Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 278, 2001 г.

Ю. И. Ингстер, И. А. Суслина

О МИНИМАКСНОМ ОБНАРУЖЕНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

1. Обнаружение сигналов большой размерности

Рассмотрим следующую задачу. Пусть наблюдается n-мерный гауссовский вектор $X = v+\xi$, $X = (X_1, ..., X_n)$, где $v = (v_1, ..., v_n) \in R^n$ – неизвестный вектор средних (его будем называть *сигналом*), а $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ – стандартный n-мерный гауссовский вектор (его будем называть *шумом*), т.е. случайные величины $\xi_1, ..., \xi_n$ независимы и $\xi_i \sim N(0,1)$. Задача обнаружения сигнала состоит в проверке гипотезы $H_0 : v = 0$ против альтернативы $H_1 : v \in V_n$, где V_n – заданное допустимое множество сигналов.

Будем считать размерность сигналов n большой. Точнее, нас будут интересовать асимптотика минимаксных вероятностей ошибок и (или) условия минимаксной различимости и неразличимости в этой задаче при $n \to \infty$, а также структура асимптотически минимаксных и состоятельных (в минимаксном смысле) последовательностей тестов для обнаружения сигналов. Именно, для любого теста $\psi = \psi_n(x)$ (под тестом понимается измеримая функция наблюдений, заданная на R^n со значениями в интервале [0,1]) рассмотрим вероятности ошибок I и II рода

$$\alpha(\psi) = E_0(\psi),\ \beta(\psi, v) = E_v(1-\psi),\ v \in V_n.$$

Пусть

$$\beta(\psi, V_n) = \sup_{v \in V_n} \beta(\psi, v)$$

максимальное значение вероятности ошибок II рода. Здесь E_v – среднее по гауссовской мере P_v на (R^n, B^n) со средним $v \in R^n$ и единичной матрицей ковариаций. Для заданного $\alpha \in (0,1)$ обозначим Ψ_α множество тестов с вероятностью ошибок I рода

Работа частично поддерживалась грантом Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 99-01-00111), грантом ведущих научных школ (номер проекта 00-15-96019).

не больше α и положим

$$\beta(\alpha, V_n) = \inf_{\psi \in \Psi_\alpha} \beta(\psi, V_n).$$

Легко видеть, что функция $\beta(\alpha, V_n)$ не возрастает и вогнута по $\alpha \in (0,1)$, а также справедливы неравенства $0 \le \beta(\alpha, V_n) \le 1-\alpha$.

Беличины $\beta(\alpha, V_n)$ будем называть *минимаксными вероятностями ошибок*.

Будем говорить, что гипотеза H_0 и альтернатива H_1 *состоятельно различимы*, если $\beta(\alpha, V_n) \to 0$ для любого $\alpha \in (0,1)$, и *асимптотически неразличимы*, если $\beta(\alpha, V_n) \to 1-\alpha$ для любого $\alpha \in (0,1)$. Последовательность тестов $\psi_{n,\alpha}$, такую что $\alpha(\psi_{n,\alpha}) \le \alpha + o(1)$, будем называть *асимптотически минимаксной*, если $\beta(\psi_{n,\alpha}, V_n) = \beta(\alpha, V_n) + o(1)$; и *состоятельной* (в минимаксном смысле), если $\beta(\psi_{n,\alpha}, V_n) \to 0$. Здесь и ниже для рассматриваемой задачи, если не оговорено противное, пределы рассматриваются при $n \to \infty$.

Легко видеть, что состоятельная различимость равносильна тому, что существует такая последовательность тестов ψ_n, что $\alpha(\psi_n) + \beta(\psi_n, V_n) \to 0$.

Будем называть задачу обнаружения *тривиальной*, если $\beta(\alpha, V_n) = 1-\alpha$. Для того, чтобы минимаксная задача была нетривиальной, т.е. $\beta(\alpha, V_n) < 1-\alpha$, для некоторого $\alpha \in (0,1)$, необходимо, чтобы допустимые множества сигналов V_n не содержали "слишком малых" сигналов. Пусть

$$V_n = V_{n,p}(\rho_n) = \{v \in R^n : \ |v|_p \ge \rho_n\}, \tag{1.1}$$

где

$$|v|_p = \Big(\sum_{i=1}^n |v_i|^p\Big)^{1/p}, \ 0 < p < \infty \tag{1.2}$$

есть l^p-норма в R^n (квази-норма при $p \in (0,1)$).

Для таких множеств V_n задача изучена в [6], (см. также [8]). Условия минимаксной различимости формулируются в терминах *критических радусов* ρ_n^*:

$$\rho_n^* = \rho_{n,p}^* = \begin{cases} n^{1/p-1/4}, & \text{при} \quad 0 < p \le 2, \\ n^{1/2p}, & \text{при} \quad 2 < p < \infty, \end{cases} \tag{1.3}$$

и имеют вид: для любого $\alpha \in (0,1)$

$$\beta(\alpha, V_n) \to 0 \text{ при } \quad \rho_n/\rho_n^* \to \infty; \tag{1.4}$$

$$\beta(\alpha, V_n) \to 1-\alpha \text{ при } \quad \rho_n/\rho_n^* \to 0. \tag{1.5}$$

При выполнении условия (1.4) цоцтоятельное обнаружение обеспечивается тестами вида

$$\psi_{n,\alpha} = \mathbf{1}_{\{t_n > T_\alpha\}}, \tag{1.6}$$

основанными на сравнении тестовых статистик

$$t_n = t_{n,p} = \begin{cases} (2n)^{-1/2}\sum_{i=1}^n (X_i^2 - 1), & \text{при} \quad 0 < p \le 2, \\ n^{-1/2}\sum_{i=1}^n (|X_i|^p - d_p)/s_p, & \text{при} \quad 2 < p < \infty \end{cases} \tag{1.7}$$

ц порогом T_α. Здесь величины $d_p = E|\xi|^p, c_p^2 = D|\xi|^p$ есть среднее и дисперсия случайной величины $|\xi|^p$, где ξ есть стандартная гауссовская случайная величина. Порог T_α выбирается из условия $\Phi(T_\alpha) = 1 - \alpha$. Здесь и далее $\Phi(t)$ есть функция распределения стандартного нормального закона.

Таким образом при $p \le 2$ тестовые статистики есть статистики типа хи-квадрат и не зависят от p. Отметим, что при $p = 2$ указанные тесты являются минимаксными (не асимптотически) для любого n, а при $p < 2$ – асимптотически минимаксными. Минимаксная вероятность ошибок при $p = 2$ выражается через функцию нецентрального хи-квадрат распределения ц n степенями свободы. Асимптотическое же выражение имеет вид при $p \le 2$:

$$\beta(\alpha, V_n) = \Phi(T_\alpha - u_n) + o(1), \tag{1.8}$$

где

$$u_n^2 = \frac{n^{1-4/p}}{2}\rho_n^4. \tag{1.9}$$

При $p > 2$ структура асимптотически минимаксных тестов сложнее. Асимптотически минимаксными являются тесты вида

$$\psi_{n,\alpha} = \mathbf{1}_{\{t_n > T_\alpha\} \cup \mathcal{X}_n}, \tag{1.10}$$

основанные на статистиках вида

$$t_n = t_{n,p} = (nh(z_p))^{-1/2}\sum_{i=1}^n \xi(X_i, z_p), \;\; h(z) = 2\sinh^2(z^2/2),$$

где $\xi(x,z) = e^{-z^2/2}\cosh(xz) - 1$, а z_p есть положительное решение уравнения $p\tanh(z^2/2) = z^2$, и на пороговой процедуре:

$$\mathcal{X}_n = \{X \in R^n : \max_i |X_i| > \sqrt{2\log n}\}. \tag{1.11}$$

Асимптотика минимаксных вероятностей ошибок имеет вид (1.8), где

$$u_n^2 = \frac{n}{2}(\rho_n/z_p)^{2p}\sinh^2(z_p^2/2).$$

Обратимся теперь к задаче обнаружения положительных сигналов. Пусть R_+^n – замкнутый положительный октант в R^n и

$$V_{n,p}^+ = V_{n,p} \cap R_+^n = \{v \in V_{n,p} :\ v_i \geq 0\}.$$

Поскольку $V_{n,p}^+ \subset V_{n,p}$, справедливо неравенство $\beta(\alpha, V_{n,p}^+) \leq \beta(\alpha, V_{n,p})$, и состоятельные тесты для $V_{n,p}$ обеспечивают состоятельное обнаружение сигналов и из $V_{n,p}^+$. Вопрос состоит в том, сколь сильно $\beta(\alpha, V_{n,p}^+)$ меньше чем $\beta(\alpha, V_{n,p})$, сколь сильно можно уменьшить критические радиусы $\rho_{n,p}^*$ и можно ли построить лучшие тесты для обнаружения положительных сигналов из $V_{n,p}$? Ответ дает следующая теорема.

Теорема 1.1. 1) *Пусть* $p \leq 1$. *Тогда* $\beta_n(\alpha) = \Phi(T_\alpha - u_n)$, *где* $u_n = \rho_n n^{1/2-1/p}$. *При этом минимаксными (не асимптотически) являются тесты вида, аналогичного* (1.6), *основанные на линейной статистике*

$$t_n = n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{1.12}$$

Это влечет условия различимости (1.4), (1.5) *с критическими радиусами* $\rho_{n,p}^* = n^{1/p-1/2}$.

2) *Пусть* $p > 1$. *Тогда:*

a) *Условия различимости имеют вид* (1.4), (1.5) *с критическими радиусами* $\rho_{n,p}^* = n^{1/2p}$. *Соцтоятельными в минимаксном смысле являются тесты, основанные на статистиках*

$$t_n = t_{n,p}^+ = n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}\eta(X_i),\ \ \eta(X) =$$

$$= \begin{cases} (X + X^2 - 1)/\sqrt{3}, & \text{при} \quad 1 < p < 2, \\ (|X|^p - d_p)/s_p, & \text{при} \quad p \geq 2. \end{cases} \tag{1.13}$$

b) *Точная асимптотика минимаксных вероятностей ошибок имеет вид* (1.7), *где величина* u_n *определяется соотношением*

$$u_n^2 = n(\rho_n/z_{p,+})^{2p}(e^{z_{p,+}^2} - 1)).$$

При $u_n \asymp 1$ асимптотически минимаксными являются тесты вида, аналогичного (1.10), *основанные на пороговой процедуре* (1.11) *и статистиках*

$$t_n = t_{n,p}^+ = (nh_+(z_{p,+}))^{-1/2} \sum_{i=1}^n \nu(X_i, z_{p,+}),$$

где $h_+(z) = e^{z^2} - 1$, $\nu(x,z) = e^{-z^2/2+xz} - 1$, а $z_{p,+}$ есть положительное решение уравнения $p(1-e^{-z^2}) = z^2$.

