Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 278, 2001 г.

Л. В. Розовский

О НИЖНЕЙ ГРАНИЦЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ВЫБОРОЧНОГО СРЕДНЕГО ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ УСЛОВИЯ КРАМЕРА

1. Результаты

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $X, X_1, X_2, \dots$ Всюду ниже мы будем предполагать, что случайная величина X невырождена и что
$$\mathbf{E}\, X^2 e^{\lambda X} < \infty \tag{1}$$
при некотором $\lambda > 0$.

Предположение (1), чуть более сильное, чем стандартное условие Крамера $L(\lambda) = \mathbf{E}\, e^{\lambda X} < \infty$, обеспечивает при $0 < u \leqslant \lambda$ существование функций
$$m(u) = \big(\ln L(u)\big)', \quad \sigma^2(u) = m'(u), \quad Q(u) = um(u) - \ln L(u), \tag{2}$$
хорошо известных в задачах о больших уклонениях.

Напомним (например, [1]), что
$$-\infty \leqslant \lim_{u \downarrow 0} m(u) = m(0) = \mathbf{E}\, X < +\infty \tag{3}$$
и что при $m(0) < x \leqslant m(\lambda)$
$$\sup_{u>0}(ux - \ln L(u)) = Q(h), \tag{4}$$
где $h = h(x)$ является единственным решением уравнения
$$m(h) = x. \tag{5}$$

Нашей основной целью является изучение асимптотического поведения вероятности $\mathbf{P}\left(\bar{X}_n \geqslant x\right)$, где $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$, когда $x \geqslant$

Работа над статьей была поддержана грантами РФФИ No. 99-01-00724, ведущих научных школ No. 00-15-96019 и Минобразования E00-1.0-45.

$x_n > \mathbf{E}X$, а последовательность x_n выбирается таким образом, чтобы $\bar{X}_n$ находилось в зоне больших уклонений, то есть так, чтобы $\mathbf{P}\left(\bar{X}_n \geqslant x_n\right) \to 0$.

Аналогичное исследование при *неположительных* $X_1, X_2, \ldots$ (и для $x = x_n$) было проведено в [2] (заметим, что при $X \leqslant 0$ условие (1) выполняется с *любым* $\lambda > 0$). Точнее, в [2] рассматривалась вероятность $\mathbf{P}\left(\bar{X}_n \leqslant x_n\right)$, в предположении *неотрицательности* слагаемых $X_1, X_2, \ldots$, однако одна постановка задачи переходит в другую, если X_j заменить на $-X_j$.

В дальнейшем, все пределы, если это не оговорено особо, берутся при $n \to \infty$.

Теорема 1. *При всех x, $m(0) < x \leqslant m(\lambda)$, и всех $n \geqslant 1$*

$$e^{-nQ(h)} \geqslant \mathbf{P}\left(\bar{X}_n \geqslant x\right) \geqslant e^{-nQ(h)-c\left(1+\sqrt{nQ(h)}\right)}, \tag{6}$$

где c – некоторая постоянная, которая не зависит от x и n.

Теорема 1 является уточнением и обобщением ключевой леммы 2.3 из [2]. Ее, кроме того, можно трактовать, как уточнение и дополнение известной теоремы Чернова[3] (см.также (4) и следствие 2 ниже).

Заметим, что оценка сверху в (6) хорошо известна (например, [2]–[4]). Также отметим, что точные неасимптотические верхние и нижние оценки для вероятности из (6) без каких-либо дополнительных предположений были найдены в [10].

Следствие 1. *Если $\mathbf{E}X < x_n \leqslant m(\lambda)$ и h_n является решением уравнения $m(h_n) = x_n$, то*

$$\mathbf{P}\left(\bar{X}_n \geqslant x_n\right) \to 0 \tag{7}$$

тогда и только тогда, когда

$$n\,\mathbf{E}\left(1 \wedge h_n^2 X^2\right) \to \infty. \tag{8}$$

С помощью следствия 1 можно вычислить "наименьшую" нижнюю границу x_n для больших уклонений выборочного среднего.

Следствие 2. *Пусть положительная последовательность $h_n \to 0$ таким образом, что имеет место (8). Тогда (см.обозначения в (2)–(5)) равномерно по x, $m(h_n) \leqslant x \leqslant m(\lambda)$,*

$$\lim \frac{-\ln \mathbf{P}\left(\bar{X}_n \geqslant x\right)}{nQ(h)} = 1. \tag{9}$$

Следствия 1 и 2 являются обобщением на случай неограниченных слагаемых и уточнением (рассматривается интервал изменения x) теоремы 2.1 из [2].

Соотношение (9) позволяет найти логарифмическую асимптотику $\mathbf{P}\left(\bar{X}_n \geqslant x\right)$ при $n \to \infty$. Для того чтобы исследовать асимптотическое поведение собственно вероятности $\mathbf{P}\left(\bar{X}_n \geqslant x\right)$, мы, так же как в [2], сделаем следующее дополнительное предположение.

Будем говорить, что случайная величина X удовлетворяет условию стохастической компактности Феллера, или стохастически компактна, если

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{x^2\ \mathbf{P}\left(|X|>x\right)}{\mathbf{E}\, X^2\, I[|X|\leqslant x]} < \infty. \tag{10}$$

Заметим, что соотношение (10) заведомо выполняется, когда X принадлежит области притяжения какого-либо устойчивого закона, и что X в (10) можно заменить на $X^- = X \wedge 0$.

