Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 278, 2001 г.

П. Деовельс, М. А. Лифшиц

ВЕРОЯТНОСТИ ПОПАДАНИЯ ЦЕНТРИРОВАННОГО ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА В СМЕЩЕННЫЕ МАЛЫЕ ШАРЫ

1. Введение

Предметом данной работы являются гауссовские аппроксимации вероятностей попадания траекторий центрированного пуассоновского процесса в шар малого радиуса, центр которого удаляется от начала координат. Задачи о попадании в шар малого радиуса в последнее время исследуются достаточно широко, особенно для гауссовских процессов (см. [19, 20] и дальнейшие ссылки в этих работах). Особенно хорошо изучен винеровский процесс (см., например, [6, 8, 9]). Для негауссовских процессов известно значительно меньше. Несмотря на то, что для процессов с независимыми приращениями многое в этом направлении сделано в работах Боровкова и Могульского [1, 4, 5], для вероятностей попадания в шар со *смещенным* центром еще есть много нерешенных вопросов. Мы предлагаем методологию решения этой задачи, пригодную для достаточно произвольных процессов с независимыми приращениями, хотя и концентрируем усилия пока исключительно на пуассоновском процессе (имея ввиду его известные приложения к статистике).

Подчеркнем, что ключевым моментом нашей конструкции является использование техники Скорохода [7], позволяющей вычислять взаимные плотности распределений процессов с независимыми приращениями. Формула для такой плотности, даже в ее простейшей форме (см. лемму 3.1 ниже) играет для пуассоновского процесса ту роль, которую формула Камерона–Мартина играет в гауссовском случае – именно с ее помощью удается построить "сопряженное" распределение, центрированное как раз

Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, ННИО (Германия) и INTAS, гранты No. 99-01-00112, 99-01-04027, 99-01317, а также грантом "Университеты России" No. 99-26-11.

в центре исследуемого шара. Подчеркнем, что если для гауссовского случая сопряженное распределение строится сдвигом исходного, в пуассоновском случае мы строим его, изменяя интенсивность скачков процесса.

Доказав с помощью перехода к сопряженным распределениям основной результат, теорему 2.2, мы выводим в последующих теоремах 2.5 и 2.6 интегральный тест, указывающий, в какой области параметров возможна винеровская аппроксимация вероятностей попадания центрированного пуассоновского процесса в малый шар.

Представление о возможных статистических приложениях полученных результатов можно составить по работе [16]. Эти приложения, связанные, главным образом, с предельными свойствами хвостовых эмпирических процессов, будут подробнее изложены нами в другой публикации.

2. Основные результаты

Нам потребуются следующие понятия и обозначения. Пусть $\{N(t) : t \geq 0\}$ стандартный пуассоновский процесс. Обозначим $Y(t) = N(t) - t$ соответствующий центрированный пуассоновский процесс и для каждого $\rho > 0$ положим

$$Y_\rho(t) = \rho^{-1/2} Y(\rho t) = \rho^{-1/2}\{N(\rho t) - \rho t\} \quad \text{при} \quad t \geq 0. \tag{1}$$

Пусть $(B[0,1], \mathcal{U})$ это класс ограниченных функций на отрезке $[0,1]$, снабженный топологией равномерной сходимости $\mathcal{U}$, индуцированной нормой $\|f\| = \sup_{0\leq t\leq 1}|f(t)|$. Иногда нам потребуются $\|f\|_- = \sup_{0\leq t\leq 1}\{-f(t) \vee 0\}$ и, аналогично, $\|f\|_+$. Пусть $(D[0,1], \mathcal{S})$ пространство Скорохода, состоящее из функций, непрерывных справа и имеющих пределы слева, снабженное топологией Скорохода $\mathcal{S}$ (см. с. 111–116 в книге [10]). Пусть $AC[0,1]$ обозначает класс всех абсолютно непрерывных функций на отрезке $[0,1]$. Обозначим $\dot{f} = \frac{d}{dt} f$ лебегову производную $f \in AC[0,1]$ и введем гильбертову норму

$$|f|_{\mathbb{H}} = \begin{cases} \left\{ \int_0^1 \dot{f}(t)^2 dt \right\}^{1/2}, & \text{если} \quad f(0) = 0 \quad \text{и} \quad f \in AC[0,1], \\ \\ \infty & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Обозначим $\mathbb{H} = \{f \in B[0,1] : |f|_{\mathbb{H}} < \infty\}$ ядро винеровской меры. Единичный шар пространства $(B[0,1], \mathcal{U})$ обозначим $\mathbf{U} = \{f \in B[0,1] : \|f\| \le 1\}$.

Следующая асимптотическая оценка винеровской меры малых шаров $\varepsilon\mathbf{U}$ хорошо известна (она восходит к классической работе [12]; см. также обзор связанных с этой оценкой результатов [20]). Если W винеровский процесс, то

$$\mathbb{P}\Big(W \in \varepsilon\mathbf{U}\Big) = \exp\Big(- (1 + o(1))\frac{\pi^2}{8\varepsilon^2}\Big) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \qquad (2)$$

Имея, согласно принципу инвариантности Донскера (см. [16]), слабую сходимость в $(D[0,1], \mathcal{S})$

$$\big\{Y_\rho(t) : t \in [0,1]\big\} \xrightarrow{d} \big\{W(t) : t \in [0,1]\big\} \quad \text{при} \quad \rho \to \infty, \qquad (3)$$

естественно предположить, что справедлив и аналог (2) с заменой W на Y_ρ. Как следует из результатов Могульского [4] или Боровкова и Могульского [1], мы в самом деле имеем

$$\mathbb{P}\Big(Y_\rho \in \varepsilon\mathbf{U}\Big) = \exp\Big(- (1 + o(1))\frac{\pi^2}{8\varepsilon^2}\Big) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0 \quad \text{и} \quad \rho\varepsilon^2 \to \infty. \qquad (4)$$

Заметим, что (4) перестает выполняться, если $\varepsilon \not\to 0$ или $\rho\varepsilon^2 \not\to \infty$.

Асимптотическую формулу винеровской меры *смещенных* малых шаров вывел де Акоста [8] (см. также обобщения в работах Чаки [13, 14]), причем в основе его подхода лежит формула Камерона–Мартина (см. [11] или [3]). Для каждой $f \in \mathbb{H}$ и любого $r > 0$ верно

$$\mathbb{P}\Big(W - \lambda f \in \frac{r}{\lambda}\mathbf{U}\Big) = \exp\Big(-\frac{\lambda^2}{2}\Big\{\frac{\pi^2}{4r^2} + |f|^2_{\mathbb{H}} + o(1)\Big\}\Big) \text{ при } \lambda \to \infty. \quad (5)$$

Цель нашей работы – охарактеризовать в терминах $f \in \mathbb{H}$ и параметров λ, ρ, удовлетворяющих условиям $\lambda \to \infty$ и $\rho/\lambda^2 \to \infty$, диапазон справедливости пуассоновского аналога (5). Формально заменяя W пуассоновским процессом Y_ρ, сформулируем нашу цель как свойство

$$(\mathcal{P}) \qquad \mathbb{P}\Big(Y_\rho - \lambda f \in \frac{r}{\lambda}\mathbf{U}\Big) = \exp\Big(- \frac{\lambda^2}{2}\Big\{\frac{\pi^2}{4r^2} + |f|^2_{\mathbb{H}} + o(1)\Big\}\Big).$$

Для $f = 0$ оно сводится к известной формуле (4).

Несложные аргументы, основанные на (5) и сильном принципе инвариантности, приводят к следующему утверждению – исходной точке нашего исследования.