Теорема 1.1 показывает, что при $p < 2$ предположение положительности позволяет существенно ослабить условия различимости для сигналов большой размерности, т. е. указанные в теореме тесты позволяют обнаруживать столь малые сигналы в норме $|\cdot|_p$, что их минимаксное обнаружение невозможно без предположения положительности. В то же время при $p \geq 2$ предположение положительности не позволяет улучшить различимость; можно лишь несколько уменьшить минимаксные вероятности ошибок.

2. Бесконечномерные сигналы: условия нетривиальности

Пусть наблюдается бесконечномерный гауссовский вектор $X = v + \xi$, где сигнал $v \in l^2$ есть неизвестный вектор средних, а шум ξ есть последовательность, состоящая из независимых стандартных гауссовских случайных величин. Мы проверяем гипотезу $H_0: \ v = 0$ против альтернативы $H_1: \ v \in V_n$, где V_n – заданная последовательность множеств в пространстве последовательностей l^2. Определения раздела 1 очевидным образом переносятся и на эту задачу.

Однако условие отделенности V_n от нуля в нормах $|\cdot|_p$ (квазинормах при $p \in (0,1)$) не обеспечивает нетривиальности задачи. Именно (см. [6]) пусть

$$V_p(\rho) = \{v \in l^2: \ |v|_p = \Big(\sum_i |v_i|^p\Big)^{1/p} \geq \rho\}.$$

Тогда $\beta(\alpha, V_p(\rho)) = 1 - \alpha$ для любого $\alpha \in (0,1)$ и $\rho > 0$. То же верно и при замене множества $V_p(\rho)$ на его "положительную часть" $V_p^+(\rho) = V_p(\rho) \cap l_+^2$, где $l_+^2 = \{v \in l^2: \ v_i \geq 0\}$ – положительный октант в l^2.

Рассмотрим более широкий класс норм (квази-норм). Пусть $a = \{a_i\}$ – положительная последовательность, и

$$|v|_{p,a} = \Big(\sum_i |v_i a_i|^p\Big)^{1/p},$$

т. е. единичный шар в норме $|\cdot|_{p,a}$ есть l^p-эллипсоид с последовательностью полуосей a_i^{-1}. Положим $V_{p,a}(\rho) = \{v \in l^2 : \ |v|_{p,a} \geq \rho\}$.

В [6] показано, что для множеств $V_{p,a}(\rho)$ условие нетривиальности выражается в терминах сходимости или расходимости ряда:

$$g_p(a) = \begin{cases} \sum_i a_i^{4p/(4-p)}, & \text{при } p \leq 2, \\ \sum_i a_i^{2p}, & \text{при } p > 2. \end{cases}$$

Именно, если $g_p(a) = \infty$, то $\beta(\alpha, V_{p,a}(\rho)) = 1 - \alpha$ для любого $\alpha \in (0,1)$ и $\rho > 0$. Если же $g_p(a) < \infty$, то условия минимаксной различимости носят "классический" характер: они соответствуют условиям (1.4), (1.5) при $\rho_n^* = 1$.

Условие $g_p(a) = \infty$ означает, что последовательность полуосей a не убывает слишком быстро. В частности при $a_i = i^r$, $-\infty < r < \infty$, $i = 1, 2, ...$ это условие выполнено при

$$r \geq r_p = \begin{cases} 1/4 - 1/p, & \text{при } p \leq 2, \\ -1/2p, & \text{при } p > 2. \end{cases}$$

Вернемся к случаю положительных сигналов. Пусть $V_{p,a}^+(\rho) = V_{p,a}(\rho) \cap l_+^2$ есть множество неотрицательных сигналов из $V_{p,a}(\rho)$. Оказывается, что условие нетривиальности описывается рядом

$$g_{p,+}(a) = \begin{cases} \sum_i a_i^{2p/(2-p)}, & \text{при } p \leq 1, \\ \sum_i a_i^{2p}, & \text{при } p > 1. \end{cases}$$

Именно, справедлива

Теорема 2.1. 1) *Пусть* $g_{p,+}(a) = \infty$. *Тогда* $\beta(\alpha, V_{p,a}^+(\rho)) = 1 - \alpha$ *для любого* $\alpha \in (0,1)$ *и* $\rho > 0$.

2) *Пусть* $g_{p,+}(a) < \infty$. *Тогда условия минимаксной различимости носят классический характер, т. е. соответствуют условиям* (1.4), (1.5) *при* $\rho_n^* = 1$.

Из теоремы 2.1 следует, что, аналогично разделу 1, при $p < 2$ ограничение положительности существенно ослабляет условия нетривиальности, в то время как при $p \geq 2$ это ограничение не меняет условий нетривиальности. В частности, пусть $a_i = i^r$, $i = 1, 2, \ldots$. Тогда условия тривиальности $g_{p,+}(a) = \infty$ имеет вид

$$r \geq r^*_{p,+} = \begin{cases} 1/2 - 1/p, & \text{при } p \leq 1, \\ -1/2p, & \text{при } p > 1. \end{cases}$$

Вернемся к множествам сигналов типа $V_{p,a}(\rho)$. Если $g_p(a) = \infty$, то для получения нетривиальной задачи минимаксного обнаружения необходимо дополнительно сузить множества возможных сигналов. Такие сужения часто формулируются в виде дополнительного ограничения сверху на норму $|\cdot|_{q,b}$ сигналов:

$$V_{p,a;q,b}(\rho, R) = \{v \in l^2 : \ |v|_{p,a} \geq \rho, \ |v|_{q,b} \leq R\}. \tag{2.1}$$

Для множеств сигналов вида (2.1) при $p = q = 2$, $R = R_n \to \infty$ асимптотическая задача минимаксного обнаружения изучена в [3]; случаи $r = 0$, $p \leq q$, $p \leq 2$ и $p = q > 2$ изучены в [5, 6, 11]. Полное исследование задачи для последовательностей $a_i \sim i^r$, $b_i \sim i^s$, $i \to \infty$ при всевозможных $\kappa = (r, s, p, q)$; $0 < p, q \leq \infty$, $-\infty < r, s < \infty$ содержится в [9].

В частности, пусть $a_i = i^r$, $r > r^*_p$, $b_i = i^s$. Из результатов этих работ, следует, что если $p \leq q < \infty$, $p \leq 2$, то задача минимаксного обнаружения тривиальна для $s - r \leq 1/p - 1/q$, а при $s - r > 1/p - 1/q$ асимптотика минимаксных вероятностей ошибок имеет вид (1.7) с величинами $u_n^2 \sim c_0 m_0 z_0^4$, где $m_0 = m_{n,0}, z_0 = z_{n,0}$ определяются из соотношений:

$$c_1 m_0^{r+1/p} z_0 \sim \rho_n, \ \ c_2 m_0^{s+1/q} z_0 \sim R_n. \tag{2.2}$$

При этом асимптотически минимаксные тесты основаны на взвешенных статистиках типа ξ^2 вида $t_n = \sum_i w_{n,i}(X_i^2 - 1)$, а коэффициенты $w_{n,i} \geq 0$ имеют вид

$$w_{n,i}^2 = \zeta^4(y_i) \left(2 \sum_i \zeta^4(y_i) \right)^{-1}, \ \ y_i = i/m_0,$$

где $\zeta(y) = \zeta(y, \kappa)$ есть неотрицательное (строго положительное при $p < q$) решение уравнения $2\zeta^{4-p} = p y^{rp} - q y^{sq} \zeta^{q-p}$. При $p = q$ можно указать явный вид решений: $\zeta(y) = (p(y^{rp} - y^{sp})/2)_+^{1/(4-p)}$, где $t_+ = \max(0,t)$. Величины $c_l = c_l(\kappa)$, $l = 0,1,2$ определяются соотношениями

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \zeta^4(y)dy,\ \ c_1 = \int_0^\infty \zeta^p(y)y^{rp}dy,\ \ c_2 = \int_0^\infty \zeta^q(y)y^{sq}dy;$$

при $p = q$ они выражаются через бета-функцию.

Если же $2 < p = q < \infty$, то задача минимаксного обнаружения тривиальна для $s \le r$, а при $s > r$ асимптотика минимаксных вероятностей ошибок имеет вид (1.8) с величинами $u_n^2 \sim c_0 n_0 h_0^2$, где $n_0 = n_{n,0}, h_0 = h_{n,0}$ определяются из соотношений:

$$c_1 n_0^{r+1/p} h_0^{1/p} \sim \rho_n,\ \ c_2 n_0^{s+1/p} h_0^{1/p} \sim R_n. \tag{2.3}$$

При этом асимптотически минимаксными являются тесты вида, аналогичного (1.9), основанные на пороговой процедуре

$$\mathcal{X}_n = \{X:\ \sup_i |X_i|/T_{n,i} \ge 1\},\ \ T_{n,i} = \sqrt{2\log i + \log\log R_n}, \tag{2.4}$$

и на статистиках $t_n = \sum_i w_{n,i}\xi(X_i, z_p)$, где $\xi(x,z) = e^{z^2}\cosh(xz) - 1$, а коэффициенты $w_{n,i} \ge 0$ имеют вид

$$w_{n,i} = \eta(x_i)\left(2\sinh^2(z_p^2/2)\sum_i \eta^2(x_i)\right)^{-1/2},$$

где $x_i = i/n_0$, $\eta(x) = (x^{rp} - x^{sp})_+$. Величины $c_l = c_l(\kappa)$, $l = 0,1,2$ определяются соотношениями

$$c_0(\kappa) = 2\sinh^2(z_p^2/2)\int_0^1 (x^{rp} - x^{sp})^2 dx;$$

$$c_1^p(\kappa) = z_p^p \int_0^1 (x^{rp} - x^{sp})x^{rp}dx, c_2^p(\kappa) = z_p^p \int_0^1 (x^{rp} - x^{sp})x^{sp}dx.$$

