Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 277, 2001 г.

Б. Ю. Конев

ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА ВЫСОТЫ ТЕРМОВ В ВЫВОДАХ С СЕЧЕНИЯМИ ПО ФОРМУЛАМ ОГРАНИЧЕННОЙ ГЛУБИНЫ СВЯЗАННЫХ ВХОЖДЕНИЙ

1. Введение

Вопрос об оценке размера линейной записи доказательства относительно количества содержащихся в нем строк был поставлен в работе [15] в связи с гипотезой Крайзеля об обобщении доказательств в арифметике (см., например, [12]). В секвенциальных исчислениях с сечениями существует лишь конечное число схем логического вывода данного размера (говоря неформально, *схемой*, или *скелетом* вывода является конструкция, которая отличается от самого вывода лишь тем, что в ней представлена вся информация о выводе, кроме собственных термов и собственных переменных, используемых в правилах введения кванторов. Более точное определение содержится в разделе 5). Схема задает логическую структуру вывода, однако если язык содержит функциональные символы, формулы, входящие в вывод, могут содержать термы большого размера и получить оценки размера этих термов в общем случае невозможно, что было показано Оревковым [4, 6] и независимо Крайчеком и Пудлаком [15]. Позднее Бассом [10] было доказано более общее утверждение об алгоритмической неразрешимости задачи k-выводимости для секвенциального исчисления с сечениями (т.е. задачи определения существует ли вывод данной формулы, содержащий не более k строк).

Известны частные случаи, когда желаемая оценка может быть получена, например, если рассматриваются выводы без сечений [15], а также выводы, в которых на формулы сечения накладываются определенные ограничения. Так в работе [3] были получены оценки размера термов в выводах, где допускаются сече-

Работа выполнена при поддержке INTAS и РФФИ.

ния по бескванторным формулам, в работе [16] рассмотрен случай сечений по формулам, не содержащим связанных вхождений переменных ненулевой глубины. Интересный разрешимый случай содержится в работе [9], где рассматриваются выводы, в которых сечения допускаются только по предваренным формулам с "однородным" кванторным префиксом, содержащим либо только кванторы всеобщности, либо только существования. Правда, для доказательства разрешимости и получения оценки авторы изменяют исчисление – заменяют правила введения кванторов на правила введения блоков кванторов. Для стандартной формулировки исчисления, восстановление по схеме доказательства с сечениями по таким формулам алгоритмически неразрешимо.

Основным механизмом получения оценок является сведение задачи восстановления доказательства по его схеме к задаче унификации [4, 6, 16, 15] (или разрешимым случаям квазиунификации [9]). При этом, оценки размера входящих в доказательство термов следуют из оценок размера наиболее общего унификатора (квазиунификатора).

В. П. Оревковым было показано [16], что если дополнить схему доказательства в секвенциальном исчислении *типами сечений* (формулами, во многом описывающими вид формул сечения), задача восстановления доказательства по его схеме становится разрешимой. В данной работе мы несколько изменяем приведенную в [16] конструкцию; в результате получается задача унификации с выделенными неизвестными для термов, возникающими при рассмотрении применений правила сечения, называемых неизвестными *типа сечения*.

Доказывается оценка размера решения задачи унификации, не зависящая от количества неизвестных типа сечения. Отсюда следует, что если сечения допускается производить по формулам, в которых ограничена глубина связанных вхождений переменных, существует оценка размера термов, входящих в доказательство.

Структура работы. В разделе 2 вводятся основные понятия и обозначения. Оценка высоты термов в наиболее общем унификаторе, не зависящая от количества неизвестных типа сечения, доказывается в разделе 3. Раздел 4 содержит серию примеров, показывающих, что полученная верхняя оценка является достаточно точной. В разделе 5 строится верхняя оценка высоты термов, входящих в выводы с сечениями по формулам ограниченной глубины связанных вхождений.

Предварительная версия данной работы была представлена на конференции "International Workshop on First order Theorem Proving" [14].

2. Основные понятия

Для того чтобы избежать путаницы с предметными переменными, мы будем называть метапаременные для термов *неизвестными*. Понятия *терм*, *подтерм*, *вхождение подтерма*, *высота терма*, обозначаемая $h[t]$, определяются как обычно. *Глубина* вхождения подтерма в терм определяется как количество функциональных знаков, в области действия которых находится данное вхождение. *Разностью глубин* неизвестной x в терме t будем называть разность между максимальной и минимальной глубинами вхождений неизвестной x в терм t. Обозначим $\mathrm{Var}(t)$ совокупность всех неизвестных, входящих в терм t.

Путем в терме t *к вхождению* v подтерма t' назовем последовательность пар $\{(f_{i_1}, n_1), (f_{i_2}, n_2), \dots, (f_{i_l}, n_l)\}$, где f_{i_j} – функциональный знак арности N_{i_j}, n_j – число между 1 и N_{i_j}, определяемые индукцией по построению t следующим образом. Если терм t' совпадает с t, то путем в терме t к вхождению v назовем пустую последовательность $\{\}$. Если терм t имеет вид $t = f(t_1, \dots, t_l)$ вхождение v порождает вхождение w терма t' в один из термов $t_1, \dots, t_l$, не умаляя общности, в терм t_k. Тогда в терме t_k определен путь к w. Пусть этот путь равен $\{(f_{i_1}, n_1), (f_{i_2}, n_2), \dots, (f_{i_l}, n_l)\}$. Тогда путем в терме t ко вхождению v назовем последовательность $\{(f, k), (f_{i_1}, n_1), (f_{i_2}, n_2), \dots, (f_{i_l}, n_l)\}$.

Пусть t – некоторый терм. Мы говорим, что последовательность $\mathcal{P}$ пар функциональных знаков и натуральных чисел *определяет* подтерм t' терма t и его вхождение, если путь к данному вхождению t' совпадает с $\mathcal{P}$.