Предложение 2.1. *Пусть $r > 0$ и $f \in \mathbb{H}$. Тогда свойство $(\mathcal{P})$ выполнено, если*

$$(i)\ \lambda \to \infty; \quad (ii)\ \rho/\lambda^6 \to \infty. \tag{6}$$

Условие (6)(ii) является наилучшим из того, что можно извлечь из упомянутой методологии. Однако оно не является оптимальным – работая непосредственно с пуассоновским процессом, нам удается ослабить его и получить, в известном смысле, окончательный ответ. Техническая трудность непосредственной работы с пуассоновским процессом ясна – здесь нет прямого аналога формулы Камерона–Мартина, а значит невозможно прямое копирование аргументов, предложенных де Акоста для работы с винеровским процессом. Тем не менее удается получить следующий основной результат.

Теорема 2.2. *Пусть $\mathcal{F}$ относительно компактное подмножество $\mathbb{H}$. Пусть каждая функция $g \in \mathcal{F}$ имеет версию лебеговой производной $\dot g$, удовлетворяющую условию $||\dot g|| < \infty$. Обозначим $\overline{\mathcal{F}}$ замыкание $\mathcal{F}$ в $\mathbb{H}$. Пусть $g \in \mathcal{F}$, $f \in \overline{\mathcal{F}}$, ρ и λ меняются таким образом, что*

$$\begin{aligned}
&\text{(i)}\quad \lambda \to \infty;\ \text{(ii)}\ \rho/\lambda^2 \to \infty;\\
&\text{(iii)}\ (\lambda/\rho^{1/2})||\dot g|| \le 1-\alpha \qquad \textit{для некоторого } \alpha \in (0,1);\\
&\text{(iv)}\ \ \lambda^2||f-g|| \to 0;\ (v)\ \ |f-g|_{\mathbb{H}} \to 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Тогда для каждого $r > 0$ верно

$$(\mathcal{P}) \qquad \mathbb{P}\Big(Y_\rho - \lambda f \in \frac{r}{\lambda}\mathbf{U}\Big) = \exp\Big(-\frac{\lambda^2}{2}\Big\{\frac{\pi^2}{4r^2} + |f|^2_{\mathbb{H}} + o(1)\Big\}\Big).$$

Если предполагать только одностороннюю версию свойства (iii), *а именно*

$$\limsup(\lambda/\rho^{1/2})||\dot g||_- \le 1; \tag{8}$$

либо, что $f \in H$ фиксирована, то для каждого $r > 0$ по-прежнему верна верхняя оценка

$$(\mathcal{P})_< \qquad \mathbb{P}\Big(Y_\rho - \lambda f \in \frac{r}{\lambda}\mathbf{U}\Big) \leqslant \exp\Big(-\frac{\lambda^2}{2}\Big\{\frac{\pi^2}{4r^2} + |f|^2_{\mathbb{H}} + o(1)\Big\}\Big).$$

Доказательство теоремы 2.2 приведено в разд. 3. Сейчас мы приведем важнейшие следствия из этой теоремы. Первое из этих следствий показывает, что свойство $(\mathcal{P})$ справедливо при минимальных предположениях, если функция f принадлежит довольно широкому подклассу элементов $\mathbb{H}$.

Следствие 2.3. *Предположим, что* $f \in \mathbb{H}$ *имеет ограниченную версию лебеговой производной* $\dot{f}$, *т.е.* $\|\dot{f}\| < \infty$. *Если*

$$\text{(i)}\ \lambda \to \infty; \quad \text{(ii)}\ \rho/\lambda^2 \to \infty, \tag{9}$$

то для каждого $r > 0$ *справедливо свойство* $(\mathcal{P})$.

Доказательство. Положим $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}} = \{f\}$ в теореме 2.2. □

Теперь мы охарактеризуем справедливость свойства $(\mathcal{P})$ для функций $f \in \mathbb{H}$, не обязательно удовлетворяющих условию $\|\dot{f}\| < \infty$. В то время как верхняя оценка $(\mathcal{P})_<$ уже установлена в теореме 2.2 для любой $f \in \mathbb{H}$, для нижней потребуется аппроксимационная процедура. Для этого определим следующие характеристики. Для всех $f \in \mathbb{H}$ и $\gamma \geq 0$ положим

$$f_\gamma(t) = \int_0^t \dot{f}_\gamma(s)ds \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq 1, \tag{10}$$

где

$$\dot{f}_\gamma(t) = \dot{f}(t)\mathbf{1}_{\{|\dot{f}(t)| \leq \gamma\}} \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq 1. \tag{11}$$

Далее, пусть

$$\mathcal{F}_f = \{f_\gamma : \gamma \geq 0\} \quad \text{и} \quad R_f(\gamma) = \int_0^1 |\dot{f}(s)|\mathbf{1}_{\{|\dot{f}(s)| > \gamma\}}ds. \tag{12}$$

В дальнейшем мы обозначаем $\mathcal{R}V$ (или $\mathcal{S}V$) класс функций, регулярно (или медленно) меняющихся на бесконечности. Обозначим $\mathcal{S}V_0$ подкласс $\mathcal{S}V$, состоящий из тех $\{G(t) : t \geq 0\}$, для которых
(i) G положительна и не убывает на $[0, \infty)$;
(ii) $G(x) = H(\log_+ x)$ для $H \in \mathcal{R}V$.
Для каждой $G \in \mathcal{S}V_0$ полагаем

$$\mathbb{H}_G = \Big\{ f \in \mathbb{H} : \int_0^1 |\dot{f}(t)|^2 G\big(|\dot{f}(t)|\big)dt < \infty \Big\}.$$

Отметим, что для константы $G = C$ верно $\mathbb{H}_G = \mathbb{H}_C = \mathbb{H}$. С другой стороны любая функция $f \in \mathbb{H}$, для которой $\|\dot{f}\| < \infty$ принадлежит $\mathbb{H}_G$ при всех $G \in \mathcal{S}V_0$.

Следующее элементарное утверждение содержит полезные свойства введенных объектов.

Предложение 2.4. *Для любой $f \in \mathbb{H}$ множество $\mathcal{F}_f$ относительно компактно в $\mathbb{H}$ и*

$$|\dot{f}_\gamma(t)| \le |\dot{f}(t)| \quad \text{при п.в. } t \in [0,1] \text{ для любого } \gamma \ge 0; \tag{13}$$

$$|f - f_\gamma|_{\mathbb{H}} \to 0 \quad \text{при} \quad \gamma \to \infty. \tag{14}$$

При дополнительном предположении $f \in \mathbb{H}_G$ для некоторого $G \in \mathcal{S}V_0$ будет верно

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^2 R_f\Big(\frac{\lambda^2}{G(\lambda)}\Big) = 0. \tag{15}$$

Более того, если функция $G \in \mathcal{S}V_0$ такова, что

$$\int_1^\infty \frac{dx}{xG(x)} = \infty, \tag{16}$$

то для любой $f \in \mathbb{H}$ верно

$$\liminf_{\lambda\to\infty} \lambda^2 R_f\Big(\frac{\lambda^2}{G(\lambda)}\Big) = 0. \tag{17}$$

Доказательство предложения 2.4 отложим до разд. 3. Комбинируя это предложение с теоремой 2.2, получаем следующий результат.

Теорема 2.5. *Пусть $G \in \mathcal{S}V_0$. Предположим, что*

$$\text{(i)}\ \ \lambda \to \infty; \ \ \text{(ii)}\ \ \liminf \rho G(\lambda)^2/\lambda^6 > 0. \tag{18}$$

Тогда для каждого $r > 0$ и $f \in \mathbb{H}_G$ выполнено свойство $(\mathcal{P})$.

При дополнительном предположении

$$\int_1^\infty \frac{dx}{xG(x)} = \infty \tag{19}$$

свойство $(\mathcal{P})$ выполнено для каждой функции $f \in \mathbb{H}$ вдоль некоторой подпоследовательности (зависящей от f). А именно, найдется такая последовательность $\Lambda = \Lambda(f) = \{\ell_j \uparrow \infty\}$, что для всех $r > 0$ верно

$$\mathbb{P}\Big(Y_\rho - \lambda f \in \frac{r}{\lambda}\mathbf{U}\Big)$$
$$= \exp\Big(-\frac{\lambda^2}{2}\Big\{\frac{\pi^2}{4r^2} + |f|^2_{\mathbb{H}} + o(1)\Big\}\Big) \qquad \text{при } \lambda \to \infty,\ \lambda \in D^\Lambda, \tag{20}$$

где $D^\Lambda = \bigcup_j [2\ell_j, 3\ell_j]$.