Теорема 2. *Предположим, что X стохастически компактна. Пусть $0 < h_n \leqslant \varepsilon_n$, причем h_n удовлетворяет условию* (8)*, а $\varepsilon_n \to 0$ сколь угодно медленно.*

Тогда равномерно по $x \in [m(h_n), m(\varepsilon_n)]$

$$\mathbf{P}\left(\bar{X}_n \geqslant x\right) = \frac{1}{h\sigma(h)\sqrt{2\pi n}}\, e^{-n\,Q(h)}\,(1+o(1)), \tag{11}$$

где h удовлетворяет уравнению (5).

Замечание 1. Результат, аналогичный равенству (11) при $x = m(h_n)$ и $X \leqslant 0$, получен в [2, теорема 4.1].

Замечание 2. Асимптотика для $\mathbf{P}\left(\bar{X}_n \geqslant x\right)$ при $m(\varepsilon_n) < x \leqslant m(\lambda - \varepsilon_n)$ найдена в [1]. Точнее, там доказано, что соотношения типа (11) выполняются равномерно по $m(\varepsilon) < x \leqslant m(\lambda-\varepsilon)$ при *любом* $\varepsilon > 0$. Возможность замены здесь ε на ε_n следует из общих соображений (например, [5, гл. 10, лемма 6]).[1] Отметим, что результаты из [1] справедливы без предположения (10) и что асимптотические формулы для $\mathbf{P}\left(\bar{X}_n \geqslant x\right)$ отличаются друг от друга

[1] Определенная модификация рассуждений из [1] позволяет расширить правую границу больших уклонений до $m(\lambda)$.

в зависимости от того, решетчата или нет случайная величина X.

Введем дополнительные обозначения. При $x > 0$ положим

$$R(x) = \mathbf{P}\left(|X| > x\right), \quad D(x) = \mathbf{E}\, X^2\, I[|X| \leqslant x], \quad G(x) = \mathbf{E}\,(x^2 \wedge X^2). \tag{12}$$

Замечание 3. Пусть положительная последовательность b_n при $n > n_0$ удовлетворяет соотношению

$$0 < c_1 \leqslant n\, G(b_n)/b_n^2 \leqslant c_2 < \infty, \tag{13}$$

где c_1, c_2 – некоторые постоянные (можно, например, положить $c_1 = c_2 = 1$; при этом, решение уравнения $n\, G(b_n) = b_n^2$ будет единственным, поскольку функция $G(x)/x^2$ строго убывает). Тогда, если случайная величина X стохастически компактна, то соотношение (8) равносильно предположению $\liminf h_n\, b_n = \infty$; кроме того,

$$m(h_n) \leqslant \mathbf{E}\, X\; I[X \geqslant -b_n] + \rho_n\, \frac{b_n}{n}, \tag{14}$$

где $0 < \rho_n \to \infty$ сколь угодно медленно.

Из теоремы 2 и условия (14) вытекает утверждение, которое дополняет следствия 1 из [6] и [7].

Следствие 3. *Пусть X принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем $\alpha \in (1, 2]$. Предположим, что $\mathbf{E}\, X = 0$ и что последовательность b_n удовлетворяет условию (13). Тогда соотношение (11) выполняется равномерно по x, $\rho_n\, \frac{b_n}{n} \leqslant x \leqslant \varepsilon_n$, где положительные последовательности ε_n и ρ_n как угодно медленно стремятся к нулю и бесконечности, соответственно.*

Отметим, что граница снизу для x является точной в том смысле, что ρ_n в ней нельзя заменить никакой постоянной.

Замечание 4. Условия на левый хвост распределения случайной величины X в следствии 3 можно ослабить. Достаточно требовать, чтобы

$$\mathbf{P}\left(X < -x\right) = (1 + o(1))\, R_0(x), \quad x \to \infty, \tag{15}$$

где $x^\delta\, R_0(x) \downarrow$ $(\exists\, 1 < \delta < 2)$.

Следствие 4. *Пусть выполняется условие* (15), *причем*

$$x^{\delta}\, R_0(x) \downarrow\ (\exists\, 0<\delta<1), \quad x^{\gamma}\, R_0(x) \uparrow\ (\exists\, 0<\gamma<2). \tag{16}$$

Предположим также, что

$$x\, R_0(x) \to \infty,\ x\to\infty, \tag{17}$$

и что b_n удовлетворяет (13). *Тогда* (11) *справедливо равномерно по x, $-\varepsilon_n \frac{b_n}{n} \leqslant x \leqslant -\rho_n$, где $0<\varepsilon_n \to 0$, $0<\rho_n\to\infty$ как угодно медленно.*

Заметим, что условия (15)–(17) выполняются, если X принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем $0<\alpha<1$ и что в этом случае граница снизу для x неулучшаема (ε_n нельзя заменить постоянной).

Соотношение (11) можно дополнить.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.

Если X имеет нерешетчатое распределение, то равномерно по x, $m(h_n)\leqslant x\leqslant m(\varepsilon_n)$, и $y\geqslant\varepsilon_n$

$$\mathbf{P}\left(x+\frac{y}{n} > \bar{X}_n \geqslant x\right) = \frac{1-e^{-hy}}{h\sigma(h)\sqrt{2\pi n}}\, e^{-n\,Q(h)}\,(1+o(1)). \tag{18}$$

Если X имеет решетчатое распределение с точками роста вида $a+N\,H(N$ целое$)$, где a – некоторое число, H – максимальный шаг распределения, то соотношение (18) *выполняется равномерно по $x=a+k\,\frac{H}{n}\in[m(h_n),m(\varepsilon_n)](k$ целое$)$ и $y=l\,H(l$ положительное целое$)$.*

Здесь h удовлетворяет уравнению (5).