Пусть Γ – система (множество) пар термов $\{(T_i, \Theta_i)\}$. Задача унификации для системы Γ состоит в поиске подстановки σ термов вместо неизвестных такой, что $\sigma(T_i) = \sigma(\Theta_i)$ (мы записываем применение подстановок слева). Такая подстановка называется *унификатором* системы Γ. Унификатор σ называется *наиболее общим унификатором* системы Γ, если любой другой унификатор σ'

может быть представлен в виде $\sigma' = \lambda \circ \sigma$, где λ – некая подстановка. Робинсон [18] доказал теорему об унификации, именно, если система Γ имеет какой-либо унификатор, она имеет и наиболее общий унификатор.

Понятия высоты, глубины вхождения и разности глубин естественным образом переносятся на системы пар термов. Высотой подстановки назовем максимальную высоту результата применения этой подстановки к неизвестным.

3. Оценка высоты наиболее общего унификатора системы пар термов относительно количества неизвестных не типа сечения

Если для некоторой неизвестной x разность глубин ее вхождений в систему Γ равна нулю, мы называем такую неизвестную неизвестной *типа сечения*, в противном случае неизвестная называется неизвестной *не типа сечения*. Это название обусловлено применением верхней оценки относительно количества неизвестных не типа сечения для получения оценки размера термов в выводах с сечениями в разделе 5.

Поскольку глубины всех вхождений неизвестной типа сечения совпадают, мы будем иногда говорить "глубина неизвестной", вместо "глубина вхождения неизвестной" для неизвестных типа сечения.

Замечание. Здесь, и во всех аналогичных случаях, мы считаем, что максимум по пустому множеству равен нулю. В данном случае это означает, что если система не содержит неизвестных типа сечения, то максимум глубин неизвестных типа сечения равен нулю.

Обозначим $h_x[\Gamma]$ глубину вхождения неизвестной типа сечения x в систему Γ.

Теорема 1. *Пусть унифицируемая система пар термов* $\Gamma = \{(T_i, \Theta_i)\}$ *содержит* n *неизвестных не типа сечения. Пусть* $h_0 = h[\Gamma]$, h_1 *– максимальная глубина вхождений неизвестных типа сечения,* h_2 *– максимальная глубина вхождений неизвестных не типа сечения,* $\mathrm{ar}\,[\Gamma]$ *– максимальная арность функциональных знаков, входящих в систему* Γ. *Тогда высота наиболее общего унификатора* Γ *не превосходит*

$$\mathrm{ar}\,[\Gamma]^{h_1} \cdot n \cdot h_1 + n \cdot h_2 + h_0.$$

Предположим, что система пар термов $\Gamma = \{(T_i, \Theta_i)\}$ имеет наиболее общий унификатор σ. Для доказательства теоремы мы представляем результат унификации термов ориентированным ациклическим мультиграфом, как это было предложено Патерсоном и Вегманом для линейного алгоритма унификации [17][1]. А именно, представим исходные термы системы Γ деревьями (обозначим полученный лес $G(\Gamma)$) и введем на вершинах этих деревьев отношение эквивалентности Σ следующим образом. Две вершины объявляются эквивалентными, если соответствующие им подтермы переходят под действием σ в графически равные термы (нетрудно убедиться, что так определенное отношение действительно является отношением эквивалентности).

Рассмотрим ориентированный мультиграф $G'(\Gamma)$, представляющий результат унификации системы Γ: вершинами графа $G'(\Gamma)$ являются классы эквивалентности вершин графа $G(\Gamma)$ по отношению Σ; из вершины C_1 в вершину C_2 идет дуга тогда и только тогда, когда класс C_1 содержит вершину x_1, класс C_2 содержит вершину x_2 и в графе $G(\Gamma)$ имеется дуга (x_1, x_2).

Будем говорить, что вершина C графа $G'(\Gamma)$ *помечена* неизвестной или функциональным знаком, если класс C содержит вершину графа $G(\Gamma)$, помеченную этим функциональным знаком, или этой неизвестной; вершина графа $G'[\Gamma]$ может быть помечена функциональным знаком и несколькими неизвестными.

Индукцией по построению нетрудно показать, что полученный граф $G'(\Gamma)$ ацикличен и действительно представляет результат унификации. В частности, высота результата применения наиболее общего унификатора к терму равняется длине наибольшего направленного пути в графе $G'(\Gamma)$ из вершины, соответствующей данному терму.

Будем говорить, что неизвестная x *не играет роли* в системе $\Gamma = \{(T_i, \Theta_i)\}$, если для *любого* ее вхождения u в термы T_i, Θ_i выполнено следующее. Не умаляя общности, u – вхождение в терм T_j; тогда путь в терме T_j к данному вхождению определяет в терме Θ_j подтерм, причем этот подтерм совпадает с x.

В противном случае, скажем, что x *играет роль* в Γ. Нетрудно видеть, что если σ – наиболее общий унификатор Γ и x не играет роли в Γ, то $\sigma(x) = x$.

[1]Аналогичные идеи можно найти в работе [1]

Лемма 1. *По любой унифицируемой системе пар термов* $\Gamma = \{(T_i, \Theta_i)\}$ *можно построить такую унифицируемую систему пар термов* $\Gamma^* = \{(T_i^*, \Theta_i^*)\}$, *что*

1. $h[\Gamma^*] = h[\Gamma]$;
2. $\mathrm{Var}\,[\Gamma^*] \subseteq \mathrm{Var}\,[\Gamma]$;
3. $\mathrm{ar}\,[\Gamma^*] = \mathrm{ar}\,[\Gamma]$;
4. *если неизвестная типа сечения системы* Γ *входит в систему* Γ^*, *то она является неизвестной типа сечения системы* Γ^* *той же глубины;*
5. *ограничение наиболее общего унификатора* σ *системы* Γ *на* $\mathrm{Var}\,[\Gamma^*]$ *является наиболее общим унификатором системы* Γ^*;
6. *для любой неизвестной* x *системы* Γ *существует такой подтерм* t *системы* Γ^*, *что* $\sigma(x) = \sigma(t)$;
7. *для каждой играющей роль неизвестной* x *типа сечения системы* Γ^* *выполнено следующее условие. Если вершина* v *графа* $G'(\Gamma^*)$ *помечена* x, *то в нем найдется вершина* w, *помеченная неизвестной не типа сечения такая, что в графе* $G'(\Gamma^*)$ *имеется направленный путь из вершины* w *в вершину* v *длины не более* $h_x[\Gamma^*]$.