Доказательство. Предположим сначала, что $f \in \mathbb{H}_G$. Применим теорему 2.2 к $\mathcal{F} = \mathcal{F}_f$. Для этого проверим, что в наших предположениях выполнены свойства (7). Действительно, (18) (i) совпадает с (7) (i). Из гипотезы $G \in \mathcal{S}V_0$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ $G(\lambda)/\lambda^\varepsilon \to 0$. Поэтому (18) (i–ii) обеспечивают (7) (ii). Далее, при заданных f и G легко построить такую функцию $\tilde{G}$, что $\lim_{\lambda\to\infty} \tilde{G}(\lambda)/G(\lambda) = \infty$ но по-прежнему $f \in \mathbb{H}_{\tilde{G}}$. Поэтому вместо (18)(ii) мы можем, не ограничивая общности, предполагать, что $\rho G(\lambda)^2/\lambda^6 \to \infty$. Полагая $g = f_{\lambda^2/G(\lambda)}$ в теореме 2.2, получаем из (11), что

$$\left\{\frac{\lambda}{\rho^{1/2}}\right\}||\dot{g}|| \le \left\{\frac{\lambda}{\rho^{1/2}}\right\}\left\{\frac{\lambda^2}{G(\lambda)}\right\} = \left\{\frac{\lambda^6}{\rho G(\lambda)^2}\right\}^{1/2} \to 0,$$

откуда следуют(18)(ii), (7)(iii). Наконец, используя (14) и (15), видим, что

$$\lambda^2||f-g|| \leqslant \lambda^2 R_f\left(\frac{\lambda^2}{G(\lambda)}\right) \to 0 \quad \text{и} \quad |f-g|_{\mathbb{H}} \to 0,$$

откуда следует (7)(iv–v). Поскольку предположения теоремы 2.2 выполнены, свойство $(\mathcal{P})$ имеет место.

Далее, предположим, что верно (19), и пусть $f \in \mathbb{H}$ произвольна. Согласно (17), найдется такая последовательность $\{\ell_j \uparrow \infty\}$, что

$$\lim_j \ell_j^2 R_f\left(\frac{\ell_j^2}{G(\ell_j)}\right) = 0.$$

Поскольку функция $G(\cdot)$ медленно меняется, а $R_f(\cdot)$ не убывает, имеем

$$\limsup_{\lambda\to\infty,\lambda\in D^\Lambda} \lambda^2 R_f\left(\frac{\lambda^2}{G(\lambda)}\right) = \limsup_j \sup_{\lambda\in[2\ell_j,3\ell_j]} \lambda^2 R_f\left(\frac{\lambda^2}{G(\lambda)}\right)$$
$$\leqslant 9\ \lim_j \ell_j^2 R_f\left(\frac{\ell_j^2}{G(\ell_j)}\right) = 0.$$

Отсюда видно, что соотношение $\lambda^2||f-g|| \leqslant \lambda^2 R_f\left(\frac{\lambda^2}{G(\lambda)}\right) \to 0$ справедливо при переходе к пределу вдоль множества D^Λ. Повторяя наши аргументы при таком предельном переходе, показываем справедливость (20). □

Следующий результат является обратным к теореме 2.5. Он показывает, что интегральный тест (19) точен.

Теорема 2.6. *Пусть* $G \in \mathcal{S}V_0$ *удовлетворяет условию*

$$\int_1^\infty \frac{dx}{xG(x)} < \infty. \tag{21}$$

Пусть параметры ρ *и* λ *изменяются таким образом, что*

$$\text{(i) } \lambda \to \infty; \quad \text{(ii) } \limsup \rho G(\lambda)^2/\lambda^6 < \infty. \tag{22}$$

Пусть $\{Y_\rho(\cdot)\}$ *семейство процессов, удовлетворяющее условию* $Y_\rho(t) \geqslant -\rho^{1/2}t$ *для каждого* ρ *и всех* $t \in [0,1]$. *Тогда для любого* $\eta > 0$ *существует функция* $f \in \mathbb{H}$, *для которой* $|f|_{\mathbb{H}} = \eta$ *и в пределе верно*

$$(\mathcal{Q}) \qquad \mathbb{P}\Big(Y_\rho - \lambda f \in \frac{r}{\lambda}\mathbf{U}\Big) = 0.$$

Очевидно, если выполнено $(\mathcal{Q})$, то ни свойство (20), ни, тем более, свойство $(\mathcal{P})$ выполняться не могут. Доказательство теоремы 2.6 приведено в разд. 3.

Замечания. 1°) Поскольку $\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}$, то предложение 2.1 является частным случаем теоремы 2.5, соответствующим $G(\cdot) = 1$.
2°) Полагая $G(x) = G_b(x) := (\log_+ x)^b$ в теоремах 2.5 и 2.6, получаем, что если в пределе

$$\text{(i) } \lambda \to \infty; \ \text{(ii) } \liminf \{\rho(\log\lambda)^2\}/\lambda^6 > 0; \tag{23}$$

то свойство $(\mathcal{P})$ верно для всех $f \in \mathbb{H}_G$, и для всех $f \in \mathbb{H}$ выполнены $(\mathcal{P})_<$ и (20). С другой стороны, если для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\text{(i) } \lambda \to \infty; \ \text{(ii) } \limsup \{\rho(\log\lambda)^{2+\varepsilon}\}/\lambda^6 < \infty, \tag{24}$$

то при некоторой $f \in \mathbb{H}$ имеет место $(\mathcal{Q})$.

Отметим, что (23)–(24) улучшают (6) на множитель $(\log\lambda)^2$ и показывают невозможность улучшения на $(\log\lambda)^{2+\varepsilon}$. Мы оставляем читателю возможность проделать дальнейшие уточнения на базе другого выбора $G \in \mathcal{S}V_0$.
3°) Аналогично, если $f \in \mathbb{H}$ имеет $\dot f \in L^p[0,1]$ для некоторого $p > 2$, мы можем аппроксимиовать f функциями $g = f_\gamma$, $\gamma = \lambda^{2/(p-1)}$. Теорема 2.2 в этом случае дает свойство $(\mathcal{P})$ в предположениях

$$\text{(i) } \lambda \to \infty; \quad \text{(ii) } \liminf \rho/\lambda^{\frac{2p+2}{p-1}} > 0,$$

которые слабее, чем (18) и меняются в диапазоне от (9) до (6), когда p пробегает интервал $[2, \infty)$.

3. Доказательства

Изложенное ниже доказательство теоремы 2.2 основано на формуле Скорохода для плотностей мер, отвечающих процессам с независимыми приращениями (см. гораздо более общие результаты в книге [7], §46, 47; другие приложения той же техники см. [2], §9). Для дальнейшего нам потребуются пуассоновские процессы переменной интенсивности. Для любой неотрицательной интегрируемой функции $\{\mu(t) : 0 \le t \le 1\}$ пуассоновский процесс интенсивности μ будем обозначать $\{\Pi_\mu(t) : 0 \le t \le 1\}$. Для него мы имеем равенство распределений

$$\Pi_\mu(t) \stackrel{d}{=} N\Big(\int_0^t \mu(s)ds\Big) \quad \text{при} \quad 0 \le t \le 1.$$

Обозначим $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ σ-алгебру борелевских подмножеств $(D[0,1], \mathcal{S})$. Хорошо известно (см., например, [18]), что Π_μ определяет вероятностную меру на $(D[0,1], \mathcal{A}_\mathcal{S})$,

$$P_\mu(A) = \mathbb{P}(\Pi_\mu \in A) \quad \text{при} \quad A \in \mathcal{A}_\mathcal{S} \ .$$

Наш ключевой аргумент выглядит следующим образом.