Из этих результатов следует, что при $R_n \to \infty$ условия минимаксной различимости для рассматриваемых множеств сигналов имеют вид (1.4), (1.4) с критическими радиусами $\rho_n^* = R_n^{C(\kappa)}$, где

$$C(\kappa) = \begin{cases} (4/p - 1 + 4r)/(4/q - 1 + 4s) & \text{при} \quad p \le q,\ p \le 2, \\ (1 + 2rp)/(1 + 2ps) & \text{при} \quad p = q > 2. \end{cases}$$

Обратимся к задаче обнаружения положительных сигналов. В силу теоремы 2.1 при $r \geq r^*_{p,+}$ для получения нетривиальной задачи необходимы дополнительные ограничения на допустимые множества сигналов, кроме положительности. Рассмотрим множеств сигналов вида, аналогичного (2.1):

$$V_n^+ = V^+_{p,a;q,b}(\rho_n, R_n) = \{v \in l^2_+ : \ |v|_{p,a} \geq \rho_n, \ |v|_{q,b} \leq R_n\}, \qquad (2.5)$$

соответствующие последовательностям $a_i = i^r, \ b_i = i^s$. Ограничимся случаями $r > r^*_{p,+}$ при $p \leq 1, \ p \leq q < \infty$ или $1 < p = q < \infty$. Будем также считать, что если $p < q$, то отношение R_n/ρ_n достаточно велико (точнее $R_n/\rho_n > S(\kappa)$, где $S^{pq/(p-q)}(\kappa) = \sum_i i^{-\tau}, \ \tau = pq(s-r)/(p-q) > 1$ (это условие непустоты множества V_n^+).

Теорема 2.2. 1) *Пусть $p \leq q, \ p \leq 1, \ r > r^*_{p,+}$. Тогда задача тривиальна при $s - r \leq 1/p - 1/q$. Пусть $s - r > 1/p - 1/q$. Тогда минимаксная вероятность ошибок определяется точным равенством $\beta_n(\alpha) = \Phi(T_\alpha - u_n)$, причем асимптотика величины u_n при $R_n \to \infty, \ \rho_n \to \infty$ определяется соотношением: $u_n^2 \sim c_0 v_0^2 m_0$, где асимптотика величин $v_0 = v_{0,n}, \ m_0 = m_{0,n}$ определяется из соотношений:*

$$c_1 m_0^{r+1/p} v_0 \sim \rho_n, \ c_2 m_0^{s+1/q} v_0 \sim R_n, \qquad (2.6)$$

а величины $c_l = c_l(\kappa), \ l = 0, 1, 2$ определяется равенствами:

$$c_0 = \int_0^\infty u^2(y)dy, \ c_1 = \int_0^\infty u^p(y) y^{rp} dy, \ c_2 = \int_0^\infty u^q(y) y^{sq} dy, \qquad (2.7)$$

где $u(y)$ есть неотрицательное (положительное при $p < q$) решение уравнения

$$2u^{2-p} = py^{rp} - qy^{sq} u^{q-p}. \qquad (2.8)$$

При этом минимаксными (не асимптотически) являются тесты $\psi_{n,\alpha} = \mathbf{1}_{\{t_n > T_\alpha\}}$, основанные на линейных статистиках

$$t_n = \sum_i w_{n,i} X_i, \ w_{n,i} = u(y_i)/(\sum_i u^2(y_i))^{1/2}, \ y_i = i/m_0. \qquad (2.9)$$

2) *Пусть $1 < p = q < \infty, \ r > r^*_{p,+}$. Тогда задача минимаксного обнаружения тривиальна для $s \leq r$, а при $s > r$ асимптотика минимаксных вероятностей ошибок имеет вид* (1.8) *с величинами $u_n^2 \sim c_0 n_0 h_0^2$, где $n_0 = n_{n,0}, h_0 = h_{n,0}$ определяются из соотношений:*

$$c_1 n_0^{r+1/p} h_0^{1/p} \sim \rho_n, \ c_2 n_0^{s+1/p} h_0^{1/p} \sim R_n. \qquad (2.10)$$

При $u_n \asymp 1$ *асимптотически минимаксными являются тесты вида, аналогичного* (1.10), *основанные на пороговой процедуре* (2.4) *и на статистиках вида* $t_n = \sum_i w_{n,i}\nu(X_i, z_{p,+})$, *где* $\nu(x,z) = e^{-z^2/2+xz} - 1$, *а коэффициенты* $w_{n,i} \geq 0$ *имеют вид*

$$w_{n,i} = \eta(x_i)\left((e^{z^2_{p,+}} - 1)\sum_i \eta^2(x_i)\right)^{-1/2},$$

$$x_i = i/n_0, \ \eta(x) = (x^{rp} - x^{sp})_+.$$

Величины $c_l = c_l(\kappa)$, $l = 0,1,2$ *определяются соотношениями*

$$c_0(\kappa) = (e^{z^2_{p,+}} - 1)\int_0^1 (x^{rp} - x^{sp})^2 dx;$$

$$c_1^p(\kappa) = z^p_{p,+}\int_0^1 (x^{rp} - x^{sp})x^{rp} dx,$$

$$c_2^p(\kappa) = z^p_{p,+}\int_0^1 (x^{rp} - x^{sp})x^{sp} dx.$$

Из теоремы 2.2 следует, что при $R_n \to \infty$ условия минимаксной различимости для рассматриваемых множеств положительных сигналов имеют вид (1.4), (1.5) с критическими радиусами $\rho_n^* = R_n^{C_+(\kappa)}$, где

$$C_+(\kappa) = \begin{cases} (2/p - 1 + 2r)/(2/q - 1 + 2s) & \text{при} \quad p \leq q, \ p \leq 1, \\ (1 + 2rp)/(1 + 2ps) & \text{при} \quad p = q > 1. \end{cases}$$

Таким образом, при $p = q \geq 2$ ограничение положительности не меняет условий различимости, в то время, как при $p \leq q, p \leq 1$ условия различимости становятся существенно слабее.

3. Обнаружение гладких положительных сигналов

Обратимся теперь к задаче обнаружения функционального сигнала в гауссовском белом шуме. Наблюдения имеют вид реализации случайного процесса $X_n(t)$, $t \in [0,1]$, удовлетворяющего стохастическому дифференциальному уравнению

$$dX_n(t) = s(t)dt + n^{-1/2}dW(t), \ t \in [0,1], \tag{3.1}$$

где $W(t)$ – стандартный винеровский процесс, $s(t) = s \in L_2(0,1)$ – неизвестный сигнал, $\varepsilon = n^{-1/2} > 0$ – уровень шума, рассматриваемый как асимптотический параметр $\varepsilon \to 0$ при $n \to \infty$. Задача состоит в проверке гипотезы $H_0: \ s = 0$ против альтернативы $H_1: \ s \in S_n$, где $S_n \subset L_2(0,1)$ – заданное функциональное множество. Все определения, касающиеся минимаксной и асимптотически минимаксной постановки задачи, сформулированные в разделе 1, переносятся очевидным образом на рассматриваемую задачу с заменой мер P_v на меры $P_{n,s}$, соответствующие наблюдениям (3.1).

Часто множества S_n задаются ограничениями гладкости неизвестных сигналов и их отделенности от нуля:

$$S_n = S(p,q,\sigma;\rho_n,R) = \{s \in L_2(0,1): \ \|s\|_p \geq \rho_n, \ \|s\|_q^\sigma \leq R\}. \quad (3.2)$$

Здесь $\|\cdot\|_p$ есть L_p-норма, а $\|\cdot\|_q^\sigma$ есть соболевская норма, соответствующая L_q-норме производной сигнала порядка $\sigma > 0$ (с обобщением на случай нецелых σ); часто удобнее рассматривать нормы бесовского типа [12] $\|\cdot\|_q^\sigma = \|\cdot\|_{q,t}^\sigma$, где $t > 0$ – дополнительный параметр, характеризующий "тонкую структуру" нормы.

Хорошо известно, что зафиксировав любой ортонормальный базис $\{\phi_i\}$ в $L_2(0,1)$ и переходя к нормированным координатам разложений $X_\varepsilon \to X, \ s \to v$ по этому базису:

$$X_i = n^{1/2}\int_0^1 \phi_i(t)dX_\varepsilon(t), \ \ v_i = n^{1/2}\int_0^1 \phi_i(t)s(t)dt,$$

мы получаем эквивалентную задачу в пространстве последовательностей $X = v + \xi, \ v \in V_n \subset l^2$ (здесь ξ – послетовательность стандартных нормальных случайных величин) с множеством V_n, соответствующим множеству нормированных последовательностей коэффициентов Фурье разложения сигналов из множества S_n по базису $\{\phi_i\}$. Однако ограничения, определяющие функциональные множества S_n, часто трудно выразить в терминах коэффициентов Фурье.

Это можно сделать для случая периодических гладких сигналов при $p = q = 2$, когда L_2-норма сигнала соответствует l^2-норме в пространстве коэффициентов Фурье разложения по стандартному тригонометрическому базису в $L_2(0,1)$, а норма Соболева соответствует норме типа $|\cdot|_{2,a}$ для последовательности

$a_i,\ i = 0, 1, 2, ...$ вида $a_0 = 1,\ a_{2i-1} = a_{2i} = (1+i)^\sigma,\ i > 0$. В этом случае точная асимптотика минимаксных вероятностей ошибок и условия различимости содержатся в [3].