Доказательство. Будем говорить, что для системы $\widetilde{\Gamma}$ и числа N выполняется условие $(*)$, если

$(*)$ Если глубина играющей роль неизвестной типа сечения x системы $\widetilde{\Gamma}$ строго меньше N и вершина u графа $G'[\widetilde{\Gamma}]$ помечена x, то найдется вершина v графа $G'[\widetilde{\Gamma}]$, помеченная неизвестной не типа сечения такая, что вершины v и u соединены в графе $G'[\widetilde{\Gamma}]$ направленным путем длины не более $h_x[\widetilde{\Gamma}]$.

Смысл условия $(*)$ состоит в том, что для всех играющих роль неизвестных типа сечения, глубины меньше N, выполняется условие 7) леммы. Для того, чтобы построить систему Γ^*, построим последовательность систем $\Gamma^{(k)} = \{T_i^{(k)}, \Theta_i^{(k)}\}$ и целых чисел $N^{(k)}$ таким образом, чтобы для $\Gamma^{(k)}$ и $N^{(k)}$ выполнялось условие $(*)$. При переходе от k к $k+1$ мы либо уменьшаем количество неизвестных, играющих роль в системе, либо увеличиваем значение числа $N^{(k)}$. По построению, все числа $N^{(k)}$ не превосходят высоты системы, поэтому последовательности $\Gamma^{(k)}$ и $N^{(k)}$ конечны.

Базой построения является система $\Gamma^{(0)} = \Gamma$**.** В качестве $N^{(0)}$ возьмем минимум глубин всех вхождений неизвестных типа сечения в систему Γ. Ясно, что для системы $\Gamma^{(0)}$ и числа $N^{(0)}$ условие $(*)$ будет автоматически выполняться, так как глубины всех неизвестных типа сечения больше либо равны $N^{(0)}$.

Пусть мы построили систему $\Gamma^{(k)}$ и число $N^{(k)}$, такие что для них условие $(*)$ выполняется. Возможны следующие случаи.

1. Условие $(*)$ выполнено для системы $\Gamma^{(k)}$, даже если в качестве N взять $N^{(k)}+1$. Рассмотрим случаи.

    (a) Если глубины всех играющих роль неизвестных типа сечения системы $\Gamma^{(k)}$ не превосходят $N^{(k)}$, то мы завершаем построение и берем в качестве системы Γ^* систему $\Gamma^{(k)}$.

    (b) Если существует играющая роль неизвестная типа сечения, глубина которой больше $N^{(k)}$, то, как нетрудно видеть, условие $(*)$ будет выполнено для системы $\Gamma^{(k)}$ и числа

$$N^{(k+1)} =$$
$$\min\left\{ h_u[\Gamma^{(k)}] \;\middle|\; \begin{array}{l} u \text{ – вхождение играющей роль неизвестной} \\ \text{типа сечения в систему } \Gamma^{(k)}, \text{т.ч.} \\ h_u[\Gamma^{(k)}] > N^{(k)} \end{array} \right\}.$$

    Тогда в качестве системы $\Gamma^{(k+1)}$ возьмем ту же систему $\Gamma^{(k)}$, но в качестве N выступает $N^{(k+1)}$.

2. Пусть условие $(*)$ выполняется для системы $\Gamma^{(k)}$ и числа $N^{(k)}$, но не выполняется для системы $\Gamma^{(k)}$ и числа $N^{(k)}+1$. Рассмотрим играющую роль неизвестную типа сечения x глубины $N^{(k)}$ (если такой неизвестной нет, то условие $(*)$ выполняется для системы $\Gamma^{(k)}$ и числа $N^{(k)}+1$). Обозначим посредством u некоторое вхождение неизвестной x в термы $T_i^{(k)}$, $\Theta_i^{(k)}$, не умаляя общности u – вхождение x в терм $T_l^{(k)}$. Рассмотрим пару $(T_l^{(k)}, \Theta_l^{(k)})$ и путь $\mathcal{P}$ в терме $T_l^{(k)}$ к данному вхождению u. Поскольку система $\Gamma^{(k)}$ унифицируема, найдется такой подтерм терма $\Theta_l^{(k)}$, что путь в терме $\Theta_l^{(k)}$ к данному вхождению этого подтерма является префиксом

$\mathcal{P}$, или $\mathcal{P}$ является префиксом этого пути. Тогда выполнено одно из следующих условий.

(a) Путь в терме $\Theta_l^{(k)}$ короче $\mathcal{P}$ и заканчивается на неизвестную z *не* типа сечения.

(b) Путь в терме $\Theta_l^{(k)}$ короче $\mathcal{P}$ и заканчивается на неизвестную w типа сечения.

(c) Длина пути в терме $\Theta_l^{(k)}$ больше либо равна длины $\mathcal{P}$. Тогда $\mathcal{P}$ определяет некоторый подтерм t_u и его вхождение в терм $\Theta_l^{(k)}$.

(Мы не рассматриваем ситуацию, когда путь в терме $\Theta_l^{(k)}$ короче $\mathcal{P}$ и заканчивается на функциональную константу, так как в этом случае термы $T_l^{(k)}$ и $\Theta_l^{(k)}$ не могут быть унифицируемы.)