Следствие 5. *Пусть X принимает с положительными вероятностями значения вида $a+N\,H$ (N целое), где a – некоторое число, H – максимальный шаг распределения. Если nx принимает лишь значения вида $na+N\,H$ (N целое), то*

$$\mathbf{P}\left(X_1+\cdots+X_n = nx\right) = \frac{H}{\sigma(h)\sqrt{2\pi n}}\, e^{-n\,Q(h)}\,(1+o(1))$$

равномерно по $x\in[m(h_n),m(\varepsilon_n)]$.

Замечание 5. В условиях теоремы 3 справедливы утверждения, аналогичные следствиям 3 и 4. Кроме того (см. замечание 2), правую границу интервала изменения x, как в теореме 3, так и в следствиях 3–5, можно расширить до $m(\lambda)$.

2. Доказательство теоремы 1

Положим $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Известно (например, [5, гл.8]), что при любом u, $0 < u \leqslant \lambda$,

$$\mathbf{P}\bigl(S_n \geqslant x\,n\bigr) = L^n(u)\,\mathbf{E}\,e^{-u\bar{S}_n} I[\bar{S}_n \geqslant x\,n] = e^{-nQ(u)} I_n(u), \tag{19}$$

где $\bar{S}_n = \bar{S}_n(u) = X_1(u) + \cdots + X_n(u)$ – сумма независимых случайных величин с общей функцией распределения $\frac{1}{L(u)} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{uy}\,d\,\mathbf{P}\bigl(X < y\bigr)$ (напоминаем, что $\mathbf{E}\,X_1(u) = m(u)$, $\mathbf{Var} X_1(u) = \sigma^2(u)$),

$$\begin{aligned} I_n(u) &= \mathbf{E}\,e^{-u\sigma(u)\sqrt{n}Z_n(u)} I[Z_n(u) \geqslant \frac{\sqrt{n}\,(x - m(u))}{\sigma(u)}],\\ Z_n(u) &= \frac{\bar{S}_n - \mathbf{E}\,\bar{S}_n}{\sqrt{\mathbf{Var}\,\bar{S}_n}}. \end{aligned} \tag{20}$$

Пусть h является решением уравнения (5). Тогда $I_n(h) \leqslant 1$, откуда следует левая часть оценки (6). Далее, если $m(u) > x$ (или $u > h$), то

$$\begin{aligned} I_n(u) \geqslant e^{-u\,n\,(m(u)-x)}\,\mathbf{P}\bigl(|Z_n(u)| \leqslant \frac{\sqrt{n}\,(m(u) - x)}{\sigma(u)}\bigr) \geqslant \\ e^{-u\,n(m(u)-x)}\left(1 - \frac{\sigma^2(u)}{n\,(m(u) - x)^2}\right); \end{aligned} \tag{21}$$

$$I_n(\lambda) \geqslant e^{-\lambda\,\sigma(\lambda)\sqrt{2kn}}\,\mathbf{P}\bigl(0 \leqslant Z_n(\lambda) \leqslant \sqrt{2k}\bigr),\ k > 0. \tag{22}$$

Положим $a(u) = u^2\,\sigma^2(u)/Q(u)$. Имеем,

$$a = \sup_{0<u\leqslant\lambda} a(u) < \infty. \tag{23}$$

Действительно, если $0 < u_0 \leqslant u \leqslant \lambda$, то $a(u) \leqslant \frac{1}{Q(u_0)} \sup\limits_{u_0\leqslant u\leqslant\lambda} u^2\sigma^2(u)$, так как $Q(u)\uparrow$; кроме того, так же, как в [2, лемма 2.2], можно показать, что при $u \to 0$

$$Q(u) \asymp \mathbf{E}\bigl(1 \wedge u^2X^2\bigr), \quad u^2\,\sigma^2(u) = O(\,\mathbf{E}\bigl(1 \wedge u^2X^2\bigr)), \tag{24}$$

откуда следует, что $a(u) \leqslant c_1$, $0 < u < u_0$, где c_1 не зависит от u.

При $t \in [h, \lambda]$ положим $\xi(t) = t\,(m(t) - x)$. Очевидно,

$$Q(u) - Q(h) = \int_h^u t m'(t) dt = \xi(u) - \int_h^u (m(t) - m(h)) dt \leqslant \xi(u),\ h \leqslant u \leqslant \lambda. \tag{25}$$

Обозначим (см.(23) и (5)) $\nu = nQ(h)/a,\ \varepsilon = (1 + \sqrt{1 + 2\nu})/\nu$.

Сначала рассмотрим случай

$$\xi(\lambda) \geqslant \varepsilon\, Q(h). \tag{26}$$

Пусть u является решением уравнения $\xi(u) = \varepsilon\, Q(h)$ (такое решение существует и единственно, поскольку функция $\xi(t)$ строго возрастает на $[h, \lambda]$). Тогда по (25), (23)

$$Q(u) \leqslant Q(h) + \xi(u) = (1 + \varepsilon)\, Q(h), \quad u\,(m(u) - x) = \xi(u) = \varepsilon\, Q(h),$$
$$\frac{\sigma^2(u)}{n(m(u) - x)^2} = \frac{u^2 \sigma^2(u)}{n \xi^2(u)} \leqslant \frac{a\, Q(u)}{n \varepsilon^2\, Q^2(h)} \leqslant \frac{(1 + \varepsilon)\, a}{n \varepsilon^2\, Q(h)} = \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon^2\, \nu} = \frac{1}{2},$$

откуда и по (19)–(21), (26) получим

$$\mathbf{P}\left(S_n \geqslant x\, n\right) \geqslant \frac{1}{2}\, e^{-(1+2\varepsilon) n Q(h)},\ m(0) < x \leqslant m(\lambda) - \varepsilon\, Q(h)/\lambda. \tag{27}$$

Принимая во внимание определение параметра ε, заключаем, что оценка снизу в (6) справедлива при $m(0) < x < m(\lambda) - \varepsilon\, Q(h)/\lambda$ с постоянной $c = \max(4a + \ln 2, 2\sqrt{2a})$.