Если $p \neq 2$ или $q \neq 2$, то для норм Бесова можно использовать достаточно регулярные "wavelet-базисы", что обеспечивает соответствие по порядку между нормами Бесова в функциональном пространстве и специальными нормами (которые также называют нормами Бесова) в пространстве последовательностей коэффициентов Фурье разложения сигналов по регулярному wavelet-базису. В силу теорем вложения [12], связывающих нормы Бесова при различных параметрах t и нормы Соболева, отсюда можно получить результаты и для норм Соболева; см. по этим вопросам [2, 9] и ссылки в этих работах. На базе этих методов условия минимаксной различимости в соответствующих задачах обнаружения сигналов получены в [9] (см. также [10]). В частности, из результатов [9] следует (цм. также [4, 6]), что для множеств сигналов типа (3.2) при $p \leq 2,\ p \leq q$ и при $2 < p = q < \infty$ условия минимаксной различимости имеют вид, аналогичный (1.4), (1.5) при критических радиусах

$$\rho_n^* = n^{-C},\ C = \begin{cases} 2\sigma/(4\sigma+1) & \text{при} \quad p \leq 2,\ p \leq q, \\ \sigma/(2\sigma+1-p^{-1}) & \text{при} \quad 2 < p = q < \infty. \end{cases}$$

При выполнении условий различимости состоятельные семейства тестов могут быть построены следующим образом. Выберем целочисленное семейство $N = N_n \asymp (\rho_n^*)^{-1/\sigma} \to \infty$ и рассмотрим семейство Δ_N равномерных разбиений интервала $[0,1)$ на интервалы $\delta_{N,i} = [(i-1)/N, i/N),\ i = 1, ..., N$. Семейству Δ_N соответцтвует семейство ортонормальных наборов $\phi_{N,i} = N^{1/2}\mathbf{1}_{\delta_{N,i}},\ i = 1, ..., N$ в $L_2(0,1)$, порождающих пространство L_{Δ_N} кусочно-постоянных функций для разбиения Δ_N, и семейство статистик

$$X_i = X_{n,i} = n^{1/2} \int_0^1 \phi_{N,i}(t) dX_n(t) =$$

$$= (Nn)^{1/2} \int_{(i-1)/N}^{i/N} dX_n(t),\ i = 1, ..., N, \tag{3.3}$$

а также соответствующие им семейства статистик вида (1.7) с заменой n на N. Тогда состоятельными являются семейства тестов $\psi_{n,\alpha}$ вида (1.6).

Однако условия положительности сигналов $s(t) \geq 0$ не удается выразить в терминах коэффициентов разложения по базису Фурье или wavelet-базису. Поэтому результаты разделов 1, 2 нельзя использовать непосредственно.

Приведем условия минимаксной различимости для положительных сигналов при $p = 1,\ p \leq q$ и при $1 < p = q < \infty$. Обозначим $S_n^+ = S^+(p, q, \sigma; \rho_n, R)$ множество сигналов из $S(p, q, \sigma; \rho_n, R)$, удовлетворяющих условию $s(t) \geq 0$ при всех $t \in [0, 1]$.

Теорема 3.1. 1) *При $p = 1,\ p \leq q$ или $1 < p = q < \infty$ условия минимаксной различимости имеют вид, аналогичный* (1.4), (1.5) *при критических радиусах $\rho_n^* = n^{-\sigma/(2\sigma+1-p^{-1})}$.*

2) *Рассмотрим статистики $X_i = X_{n,i},\ i = 1, \ldots, N = N_n \asymp (\rho_n^*)^{-1/\sigma}$ вида* (3.3). *Тогда для $p = 1,\ q \geq p$ при выполнении условий различимости состоятельными являются семейства тестов $\psi_{n,\alpha}^+$ вида, аналогичного* (1.6), *основанные при $p = 1$ на линейной статистике* (1.12), *а для $p = q > 1$ – на статистиках* (1.13) *с заменой n на N.*

Отметим, что при $p = 1,\ q \geq p$ условия различимости положительных сигналов носят классический характер для модели наблюдений (3.1), т.е. $\rho_n^* = n^{-1/2}$; кроме того при $1 \leq p = q < 2$ условия положительности позволяет существенно ослабить условия различимости, в то время как при $2 \leq p = q$ условия различимости не меняются.

4. Доказательства теорем 1.1–3.1: нижние границы

Доказательства утверждений о виде нижних границ теорем 1.1–3.1 следуют схемам доказательств аналогичных результатов без условия положительности (см. [5–9]). Последнее условие, однако, существенно меняет ряд аналитических свойств задачи, и мы остановимся, в основном, на этих изменениях.

4.1. Случай $p \leq 1,\ q \geq p$

В этом случае нижние границы основаны на неравенстве

$$\beta(V, \alpha) \geq \sup_{v \in V} \beta(v, \alpha) = \Phi(T_\alpha - \inf_{v \in V} |v|); \qquad (4.1)$$

здесь $\beta(v_1,\alpha) = \Phi(T_\alpha - |v_1|)$ есть вероятность ошибки II рода для теста Неймана–Пирсона при проверке простой гипотезы $H_0 : v = 0$ против простой альтернативы $H_1 : v = v_1$; $|v| = |v|_2$ есть евклидова или l^2-норма сигнала. Неравенство (4.1) сводит задачу поиска нижних границ минимаксных вероятностей ошибок к поиску точки $v \in V$ с минимальной нормой.

В условиях теоремы 1.1 это есть точка с координатами $v_{i,n} = n^{-1/p}\rho_n,\ i = 1, ..., n$, что и дает нижние границы теоремы. В условиях теоремы 2.1 поиск такой точки приводит к задаче минимизации

$$u_n^2 = \inf\left\{\sum_i v_i^2 :\ \sum_i (v_i a_i)^p \ge \rho_n^p,\ v_i \ge 0\right\}. \tag{4.2}$$

Аналогичная задача изучена в [6] (с тем отличием, что минимизируется сумма не квадратов, а 4-х степеней; аналитическую причину этого отличия мы поясним позже). Используя метод множителей Лагранжа (ср. с доказательствами в [6]) или применяя результаты [6] с заменой переменных $v \to v^2$, $p \to 2p$ мы видим, что нижняя грань есть 0 при $g_{p,+}(a) = \infty$, и $u_n = g_{p,+}(a)^{1/2-1/p}\rho_n$ при $g_{p,+}(a) < \infty$.

В условиях теоремы 2.2 задача минимизации имеет вид

$$u_n^2 = \inf\left\{\sum_i v_i^2 :\ \sum_i (v_i i^r)^p \ge \rho_n^p,\ \sum_i (v_i i^s)^q \le R_n^q,\ v_i \ge 0\right\}. \tag{4.3}$$

Аналогичная задача (с аналогичным отличием) изучена в [11]. Применяя метод множителей Лагранжа нетрудно преобразовать соответствующие уравнения для координат минимальной точки к виду $v_i = v_0 u(i/m_0)$, где $u(y)$ есть решение уравнения (2.8), а параметры $v_0 = v_{0,n},\ m_0 = m_{0,n}$ определяются из соотношений

$$\sum_i (v_i i^r)^p = \rho_n^p,\ \sum_i (v_i i^s)^q = R_n^q,$$

которые при $y_i = i/m_0$ можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} v_0^p m_0^{rp+1}\left(m_0^{-1}\sum_i u^p(y_i) y_i^{rp}\right) &= \rho_n^p,\\ v_0^q m_0^{sq+1}\left(m_0^{-1}\sum_i u^q(y_i) y_i^{sq}\right) &= R_n^q, \end{aligned} \tag{4.4}$$

а значение минимума квадрата l^2-нормы сигнала есть

$$u_n^2 = v_0^2 m_0 \left(m_0^{-1} \sum_i u^2(y_i) \right). \tag{4.5}$$

Нетрудно убедиться, что достаточно изучить случай, когда $m_0 \to \infty$ при $R_n \to \infty$, $\rho_n \to \infty$. В этом случае, заменяя нормированные суммы в (4.4), (4.5) интегралами (2.7), мы приходим к соотношениям теоремы. В сходимости интегралов (2.7) нетрудно убедиться, используя асимптотические свойства решений уравнения (2.8):

$$u(y) \sim \begin{cases} (p/2)^{1/(2-p)} y^{rp/(2-p)}, & \text{при} \quad y \to 0, \\ (p/q)^{1/(q-p)} y^{(rp-sq)/(q-p)}, & \text{при} \quad y \to \infty. \end{cases}$$

В условиях теоремы 3.1 неравенство (4.1) можно переписать в виде $\beta(S_n, \alpha) \geq \Phi(T_\alpha - n^{1/2}\|s_n\|)$, для любой последовательности сигналов $s_n \in S_n$, здесь $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. Чтобы получить требуемые нижние границы мы рассматриваем семейства сигналов следующего вида. Зададимся неотрицательной достаточно гладкой функцией $\phi(t)$, $t \in R^1$ с носителем на интервале $(0,1)$ и такой, что

$$\int_0^1 \phi^2(t)dt = 1, \ \int_0^1 \phi^p(t)dt = C_p^p, \ \max_{t,\ 0\leq k<\sigma+2} |\phi^{(k)}(t)| \leq b_1 < \infty. \tag{4.6}$$

где индекс (k) означает k-ю производную. Рассмотрим целочисленное семейство $N = N_n$, положительное семейство z_n, вид которых уточним ниже, и семейство функций $s_n(t) = n^{-1/2} z_n \sum_{i=1}^N \phi(Nt - i + 1)$. Ясно, что

$$n^{1/2}\|s_n\| = z_n, \ \|s_n\|_p = n^{-1/2} z_n C_p, \|s_n\|_q^\sigma \leq n^{-1/2} N^\sigma z_n B_1,$$

где B_1 – положительная постоянная, зависящая от σ. Выберем N_n, z_n так, чтобы

$$n^{-1/2} z_n C_p \geq \rho_n, \ B_1 n^{-1/2} z_n N^\sigma \leq R;$$

ясно, что при этом $s_n \in S_n$ и $N_n \asymp \rho_n^{-1/\sigma}$, $z_n \asymp n^{1/2}\rho_n$, откуда следуют нижние границы соответствующие теореме: $\beta(S_n, \alpha) \geq \Phi(T_\alpha - B_2 n^{1/2} \rho_n)$, где B_2 – положительная постоянная.