Лемма 3.1. *Пусть* $\{\mu_i(t) : 0 \le t \le 1\}$ *для* $i = 1, 2$ *две неотрицательные интегрируемые функции на* $[0,1]$, *значения которых отделены от нуля и бесконечности. Тогда* $P_{\mu_1} \ll P_{\mu_2}$ *и для* P_{μ_2}*-почти всех* $y \in D[0,1]$ *верна формула для плотности*

$$\frac{dP_{\mu_1}}{dP_{\mu_2}}(y) = \exp\Big\{\int_0^1 (\mu_2(t) - \mu_1(t))dt - \int_0^1 \log\Big(\frac{\mu_2(t)}{\mu_1(t)}\Big) dy(t)\Big\}.$$

Доказательство теоремы 2.2. Зафиксируем $r > 0, \alpha \in (0,1)$, и пусть множество $\mathcal{F} \subset \mathbb{H}$ относительно компактно. Пусть функция $g \in \mathcal{F}$ изменяется вместе с параметрами $\lambda \to \infty$ и $\rho/\lambda^2 \to \infty$ таким образом что в пределе

$$\frac{\lambda}{\rho^{1/2}} \ ||\dot g||_- \le 1 - \alpha \ . \tag{25}$$

В этих условиях можно применить лемму 3.1 к $\mu_1(t) = \rho$ и $\mu_2(t) = \rho + \rho^{1/2}\lambda \dot g(t)$ при $0 \le t \le 1$ (заметим, что из условия (25) следует

$\mu_2(t) \geq 0$ при $0 \leq t \leq 1$), и мы можем определить пуассоновские процессы

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu_1}(t) &\stackrel{d}{=} \rho^{1/2} Y_\rho(t) + \rho t, \\ \Pi_{\mu_2}(t) &\stackrel{d}{=} Y(\rho t + \rho^{1/2}\lambda g(t)) + \rho t + \rho^{1/2}\lambda g(t).\end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}\overline{\Pi}_{\mu_2}(t) = \Pi_{\mu_2}(t) - \mu_2(t) = \Pi_{\mu_2}(t) - \rho t - \rho^{1/2}\lambda g(t) \\ \stackrel{d}{=} Y(\rho t + \rho^{1/2}\lambda g(t)) \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq 1.\end{aligned} \tag{26}$$

Рассмотрим подмножество $A(g)$ пространства $D[0,1]$, определенное формулой

$$A(g) = \Big\{ y \in D[0,1] : y \in \rho I + \rho^{1/2}\lambda g + \frac{\rho^{1/2} r}{\lambda} \mathbf{U} \Big\},$$

где $I(t) = t$. Очевидно,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\Big(Y_\rho - \lambda g \in \frac{r}{\lambda}\mathbf{U}\Big) = P_{\mu_1}(A(g)) \\ &= \int\limits_{A(g)} \frac{dP_{\mu_1}}{dP_{\mu_2}}(y) P_{\mu_2}(dy) = \mathbb{E}\bigg(\mathbf{1}_{\big\{\Pi_{\mu_2} \in A(g)\big\}} \frac{dP_{\mu_1}}{dP_{\mu_2}}(\Pi_{\mu_2})\bigg) \\ &= \mathbb{E}\bigg(\mathbf{1}_{\big\{\Pi_{\mu_2} \in A(g)\big\}} \exp\Big\{ \int\limits_0^1 \rho^{1/2}\lambda \dot g(t) dt \\ &\quad - \int\limits_0^1 \log\Big(1 + \Big\{\frac{\lambda \dot g(t)}{\rho^{1/2}}\Big\}\Big) d\Pi_{\mu_2}(t) \Big\}\bigg) \qquad (27) \\ &= \exp\Big\{ \int\limits_0^1 \Big[\rho^{1/2}\lambda \dot g(t) - \log\Big(1 + \Big\{\frac{\lambda \dot g(t)}{\rho^{1/2}}\Big\}\Big)\mu_2(t)\Big] dt \Big\} \\ &\times \mathbb{E}\bigg(\mathbf{1}_{\big\{\overline{\Pi}_{\mu_2} \in \frac{\rho^{1/2} r}{\lambda}\mathbf{U}\big\}} \exp\Big\{ - \int\limits_0^1 \log\Big(1 + \Big\{\frac{\lambda \dot g(t)}{\rho^{1/2}}\Big\}\Big) d\overline{\Pi}_{\mu_2}(t) \Big\}\bigg) \\ &=: e^{Q_g} \times S_g.\end{aligned}$$

Рассмотрим пуассоновскую функцию уклонений

$$\Psi(u) = \begin{cases} u \log u - u + 1 & \text{при } u > 0, \\ 1 & \text{при } u = 0, \\ \infty & \text{при } u < 0. \end{cases}$$

Заметим, что

$$0 \le \Psi(1+u) \le u^2 \quad \text{для} \quad u \ge -1, \tag{28}$$

и

$$\Psi(1+u) = (1+o(1))u^2/2 \quad \text{при} \quad u \to 0. \tag{29}$$

Несложные вычисления показывают, что

$$Q_g = -\rho \int_0^1 \Psi\Big(1 + \Big\{\frac{\lambda \dot g(t)}{\rho^{1/2}}\Big\}\Big) dt.$$

Вспомним, что областью изменения функционального параметра g является относительно компактное подмножество $\mathbb{H}$, следовательно, семейство функций $\{\dot g(\cdot)^2\}$ равномерно интегрируемо на $[0,1]$. Это наблюдение вместе с (28) и (29) обеспечивает представление

$$Q_g = -\frac{\lambda^2}{2}\left(|g|^2_{\mathbb{H}} + o(1)\right). \tag{30}$$

Перейдем теперь к оцениванию величины S_g в (27). Перепишем ее в виде

$$S_g = \mathbb{E}\big(V_1 V_2\big), \tag{31}$$

где для некоторой подходящей кусочно-линейной функции ψ,

$$V_1 = \mathbf{1}_{\Big\{\overline{\Pi}_{\mu_2} \in \frac{\rho^{1/2} r}{\lambda} \mathbf{U}\Big\}} \exp\Big\{-J_1(\psi)\Big\}, \tag{32}$$

$$V_2 = \exp\Big\{-J_2(g,\psi)\Big\}, \tag{33}$$

и

$$J_1(\psi) = \int_0^1 \log\Big(1 + \Big\{\frac{\lambda\dot\psi(t)}{\rho^{1/2}}\Big\}\Big) d\overline{\Pi}_{\mu_2}(t),$$

$$J_2(g,\psi) = \int_0^1 \Big\{\log\Big(1 + \Big\{\frac{\lambda\dot g(t)}{\rho^{1/2}}\Big\}\Big) - \log\Big(1 + \Big\{\frac{\lambda\dot\psi(t)}{\rho^{1/2}}\Big\}\Big)\Big\} d\overline{\Pi}_{\mu_2}(t)$$

$$=: \int_0^1 \Delta_{g,\psi}(t) d\overline{\Pi}_{\mu_2}(t).$$

Воспользуемся следующими несложными оценками, основанными на неравенстве Гельдера. Пусть $p > 1$ и $q = p/(p-1)$ два сопряженных показателя. Тогда имеется верхняя оценка

$$S_g = \mathbb{E}(V_1V_2) \le \mathbb{E}(V_1^p)^{1/p}\mathbb{E}(V_2^q)^{1/q}. \tag{34}$$

Нижнюю оценку мы выведем из применения неравенства Гельдера к произвольным положительным случайным величинам ξ_1, ξ_2. Имеем

$$\mathbb{E}(\xi_1) = \mathbb{E}\big(\{\xi_1\xi_2\}\xi_2^{-1}\big) \le \mathbb{E}\big(\xi_1^p\xi_2^p\big)^{1/p}\mathbb{E}\big(\xi_2^{-q}\big)^{1/q}.$$