В случае (а), очевидно, существует путь в графе $G'[\Gamma^{(k)}]$, начинающийся в вершине, помеченной неизвестной не типа сечения z, и заканчивающийся в вершине, помеченной x, и длина этого пути не превосходит $h_x[\Gamma^{(k)}]$.
В случае (б), так как глубина неизвестной w меньше, чем глубина x, и условие $(*)$ выполняется для системы $\Gamma^{(k)}$ и числа $N^{(k)}$, найдется неизвестная не типа сечения z такая, что в графе $G'[\Gamma^{(k)}]$ существует путь из вершины, помеченной z, в вершину, помеченную w, длины не более $h_w[\Gamma^{(k)}]$. Значит, в графе $G'[\Gamma^{(k)}]$ существует путь из вершины, помеченной z, в вершину, помеченную x, длина которого не превосходит суммы длины пути от z к w и длины пути от w к x. Длина данного пути не превосходит $h_x[\Gamma^{(k)}]$.

Заметим, что если для каждой неизвестной типа сечения системы $\Gamma^{(k)}$, глубина которой равняется $N^{(k)}$, существует ее вхождение в $\Gamma^{(k)}$, для которого выполняется один из случаев (а) или (б), то условие $(*)$ выполняется для системы $\Gamma^{(k)}$ и числа $N^{(k)}+1$.

Если же для всех вхождений x в систему $\Gamma^{(k)}$ имеет место случай (в), мы заменим эти вхождения на терм t_u и обозначим полученную систему $\Gamma^{(k+1)}$. Поскольку для всех вхождений u неизвестной x в систему $\Gamma^{(k)}$ термы t_u, как и сама неизвестная x, переходят под действием наиболее общего унификатора системы $\Gamma^{(k)}$ в графически равные термы, ограничение наиболее общего унификатора системы $\Gamma^{(k)}$ на $\mathrm{Var}\,[\Gamma^{(k+1)}]$ является наиболее общим унификатором системы $\Gamma^{(k+1)}$. Ясно, что $\sigma(x) = \sigma(t_u)$.

Глубины всех вхождений неизвестной x равны, глубина данного вхождения терма t_u совпадает с глубиной вхождения x, следовательно, $h[\Gamma^{(k+1)}] = h[\Gamma^{(k)}]$, и если неизвестная типа сечения системы $\Gamma^{(k)}$ входит в систему $\Gamma^{(k+1)}$, то она является неизвестной типа сечения в системе $\Gamma^{(k+1)}$ той же глубины. Также ясно, что $\mathrm{ar}\,[\Gamma^{(k+1)}] = \mathrm{ar}\,[\Gamma^{(k)}]$. В качестве $N^{(k+1)}$ мы берем $N^{(k)}$. Система $\Gamma^{(k+1)}$ содержит на одну играющую роль неизвестную меньше, чем система $\Gamma^{(k)}$.

Для итоговой системы Γ^* свойство $(*)$ выполнено, если в качестве N взять $N^{(k)}+1$ (для того значения k, с которым мы завершили построение, т.е. для которого $\Gamma^{(k)} = \Gamma^*$), причем глубины всех играющих роль неизвестных типа сечения системы Γ^* не превосходят $N^{(k)}$. Это означает, что построенная система удовлетворяет условиям леммы. $\square$

Доказательство теоремы 1. Пусть система пар термов Γ удовлетворяет условиям теоремы 1. Рассмотрим систему Γ^*, существование которой гарантирует лемма 1, и граф $G'[\Gamma^*]$. По лемме 1 для любой играющей роль неизвестной x типа сечения существует вершина u графа $G'[\Gamma^*]$, помеченная неизвестной не типа сечения, такая, что длина пути из u в вершину, помеченную x, не превосходит $h_x[\Gamma^*]$, а значит, не превосходит h_1. Таким образом, мы можем оценить количество играющих роль неизвестных типа сечения системы Γ^*, подсчитав количество вершин графа $G'[\Gamma^*]$, находящихся на расстоянии не более h_1 от вершин, помеченных неизвестными не типа сечения. Поскольку максимальная выходная степень вершин графа $G'(\Gamma^*)$ не превосходит $\mathrm{ar}\,[\Gamma^*]$, для каждой вершины, помеченной неизвестной не типа сечения, число вершин, находящихся на расстоянии не более h_1, не превосходит $\mathrm{ar}\,[\Gamma^*]^{h_1}$. Следовательно, всего в систему Γ^* входит не более, чем $n \cdot \mathrm{ar}\,[\Gamma^*]^{h_1}$ неизвестных типа сечения, играющих роль в Γ^*.

Рассмотрим произвольный путь в графе $G'[\Gamma^*]$, заканчивающийся в вершине с нулевой выходной степенью. Поскольку граф $G'[\Gamma^*]$ не имеет циклов, этот путь проходит через вершину, помеченную каждой неизвестной, не более одного раза. Пусть вершина v_1, помеченная неизвестной, или функциональным знаком, и v_2, помеченная неизвестной x, принадлежат этому пути, вершина v_1 находится на этом пути раньше вершины v_2, причем ни одна из вершин, лежащих на этом пути между v_1 и v_2, не помечена никакой неизвестной. Если x – неизвестная типа сечения, то длина участка пути от v_1 до v_2 не превосходит h_1, а если x – неизвестная не типа сечения, то длина пути от v_1 до v_2 не превосходит h_2.

Любому пути в графе $G'[\Gamma^*]$, заканчивающемуся в вершине нулевой выходной степени, принадлежат не более n вершин, помеченных неизвестными не типа сечения, и не более $n \cdot \mathrm{ar}\,[\Gamma^*]^{h_1}$ вершин, помеченных играющими роль неизвестными типа сечения. Пусть v_N – последняя вершина пути, помеченная неизвестной. Длина участка пути от его начала до v_N не превосходит $n \cdot h_2 + n \cdot \mathrm{ar}\,[\Gamma^*]^{h_1} \cdot h_1$, длина участка пути от v_N до вершины с нулевой выходной степенью не превосходит h_0. Значит, длина всего пути не превосходит $n \cdot h_2 + n \cdot \mathrm{ar}\,[\Gamma^*]^{h_1} \cdot h_1 + h_0$. Ясно, что высота результата применения наиболее общего унификатора системы Γ^* к термам системы Γ^* не превосходит максимума длин таких путей.