Пусть теперь

$$\xi(\lambda) < \varepsilon\, Q(h), \text{ или } 0 \leqslant m(\lambda) - x < \varepsilon\, Q(h)/\lambda. \tag{28}$$

Тогда по (22), (23)

$$\begin{gathered} \mathbf{P}\left(S_n \geqslant x\, n\right) \geqslant \mathbf{P}\left(S_n \geqslant m(\lambda)\, n\right) \geqslant \\ e^{-nQ(\lambda) - \sqrt{2kn\lambda^2\, \sigma^2(\lambda)}}\, \mathbf{P}\left(0 \leqslant Z_n(\lambda) \leqslant \sqrt{2k}\right) \geqslant \\ e^{-nQ(\lambda) - \sqrt{2ka\, n\, Q(\lambda)}} \left(\int_0^{\sqrt{2k}} \Phi(dx) - \Delta_n \right), \end{gathered} \tag{29}$$

где $\Phi(x)$ – стандартное нормальное распределение, а $\Delta_n \to 0$ в силу центральной предельной теоремы (напоминаем, что

$\mathbf{V}arX_1(\lambda) = \sigma^2(\lambda) < \infty$ по условию (1)). Далее, по (25) и (28) $Q(\lambda) \leqslant Q(h) + \xi(\lambda) < (1+\varepsilon)\, Q(h)$ и, следовательно,

$$n\, Q(\lambda) + \sqrt{2ka\, n\, Q(\lambda)} < (1+\varepsilon) n\, Q(h) + \sqrt{2ka\,(1+\varepsilon)\, n\, Q(h)}$$
$$= n\, Q(h) + a(1+\sqrt{k})(1+\sqrt{1+2\nu}) \leqslant nQ(h) + (1+\sqrt{k})(2a+\sqrt{2an\, Q(h)}).$$

Отсюда и из (29) при всех $n \geqslant n_0$ получим правую часть соотношения (6) уже в диапазоне (28).

Наконец, рассмотрим случай $1 \leqslant n \leqslant n_0$. Вернемся к соотношению (29) и положим в нем $k = n\, A^2/2,\ A > 0$. Имеем (см. (19), (20)) при достаточно большом A

$$\mathbf{P}\left(0 \leqslant Z_n(\lambda) \leqslant A\sqrt{n}\right) \geqslant \left(\mathbf{P}\left(0 \leqslant X_1(\lambda) - m(\lambda) \leqslant A\sigma(\lambda)\right)\right)^n > c,$$

где положительное c зависит лишь от распределения случайной величины X (напоминаем, что $m(\lambda) = \mathbf{E}\, X_1(\lambda)$ и $0 < \sigma^2(\lambda) < \infty$). Теорема 1, таким образом, доказана.

Следствие 1 несложно выводится из (6) и (24), а следствие 2 – из (6) и следствия 1.

3. Доказательство теорем 2 и 3

Пусть $0 < u \leqslant \lambda$. Обозначим через $F^{(u)}(x)$ функцию распределения $Z_n(u)$ (см. (19), (20)), а через $f^{(u)}(t)$ – ее характеристическую функцию. Положим

$$\delta^{(u)}(t) = f^{(u)}(t) - e^{-t^2/2},\ \ \delta_\varepsilon(u) = \int\limits_0^{1/\varepsilon} |\delta^{(u)}(t)|\, dt\ \ (\varepsilon > 0). \tag{30}$$

Лемма 1. *Пусть* $0 < y \leqslant \infty,\ 0 < h \leqslant \lambda$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\,(0 \leqslant \bar{X}_n - m(h) < \frac{y}{n}) =$$
$$L^n(h) e^{-n\, h\, m(h)} \left(\int\limits_0^{y\, h/\tau} e^{-\tau t}\, \Phi(dt) + \theta\, \frac{1 - e^{-h\, y}}{\tau}\, \varepsilon^{(h)}(y) \right), \tag{31}$$

где (см. (2))

$$\tau = h\, \sigma(h)\sqrt{n},\ \varepsilon^{(h)}(y) = \inf_{\varepsilon > 0} \{\delta_\varepsilon(h) + (1 + \delta_\varepsilon(h))(1 + \frac{1}{y\, h})\, \tau\varepsilon\}, \tag{32}$$

$|\theta| \leqslant c$, *а* c *– некоторая абсолютная постоянная.*

Доказательство леммы 1. Обозначим для краткости $L(h)$, $m(h)$ через L и m , соответственно, и положим $\bar{y} = y\,h/\tau$. Так же, как в (19) получим

$$\mathbf{P}\,(0 \leqslant \frac{S_n - n\,m}{\sigma(h)\sqrt{n}} < \bar{y}) = L^n\,e^{-n\,h\,m} \int\limits_0^{\bar{y}} e^{-\tau t}\,F^{(h)}(dt). \tag{33}$$

Пусть $\Delta(t) = F^{(h)}(t) - \Phi(t)$. Очевидно,

$$\int\limits_0^{\bar{y}} e^{-\tau t}\,F^{(h)}(dt) = \int\limits_0^{\bar{y}} e^{-\tau t}\,\Phi(dt) + \int\limits_0^{\bar{y}} e^{-\tau t}\,\Delta(dt). \tag{34}$$

Обозначим второй интеграл в правой части (34) через J и оценим его. Имеем,

$$J \leqslant e^{-\tau\bar{y}}\,|\Delta(\bar{y}) - \Delta(0)| + \tau \int\limits_0^{\bar{y}} |\Delta(t) - \Delta(0)|\,e^{-\tau t}dt. \tag{35}$$

Нам понадобится следующий результат, аналог которой был доказан в [8, леммы 3 и 4].