Следовательно,

$$\mathbb{E}\big(\xi_1^p\xi_2^p\big) \ge \mathbb{E}\big(\xi_1\big)^p\mathbb{E}\big(\xi_2^{-q}\big)^{-p/q}.$$

Полагая $\xi_1 = V_1^{1/p}$ и $\xi_2 = V_2^{1/p}$, приходим к нижней оценке

$$\mathbb{E}(V_1V_2) \ge \mathbb{E}(V_1^{1/p})^p\mathbb{E}(V_2^{-q/p})^{-p/q}. \tag{35}$$

Наиболее тонкой частью доказательства является оценивание выражения $\mathbb{E}(V_2^{\pm q})$. Используя (33), запишем

$$\mathbb{E}(V_2^{\pm q}) = \mathbb{E}\Big(\exp\Big\{\mp qJ_2(g,\psi)\Big\}\Big).$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Гипотеза об относительной компактности $\mathcal{F}$ в пространстве $\mathbb{H}$ обеспечивает существование такого конечного множества функций $\{\psi_1, \dots, \psi_N\} \subset \mathbb{H}$, что
(1) Для каждого $j = 1, \dots, N$, ψ_j является кусочно линейной функцией (ее производная $\dot\psi_j$ будет, таким образом, кусочно постоянной);

(2) Для каждого $g \in \mathcal{F}$ найдется такой индекс $1 \le j(g) \le N$, что

$$|g - \psi_{j(g)}|^2_{\mathbb{H}} = \min_{1 \le j \le N} |g - \psi_j|^2_{\mathbb{H}} < \varepsilon.$$

В дальнейшем мы пишем просто $\psi := \psi_{j(g)}$.

Для ограниченных версий $\dot\psi_j$ в пределе верно

$$\frac{\lambda}{\rho^{1/2}} \max_{1 \le j \le N} \|\dot\psi_j\| \le 1 - \alpha. \tag{36}$$

Воспользуемся хорошо известной формулой

$$\mathbb{E}\Big(\exp\Big\{ \mp q \int_0^1 \Delta_{g,\psi}(t) d\overline{\Pi}_{\mu_2}(t) \Big\}\Big)$$

$$= \exp\Big\{ \int_0^1 \Big(e^{\mp q \Delta_{g,\psi}(t)} \pm q\Delta_{g,\psi}(t) - 1\Big)\mu_2(t)dt\Big\} \tag{37}$$

и займемся исследованием подинтегрального выражения. В основной зоне $\{t: \frac{\lambda}{\sqrt{\rho}}|\dot g(t)| \leqslant 1-\alpha\}$ скомбинируем (36) и неравенство

$$|\log(1+u) - \log(1+v)| \le |u - v|/\alpha \quad \text{для} \quad u, v \ge \alpha - 1.$$

Получится

$$|\Delta_{g,\psi}(t)| \le \frac{\lambda}{\alpha\rho^{1/2}} |\dot g(t) - \dot\psi(t)|, \tag{38}$$

$$|\Delta_{g,\psi}(t)| \leqslant |\log\alpha| + \log 2 = \log(2/\alpha). \tag{39}$$

Так как в нуле $e^{-x} + x - 1 = (1 + o(1))x^2/2$, можно определить постоянную $\mathcal{C}(q,\alpha)$ выражением

$$\mathcal{C}(q,\alpha) = \sup_{|x| \le q\log(2/\alpha)} x^{-2}|e^{-x} + x - 1|.$$

С помощью (38)–(39) видим, что в данной зоне

$$\frac{\rho}{\lambda^2}\Big|e^{\mp q\Delta_{g,\psi}(t)} \pm q\Delta_{g,\psi}(t) - 1\Big| \le \frac{q^2\mathcal{C}(q,\alpha)}{\alpha^2}|\dot g(t) - \dot\psi(t)|^2. \tag{40}$$

Интегрирование в (37) по этой зоне приводит к оценке $\frac{q^2\mathcal{C}(q,\alpha)}{\alpha^2}\lambda^2\varepsilon^2$.

Рассматривая исключительную зону $T = \{t : \frac{\lambda}{\sqrt{\rho}}\dot g(t) \geqslant 1-\alpha\}$ и используя (36), имеем в пределе $\Delta_{g,\psi}(t) \geqslant 0$ и

$$e^{-q\Delta_{g,\psi}(t)} + q\Delta_{g,\psi}(t) - 1 \leqslant q\Delta_{g,\psi}(t) \leqslant (q+o(1))\log(1+\frac{\lambda\dot g}{\rho^{1/2}}).$$

Интегрирование в (37) по этой зоне приводит к верхней оценке

$$\rho(q+o(1))\int\limits_T \log(1+\frac{\lambda\dot g(t)}{\rho^{1/2}})\left(1+\frac{\lambda\dot g(t)}{\rho^{1/2}}\right)dt.$$

Используя конечную мажоранту

$$\mathcal{C}(\alpha) = \sup_{x>1-\alpha} x^{-2}(1+x)\log(1+x),$$

получаем интегральную оценку

$$\mathcal{C}(\alpha)\lambda^2(q+o(1))\int\limits_T \dot g(t)^2 dt = \lambda^2 o(1).$$

Для объединения двух зон имеем

$$\mathbb{E}(V_2^q) \leqslant \exp\left\{q^2\frac{\mathcal{C}(q,\alpha)}{\alpha^2}\lambda^2\varepsilon^2 + \lambda^2 o(1)\right\}. \qquad (41)$$

Обратимся к изучению интеграла $J_1(\psi)$, где $\dot\psi$ ступенчатая функция. В силу (26) функция $\overline{\Pi}_{\mu_2}$ имеет ограниченную вариацию на $[0,1]$ и $\overline{\Pi}_{\mu_2}(0)=0$. Напомним, что для любой ступенчатой функции ℓ и любой функции ограниченной вариации ω, удовлетворяющей $\omega(0)=0$, верно

$$\Big|\int\limits_0^1 \ell(t)d\omega(t)\Big| = \Big|\ell(1)\omega(1) - \int\limits_0^1 \omega(t)d\ell(t)\Big|$$
$$\le \|\omega\|\Big\{|\ell(1)| + \mathcal{V}(\ell)\Big\} \le 2\|\omega\|\mathcal{V}(\ell),$$

где $\mathcal{V}(\ell)$ обозначает полную вариацию ℓ. Поскольку множество $\{\psi_1,\dots,\psi_N\}$ конечно, эта формула показывает, что в пределе

$$\max_{1\le j\le N}|J_1(\psi_j)| \le 2\|\overline{\Pi}_{\mu_2}\|\max_{1\le j\le N}\mathcal{V}\Big(\log\Big(1+\frac{\lambda\dot\psi_j}{\rho^{1/2}}\Big)\Big) \le 3M\|\overline{\Pi}_{\mu_2}\|\Big\{\frac{\lambda}{\rho^{1/2}}\Big\},$$

где $M = \max_{1\le j\le N} \mathcal{V}(\dot{\psi}_j)$. Поэтому имеем в пределе равномерно по $j = 1,\dots,N$ соотношение

$$\mathbb{E}\left(V_1^{1/p}\right) = \mathbb{E}\Big(\Big\{\mathbf{1}_{\left\{\overline{\Pi}_{\mu_2}\in\frac{\rho^{1/2}r}{\lambda}\mathbf{U}\right\}}\exp\big(-J_1(\psi_j)\big)\Big\}^{1/p}\Big)$$

$$\ge \mathbb{P}\Big(\|\overline{\Pi}_{\mu_2}\|\le\frac{\rho^{1/2}r}{\lambda}\Big)\exp\Big\{-\frac{3Mr}{p}\Big\}\ ;$$

$$E(V_1^p) = \mathbb{E}\Big(\Big\{\mathbf{1}_{\left\{\overline{\Pi}_{\mu_2}\in\frac{\rho^{1/2}r}{\lambda}\mathbf{U}\right\}}\exp\big(-J_1(\psi_j)\big)\Big\}^{p}\Big)$$

$$\le \mathbb{P}\Big(\|\overline{\Pi}_{\mu_2}\|\le\frac{\rho^{1/2}r}{\lambda}\Big)\exp\big\{3Mpr\big\}.$$