4.2. Случай $p = q > 1$

4.2.1. Условия неразличимости. При $p > 1$ для построения нижних границ в минимаксной задаче проверки гипотез мы используем методы [6, 7, 9] поиска асимптотически наименее благоприятных априорных распределений π^n, асимптотически сосредоточенных на заданных множествах сигналов:

$$\pi^n(V_n) \to 1, \ n \to \infty. \tag{4.7}$$

При выполнении условия (4.7) справедливо неравенство

$$\beta(\alpha, V_n) \geq \beta(\alpha, \pi^n) + o(1), \ n \to \infty, \tag{4.8}$$

где $\beta(\alpha, \pi^n)$ есть минимальная вероятность ошибок II рода в байесовской задаче проверки гипотезы $H_0 : P = P_0$ о распределении P наблюдений X против альтернативы $H_{\pi^n} : P = P_{\pi^n}$, соответствующей смеси $P_{\pi^n} = \int P_v \pi^n(dv)$ при заданном уровне вероятность ошибок I рода $\alpha \in (0,1)$. Мы рассматриваем класс априорных распределений вида $\pi^n = \prod_i \pi_{n,i}$, соответствующих наборам $\bar{\pi}_n = \{\pi_{n,i}\}$, где $\pi_{n,i}$ – вероятностные меры на R^1. Для наборов $\bar{\pi} = \{\pi_i\}$ такого вида рассмотрим функционал $\|\bar{\pi}\|^2 = \sum_i \|\pi_i\|^2 = \sum_i (\pi_i, \pi_i)$, соответствующий билинейной форме

$$(\bar{\pi}, \bar{r}) = \sum_i (\pi_i, r_i) = \sum_i \int_{R^1} \int_{R^1} (e^{uv} - 1)\pi_i(du) r_i(dv). \tag{4.9}$$

В [7, 9] показано, что если $\|\bar{\pi}_n\| \to 0$, то $\beta(\alpha, \pi^n) \to 1 - \alpha, \ n \to \infty$ для любого $\alpha \in (0,1)$; кроме того, билинейные формы (4.9) порождают гильбертовы нормы на линейных пространствах зарядов с отношением эквивалентности $r_1 \sim r_2 + a\delta_0$ и пространствах последовательностей таких зарядов; здесь и далее δ_z есть вероятностная мера, сосредоточенная в точке $z \in R^1$.

Мы будем рассматривать последовательности, состоящие из двухточечных мер

$$\begin{aligned} &\bar{\pi}_n = \bar{\pi}(\bar{h}_n, \bar{z}_n) = \{\pi(h_{n,i}, z_{n,i})\}, \\ &\pi(h, z) = (1 - h)\delta_0 + h\delta_z, \ h \in [0,1], \ z \geq 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Для таких мер $\|\pi(h,z)\|^2 = h^2 E\nu^2(\xi, z) = h^2(e^{z^2} - 1)$,

$$\|\bar{\pi}_n\|^2 = \sum_i h_{n,i}^2 (e^{z_{n,i}^2} - 1), \ l_{n,\pi^n} = \sum_i \log(1 + h_{n,i}\nu(X_i, z_{n,i})). \tag{4.11}$$

В условиях теоремы 2.1 пусть $z_{n,i} = 1, B > 1$ – положительная постоянная, $h_{n,i} = h_n = B\rho_n^p/n$. Для соответствующей последовательности мер (4.10) при $\rho_n = o(n^{1/2p})$ имеем: $h_n = o(n^{-1/2})$, $\|\bar{\pi}_n\|^2 \asymp nh_n^2 = o(1)$. Осталось проверить условие (4.7). Достаточно рассмотреть случай $nh_n \asymp \rho_n^p \to \infty$ (в противном случае можно увеличить ρ_n, обеспечив это условие и сохранив условие $\rho_n = o(n^{1/2p})$; при этом величины $\beta(\alpha, V_n)$ не увеличатся) Тогда условие (4.7) вытекает (ср. с аналогичными оценками в [6, 9]) из неравенства Чебышева и соотношений:

$$\begin{aligned} &\pi^n(R_+^n) = 1,\ E_{\pi^n}(\sum_{i=1}^n v_i^p) = nh_n = B\rho_n^p, \\ &D_{\pi^n}(\sum_{i=1}^n v_i^p) = nh_n(1-h_n) = o((nh_n)^2). \end{aligned} \tag{4.12}$$

В условиях теоремы 2.1 при $g_{p,+}(a) = \infty$ и фиксированном $\rho > 0$ достаточно рассмотреть случай, когда последовательность a такова, что $a_i \to 0$ (ср. с [6]). Рассмотрим последовательность наборов $\bar{\pi}_n = \{\pi(h_{n,i}, z_{n,i})\}$ ц $z_{n,i} = 1$ и

$$h_{n,i} = \begin{cases} B\rho^p a_i^p/A_n, & \text{при}\quad i \le n, \\ 0, & \text{при}\quad i > n \end{cases}, \quad A_n = \sum_{i=1}^n a_i^{2p},\ B > 1.$$

Тогда легко видеть (ср. с оценками в [6]), что $\max_i h_{n,i} \to 0$, $\|\bar{\pi}_n\|^2 \asymp \sum_i h_{n,i}^2 = o(1)$, а условие (4.7) вытекает из неравенства Чебышева и соотношений, аналогичных (4.12):

$$\begin{aligned} &\pi^n(R_+^n) = 1,\ E_{\pi^n}(\sum a_i^p v_i^p) = \sum_i h_i a_i^p = B\rho^p, \\ &D_{\pi^n}(\sum a_i^p v_i^p) \le \sum_i h_i a_i^{2p} = o(1). \end{aligned}$$

В условиях теоремы 3.1 при $\rho_n = o(\rho_n^*)$, аналогично п. 4.1, зададимся неотрицательной гладкой функцией $\phi(t)$, удовлетворяющей условиям (4.6), и рассмотрим последовательность ортонормальных наборов функций $\phi_{n,i} = N^{1/2}\phi(Nt - i + 1),\ i = 1, ..., N \asymp (\rho_n^*)^{-1/\sigma}$ и случайные функции вида

$$s_\eta(t) = n^{-1/2}\sum_{i=1}^N \eta_i \phi_{n,i}(t) = (N/n)^{1/2}\sum_{i=1}^N \eta_i \phi(Nt - i + 1), \tag{4.13}$$

где $\eta_1, ..., \eta_N$ – независимые одинаково распределенные бернуллиевские случайные величины; $P(\eta_i = 1) = h_N,\ P(\eta_i = 0) = 1 - h_N$, где $h_N = B\rho_n^p (n/N)^{p/2} C_p^{-p} \to 0,\ B > 1$. Случайные функции (4.13) порождают вероятностные меры

$$\pi^n = \prod_{i=1}^N \pi_{n,i},\ \ \pi_{n,i} = (1 - h_N)\delta_0 + h_N \delta_1$$

в пространстве нормированных коэффициентов $v_i = n^{1/2}(s_\eta, \phi_{n,i})$, $i = 1, ..., N$ и соответствующие байесовские задачи эквивалентны. При этом $\|\bar{\pi}_n\|^2 \asymp N h_N^2 \asymp (\rho_n/\rho_n^*)^{2p} \to 0$.

Осталось показать, что случайные функции (4.13) сосредоточены в S_n с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$. Достаточно рассмотреть случай $N h_N \to \infty$ (этого можно добиться увеличивая ρ_n и сохраняя условие $\rho_n = o(\rho_n^*)$). При этом условие сосредоточенности вытекает из неравенства Чебышева и оценок:

$$E\|s_\eta\|_p^p = (n^{-1} N C_p^2)^{p/2} h_N = B\rho_n^p,\ \ D\|s_\eta\|_p^p \le (n^{-1} N C_p^2)^p h_N = o(\rho_n^{2p}),$$
$$E(\|s_\eta\|_p^\sigma)^p = O(n^{-p/2} N^{p/2 + p\sigma} h_N) = O((\rho_n/\rho_n^*)^p) \to 0.$$

4.2.2. Точная асимптотика минимаксных вероятностей ошибок

Обратимся теперь к точной асимптотике из теорем 1.1, 2.2. В [7, 9] показано, что если статистика $l_{n,\pi^n} = \log(dP_{\pi^n}/dP_0)$ асимптотически нормальна относительно P_0-распределения:

$$l_{n,\pi^n} \sim N(-u_n^2/2, u_n^2),\ \ n \to \infty, \tag{4.14}$$

где $N(a, \sigma^2)$ – нормальное распределение, то

$$\beta(\alpha, \pi^n) = \Phi(T_\alpha - u_n) + o(1),\ \ n \to \infty; \tag{4.15}$$

там же показано, что условие асимптотической нормальности (4.14) с $u_n = \|\bar{\pi}_n\|$ выполнено для последовательностей симметричных мер

$$\bar{\pi}_n = \{\pi(h_{n,i}, z_{n,i})\},\ \ \pi(h, z) = (1 - h)\delta_0 + h(\delta_z + \delta_{-z})/2, \tag{4.16}$$

таких что

$$\|\bar{\pi}_n\| \asymp 1,\ \ \sup_i \|\pi_{n,i}\| = o(1),\ \ \sup_i z_{n,i} = O(1). \tag{4.17}$$

Анализ доказательств показывает, что в предположениях (4.17) то же справедливо и для последовательностей мер (4.10). Таким образом при выполнении (4.7), (4.17) из (4.8) следует неравенство

$$\beta(\alpha, V_n) \geq \Phi(T_\alpha - u_n) + o(1), \ \ n \to \infty; \tag{4.18}$$

Отметим, что первое условие в (4.17) не является ограничивающим, т. к. при $u_n = \|\bar{\pi}_n\| \to \infty$ неравенство (4.18) тривиально, а при $u_n \to 0$ вытекает из результатов, отмеченных в п. 4.2.1.

Таким образом для получения наилучших нижних границ мы приходим к задаче минимизации

$$u_n = \inf_{\bar{\pi}_n \in \Pi_n} \|\bar{\pi}_n\|, \tag{4.19}$$

где Π_n – некоторая последовательность классов таких наборов $\bar{\pi}_n$, что выполнены условия (4.7). Точнее, пусть существует такая последовательность двухточечных мер $\bar{\pi}_n = \{\pi(h_{n,i}, z_{n,i})\}$, что $\|\bar{\pi}_n\| = u_n + o(1)$ и выполнены условия (4.7), (4.17). Тогда справедливо предельное равенство (4.15).