Количество неизвестных типа сечения системы Γ^* не превосходит количества неизвестных типа сечения системы Γ, $\mathrm{ar}\,[\Gamma^*] = \mathrm{ar}\,[\Gamma]$, для любой неизвестной x системы Γ существует вершина графа $G'(\Gamma^*)$, соответствующая терму t, такая, что $\sigma(x) = \sigma(t)$. Следовательно,

$$h[\sigma(\Gamma)] \leq n \cdot \mathrm{ar}\,[\Gamma]^{h_1} \cdot h_1 + n \cdot h_2 + h_0.$$

4. Нижняя оценка высоты наиболее общего унификатора

В этом разделе мы показываем, что полученная в предыдущем разделе верхняя оценка достаточно точна. На самом деле, мы докажем более сильное утверждение.

Неизвестная x называется неизвестной *с единственным путем*, если для всех вхождений x в термы системы Γ пути к этим вхождениям в этих термах совпадают, и неизвестной с *различными путями* в противном случае.

Очевидно, что неизвестная с единственным путем является неизвестной типа сечения.

Теорема 2. *Для любых натуральных чисел $k \geq 1$, $l \geq 2$ и $s \geq 2$ существует такая система пар термов Γ, что*

1. *в систему Γ входят только одноместные и s-местные функциональные знаки, то есть $\mathrm{ar}\,[\Gamma] = s$;*
2. *h_0 – высота системы Γ – равна $2l + 1$;*

3. h_1 – *максимальная глубина неизвестных с единственным путем в системе* Γ – *равна* $2l+1$;
4. Γ *содержит* $n = 2k-1$ *неизвестных с различными путями;*
5. *высота наиболее общего унификатора* σ *не меньше*

$$\tfrac{1}{4}(n+1)\cdot \mathrm{ar}\,[\Gamma]^{(h_1-1)/2}(h_1+1).$$

Доказательство. Пусть f – одноместный, g – s-местный функциональный знак. Обозначим

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x_1,\dots,x_s) &\rightleftharpoons g(x_1,\dots,x_s),\\ G^{(i)}(x_1,x_2,\dots,x_{s^i}) &\rightleftharpoons g(G^{(i-1)}(x_1,\dots,x_{s^{i-1}}),\dots,\\ &\qquad G^{(i-1)}(x_{(s-1)s^{i-1}+1},\dots,x_{s^i})) \quad \text{для} \quad i\geq 2. \end{aligned}$$

Мы будем использовать $G^{(i)}$ как s^i-местный функциональный знак и при вычислении высоты терма считать, что высота $G^{(i)}$ равна i, а не 1, как мы считаем для обычных функциональных знаков.

Пусть $N = s^l$. Обозначим $t\downarrow^{u}_{t'}$ результат замены в терме t всех вхождений неизвестной u на t'.

Пусть

$$\mathcal{U}^{(j)}_{N,i}(x) \rightleftharpoons G^{(l)}(u^{(j)}_1,u^{(j)}_2,\dots,u^{(j)}_N)\downarrow^{u^{(j)}_i}_{x},$$

$$\widetilde{\mathcal{U}}^{(j)}_{N,i}(x) \rightleftharpoons G^{(l)}(\widetilde{u}^{(j)}_1,\widetilde{u}^{(j)}_2,\dots,\widetilde{u}^{(j)}_N)\downarrow^{\widetilde{u}^{(j)}_i}_{x},$$

где $u^{(j)}_i$, $\widetilde{u}^{(j)}_i$ суть неизвестные.

Пусть

$$\begin{aligned} T_1 &\rightleftharpoons G^{(l)}(f(\mathcal{U}^{(1)}_{N,N}(x_1)), f(\mathcal{U}^{(2)}_{N,1}(x_2)),\dots, f(\mathcal{U}^{(N)}_{N,N-1}(x_N))),\\ T_2 &\rightleftharpoons G^{(l)}(f(w), f(w),\dots, f(w)),\\ T_3 &\rightleftharpoons w,\\ T_4 &\rightleftharpoons G^{(l)}(y_1,y_2,\dots,y_N),\\ T_5 &\rightleftharpoons G^{(l)}(f(\widetilde{\mathcal{U}}^{(1)}_{N,N}(x_1)), f(\widetilde{\mathcal{U}}^{(2)}_{N,1}(c)), f(\widetilde{\mathcal{U}}^{(3)}_{N,2}(x_3))\dots, f(\widetilde{\mathcal{U}}^{(N)}_{N,N-1}(x_N))), \end{aligned}$$

где $x_1,\dots,x_N,y_1,\dots,y_N,w$ суть неизвестные. Рассмотрим, сначала, систему, в которую входит только одна неизвестная с различными путями w.

$$\Gamma' = \begin{cases} T_1 = T_2\\ T_3 = T_4\\ T_5 = T_4. \end{cases}$$

Высота системы Γ' будет равна $2l+1$. В нее входят единственная неизвестная w с различными путями и единственная функциональная константа c.

Нетрудно видеть (это утверждение можно, например, доказать явным вычислением наиболее общего унификатора, пример такого доказательства может быть найден в [8]), что высота наиболее общего унификатора системы Γ' не меньше $s^l(l+1)$.