Лемма 2. *Пусть* $x, \varepsilon > 0$. *Тогда* (*см.* (30), (34))

$$\sup_z |\Delta(x+z) - \Delta(z)| \leqslant c_1\,(\varepsilon + (x+\varepsilon)\,\delta_\varepsilon(h)),$$

где c_1 *– некоторая абсолютная постоянная.*

Используя эту оценку в (35) и учитывая, что $e^{-t} \leqslant \frac{1-e^{-t}}{t}$, легко найдем

$$J \leqslant c_1\,\frac{1-e^{-\tau\,\bar{y}}}{\tau}\,(\delta_\varepsilon(h) + \varepsilon\,(1+\delta_\varepsilon(h))\,(\tau + 1/\bar{y})).$$

Соотношение (31) следует из (33), (34) и оценки для J. Лемма 1 доказана.

Лемма 3. *Пусть* $\tau, \beta > 0$. *Тогда*

$$\frac{1-e^{-\tau\,\beta}}{\tau\sqrt{2\pi}} > \int\limits_0^{\beta} e^{-\tau t}\,\Phi(dt) > \frac{1-e^{-\tau\,\beta}}{\tau\sqrt{2\pi}}\,(1 - 1/\tau^2). \tag{36}$$

Доказательство леммы 3. Учитывая, что

$$U = \tau\sqrt{2\pi}\int\limits_0^\beta e^{-\tau t}\,\Phi(dt) = \tau\int\limits_0^\beta e^{-\tau t - t^2/2}\,dt,$$

а $e^{-t^2/2}\in[1-t^2/2,\,1]$, находим $1-e^{-\tau\beta} > U > 1-e^{-\tau\beta}-\frac{\tau}{2}\int\limits_0^\beta e^{-\tau t}\,t^2\,dt$. Отсюда и из оценки

$$\tau\int\limits_0^\beta e^{-\tau t}\,t^2\,dt < \frac{2}{\tau^2}\,(1-e^{-\tau\beta}),$$

которую можно получить интегрированием по частям, следует соотношение (36). Лемма 3 доказана.

Докажем вначале теорему 3 (нерешетчатый случай). Воспользуемся леммами 1 и 3 при $\beta = y\,h/\tau$ и h из условия (5). Имеем (см. (32)),

$$\mathbf{P}\,(x \leqslant \bar X_n < x+\frac{y}{n}) = \frac{1-e^{-hy}}{\tau\sqrt{2\pi}}\,L^n(h)e^{-hx}(1+\theta\,(\frac{1}{\tau^2}+\varepsilon^{(h)}(y))). \quad (37)$$

Учитывая (см. [2, лемма 4.1(a)] и (12)), что

$$\sigma^2(u)\asymp G(1/u),\ \ u\to 0, \quad (38)$$

и принимая во внимание условие (8), получим равномерно по $x\in[m(h_n), m(\varepsilon_n)]$

$$\tau = h\,\sigma(h)\sqrt{n}\to\infty. \quad (39)$$

Для $s\geqslant s_0>0$, где $s_0>0$ достаточно мало, положим

$$\rho(s) = \sup_{s_0\leqslant|t|\leqslant s,\ 0\leqslant u\leqslant\lambda}|\,\mathbf{E}\,e^{itX_1(u)}|, \quad (40)$$

и пусть $n\geqslant s_n\uparrow\infty$ таким образом, чтобы

$$\rho(s_n)\leqslant 1-\frac{1}{\sqrt{n}} \quad (41)$$

(такая последовательность s_n существует, поскольку случайная величина X_1 и, следовательно, $X_1(u)$, имеет нерешетчатое распределение, откуда $\rho(s)<1$ при *любом* $s>s_0$).

Положим $\varepsilon_n = 1/\sqrt{s_n}$, $\gamma = \varepsilon_n^2\, h/\tau$ (см. (32)).

Принимая во внимание (37), (39), достаточно показать, что

$$\sup_{y \geqslant \varepsilon_n} \varepsilon^{(h)}(y) = \varepsilon^{(h)}(\varepsilon_n) \to 0, \; h_n \leqslant h \leqslant \varepsilon_n. \tag{42}$$

Имеем с учетом выбора γ

$$\varepsilon^{(h)}(\varepsilon_n) \leqslant \delta_\gamma(h) + (1 + \delta_\gamma(h))\, 2\, \varepsilon_n. \tag{43}$$

Оценим $\delta_\gamma(h)$, $h_n \leqslant h \leqslant \varepsilon_n$. Имеем (см. (30))

$$\delta_\gamma(h) \leqslant \int\limits_0^\alpha |\delta^{(h)}(t)| dt + \int\limits_\alpha^\infty e^{-t^2/2} dt +$$

$$+ \int\limits_\alpha^{s_0\tau/h} |f^{(h)}(t)| dt + \int\limits_{s_0\tau/h}^{\varepsilon_n^{-2}\tau/h} |f^{(h)}(t)| dt = I_1 + \cdots + I_4, \tag{44}$$

где

$$\alpha = \frac{\tau}{4\mu(h)}, \quad \mu(h) = \frac{h}{\sigma^2(h)}\, \mathbf{E}\, |X_1(u)|^3.$$

С учетом (38) несложно проверить (например, [2, лемма 4.1]), что

$\mu(h) \leqslant c_1$, $0 < h < h_0$, где, здесь и ниже, $c_1, c_2, \ldots$ – некоторые постоянные. Отсюда и из [5, гл.5, лемма 1], найдем

$$I_1 + I_2 \leqslant c_2/\tau, \quad 0 < h < h_0. \tag{45}$$

Далее (см. (40), (41), (30))

$$I_4 \leqslant \varepsilon_n^{-2} \sigma(h) \sqrt{n}\, \rho^n(\varepsilon_n^{-2}), \; h_n \leqslant h \leqslant \varepsilon_n. \tag{46}$$