В условиях теоремы 1.1 рассмотрим классы Π_n вида

$$\Pi_n = \Pi_{n,p}(\rho_n) =$$
$$= \{\bar{\pi}_n = \{\pi_{n,i}\}_{i=1}^n : \ \mathrm{supp}(\pi_{n,i}) \subset [0, \infty), \ \sum_{i=1}^n E_{\pi_{n,i}} v^p \geq \rho_n^p\}, \tag{4.20}$$

где $\mathrm{supp}(\pi)$ есть выпуклый носитель меры π. Используя соображения симметрии и выпуклости функционала $\|\bar{\pi}_n\|$ и множества $\Pi_{n,p}(\rho_n)$ легко видеть, что минимум u_n в задаче (4.19), (4.20) имеет вид $u_n^2 = n\phi_p^+(\rho_n/n^{1/p})$, где

$$\phi_p^+(\lambda) = \inf\{\|\pi\|^2 : \ \mathrm{supp}(\pi) \subset [0, \infty), \ E_\pi v^p \geq \lambda^p\}. \tag{4.21}$$

Аналогичная (4.21) экстремальная задача $\phi_p(\lambda) = \inf\{\|\pi\|^2 : E_\pi|v|^p \geq \lambda^p\}$ изучалась в [5, 6], где показано, что при $p \leq 2$ минимум достигается на симметричных мерах $\pi = \pi(h, z)$ вида (4.16), причем если $p \leq 2$, то $h = 1, \ z = \lambda, \ \phi_p(\lambda) \sim \lambda^4/2$ при $\lambda \to 0$. Если же $p > 2$, то $z = z_p, \ h = (\lambda/z_p)^p$ при достаточно малых $\lambda \leq z_p$.

Используя аналогичную [5, 6] технику можно установить следующее утверждение.

Лемма 4.1. 1) *Пусть* $p \le 1$. *Тогда минимум в экстремальной задаче* (4.21) *достигается на одноточечной мере* $\pi = \delta_z$, $z = \lambda$, *что соответствует* $\pi(h, z)$, $h = 1$. *То же верно при* $p > 1$, $\lambda > z_{p,+}$.

2) *Пусть* $p > 1$, $\lambda \le z_{p,+}$. *Тогда минимум в экстремальной задаче* (4.21) *достигается на двухточечной мере* $\pi(h, z)$ *при* $z = z_{p,+}$, $h = (\lambda/z_{p,+})^p$.

Используя лемму 4.1 легко находим, что при $p > 1$, $\rho_n = o(n^{1/p})$ минимум в экстремальной задаче (4.19), (4.20) имеет вид $u_n^2 = n(\rho_n/n^{1/p} z_{p,+})^{2p}(e^{z^2_{p,+}} - 1)$ и достигается на наборе, составленном из n одинаковых мер $\pi_n = \pi(h_n, z_{p,+})$, $h_n = \rho_n^p / n z_{p,+}^p$. Если бы соответствующие меры π^n удовлетворяли условию (4.7), то отсюда вытекали бы требуемые нижние границы. Это условие, вообще говоря, не выполнено, т.к. $E_{\pi^n} \sum_{i=1}^n v_i^p = n h_n z_{p,+}^p = \rho_n^p$. Однако, так так $D_{\pi^n}(\sum_{i=1}^n v_i^p) \le \rho_n^p z_{p,+}^p = o(\rho_n^{2p})$ при $\rho_n \to \infty$, из неравенства Чебышева следует выполнение (4.7) для мер $\tilde{\pi}^n$, соответствующих замене величины ρ_n на $\tilde{\rho}_n = \rho_n(1 + \delta)$, $\delta > 0$. В силу произвольности $\delta > 0$ отсюда вытекают требуемые нижние границы.

В условиях теоремы 2.2 мы рассматриваем множества

$$\begin{aligned} \Pi_n = & \Pi_{n,p,q}(\rho_n, R_n) = \{\bar{\pi}_n = \{\pi_{n,i}\}_{i=1}^n : \ \mathrm{supp}(\pi_{n,i}) \subset [0, \infty), \\ & \sum_{i=1}^n E_{\pi_{n,i}} i^{rp} v^p \ge \rho_n^p, \ \sum_{i=1}^n E_{\pi_{n,i}} i^{sq} v^q \le R_n^q\}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Экстремальную задачу (4.19), (4.22) при $p \ne q$ можно свести к виду

$$u_n^2 = \inf\{\sum_i \phi_{p,q}^+(\lambda_i, \mu_i) : \ \sum_i i^{rp} \lambda_i^p \ge \rho_n^p, \ \sum_i i^{sq} \mu_i^q \le R_n^q\},$$

где

$$\phi_{p,q}^+(\lambda, \mu) = \inf\{\|\pi\|^2 : \ \mathrm{supp}(\pi) \subset [0, \infty), \ E_\pi v^p \ge \lambda^p, \ E_\pi v^q \le \mu^q\}, \tag{4.23}$$

а при $p = q$

$$u_n^2 = \inf\{\sum_i \phi_p^+(\lambda_i) : \ \sum_i i^{rp} \lambda_i^p \ge \rho_n^p, \ \sum_i i^{sp} \lambda_i^p \le R_n^p\},$$

где $\phi_p^+(\lambda)$ определяется (4.21) (в экстремальной задаче (4.21) неравенство в ограничении можно заменить равенством). Аналогичная (4.23) экстремальная задача

$$\phi_{p,q}(\lambda, \mu) = \inf\{\|\pi\|^2 : \ E_\pi |v|^p \ge \lambda^p, \ E_\pi |v|^q \le \mu^q\}$$

исследована в [11], где, в частности, показано, что при $p \le 2,\ q > p,\ \lambda \ge \mu$ (последнее есть условие непустоты множества минимизации) минимум достигается на симметричных двухточечных мерах с $h = 1,\ z = \lambda$; при этом $\phi_{p,q}(\lambda, \mu) \sim \lambda^4/2$ при $\lambda \to 0$.

Используя аналогичную технику можно изучить и задачу (4.23). Мы не будем приводить соответствующие результаты; отметим только, что при $p \le 1,\ q > p,\ \lambda \ge \mu$ минимум достигается на одноточечных мерах с $h = 1,\ z = \lambda$; при этом $\phi^{+}_{p,q}(\lambda, \mu) \sim \lambda^2$ при $\lambda \to 0$.

Таким образом при $p \le 1,\ q \ge p$ задача (4.19), (4.22) асимптотически сводится к поиску точки из V_n с минимальной длиной, которая и изучалась в п. 4.1. Отличие леммы 4.1 и отмеченных результатов от аналогичных результатов в [5, 6, 11] и есть аналитическая причина эффектов, связанных с ограничением положительности сигналов.

Пусть $p = q > 1$. Тогда с учетом леммы 4.1 задача (4.19), (4.22) сводится к следующей:

$$u_n^2 = (e^{z^2_{p,+}} - 1)\inf\{\sum_i h_i^2 :\ \sum_i i^{rp} h_i \ge \\ \ge (\rho_n/z_{p,+})^p,\ \sum_i i^{sp} h_i \le (R_n/z_{p,+})^p\}. \quad (4.24)$$

Эта задача легко исследуется с помощью метода множителей Лагранжа и асимптотика ее решения при $R_n \to \infty,\ \rho_n \asymp \rho_n^*$ и приведена в формулировке теоремы 2.2. Соответствующая мера π^n непосредственно не удовлетворяет условию (4.7). Однако выполнения этого условия легко добиться, заменяя величины $\rho_n,\ R_n$ на $\tilde{\rho}_n = \rho_n(1+\delta),\ \tilde{R}_n = R_n(1-\delta),\ \delta \in (0,1)$. В силу произвольности δ отсюда вытекают требуемые нижние границы.

5. Доказательства теорем 1.1–3.1: верхние границы

Доказательства утверждений о виде верхних границ основаны на исследовании минимаксных свойств специальных классов тестов. При этом, аналогично [5–9], возникают экстремальные задачи, двойственные задачам, возникающим при построении нижних границ.

Рассмотрим минимаксные свойства тестов $\psi_{n,T} = \mathbf{1}_{t_n > T}$ на основе статистик $t_n = t_n(X)$, таких что $E_0 t_n = 0,\ D_0(t_n) = 1,$

и порога $T > 0$. Обозначим

$$h_n(v) = E_v t_n, \ D_n(v) = D_v t_n, \ h_n(V_n) = \inf_{v \in V_n} h_n(v). \tag{5.1}$$

Пусть для некоторой последовательности $\delta_n = o(1)$ выполнены соотношения:

$$D_n(v) \le B + \delta_n h_n^2(v), \ v \in V_n. \tag{5.2}$$

Тогда из неравенства Чебышева легко получить (ср. с [6]), что $\alpha(\psi_{n,T}) \le \alpha$ при $T^2 \ge 1/\alpha$ и $\beta(\psi_{n,T}, V_n) \to 0$ при $h_n(V_n) \to \infty$. Если же, в дополнение к (5.2), $t_n \sim N(0,1)$ относительно P_0-распределения и $t_n \sim N(h_n(v), 1)$ относительно P_v-распределения равномерно по таким $v \in V_n$, что $h_n(v) = O(1)$, то

$$\alpha(\psi_{n,T_\alpha}) = \alpha = o(1), \ \beta(\psi_{n,T_\alpha}, V_n) \le \Phi(T_\alpha - h_n(V_n)) + o(1).$$

5.1. Случай $p \le 1, \ q \ge p$

Для наблюдений $X = v + \xi$ рассмотрим класс тестов $\psi_{r,\alpha} = \mathbf{1}_{(X,r) > T_\alpha}$, основанных на линейных статистиках $(X, r) = \sum_i X_i r_i$, $|r| = 1$ (здесь и ниже $|\cdot|$ – евклидова норма в R^n или гильбертова норма в l^2). Поскольку эти статистики нормальны: $(X, r) \sim N((v, r), 1)$ относительно любого P_v-распределения, имеем:

$$\alpha(\psi_{r,\alpha}) = \alpha, \ \beta(\psi_{r,\alpha}, V_n) = \Phi(T_\alpha - \inf_{v \in V_n} (v, r)).$$

Таким образом при поиске наилучшего теста, основанного на линейных статистиках вида (X, r), мы приходим к максиминной задаче:

$$u_n = \sup_{|r|=1} \inf_{v \in V_n} (v, r). \tag{5.3}$$

Легко проверить, что если множество V_n выпукло и существует точка $v^* \in V_n$ с минимальной нормой:

$$|v_n^*| = \inf_{v \in V_n} |v| > 0, \tag{5.4}$$

то $u_n = |v_n^*|$, и верхняя грань в (5.3) достигается при $r_n = v_n^*/|v_n^*|$ (см. также лемму 5.1 ниже). При этом с учетом нижних границ (4.1) мы имеем неасимптотические равенства (ср. с [1]):

$$\beta(\alpha, V_n) = \beta(\psi_{r,\alpha}, V_n) = \Phi(T_\alpha - u_n).$$

В условиях теорем 1.1, 2.1 множества $V_n = V^+_{p,a}(\rho_n)$ выпуклы при $p \le 1$, откуда вытекают равенства теоремы 1.1 для вероятностей ошибок и минимаксность тестов. В условиях теоремы 2.1 при $g^+_p(a) < \infty$ точка v^*_n имеет координаты

$$v^*_{n,i} = \rho_n a_i^{p/(2-p)}(g_{p,+}(a))^{-1/p}, \ \ |v^*_n| = \rho_n(g_{p,+}(a))^{-(2-p)/2p},$$

откуда вытекает состоятельность тестов при $\rho_n \to \infty$.