Рассмотрим теперь систему $\Gamma = \bigcup_{q=1}^{k} \Gamma'_q$, где система Γ'_q получается из системы Γ' добавлением ко всем неизвестным еще одного верхнего индекса q. Тогда множества неизвестных систем Γ'_q попарно не пересекаются. Для завершения доказательства теоремы, для всех q заменим в системе Γ'_q вхождение функциональной константы c на неизвестную y_1^{q-1}. Тогда для полученной системы Γ будет выполнено:

$$h[\sigma(y_1^k)] = ks^l(l+1).$$

В систему Γ входят неизвестные с различными путями $w^1, \dots, w^k$ в количестве k штук и $y_1^1, \dots, y_1^{k-1}$ в количестве $k-1$ штук. Всего в систему Γ входит $2k-1$ неизвестных с различными путями. $\square$

5. Верхняя оценка высоты свободных термов в выводах с сечениями. Приводимое доказательство верхней оценки размера термов в выводах по формулам ограниченной глубины связанных вхождений основывается на доказательстве Оревкова [16]; для читателя, знакомого с техникой, потребовалось бы лишь несколько идей для его построения, поэтому, возможно, основным вкладом данной работы является осознание важности выделения класса неизвестных типа сечения и получение оценок размера наиболее общего унификатора, не зависящих от числа неизвестных данного класса. Тем не менее, для полноты изложения мы приводим доказательство целиком.

В формулировках теоремы о перестройке вывода мы используем секвенциальное исчисление генценовского типа LK и его интуиционистский вариант LJ [13] с той только разницей, что, следуя Клини [2], мы не разделяем предметные переменные на свободные и связанные. Исчисление LJ отличается тем, что сукцедент всех секвенций в выводе состоит не более чем из одной формулы; для LJ нет аналогов правил сокращения и перестановки справа.

Правило сечения формулируется следующим образом:

$$\frac{\Sigma \to A, \Delta\,; \qquad \Sigma, A \to \Delta}{\Sigma \to \Delta} \qquad\qquad \left(\frac{\Sigma \to A; \qquad \Sigma, A \to \Delta}{\Sigma \to \Delta}\right)$$

для классического (интуиционистского) случая. Применение стандартного правила сечения может быть промодулировано последовательностью применений правила утончения и применением данного правила.

Формула в заключении правила, которая содержит введенный символ, называется *главной формулой*. Одна или две формулы, явно указанные в посылках, называются *боковыми формулами*. Например, для правила введения конъюнкции в сукцедент

$$\frac{\Sigma \to \Delta, A\,; \qquad \Sigma \to \Delta, B}{\Sigma \to \Delta, A\&B} \quad \to \&$$

главной формулой служит $A\&B$, в первой посылке боковой служит A, во второй B. Для правила сечения главная формула не определена, и для любого применения правила сечения левая и правая боковые формулы совпадают, назовем эту формулу *формулой сечения*.

Проиндексируем все вхождения формул и символа "$\to$" в секвенцию целыми числами. Индекс символа "$\to$" равен нулю, индексы вхождений возрастают слева направо. Таким образом, вхождения формул в антецедент секвенции индексируются отрицательными числами, вхождения формул в сукцедент – положительными.

Анализ аксиомы содержит слово "аксиома". *Анализ применения правила* содержит название правила, по которому получена данная секвенция; кроме этого, анализ правила перестановки содержит индексы вхождений формул, к которым оно применяется.

Схемой вывода называется последовательность анализов аксиом и правил вывода. Для систем LK и LJ схемы вывода записывают в виде деревьев с корнем. Анализы аксиом приписываются листьям, анализ k-посылочного правила приписывается вершине, имеющей в точности k входящих дуг ($k > 0$). *Выводом в соответствии со схемой* U называется любой вывод, для которого список анализов аксиом и правил вывода в точности совпадает с U. *Высотой схемы* U называется высота представляющего ее дерева.

В дальнейшем мы рассматриваем только выводы, обладающие свойством *чистоты переменных*, т.е. выводы, в которых никакая переменная не входит одновременно и свободно и связанно и в которых для каждого применения $\to \forall$ или $\exists \to$ собственная переменная этого применения встречается только выше заключения этого применения.

Говорят, что формула A *отобразима* в формулу B, если формула B получается из A одновременным замещением свободных вхождений предметных переменных на некоторые термы, $B = [A]^{x_1,\dots,x_q}_{T_1,\dots,T_q}$, при этом предполагается, что для всех i терм T_i свободен для x_i в A.

Схемой вывода с типами сечений [16] называется схема вывода, в которой к анализу каждого применения правила сечения добавляется некоторая формула таким образом, чтобы каждая предметная переменная входила свободно в совокупность добавленных формул не более одного раза. Добавленные формулы называются *типами* анализов правил сечения. Рассмотрим секвенцию S, список $t_1,\dots,t_n$ попарно различных предметных переменных, схему вывода с типами сечений U и вывод $\mathcal{D}$. Говорят, что $\mathcal{D}$ является $(t_1,\dots,t_n)$-*выводом секвенции S в соответствии со схемой U, $n \geq 0$*, если выполняются следующие условия.

1. $\mathcal{D}$ является выводом в соответствии со схемой, получаемой из U выкидыванием всех формул.
2. Типы анализов всех применений правил сечения в схеме U отобразимы в соответствующие формулы сечения вывода $\mathcal{D}$. При этом, термы, участвующие в подстановке, называются *собственными термами* применения правила сечения.
3. Переменные $t_1,\dots,t_n$ не входят свободно в типы анализов применений правил сечения в схеме U.
4. Переменные $t_1,\dots,t_n$ не входят связанно в вывод $\mathcal{D}$.
5. Существуют термы $T_1,\dots,T_n$ такие, что для всех i терм T_i свободен для t_i в S, и последней секвенцией вывода $\mathcal{D}$ является $[S]^{t_1,\dots,t_n}_{T_1,\dots,T_n}$.

(Если $n = 0$, условия 3 и 4 опускаются, условие 5 превращается в "Последней секвенцией вывода $\mathcal{D}$ является S".)

Термы, участвующие в подстановке, преобразующей S в последнюю секвенцию $\mathcal{D}$, называются *собственными термами вывода $\mathcal{D}$*.