Используя тождество (см. (12))

$$G(x) = 2 \int\limits_0^x uR(u) du, \tag{47}$$

можно показать, что при условии (10)

$$G(x)/x^{2-\omega} \downarrow \; (\exists 0 < \omega < 2), \tag{48}$$

и, следовательно, $G(1/h) \leqslant c_3\, h^{\omega-2},\ 0<h\leqslant h_0$. Отсюда и из (24) (или (38)) следует

$$\sigma^2(h) \leqslant c_4\, h^{\omega-2} \leqslant c_4\, h_n^{\omega-2},\ h_n \leqslant h \leqslant h_0. \tag{49}$$

С другой стороны, из условий (8) и (49) вытекает, что

$$\frac{1}{n} \leqslant \mathbf{E}\,(1\wedge h_n^2 X^2) = h_n^2\, G(1/h_n) \leqslant c_3\, h_n^{\omega},\ n>n_0,$$

или $\frac{1}{h_n} \leqslant (c_3\, n)^{1/\omega},\ n>n_0$.

Из сказанного, (46) и (41) (напоминаем, что $s_n \leqslant n$) следует

$$I_4 \leqslant c_5\, n^{\frac{1+\omega}{\omega}}\,(1-\sqrt{n})^n \to 0. \tag{50}$$

Оценим I_3 (см.(44)). Положим $f_h(t) = \mathbf{E}\, e^{itX_1(h)}$. Рассуждая так же, как в [7, (48)–(50)], получим при $0<h<h_0$ и $\varepsilon_0 h \leqslant |t| \leqslant s_0$ (см. (12))

$$\mathbf{Re}(f_h(t)-1) \leqslant -\tfrac{1-\cos 1}{L(h)}\, e^{-h/|t|} D(1/|t|) \leqslant -c_6 t^2 G(1/|t|), \tag{51}$$

$$|f_h(t)-1| \leqslant c_7\left(t^2 G(1/|t|) + |\,\mathbf{E}\, XI[|X|\leqslant 1/|t|]|\right). \tag{52}$$

Учитывая (см.[2, (2.9)], что $\mathbf{E}^{\,2} XI[|X|\leqslant 1/|t|] = o(D(1/|t|)),\, t\to 0$, если $\mathbf{E}\, X^2 = \infty$ или $\mathbf{E}\, X^2 < \infty$ и $\mathbf{E}\, X = 0$ (без потери общности), из (51), (52) при достаточно малом s_0 найдем

$$|f_h(t)| \leqslant e^{\mathbf{Re}(f_h(t)-1)+|f_h(t)-1|^2} \leqslant e^{-c_8 t^2 G(1/|t|)},$$
$$0<h<h_0,\ \varepsilon_0 h \leqslant |t| \leqslant s_0. \tag{53}$$

Обозначим $n\, t^2 G(1/|t|)$ через $Z(t)$. Тогда (см. (44), (53), (38) и (47))

$$I_3 = \frac{\tau}{h}\int\limits_{\alpha h/\tau}^{s_0} |f_h(t)|^n dt \leqslant \frac{\tau}{h}\int\limits_{c_9 h}^{s_0} e^{-c_8 Z(t)} dt. \tag{54}$$

Из (48) следует, что $t/Z^{\frac{1}{\omega}}(t) \downarrow$ на $(0, s_0]$, а из (47) и (10) – что

$$Z(t) \leqslant c_{10}\, t Z'(t),\ 0<t\leqslant s_0.$$

Отсюда и из (54) получим

$$I_3 \leqslant c_{10}\,\frac{\tau}{h}\int\limits_{c_9 h}^{s_0} e^{-c_8 Z(t)} t\,dZ(t)/Z(t) \leqslant$$

$$\leqslant c_{10}\,\frac{\tau}{h}\,\frac{c_9 h}{Z^{1/\omega}(c_9 h)}\int\limits_{c_9 h}^{s_0} e^{-c_8 Z(t)}\,Z^{\frac{1-\omega}{\omega}}(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant c_{11}\,\frac{\tau}{Z^{1/\omega}(c_9 h)}\int\limits_{c_8 Z(c_9 h)}^{\infty} e^{-u}\,u^{\frac{1-\omega}{\omega}}\,du,$$

но $Z(c_9 h) \geqslant c_9^2 Z(h)$ (если $c_9 \geqslant 1$), а $Z(h) \geqslant c_{12}\tau^2$ (см. (38)). Поэтому, с учетом условия (8),

$$I_3 \leqslant \frac{c_{13}}{\tau}\,e^{-c_{14}\tau^2} \to 0, \tag{55}$$

равномерно по $h_n \leqslant h \leqslant \varepsilon_n$.

Таким образом (см. (37), (39), (43)–(45), (50), (55) и (42)), первая часть теоремы 3 доказана.

Перейдем к решетчатому случаю. Для удобства положим $a = 0$, $H = 1$. Имеем при $0 < h \leqslant \lambda$ и любых целых $k \geqslant 0$ и $x \in (m(0), m(\lambda)]$

$$p_k = \mathbf{P}\,(\bar{X}_n = x + \frac{k}{n}) = L^n(h)\,e^{-h\,(n\,x+k)}\frac{h}{2\pi\tau}\,I_k, \tag{56}$$

где $I_k = \int\limits_{|t|\leqslant\frac{\pi\tau}{h}} f^{(h)}(t)e^{-it\frac{h}{\tau}(n\,x+k-n\,m(h))}dt$, а прочие обозначения заимствованы в (30), (32).