Из (26) следует

$$\mathbb{P}\Big(\|\overline{\Pi}_{\mu_2}\|\le\frac{\rho^{1/2}r}{\lambda}\Big) = \mathbb{P}\Big(Y_{m_g}\in\frac{\rho^{1/2}r}{m_g^{1/2}\lambda}\mathbf{U}\Big), \tag{42}$$

где $m_g := \int_0^1 \mu_2(t)dt = \rho + \rho^{1/2}\lambda g(1)$. Так как

$$|g(1)| = \Big|\int_0^1 \dot{g}(t)dt\Big| \le \Big\{\int_0^1 \dot{g}(t)^2dt\Big\}^{1/2} = |g|_{\mathbb{H}},$$

мы имеем, равномерно по $g\in\mathcal{F}$,

$$\Big|\frac{m_g}{\rho}-1\Big| = \Big|\frac{\lambda g(1)}{\rho^{1/2}}\Big| \le \frac{\lambda}{\rho^{1/2}}\ \sup_{g\in\mathcal{F}}|g|_{\mathbb{H}}\to 0.$$

Подставляя эту оценку в (42) и используя (4), получаем

$$\mathbb{P}\Big(\|\overline{\Pi}_{\mu_2}\|\le\frac{\rho^{1/2}r}{\lambda}\Big)$$

$$= \exp\Big(-(1+o(1))\frac{\pi^2\lambda^2 m_g}{8r^2\rho}\Big) = \exp\Big(-(1+o(1))\frac{\pi^2\lambda^2}{8r^2}\Big).$$

и следовательно,

$$\mathbb{E}(V_1^p)^{1/p} \leqslant \exp\Big(-\Big\{\frac{1+o(1)}{p}\Big\}\frac{\pi^2\lambda^2}{8r^2}\Big), \tag{43}$$

$$\mathbb{E}(V_1^{1/p})^p \geqslant \exp\Big(-p(1+o(1))\frac{\pi^2\lambda^2}{8r^2}\Big). \tag{44}$$

Собирая вместе оценки (27), (30), (31), (32), (33), (34) или (35), (41), (43) или (44), в конечном счете находим

$$\mathbb{P}\Big(Y_\rho - \lambda g \in \frac{r}{\lambda}\mathbf{U}\Big) \le \exp\Big(-\frac{\lambda^2}{2}\Big\{\frac{\pi^2}{4r^2 p} + |g|^2_{\mathbb{H}} - \frac{2q\mathcal{C}(q,\alpha)}{\alpha^2}\varepsilon^2 - \varepsilon\Big\}\Big),$$

$$\mathbb{P}\Big(Y_\rho - \lambda g \in \frac{r}{\lambda}\mathbf{U}\Big) \ge \exp\Big(-\frac{\lambda^2}{2}\Big\{\frac{p\pi^2}{4r^2} + |g|^2_{\mathbb{H}} + \frac{2q\mathcal{C}(q/p,\alpha)}{p\alpha^2}\varepsilon^2 + \varepsilon\Big\}\Big).$$

Поскольку $p-1>0$, а затем и $\varepsilon>0$ можно выбрать сколь угодно малыми, из указанных неравенств следует, что при условии (25) верно равенство

$$\mathbb{P}\Big(Y_\rho - \lambda g \in \frac{r}{\lambda}\mathbf{U}\Big) = \exp\Big(-\frac{\lambda^2}{2}\Big\{\frac{\pi^2}{4r^2} + |g|^2_{\mathbb{H}} + o(1)\Big\}\Big). \tag{45}$$

Для завершения доказательства $(\mathcal{P})$ воспользуемся соотношением (7)(v) и запишем, что $|g|_{\mathbb{H}} = |f|_{\mathbb{H}} + o(1)$. В силу (7)(iv) получаем, что $\lambda\|g-f\| = o(r/\lambda)$. Комбинируя полученное с (45), приходим к $(\mathcal{P})$.

Поскольку предположение (25) слишком ограничительно для заявленной верхней оценки $(\mathcal{P})_<$, заменим его на более слабое предположение (8). Для произвольного малого $\delta>0$ построим вспомогательную тройку

$$\tilde\rho = (1+\delta)\rho, \quad \tilde g = \frac{g}{\sqrt{1+\delta}}, \quad \tilde r = \frac{r+\delta^{1/3}}{\sqrt{1+\delta}},$$

которая удовлетворяет условию (25). Рассмотрим два независимых центрированных пуассоновских процесса $\overline{\Pi}_\rho$ и $\overline{\Pi}^*_{\delta\rho}$. В силу их независимости имеем

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{\overline{\Pi}_{\tilde\rho}}{\sqrt{\tilde\rho}} - \lambda\tilde g \in \frac{\tilde r}{\lambda}\mathbf{U}\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{\overline{\Pi}_{(1+\delta)\rho}}{\sqrt{(1+\delta)\rho}} - \lambda\frac{g}{\sqrt{1+\delta}} \in \frac{r+\delta^{1/3}}{\lambda\sqrt{1+\delta}}\mathbf{U}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\frac{\overline{\Pi}_\rho + \overline{\Pi}^*_{\delta\rho}}{\sqrt{\rho}} - \lambda g \in \frac{r+\delta^{1/3}}{\lambda}\mathbf{U}\right)\\ &\geqslant \mathbb{P}\left(\frac{\overline{\Pi}_\rho}{\sqrt{\rho}} - \lambda g \in \frac{r}{\lambda}\mathbf{U}\right)\ \mathbb{P}\left(\frac{\overline{\Pi}^*_{\delta\rho}}{\sqrt{\rho}} \in \frac{\delta^{1/3}}{\lambda}\mathbf{U}\right).\end{aligned}$$

Используя (4) для последнего множителя, выводим

$$\mathbb{P}\left(\frac{\overline{\Pi}_\rho}{\sqrt{\rho}} - \lambda g \in \frac{r}{\lambda}\mathbf{U}\right)$$

$$\leqslant \mathbb{P}\left(\frac{\overline{\Pi}_{\tilde\rho}}{\sqrt{\tilde\rho}} - \lambda\tilde g \in \frac{\tilde r}{\lambda}\mathbf{U}\right)\exp\left\{\frac{\pi^2}{8}\delta^{1/3}\lambda^2(1+o(1))\right\}.$$

Применим к тройке $(\tilde\rho,\tilde g,\tilde r)$ равенство (45) и выведем из него

$$\mathbb{P}\left(\frac{\overline{\Pi}_{\rho}}{\sqrt{\rho}} - \lambda g \in \frac{r}{\lambda}\mathbf{U}\right)$$

$$\leqslant \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\left\{\frac{\pi^2}{4}(\tilde r^{-2}-\delta^{1/3}) + |g|^2_{\mathbb{H}}(1-\delta)+o(1)\right\}\right).$$

Искомая верхняя оценка $(\mathcal{P})_<$ для исходной тройки (ρ,g,r) получается отсюда предельным переходом $\delta\to 0$.

Рассмотрим теперь последнее утверждение теоремы 2.2. Зафиксируем $f\in H$. Для получения верхней оценки $(\mathcal{P})_<$ достаточно построить такую последовательность $\{g\}$, что $|g-f|_{\mathbb{H}}\to 0$, выполнено свойство (8) и

$$\mathbb{P}\Big(Y_\rho - \lambda f \in \frac{r}{\lambda}\mathbf{U}\Big) \leqslant \mathbb{P}\Big(Y_\rho - \lambda g \in \frac{r}{\lambda}\mathbf{U}\Big). \tag{46}$$

Для этого используем оператор монотонизации $\mathcal{M} : D[0,1]\to D[0,1]$, определенный соотношением

$$\mathcal{M}h(s) = \sup_{0\leqslant t\leqslant s} h(t).$$

Следующий результат показывает свойства оператора $\mathcal{M}$.