Вывод $\mathcal{D}$ называется *универсальным* $(t_1,\dots,t_n)$-выводом секвенции S в соответствии со схемой U, если $\mathcal{D}$ является $(t_1, \ldots, t_n)$-выводом секвенции S в соответствии со схемой U, и любой другой $(t_1, \ldots, t_n)$-вывод секвенции S в соответствии со схемой U может быть получен из $\mathcal{D}$ заменой свободных вхождений предметных переменных на некоторые термы.

Оценка высоты термов в выводе получается как следствие оценки решения задачи унификации для системы пар термов *с ограничениями (*ОТ-*системы)* (эти системы вводятся в работах [5, 16, 11, 15]). Термы такой системы строятся из функциональных знаков произвольной арности $f_1, \ldots, f_m$ и предметных переменных $t_1, \ldots, t_n$, $x_1, \ldots, x_p$. ОТ-система Ξ состоит из трех частей, $\Xi = \{\Gamma; \Pi; V\}$, первая – это обычная система пар термов

$$\Gamma = \{(T_i, \Theta_i)\}_{i=1}^{N},$$

вторая – множество ограничений вида

$$\Pi = \{x_{i_j} \notin R_j\}_{j=1}^{M},$$

а V – множество предметных переменных, где T_i,Θ_i,R_i являются термами, x_{i_j} – предметная переменная, не принадлежащая V.

Отображение τ из множества V в множество термов данного языка называется *решением* системы $\{\Gamma; \Pi; V\}$, если оно является унификатором Γ и для всех $j\colon 1 \leq j \leq M$ результат применения подстановки τ к терму R_j не содержит x_{i_j}. Таким образом, из множества предметных переменных выделяется подмножество V, элементы которого, с точки зрения задачи унификации, рассматриваются как неизвестные; остальные предметные переменные рассматриваются как функциональные константы. Решение σ системы $\{\Gamma; \Pi; V\}$ называется *универсальным решением*, если σ является наиболее общим унификатором Γ (при этом все подстановки, участвующие в определении наиболее общего унификатора, являются отображениями из множества V в множество термов указанного языка).

Очевидно, если некоторый унификатор Γ удовлетворяет множеству ограничений Π, то наиболее общий унификатор Γ также удовлетворяет множеству ограничений Π. То есть, если система $\{\Gamma; \Pi; V\}$ имеет решение, то она имеет и универсальное решение.

Глубиной вхождения предметной переменной в формулу назовем максимальную глубину данного вхождения в термы данной формулы. Например, глубина связанного вхождения переменной

x в формулу $\forall x P(x, f(y))$ равна нулю, а глубина свободного вхождения y в ту же формулу – единице.

Лемма 2. *Каковы бы ни были схема вывода с типами сечений U и секвенция S, если существует $(t_1, \dots, t_n)$-вывод $\mathcal{D}$ секвенции S в соответствии со схемой U, то существует универсальный $(t_1, \dots, t_n)$-вывод $\mathcal{D}^*$ секвенции S в соответствии со схемой U, в котором для любого терма T, являющегося собственным термом вывода $\mathcal{D}^*$, собственным термом правил $\to \exists$, $\forall \to$ или собственным термом правила сечения, выполняется неравенство*

$$h[T] \le \mathrm{ar}\,[\mathcal{D}]^{h_1} \cdot (q^-[\mathcal{D}] + n) \cdot h_1 + (q^-[\mathcal{D}] + n) \cdot h_2 + h_0,$$

где $\mathrm{ar}\,[\mathcal{D}]$ – максимальная арность функциональных знаков, входящих в секвенцию S и в типы анализов правил сечения, h_1 – максимальная глубина свободных вхождений предметных переменных в типы анализов правил сечения, h_2 – максимальная глубина вхождений $t_1, \dots, t_n$ в S и связанных вхождений переменных в секвенцию S и в типы анализов правил сечения, h_0 – максимальная высота термов, входящих в секвенцию S и в типы анализов правил сечений, $q^-[\mathcal{D}]$ – количество анализов применений правил $\to \exists$, $\forall \to$ в схеме U.

Доказательство. Пусть секвенция S и схема вывода с типами сечений U в исчислении LK или LJ удовлетворяют условиям леммы. Для того чтобы полностью восстановить $(t_1 \dots, t_n)$-вывод секвенции S в соответствии со схемой U, достаточно построить собственные термы доказательства, применений правил $\to \exists$, $\forall \to$ и правил сечения (см. [16]). Для этого индукцией по высоте схемы строится такая OT-система, что её решение дает значение всех собственных термов указанных правил. В случае, если высота схемы больше нуля, мы строим OT-систему так же, как и в [16], и меняем конструкцию для случая, когда высота схемы равна нулю.

Обозначим через $\Pi\{S; t_1, \dots, t_n\}$ список всех выражений вида $x \notin t_j$, $1 \le j \le n$, где x является предметной переменной, входящей в кванторный комплекс, в области действия которого находится некоторое свободное вхождение переменной t_j в секвенцию S.

Не умаляя общности, все собственные переменные правил $\to \forall$ и $\exists \to$ попарно различны (всегда можно перестроить вывод $\mathcal{D}$

таким образом, чтобы списки собственных переменных правил введения кванторов удовлетворяли этому требованию).