Пусть h удовлетворяет уравнению (5). Так же, как в (44)

$$\begin{aligned} I_k = \int\limits_{|t|\leqslant\alpha} e^{-t^2/2-i\,t\,k\,\frac{h}{\tau}}dt + \theta_1\int\limits_{|t|\leqslant\alpha}|\delta^{(h)}(t)|dt+ \\ \theta_2\int\limits_{\alpha<|t|\leqslant s_0\tau/h}|f^{(h)}(t)|dt + \theta_3\int\limits_{s_0\tau/h<|t|\leqslant\pi\frac{\tau}{h}}|f^{(h)}(t)|dt, \quad |\theta_i| \leqslant 1. \end{aligned} \tag{57}$$

Первый интеграл в правой части (57) равен

$$\sqrt{2\pi}\,e^{-(\frac{k\,h}{\tau})^2/2} + \theta_4\int\limits_{|t|>\alpha} e^{-t^2/2}dt, \quad |\theta_4| \leqslant 1;$$

второй и третий оцениваются аналогично (45), (55) и при всех достаточно больших n не превосходят c_1/τ, а четвертый не более $\frac{\pi\tau}{h}\, q^n$, где

$$q = \sup_{0<h\leqslant\lambda,\, s_0\leqslant|t|\leqslant\pi} |f_h(t)| < 1$$

поскольку $X_1(h)$ имеет решетчатое распределение с максимальным шагом 1 (см. также [9, лемма 3.2]).

Вторая часть теоремы 3 следует из (56), (57) (см. также (49) и (8)) и вышесказанного, так как

$$\sum_{k=0}^{y-1} e^{-k\,h-(\frac{k\,h}{\tau})^2/2} \sim \frac{1-e^{-h\,y}}{h},$$

равномерно по целым $y \geqslant 1$ и h, $h_n \leqslant h \leqslant \varepsilon_n$.

Теорема 3 полностью доказана.

Теорема 2 при нерешетчатом X – следствие теоремы 3 ($y = \infty$). То же справедливо, если X имеет решетчатое распределение и $x = x_{k,n} = a + k\,\frac{H}{n}$ (см. обозначения в теореме 3). Остается проверить, что если $x_{k,n} < x < x_{k+1,n}$ $(\exists\, k \in N)$, то при $h = h(x)$ и $h_* = h(x_{k+1,n})$ (см.(5))

$$h \sim h_*, \quad \sigma(h) \sim \sigma(h_*), \quad n\,Q(h) \sim n\,Q(h_*) + o(1) \tag{58}$$

равномерно по $k \in N$.

Действительно,

$$\frac{1}{n} \geqslant x_{k+1,n} - x = m(h_*) - m(h) = (h_* - h)\sigma^2(\theta),\ \ h < \theta < h_*. \tag{59}$$

Отсюда, из (24), (8) и того, что $h_* \geqslant h_n$, найдем

$$0 \leqslant (h_* - h)/h_*^2 \leqslant c_4(n\,\mathbf{E}\,(1 \wedge h_*^2 X^2)^{-1} \to 0,$$

что доказывает первое соотношение в (58).

Далее (см. (44) и ниже, а также (38))

$$|\sigma^2(h_*) - \sigma^2(h)| \leqslant (h_* - h)\ \mathbf{E}\,|X_1(\theta)|^3 \leqslant$$
$$\leqslant c_1\,(h_* - h)\sigma^2(\theta)/\theta \leqslant c_2\,\frac{h_* - h}{h}\sigma^2(h),\ \ \theta \in (h, h_*),$$

откуда получим вторую формулу в (58). Наконец,

$$0 \leqslant n\,Q(h_*) - n\,Q(h) = n\,(h_* - h)\,\theta\,\sigma^2(\theta), \quad \theta \in (h, h_*),$$

но $n\,(h_* - h)\,\sigma^2(\theta) \leqslant 2$, $n > n_0$, а $\theta \leqslant h_* \to 0$ (см.(59) и (38)). Теорема 2 доказана.

Проверим (14). Имеем

$$m(h) = L'(h) - L'(h)\,(L(h) - 1)/L(h) \leqslant L'(h),\ 0 < h < h_0, \qquad (60)$$

если h_0 достаточно мало.

В самом деле, если $L'(0) \geqslant 0$, то $L'(h) \geqslant L'(0) \geqslant 0$ и $L(h) \geqslant L(0) = 1$, откуда

$$L'(h)\,(L(h) - 1) \geqslant 0. \qquad (61)$$

Если же $L'(0) < 0$, то $L'(h) < 0$, $0 \leqslant h \leqslant h_0$, и $L(h) \leqslant L(0) = 1$ в этом же интервале. Следовательно, условие (61) снова выполняется.

Положим $S(x) = \mathbf{E}\,X\,I[X \geqslant -x]$. Тогда (см. (12) и (1))

$$L'(h) \leqslant S(1/h) + h\ \mathbf{E}\,X^2\,\frac{e^{h\,X} - 1}{h\,X} I[h\,X \geqslant -1] \leqslant \\ \leqslant S(1/h) + h\,(e - 1)\,D(1/h) + o(h),\ h \to 0.$$

Отсюда и из (60) следует

$$m(h_n) \leqslant S(1/h_n) + e\,h_n\,D(1/h) + o(h),\ n > n_0. \qquad (62)$$

Пусть выполнено условие (13). Покажем, что соотношение (8) равносильно тому, что $h_n = \rho_n/b_n$, где $\rho_n \to \infty$ как угодно медленно. Действительно, используя свойство (48), видим

$$n\ \mathbf{E}\,\left(1 \wedge (\frac{\rho_n}{b_n})^2\,X^2\right) = n\,\frac{G(b_n)}{b_n^2}\,\rho_n^2\,\frac{G(b_n/\rho_n)}{G(b_n)} \in (c_1\,\rho_n^\omega, c_2\,\rho_n^2),\ n > n_0,$$

что приводит к соотношению (8).

