sharp(u), \ z = u+iy, \tag{6.11}$$

если $g \in BMO$, и при $1 < p < \infty$

$$||g||_{L^p} \leq C^1(p)||g^\sharp||_{L^p} \leq C^2(p)||g||_{L^p}. \tag{6.12}$$

Заметим, что

$$a_t^{1/r}(u) \le c(p) \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1/2t}{(u-v)^2 + (1/2t)^2} [\varphi(v) - \varphi(u+iy)]^{rp} \, dv \right]^{1/rp} + \right.$$

$$\left. + \varphi(u + i/2t) \right\} \le c(p)\varphi^{\sharp}(u) + \varphi^{\star}(u), \; \varphi^{\star}(u) = \sup_{y>0} \varphi(u+iy). \qquad (6.13)$$

Как известно, при $1 < p < \infty$,

$$||\varphi^{\star}||_{L^p} \le K(p)||\varphi||_{L^p}.$$

Отсюда, и из (4.13) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_t(u)\, du \le C(p,r)||\varphi||^r_{L^{rp}}.$$

Для доказательства (4.10) остается заметить, что, если выполнено (4.11), то

$$||\varphi||^{rp}_{L^{rp}} \le c(p,r)t^{-\frac{rp}{2}}.$$

Поэтому нужная оценка получается при $r > 2$.

Доказательство леммы 6.2. Прежде всего заметим, что в условияю леммы (подробнее см. [14]) для любого положительного δ и достаточно больших t

$$(1-\delta)||A_t||_2^2 \le (\mathrm{tr})P_t(g)|h-1|^2 P_t(g). \qquad (6.14)$$

Далее,

$$(\mathrm{tr})P_t(g)|h-1|^2 P_t(g) = \int_{\infty}^{\infty} G_t^g(u,u)(h(u)-1)^2 g(u)\, du. \qquad (6.15)$$

Исследование асимптотического поведения последнего интеграла проводится так же, кака это сделано в доказательстве леммы 1. В результате получаем

$$(\mathrm{tr})P_t(g)|h-1|^2 P_t(g) \to \pi \int_{\infty}^{\infty} (h_*)^2\, du.$$

Здесь следует напомнить, что в условиях леммы для любого положительного δ и достаточно больших t

$$(1-\delta)G_t(u,u) \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1/t}{\pi\left((u-v)^2+1/t^2\right)g(u)}\,du \le (1+\delta)G_t(u,u). \tag{6.14}$$

Литература

1. J. L. Doob, *Stochastic Processes*. Wiley (1990).
2. U. Grenander, M. Rozenblatt, *Statistical analyses of stationary time series. N.-J.* (1956).
3. И. Гохберг, М. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов*. Наука, Москва (1965).
4. Ю. А. Розанов, *Стационарные процессы*. Мир, Москва (1963).
5. И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, *Гауссовские процессы*. Мир, Москва (1974).
6. M. Elias Stein, *Harmonic Analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscilatory integrals*. Princeton University Press (1993).
7. Garnett, B. John, *Bounded analytic functions*. Pure and Applied Mathematics, **96**, New York etc.: Academic Press (1981).
8. R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden, *Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform*. Trans. Amer. Math. Soc., **176** (1973), 227–251.
9. K. O. Dzhaparidze, *Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Spectral Analysis of Stationary Time Series*. Springer-Verlag, New-York (1986).
10. E. Basor, *Asymptotic Formulas for Toeplitz Determinants*. Trans. Amer. Math. Soc. ,**239** (1978), 33–65.
11. M. Rosenblatt (1962), *Asymptotic Behvior of Eigenvalues of Toeplitz Forms*. Journal Math., Mech., **11**(6) (1962), 941–950.
12. F. Avram, *On Bilinear Forms in Gaussian Random Variables and Toeplitz Matrices*. Probab. Theori Relat. Fields, **79** (1988), 37–45.
13. В. Н. Солев, *Точность метода наименьших квадратов в задаче оценивания в стационарном шуме*. Зап. Научных Семин. ПОМИ, **232** (1996).
14. В. Н. Солев, *Гауссовские f-регулярные процессы и асимптотическое поведение функции правдоподобия*. Зап. Научных Семин. ПОМИ, **119** (1982), 203–239.

Solev V. N., Zerbet A. Conditions of the local asymptotic normality for Gaussian stationary random processes.

Let $\mathbf{x}[\cdot]$ be a stationary Gaussian process with zero mean and spectral density f, $\mathcal{F}$ be the $\sigma-$algebra, induced by random variables $\mathbf{x}[\varphi]$, $\varphi \in D(R^1)$, $\mathcal{F}_t$, $t > 0$, be the $\sigma-$algebra, induced by random variables $\mathbf{x}[\varphi], \operatorname{supp} \varphi \in [-t,t]$. We denote by $\mathcal{P}(f)$ the Gaussian measure on $\mathcal{F}$,

generated by $\mathbf{x}$. Let $\mathcal{P}_t(f)$ be the restriction of $\mathcal{P}(f)$ on $\mathcal{F}_t$. Suppose non-negative functions f and g are chosen by such a way that measures $\mathcal{P}_t(f)$ and $\mathcal{P}_t(g)$ are absolutely continuous and put

$$\mathcal{D}_t(f,g) = \ln \frac{d\mathcal{P}_t(f)}{d\mathcal{P}_t(g)}.$$

For a fixed $g(u)$ and $f(u) = f_t(u)$ close in some sense to $g(u)$ the asymptotic normality of $\mathcal{D}_t(f,g)$ is proved under some regularity conditions.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 14 июня 2001 г.