В условиях теоремы 3.1 $P_{n,s}$-распределения статистик (3.3) определяются P_v-распределениями случайного вектора $X = v + \xi \in R^N$, где $v = (v_1, ..., v_N)$, $v_i = n^{1/2}(\phi_{N,i}, s)$. При этом

$$\sum_{i=1}^{N} |v_i|^p = n^{p/2} N^{1-p/2} \|Pr_N(s)\|_p^p, \tag{5.5}$$

где $Pr_N(s)$ – оператор L_2-проектирования на подпространство функций, постоянных на интервалах $\delta_{N,i}$, порожденных набором $\phi_{N,i} = N^{1/2}\mathbf{1}_{\delta_{N,i}}$; $i = 1, ..., N$. При этом P_v-распределения линейных статистик (1.12) (с заменой n на N), соответствующих статистикам (3.3), являются нормальными $N(h_n(v), 1)$, где

$$h_n(v) = N^{-1/2} \sum_{i=1}^{N} v_i = n^{1/2}\|Pr_N(s)\|_1.$$

Таким образом условие состоятельности тестов теоремы 3.1 при $p = 1, q \ge 1$ имеет вид

$$\inf_{s \in S_n} n^{1/2}\|Pr_N(s)\|_1 \to \infty, \tag{5.6}$$

причем в силу известных теорем вложения [12] достаточно рассмотреть случай $p = q = 1$, $\| \cdot \|^\sigma_p = \| \cdot \|^\sigma_{p,\infty}$, соответствующий наиболее широкому множеству сигналов $S_n = S(p, q, \sigma, \rho_n, R)$.

Воспользуемся следующим неравенством (см. [6], неравенство (5.16)):

$$\|Pr_N(s)\|_p \ge B_1\|s\|_p - B_2 N^{-\sigma} \quad \text{при} \quad \|s\|^\sigma_p \le R, \ p \ge 1, \tag{5.7}$$

где B_1, B_2 – положительные постоянные, зависящие от σ, R. Это неравенство доказано в [6] для нормы Никольского, эквивалентной норме Бесова $\| \cdot \|^\sigma_{p,\infty}$. Из неравенства (5.7) и выбора $N \asymp (\rho^*_n)^{-1/\sigma}$ следует (5.6), т. к. при $\rho_n \gg \rho^*_n = n^{-1/2}$ для любого $s \in S_n$ имеем: $n^{1/2}\|Pr_N(s)\|_1 \ge B_1 n^{1/2}\rho_n(1 + o(1)) \to \infty$.

Обратимся к теореме 2.2. Заметим, что условие выпуклости множеств V_n можно ослабить, заменив его следующим.

Лемма 5.1. *Пусть существует взаимно-однозначная замена переменных* $\phi : Z_n \to V_n$; $v = \phi(z)$, $v_i = \phi_i(z_i)$, *где* Z_n *– выпуклое множество,* $\phi_i(t)$ *– неотрицательные выпуклые функции. Пусть существует точка* $z_n^* \in Z_n$, *такая что* $|\phi(z_n^*)| = \inf_{z \in Z_n} |\phi(z)|$, *(что равносильно* (5.4) *при* $v_n^* = \phi(z_n^*)$*). Тогда верхняя грань в* (5.3) *есть* $u_n = |v_n^*|$ *и достигается при* $r = v_n^*/|v_n^*| = \phi(z_n^*)/|\phi(z_n^*)|$.

Доказательство. В силу равенства $\sup_{|r|=1}(r, v) = |v|$, имеем:

$$u_n = \sup_{|r|=1} \inf_{v \in V_n} (r, v) \leq \inf_{v \in V_n} \sup_{|r|=1} (r, v) = \inf_{v \in V_n} |v| = |v_n^*|.$$

Чтобы установить противоположное неравенство: $\inf_{v \in V_n}(r_n^*, v) \geq |v_n^*|$, $r_n^* = v_n^*/|v_n^*|$, предположим противное: существует точка $v = \phi(z) \in V_n$, такая что $(r_n^*, v) < |v_n^*|$, что равносильно тому, что $a = \sum_i \phi_i(z_{n,i}^*)(\phi_i(z_{n,i}^*) - \phi_i(z_i)) > 0$. Пусть $z(t) = (1-t)z_n^* + tz$, $t \in (0, 1)$; $z(t) \in Z$ в силу выпуклости Z. Тогда в силу неотрицательности и выпуклости функций ϕ_i имеем: $0 \leq \phi_i(z_i(t)) \leq \phi_i(z_{n,i}^*) + t(\phi_i(z_i) - \phi_i(z_{n,i}^*))$, откуда

$$|\phi(z(t))|^2 \leq |\phi(z_n^*)|^2 - 2ta + Bt^2, \; B = |\phi(z) - \phi(z_n^*)|^2.$$

Так как $a > 0$, отсюда при малых $t > 0$ следует, что $|v(t)| = |\phi(z(t))| < |\phi(z_n^*)| = |v_n^*|$, что противоречит минимальности нормы v_n^*.

В условиях теоремы 2.2 при $p \leq 1$, $q \geq p$ рассмотрим замену переменных $v_i = z_i^{1/p}$, переводящую V_n в выпуклое множество. В силу леммы 5.1 и предыдущих оценок, задача построения минимаксных тестов сводится к задаче минимизации (5.4), которая рассматривалась выше в п. 4.1 и асимптотика решений которой приведена в теореме.

5.2. Случай $p = q > 1$

5.2.1. Минимаксная состоятельность. В условиях теорем 1.1, 2.1, 3.1, достаточно рассмотреть случай $1 < p < 2$, так как при $p \geq 2$ минимаксная состоятельность доказана в [6] для более широких альтернатив (без условия положительности). В условиях теоремы 1.1 для статистик

$$t_n = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} \eta(X_i), \; \eta(X) = (X + X^2 - 1)/\sqrt{3} \tag{5.8}$$

из равенств:

$$E\eta(\xi+m) = (m^2+m)/\sqrt{3},\ D\eta(\xi+m) = 1+4(m^2+m)/3,\ \xi \sim N(0,1), \tag{5.9}$$

следует, что

$$h_n(v) = (3n)^{-1/2}(|v|_1 + |v|_2^2),\ D_n(v) = 1 + (3n)^{-1/2}4h_n(v), \tag{5.10}$$

что влечет условия (5.2). В силу неравенства $t + t^2 \geq t^p$ при $t \geq 0,\ p \in (1,2)$ состоятельность в теореме 1.1 вытекает из соотношений: для любого $v \in V_n$

$$n^{-1/2}(|v|_1 + |v|_2^2) \geq n^{-1/2}|v|_p^p \geq n^{-1/2}\rho_n^p \to \infty,$$

$$\text{при } \rho_n/\rho_n^* = n^{-1/2p}\rho_n \to \infty.$$

В условиях теоремы 3.1 $P_{s,n}$-распределение статистик (5.8) (с заменой n на N) совпадает с их P_v-распределением при $v_i = n^{1/2}(s, \phi_{N,i}),\ i = 1, ..., N$, так что условия (5.2) следуют из (5.10). Аналогично предыдущему с учетом (5.5) имеем:

$$h_n(v) \geq N^{-1/2}|v|_p^p = N^{1/2-p/2}n^{p/2}\|Pr_N(s)\|_p^p.$$

При $\rho_n \gg \rho_n^* = n^{-\sigma/(2\sigma+1-p^{-1})}$ в силу (5.7) и выбора $N \asymp (\rho_n^*)^{-1/\sigma}$ отсюда следует, что

$$h_n^{1/p}(v) \geq N^{1/2p-1/2}n^{1/2}(B_1\rho_n - B_2N^{-\sigma}) \asymp$$

$$\asymp N^{1/2p-1/2}n^{1/2}\rho_n \gg N^{1/2p-1/2}n^{1/2}\rho_n^* = 1,$$

что влечет состоятельность тестов. Наконец в условиях теоремы 2.1 при $g_{p,+}(a) < \infty,\ \rho_n \to \infty$ рассмотрим статистики

$$t_n = \sum_i w_i\eta(X_i),\ w_i = a_i^p(g_{p,+}(a))^{-1/2},$$

так что $E_0t_n = 0,\ D_0t_n = 1$. Из равенств (5.9) следует, что равномерно по $v \in V_n$ при $C = (3g_{p,+}(a))^{-1/2}$

$$h_n(v) = C\sum_i a_i^p(v_i + v_i^2) \geq C\sum_i (a_iv_i)^p \geq C\rho_n^p \to \infty,$$

$$D_n(v) = 1 + 4C^2\sum_i a_i^{2p}(v_i + v_i^2) \leq 1 + 4C(\max_i a_i^p)h_n(v) = 1 + o(h_n^2(v)),$$

откуда следует состоятельность.

5.2.2. Асимптотически минимаксные тесты. Методы доказательства асимптотической минимаксности тестов из теорем 1.1, 2.2 при $p>1$ представляют собой модификацию методов [9] в несколько упрощенном варианте. Достаточно рассмотреть случай $u_n \asymp 1$ (если $u_n \to 0$, то верхние границы тривиальны; если $u_n \to \infty$, то уменьшая ρ_n мы расширяем множества сигналов и можем получить произвольно большие $u_n \asymp 1$, что соответствует произвольно малым вероятностям $\beta(\psi_{n,a}, V_n)$).