Предложение 3.2. (i) *Если функция h не убывает, то $\mathcal{M}h = h$.*

(ii) *Для всех $h_1,h_2\in D$ верно $||\mathcal{M}h_1-\mathcal{M}h_2||\leqslant ||h_1-h_2||$. В частности, если h_1 не убывает, то*

$$||h_1-\mathcal{M}h_2||\leqslant ||h_1-h_2||. \tag{47}$$

(iii) *Если $h\in\mathbb{H}$, то $\mathcal{M}h\in\mathbb{H}$.*

(iv) *Если $h(s)=\mathcal{M}h(s)$ и функция h имеет положительную производную $\dot h(s)$, то $\mathcal{M}h$ имеет правую производную $(\mathcal{M}h)^{\cdot}_+$ в точке s и $(\mathcal{M}h)^{\cdot}_+(s)=\dot h(s)$.*

Доказательство этих элементарных утверждений мы оставляем читателю.

Определим аппроксимации

$$g = g(\lambda) = \mathcal{M}(f+\frac{\rho^{1/2}}{\lambda}I) - \frac{\rho^{1/2}}{\lambda}I.$$

Очевидно, имеем $g \in \mathbb{H}$ и, поскольку первый член не убывает, мы имеем

$$||\dot{g}||_{-} \leqslant \frac{\rho^{1/2}}{\lambda}.$$

Таким образом, неравенство (8) проверено. Далее, определим множества

$$S = S(\lambda) := \{s \in [0,1] : g(s) \neq f(s)\}$$

$$= \left\{ s \in [0,1] : \sup_{0 \leqslant t \leqslant s} \frac{f(t) - f(s)}{s - t} > \frac{\rho^{1/2}}{\lambda} \right\}$$

и обозначим $|S|$ меру Лебега множества S. Из определения следует, что для каждого $s \in [0,1]$, для которого производная $\dot{f}(s)$ определена и конечна, при больших λ будет верно $s \notin S$. Следовательно, $\lim_{\lambda \to \infty} |S| = 0$.

С другой сторны, если $s \notin S$ и производные $\dot{f}(s), \dot{g}(s)$ определены, то $g(s) = f(s)$, и из предложения 3.2 (iv) следует $\dot{g}(s) = \dot{f}(s)$. Следовательно,

$$|g - f|^2_{\mathbb{H}} = \int_S |\dot{g}(s) - \dot{f}(s)|^2 ds$$

$$\leqslant 2 \int_S |\dot{g}(s)|^2 ds + 2 \int_S |\dot{f}(s)|^2 ds \leqslant 4 \int_S |\dot{f}(s)|^2 ds \to 0.$$

Наконец, выведем (46). Используя определение g и полагая в (47) $h_1 = Y_\rho + \rho^{1/2} I$; $h_2 = \lambda f + \rho^{1/2} I$, находим

$$||Y_\rho - \lambda g|| = ||Y_\rho - \mathcal{M}(\lambda f + \rho^{1/2} I) + \rho^{1/2} I||$$

$$= ||h_1 - \mathcal{M}(h_2)|| \leqslant ||h_1 - h_2|| = ||Y_\rho - \lambda f||.$$

Следовательно, для всех положительных r, λ верно

$$\left\{ Y_\rho - \lambda f \in \frac{r}{\lambda} \mathbf{U} \right\} \subset \left\{ Y_\rho - \lambda g \in \frac{r}{\lambda} \mathbf{U} \right\},$$

откуда следует (46). □

Следующая лемма нужна для доказательства предложения 2.4.

Лемма 3.3. *Для каждого* $\psi \in L^2[0,1]$ *и каждой положительной последовательности* $\{d_m\}$*, образующей расходящийся ряд, верно*

$$\liminf_{m\to\infty}\left\{\frac{2^m}{d_m}\right\}\int\limits_0^1 |\psi(t)|\mathbf{1}_{\{|\psi(t)|\geq 2^m\}}dt = 0. \tag{48}$$

Доказательство. Так как $\sum_{m=-\infty}^{N} 2^m = 2^{N+1}$, запишем для произвольного $y \geq 0$,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^m \mathbf{1}_{\{y\geq 2^m\}} \leq 2y.$$

Умножая обе части неравенства на y и полагая $y = |\psi(t)|$, получаем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^m|\psi(t)|\mathbf{1}_{\{|\psi(t)|\geq 2^m\}} \leq 2|\psi(t)|^2.$$

Интегрируя по $[0,1]$, видим, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m := \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^m\int\limits_0^1 |\psi(t)|\mathbf{1}_{\{|\psi(t)|\geq 2^m\}}dt \leq 2\int\limits_0^1 |\psi(t)|^2dt < \infty.$$

Поскольку из $\sum_{m=0}^{\infty} a_m < \infty$ и $\sum_{m=0}^{\infty} d_m = \infty$ следует

$$\liminf_{m\to\infty}\left\{\frac{a_m}{d_m}\right\} = 0,$$

этого достаточно для (48).□

Доказательство предложения 2.4. Мы имеем, п.н. по $t \in [0,1]$,

$$|\dot{f}_\gamma(t)| = |\dot{f}(t)|\mathbf{1}_{\{|\dot{f}_\gamma(t)|\leq\gamma\}} \leq |\dot{f}(t)|.$$

Поскольку $\dot{f}_\gamma(t) \to \dot{f}(t)$ п.н. по $t \in [0,1]$, когда $\gamma \to \infty$, теорема Лебега влечет $|f_\gamma - f|_{\mathbb{H}} \to 0$ когда $\gamma \to \infty$, и мы имеем (14) и относительную компактность $\mathcal{F}$ в $\mathbb{H}$. Далее, пусть $f \in \mathbb{H}_G$. Полагая $u = \frac{\lambda^2}{G(\lambda)}$, получаем (15) с помощью оценки

$$\lambda^2 R_f(u) = \lambda^2\int\limits_0^1 |\dot{f}(t)|\mathbf{1}_{\{|\dot{f}(t)|>u\}}(t)dt$$

$$\leqslant \frac{\lambda^2}{uG(u)} \int_0^1 |\dot f(t)|^2 G(|\dot f(t)|) \mathbf{1}_{\{|\dot f(t)|>u\}}(t)dt$$

$$= \frac{G(\lambda)}{G(u)} \int_0^1 |\dot f(t)|^2 G(|\dot f(t)|) \mathbf{1}_{\{|\dot f(t)|>u\}}(t)dt \to 0.$$

Для доказательства (17) положим $\psi = \dot f$ и $d_m = G(2^m)^{-1}$ в лемме 3.3. Так как

$$\int_1^\infty \frac{dx}{xG(x)} = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{m=1}^\infty d_m = \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{G(2^m)} = \infty,$$

наши предположения с помощью (48) дают

$$\liminf_{m\to\infty} \left\{ 2^m G(2^m) \int_0^1 |\dot f(t)| \mathbf{1}_{\{|\dot f(t)|>2^m\}}(t)dt \right\} = 0. \tag{49}$$

Пусть $\lambda = \lambda_m = 2^{m/2}\sqrt{G(2^m)}$. Так как функция G медленно меняется и не убывает, имеем в пределе $\lambda < 2^m$, следовательно,

$$\frac{\lambda^2}{G(\lambda)} \geqslant \frac{\lambda^2}{G(2^m)} = 2^m.$$

Так как функция $R_f(\cdot)$ не убывает, получаем

$$R_f\left(\frac{\lambda^2}{G(\lambda)}\right) \leqslant R_f(2^m).$$

Следовательно, используя определение λ и (49), находим

$$\liminf_{m\to\infty} \lambda_m^2 \; R_f\left(\frac{\lambda_m^2}{G(\lambda_m)}\right) = 0,$$