С другой стороны, предположение $\liminf h_n\,b_n < \infty$ противоречит ему. Необходимое утверждение доказано.

При $h_n = \rho_n/b_n$

$$S(1/h_n) \leqslant S(b_n) + \frac{\rho_n}{b_n}\,D(b_n) \leqslant S(b_n) + c_2\,\rho_n\,\frac{b_n}{n},$$

$$h_n\,D(1/h_n) \leqslant c_2\,\rho_n\,\frac{b_n}{n},\ n > n_0.$$

Отсюда и из (62) следует (14). Замечание 3 обосновано.

Проверим следствие 3 и замечание 4. Сначала покажем, что если выполняется (15) и $x^\delta\,R_0(x) \downarrow$ $(\exists\,0 < \delta < 2)$, то случайная величина X удовлетворяет условию стохастической компактности.

Если $\mathbf{E}\,X^2 < \infty$, то условие (10), разумеется, выполняется. Пусть $\mathbf{E}\,X^2 = \infty$. Тогда (см. (12) и (47)) при $x \to \infty$

$$G(x) \sim 2 \int\limits_0^x u\,R_0(u)du \geqslant 2\,x^\delta\,R_0(x) \int\limits_0^x u^{1-\delta} du = \frac{2}{2-\delta}\,x^2\,R_0(x) \sim \frac{2}{2-\delta}\,x^2\,R(x),$$

откуда $D(x) = G(x) - x^2\,R(x) \geqslant \frac{1}{2-\delta}\,x^2\,R(x)$, $x > x_0$, и, следовательно, условие (10) выполняется.

Далее, поскольку $\mathbf{E}\,X = 0$, имеем при $x \to \infty$

$$S(x) \leqslant \mathbf{E}\,|X| I[|X| \geqslant x] \sim x\,R_0(x) + \int\limits_{|u|>x} R_0(u)du \leqslant x\,R_0(x) + x^\delta\,R_0(x) \int\limits_{|u|>x} u^{-\delta} du = \frac{\delta}{\delta-1}\,x\,R_0(x) \sim \frac{\delta}{\delta-1}\,x\,R(x) \leqslant \frac{\delta}{\delta-1}\,G(x)/x.$$

Таким образом, $S(b_n) \leqslant c_3\,b_n/n$, $n > n_0$, вследствие чего (см. (14))
$m(h_n) \leqslant 2\,\rho_n\,b_n/n$. Кроме того, если $\mathbf{E}\,X = 0$, то $0 < m(\varepsilon_n) \to 0$. Наконец, если $x = K\,b_n/n$, где K – положительная постоянная, то в силу условия (13) и того, что X принадлежит области притяжения устойчивого закона F_α с $\alpha \in (1, 2]$,

$$\liminf \mathbf{P}\,(\bar{X}_n > K\,b_n/n) = \liminf \mathbf{P}\,(\frac{S_n}{b_n} > K) \geqslant 1 - F_\alpha(c_4\,K) > 0.$$

Вышеизложенное доказывает следствие 3 и комментарии к нему.

Следствие 4 проверяется аналогично. Заметим лишь, что из условия (17) следует, что $\mathbf{E}\,X = -\infty$.

Литература

1. В. В. Петров, *О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **10**, № 2 (1965), 310–322.

2. N.C. Jain , W.E. Pruitt, *Lower tail probability estimates for subordinators and nondecreasing random walks.* — Ann. Probab. **15** no. 1 (1987), 76–101.
3. H. Chernoff, *A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations.* — Ann.Math.Statist. **23** no. 4 (1952), 493–507.
4. R.R. Bahadur, R. Ranga Rao, *On deviations of the sample mean.* — Ann. Math. Statist. **31** no. 4 (1960), 1015–1027.
5. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* М.: Наука, 1972, 416 с.
6. Л. В. Розовский, *Вероятности больших уклонений сумм независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения нормального закона.* — Теория вероятн. и ее примен. **34**, № 4 (1989), 686–705.
7. Л. В. Розовский, *Большие уклонения суммы независимых случайных величин из области притяжения устойчивого закона.* — Записки научн. семин. ПОМИ **228** (1996), 262–283.
8. L.V. Osipov, *On large deviations for sums of random vectors in R_k.* — J. Mult. Analysis **11** no. 2 (1981), 115–126.
9. T. Höglund, *A unified formulation of the central limit theorem for small and large deviations from the mean.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. **49** (1979), 105–117.
10. M. G. Hahn, M. J. Klass, *Approximation of partial sums of arbitrary i.i.d. random variables and the precision of the usual exponential upper bound.* — Ann. Prob. **25**, No. **3** (1997), 1451–1470.

Rozovskii L. V. On a lower bound of large– deviation probabilities for the sample mean under the Cramer condition.

Let $X_1, X_2, \dots$ be i.i.d. random variables, satisfying the condition

$$\mathbf{E}\, X_1^2 e^{\lambda X_1} < \infty \, (\exists \lambda > 0).$$

We investigate the asymptotic behavior of $\mathbf{P}\left(\bar{X}_n \geqslant x\right)$ as $n \to \infty$ provided that $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$, when $x \geqslant x_n > \mathbf{E}\, X_1$ and x_n is such that $\bar{X}_n$ is contained in a zone of large deviations, i.e. $\mathbf{P}\left(\bar{X}_n \geqslant x_n\right) \to 0$.

Санкт-Петербургская
Химико-Фармацевтическая Академия,
кафедра высшей математики

Поступило 15 декабря 2000 г.