Рассмотрим статистики $t_n = u_n^{-1}\sum_i h_{n,i}\nu(X_i, z_i)$, где $\nu(x,z) = e^{-z^2/2+xz} - 1$, $u_n^2 = \sum_i h_{n,i}^2(e^{z_{n,i}^2} - 1)$ и $z_{n,i}$, $h_{n,i}$ – неотрицательные последовательности, такие что

$$\sup_i z_{n,i} \le B, \ \sup_i h_{n,i} = o(1), \ u_n \asymp 1. \tag{5.11}$$

При $\xi \sim N(0,1)$ нетрудно проверить равенства

$$E\nu(\xi,z) = 0, \ E\nu^2(\xi,z) = e^{z^2} - 1,$$
$$E\nu^4(\xi,z) = (e^{z^2}-1)^2(e^{4z^2} + 2e^{3z^2} + 3e^{2z^2} - 3) \le 6(e^{z^2}-1)^2 e^{4z^2},$$

из которых следует, что $E_0 t_n = 0$, $D_0 t_n = 1$ и статистика t_n асимптотически $N(0,1)$-нормальна относительно P_0-распределения. Кроме того

$$E\nu(\xi+m,z) = e^{zm} - 1, \ D\nu(\xi+m,z) = D\nu(\xi,z) + (e^{zm}-1)(e^{z^2}-1).$$

Тогда $h_n(v) = u_n^{-1}\sum_i h_{n,i}(e^{z_{n,i}v_i} - 1)$,

$$D_n(v) = 1 + u_n^{-2}\sum_i h_{n,i}^2(e^{z_{n,i}v_i}-1)(e^{z_{n,i}^2}-1) = 1 + o(h_n(v)),$$

а также представляя $t_n = h_n(v) + t_{n,v} + r_n(v)$, где

$$t_{n,v} = u_n^{-1}\sum_i h_{n,i}\nu(X_i - v_i, z_{n,i}), \ r_n(v) =$$

$$= u_n^{-1}\sum_i h_{n,i}(e^{z_{n,i}v_i}-1)\nu(X_i - v_i, z_{n,i}),$$

имеем:

$$E_v r_n(v) = 0, \ E_v r_n^2(v) = u_n^{-2}\sum_i h_{n,i}^2(e^{z_{n,i}v_i}-1)^2(e^{z_{n,i}^2}-1).$$

Заметим, что P_v-распределение статистики $t_{n,v}$ совпадает с P_0-распределением статистики t_n. Пусть величины $0 < Q_{n,i} \le \infty$ определяются из соотношения $e^{BQ_{n,i}} = h_{n,i}^{-1/4}$ (мы считаем $Q_{n,i} = \infty$ при $h_{n,i} = 0$), и пусть $V_{n,1} = \{v \in V_n : \ v_i \le 2Q_{n,i}\}$. Тогда $h_{n,i}(e^{z_{n,i}v_i} - 1) \le h_{n,i}^{1/2} \to 0$ равномерно по i и по $v \in V_{n,1}$, так что $Er_n^2(v) = o(h_n(v))$. Таким образом статистика t_n асимптотически $N(h_n(v), 1)$-нормальна относительно P_v-распределения равномерно по таким $v \in V_{n,1}$, что $h_n(v) = O(1)$. Отсюда следует, что

$$\beta(\psi_{n,T_\alpha}, V_{n,1}) = \Phi(T_\alpha - h_n(V_{n,1})) + o(1) \le \Phi(T_\alpha - h_n(V_n)) + o(1).$$

Заметим, что $\inf_i Q_{n,i} \to \infty$, $e^{-Q_{n,i}^2/2} = O(e^{-8BQ_{n,i}}) = O(h_{n,i}^2)$, откуда следует, что

$$\sum_i \Phi(-Q_{n,i}) = o(\sum_i e^{-Q_{n,i}^2/2}) = o(\sum_i h_{n,i}^2) \to 0.$$

Пусть $T_{n,i} \le Q_{n,i}$ – такие последовательности, что $\sum_i \Phi(-T_{n,i}) = o(1)$. Рассмотрим последовательность тестов $\psi_n = \mathbf{1}_{\mathcal{X}_n}$, $\mathcal{X}_n = \{X : \ \sup_i(X_i/T_{n,i}) \ge 1\}$. Легко видеть (см. [6]), что

$$\alpha(\psi_n) = P_0(\mathcal{X}_n) \le \sum_i \Phi(-T_{n,i}) = o(1),$$
$$\beta(\psi_n, v) = P_v(\overline{\mathcal{X}_n}) \le \inf_i \Phi(T_{n,i} - v_i) \le \inf_i \Phi(-Q_{n,i}) \to 0$$

равномерно по $v \in V_{n,2} = l^2 \setminus V_{n,1}$. Поэтому рассматривая тесты: $\psi_{n,\alpha} = \max(\psi_n, \ \psi_{n,T_\alpha})$, получим, что

$$\alpha(\psi_{n,\alpha}) \le \alpha(\psi_{n,T_\alpha}) + \alpha(\psi_n) \le \alpha + o(1),$$
$$\beta(\psi_{n,\alpha}, V_n) \le \max(\beta(\psi_{n,T_\alpha}, V_{n,1}), \beta(\psi_n, V_{n,2})) \le \Phi(T_\alpha - h_n(V_n)) + o(1).$$

Таким образом задача сводится к изучению нижней грани $h_n(V_n)$, определяемой (5.1). Заметим, что минимизируемую величину можно представить в виде $h_n(v) = (\bar r_n, \bar\delta_v)$, $\bar r_n = \bar\pi_n/\|\bar\pi_n\|$, где наборы $\bar\pi_n = \{\pi_{n,i}\}$ состоят из мер $\pi_{n,i} = \pi(h_{n,i}, z_{n,i})$; здесь $\bar\delta_v = \{\delta_{v_i}\}$, а скалярное произведение определено (4.9). Поэтому

$$h_n(V_n) \ge h(\bar r_n, \Pi_n) = \inf_{\bar\pi \in \Pi_n} (\bar r, \bar\pi),$$

для любого множества Π_n, содержащего все наборы $\bar\delta_v$, $v \in V_n$, в частности, для множеств (4.20), (4.22) в условиях теорем 1.1, 2.2. Эти множества выпуклы, так что аналогично п. 5.1, получаем, что поиск набора $\bar{r}_n$, максимизирующего $h(\bar{r}_n, \Pi_n)$, сводится к задаче минимизации (4.19) и $h_n(V_n) \geq u_n = \|\bar{\pi}_n\|$, где $\bar{\pi}_n \in \Pi_n$ – набор, на котором достигается минимум в (4.19). Как было показано в п. 4.2, наборы $\bar{\pi}_n$, состоят из двухточечных мер $\pi_{n,i} = \pi(h_{n,i}, z_{n,i})$, причем легко проверить, что наборы $\bar{h}_n, \bar{z}_n$ удовлетворяют условиям (5.11). Отсюда вытекают требуемые верхние границы теорем 1.1, 2.2. Осталось заметить, что из приведенного вида экстремальных последовательностей следует, что для порогов $T_{n,i}$, указанных в теоремах, выполнено условие $T_{n,i} < Q_{n,i} \asymp \log h_{n,i}^{-1}$.

Литература

1. М. В. Бурнашев, *О минимаксном обнаружении неточно известного сигнала в гауссовском белом шуме.* Теория вероятн. и ее примен., **24**, в. 1 (1989), 107–119.
2. D. L. Donoho, I. M. Johnstone, G. Kerkyacharian, and D. Picard, *Wavelet shrinkage: asymptopia? (with discussion).* J. Royal Statist. Soc., Ser. B, **57**, No. 2 (1995), 301–369.
3. М. С. Ермаков, *Минимаксное обнаружение сигнала в гауссовском белом шуме.* Теория вероятн. и ее примен., **35**, в. 4 (1990), 704–715.
4. Ю. И. Ингстер, *Минимаксная проверка непараметрических гипотез о плотности распределения в метриках L_p.* Теория вероятн. и ее примен., **31**, в. 2 (1986), 333–337.
5. Ю. И. Ингстер, *Минимаксное обнаружение сигналов в метриках l_p.* Зап. научных семинаров ЛОМИ, **184** (1990), 152–168.
6. Yu. I. Ingster, *Asymptotically minimax hypothesis testing for nonparametric alternatives. I, II, III.* Mathematical Methods of Statistics, **2** (1993), 85–114, 171–189, 249–268.
7. Ю. И. Ингстер, *Минимаксная проверка гипотез для невырожденных функций потерь и экстремальные выпуклые задачи.* Зап. научных семинаров ПОМИ, **228** (1996), 162–188.
8. Yu. I. Ingster, *Minimax detection of a signal for l^n-balls.* Mathematical Methods of Statistics, **7**, No. 4 (1998), 401–428.
9. Yu. I. Ingster and I. A. Suslina, *Minimax nonparametric hypothesis testing for ellipsoids and Besov bodies.* ESAIM: Probability & Statistics, **4** (2000), 53–135.
10. V. G. Spokoiny, *Adaptive and spatially adaptive testing of nonparametric hypothesis.* Mathematical Methods of Statistics, **7**, No. 3 (1998), 245–273.
11. И. А. Суслина, *Экстремальные задачи, возникающие при минимаксном обнаружении сигнала для l_q-эллипсоидов с удаленным l_p-шаром.* Зап. научных семинаров ПОМИ, **228** (1996), 312–332.
12. H. Triebel, *Theory of Functional Space 2.* Birkhauser, Basel, 1992.

Ingster Yu. I., Suslina I. A. On the minimax detection of positive

signals.

The minimax signal detection problem for admissible sets of signals of the form of a sphere with a domain around the center removed has been considered in detail in recent autors' papers. In the present paper the question about additional possibilities arising under assumption of positivity of the signal is investigated.

Петербургский университет
путей сообщения,

С.-Петербургский институт
точной механики и оптики

Поступило 29 мая 2001 года