откуда вытекает (17). □

Доказательство теоремы 2.6. Легко видеть, что для каждой функции $G \in \mathcal{S}V_0$, удовлетворяющей (21), существует $\tilde G \in \mathcal{S}V_0$, которая также удовлетворяет (21), но $\lim_{\lambda\to\infty} \tilde G(\lambda)/G(\lambda) = 0$. Поэтому без ограничения общности можно вместо (22) (ii) предположить, что

$$\rho G(\lambda)^2/\lambda^6 \to 0. \tag{50}$$

Далее, заменяя при необходимости G на cG с подходящей константой $c > 0$, можем также предположить, что

$$\int_0^1 \frac{du}{uG(1/u)} = \int_1^\infty \frac{dx}{xG(x)} = \eta^2.$$

Заметим теперь, что функция

$$f(t) := -\int_0^t \frac{du}{\sqrt{uG(1/u)}} \quad \text{при} \quad 0 \le t \le 1, \tag{51}$$

удовлетворяет условию $|f|_{\mathbb{H}} = \eta$. Положим $\rho_1 = \max\{\rho, \lambda^4\}$. Тогда, согласно (22) и (50), верно

$$(i)\ \lambda \to \infty; \quad (ii)\ \rho_1/\lambda^2 \to \infty; \quad (iii)\ \rho_1 G(\lambda)^2/\lambda^6 \to 0. \tag{52}$$

Положим

$$t_* = t_*(\rho_1, \lambda) = \frac{\lambda^2}{\rho_1 G(\lambda)}, \tag{53}$$

В силу (52) (ii) и (53), монотонность G влечет

$$t_* = \Big\{\frac{\lambda^2}{\rho_1}\Big\}\frac{1}{G(\lambda)} = O\Big(\frac{\lambda^2}{\rho_1}\Big) \to 0. \tag{54}$$

Вввиду (51) и (54), из предположения о медленном изменении G следует, что в пределе

$$|f(t_*)| = \int_0^{t_*} \frac{du}{\sqrt{uG(1/u)}} = (1+o(1))\frac{2t_*}{\sqrt{t_* G(1/t_*)}}. \tag{55}$$

Далее, из (57), (52) (iii) и монотонности G выводим

$$\frac{1}{t_*} = \Big\{\frac{\rho_1 G(\lambda)^2}{\lambda^6}\Big\}\Big\{\frac{\lambda^4}{G(\lambda)}\Big\} = o(\lambda^4). \tag{56}$$

Напомним, что из $G \in \mathcal{S}V_0$ следует

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{G(\lambda)}{G(\lambda^4)} = 1. \tag{57}$$

Теперь (56) и монотонность G обеспечивают в пределе $G(1/t_*) \leq G(\lambda^4)$, откуда

$$\frac{t_*}{\sqrt{t_* G(1/t_*)}} \geqslant \left\{\frac{G(\lambda)}{G(\lambda^4)}\right\}^{1/2} \frac{\rho_1^{1/2} t_*}{\lambda} = (1+o(1)) \frac{\rho_1^{1/2} t_*}{\lambda}.$$

В силу (55), в пределе верно $|f(t_*)| > 3\rho_1^{1/2} t_*/(2\lambda)$. Комбинируя это с неравенством

$$Y_\rho(t_*) \geq -\rho^{1/2} t_* \geqslant -\rho_1^{1/2} t_*,$$

получим

$$\|Y_\rho - \lambda f\| \geq Y_\rho(t_*) - \lambda f(t_*) > \frac{\rho_1^{1/2} t_*}{2} \ . \qquad (58)$$

С другой стороны, из (54) и (52) (iii) следует

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\rho_1^{1/2} t_*}{\lambda} \cdot \frac{\rho_1^{1/2} G(\lambda)}{\lambda^2} = \rho_1^{1/2} t_* \left\{\frac{\rho_1 G(\lambda)^2}{\lambda^6}\right\}^{1/2} = o\Big(\rho_1^{1/2} t_*\Big) \ . \qquad (59)$$

Из (58) и (59) легко получается, что для каждого $r > 0$, в пределе

$$\|Y_\rho - \lambda f\| > \frac{r}{\lambda} \ ,$$

и заключение ($\mathcal{Q}$) теоремы 2.6 доказано. □

Литература

1. А. А. Боровков, А. А. Могульский, *О вероятностях малых уклонений для случайных процессов.* Труды Инст. Матем. СОАН СССР, **13** (1989), 147–168.
2. Ю. А. Давыдов, М. А. Лифшиц, *Метод расслоений в некоторых вероятностных задачах.* Теория Вероятн. Матем. Статист. Теор. Киберн., **22** (1984), 61–157.
3. М. А. Лифшиц, *Гауссовские случайные функции.* TViMS, Киев (1995).
4. А. А. Могульский, *Малые уклонения в пространстве траекторий.* Теория вероятн. и ее примен., **19** (1974), 755–765.
5. А. А. Могульский, *О законе повторного логарифма в форме Чжуна для функциональных пространств.* Теория вероятн. и ее примен., **24** (1979), 399–407.
6. С. В. Нагаев, *Об асимптотике винеровской меры узкой полосы.* Теория вероятн. и ее примен., **26** (1981), 639.
7. А. В. Скороход, *Случайные процессы с независимыми приращениями.* Наука, М. (1964).

8. A. de Acosta, *Small deviations in the functional central limit theorem with applications to functional laws of the iterated logarithm.* Ann. Probab. **11**, (1983) 78–101.
9. A. de Acosta, *On the functional form of Lévy's modulus of continuity for Brownian motion.* Z. Wahrscheinlichkeit. verw. Gebiete, **69** (1985), 567–579.
10. P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures.* Wiley, New York (1968).
11. R. Cameron, W. T. Martin, *Transformation of Wiener integrals under translation.* Ann. Math., **45** (1944), 386–396.
12. K. L. Chung, *On the maximum partial sums of sequences of independent random variables.* Trans. Amer. Math. Soc., **64** (1948), 205–233.
13. E. Csáki, *A relation between Chung's and Strassen's law of the iterated logarithm.* Z. Wahrscheinlichkeit. verw. Gebiete., **54** (1980), 287–301.
14. E. Csáki, *A liminf result in Strassen's law of the iterated logarithm.* Colloq. Math. Soc. János Bolyai., **57** (1989), 83–93.
15. M. Csörgő, P. Révész, *Strong Approximations in Probability and Statistics.* Academic Press, New York (1981).
16. P. Deheuvels, *Chung-type functional laws of the iterated logarithm for tail empirical processes.* Ann. Inst. Henri Poincaré (to appear).
17. P. Deheuvels, D. M. Mason, *Nonstandard functional laws of the iterated logarithm for tail empirical and quantile processes.* Ann. Probab., **18** (1990), 1693–1722.
18. O. Kallenberg, *Random Measures.* Academic Press, New York (1976).
19. M. Ledoux, *Isoperimetry and Gaussian analysis.* Lectures on Probability Theory and Statistics Lecture Notes in Math., **1648** (1996), 165–294.
20. M. A. Lifshits, *Asymptotic behavior of small ball probabilities.* Probab. Theory and Math. Statist. Proc. VII International Vilnius Conference (1998), Vilnius, 1999, 453–468.

Deheuvels P., Lifshits M. A. Probabilities of hitting of shifted small balls by the centered Poisson process.

We investigate the probabilities of hitting shifted small balls by sample paths of centered Poisson process and find the exact range of parameters where Wiener approximation of those probabilities is valid. Towards this aim, we introduce the Skorokhod density technique which, for the Poisson process, plays a role similar to that of the Cameron-Martin formula in construction of associated laws for Gaussian measure.

Université Paris VI
С.-Петербургский государственный университет

Поступило 24 ноября 2000 г.