Схема вывода U представляет собой помеченное дерево. Применяя индукцию по высоте схемы, построим ОТ-систему $\Xi(U; S; t_1, \dots, t_n)$ и пометим каждый узел этого дерева секвенцией, в формулы которой могут входить метапеременные для термов (неизвестные, в смысле раздела 3). Обозначим полученное помеченное дерево $\widetilde{\mathcal{D}}$. Пусть V – множество неизвестных системы $\Xi(U; S; t_1, \dots, t_n)$. Индукционное предположение состоит в том, что

1. вывод $\mathcal{D}$, с точностью до переименования собственных переменных правил $\to\forall$ и $\exists\to$, получается применением к секвенциям, входящим в $\widetilde{\mathcal{D}}$, некоторого отображения τ из множества V в множество термов. При этом предполагается, что все подставляемые термы свободны для подстановки;
2. подстановка τ является решением ОТ-системы $\Xi(U; S; t_1, \dots, t_n)$;
3. Пусть подстановка σ – универсальное решение ОТ-системы $\Xi(U; S; t_1, \dots, t_n)$. Тогда для каждого $x \in V$ терм $\sigma(x)$ свободен для x во всех секвенциях, в которые x входит свободно, и применение к секвенциям, входящим в $\widetilde{\mathcal{D}}$, подстановки σ дает универсальный $(t_1, \dots, t_n)$-вывод $\mathcal{D}^*$ секвенции S.

Таким образом, по схеме с типами сечений и последней секвенции, мы восстанавливаем вывод, с точностью до того, что собственные термы заменены на метапеременные для термов. Подстановка, превращающая полученную конструкцию в вывод, является решением ОТ-системы.

База индукции (высота схемы равна нулю). Тогда в схему входит единственный анализ, и это – анализ аксиомы; вывод $\mathcal{D}$ состоит из единственной секвенции

$$A \to A.$$

Пометим единственный узел дерева U секвенцией S. Рассмотрим формулы A_1 и A_2, входящие в антецедент и сукцедент секвенции S соответственно. По определению $(t_1, \dots, t_n)$-вывода, формулы A_1 и A_2 отобразимы в формулу A.

Построим множество пар термов $\Gamma(A, A_1, A_2)$ индукцией по построению формул A, A_1 и A_2.

- Если A – атомарная формула, формулы A_1 и A_2 также атомарные. Пусть
$$A_1 = P(T_1, \ldots, T_s),$$
$$A_2 = P(\Theta_1, \ldots, \Theta_s),$$
где P – s-местный предикатный знак. Определим множество пар термов $\Gamma(A, A_1, A_2)$ как $\{(T_i, \Theta_i)\}_{i=1}^{s}$.
- Если формула A имеет $A = \neg A'$, формулы A_1 и A_2 имеют вид
$$A_1 = \neg A_1',$$
$$A_2 = \neg A_2'.$$
Построим множество пар термов $\Gamma(A', A_1', A_2')$ и положим $\Gamma(A, A_1, A_2) = \Gamma(A', A_1', A_2')$.
- Если формула A имеет вид $A = A' \odot A''$, где $\odot$ является одной из пропозициональных связок $\&$, $\vee$, $\supset$, формулы A_1 и A_2 имеют вид
$$A_1 = A_1' \odot A_1'',$$
$$A_2 = A_2' \odot A_2''.$$
Построим по индукции два множества $\Gamma(A, A_1', A_2')$ и $\Gamma(A, A_1'', A_2'')$ и определим множество пар термов $\Gamma(A, A_1, A_2)$ следующим образом: $\Gamma(A, A_1, A_2) = \Gamma(A', A_1', A_2') \cup \Gamma(A'', A_1'', A_2'')$.
- Если формула A имеет вид $A = Qx\ A'$, где Q – один из кванторов, то формулы A_1 и A_2 имеют вид
$$A_1 = Qx\ A_1',$$
$$A_2 = Qx\ A_2'.$$
Построим множество пар термов $\Gamma(A', A_1', A_2')$ и положим $\Gamma(A, A_1, A_2) = \Gamma(A', A_1', A_2')$. Окончательно, мы определяем ОТ-систему $\Xi(U; S; t_1, \ldots, t_n)$ как
$$\{\Gamma(A, A_1, A_2); \Pi\{S; t_1, \ldots, t_n\}; t_1, \ldots, t_n\}.$$
Как было отмечено выше, формулы A_1 и A_2 отобразимы в формулу A. Нетрудно видеть, что подстановка, отображающая секвенцию S в последнюю секвенцию вывода $\mathcal{D}$, унифицирует полученную систему пар термов $\Gamma(A, A_1, A_2)$. По определению $(t_1, \ldots, t_n)$-вывода, термы T_i свободны для t_i

в S, что означает, что ограничения $\Pi\{S; t_1, \dots, t_n\}$ выполняются. Следовательно, наиболее общий унификатор σ множества пар термов $\Gamma(A, A_1, A_2)$ удовлетворяет множеству ограничений $\Pi\{S; t_1, \dots, t_n\}$. Как нетрудно видеть, это означает, что термы $\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n)$ свободны для $t_1, \dots, t_n$ в секвенции S. Поскольку произвольный вывод $\mathcal{D}$ порождает некоторое решение ОТ-системы $\Xi(U; S; t_1, \dots, t_n)$, универсальному выводу $\mathcal{D}^*$ соответствует универсальное решение данной системы. Таким образом, индукционное предположение выполняется.

Индукционный переход (высота схемы больше нуля). Тогда вывод завершается применением какого-либо l-посылочного правила L ($l = 1, 2$). Обозначим через U_i схему вывода, входящую в U над i-ой посылкой последнего анализа, и через $\mathcal{D}_i$ вывод, входящий в $\mathcal{D}$ над i-ой посылкой последнего применения правила. Пометим корень дерева U секвенцией S. В зависимости от типа правила L, ОТ-система $\Xi(U; S; t_1, \dots, t_n)$ строится следующим образом.

- Предположим, что L является правилом введения пропозициональной связки, либо структурным правилом, за исключением правила сечения.

  Поскольку секвенция S отобразима в последнюю секвенцию вывода $\mathcal{D}$, можно построить секвенции $S_1, \dots S_l$, из которых S получается по правилу L. Заметим, что вывод $\mathcal{D}_i$ является $(t_1, \dots, t_n)$-выводом секвенции S_i. По индукционному предположению, существуют ОТ-системы $\Xi(U_i; S_i; t_1, \dots, t_n) = \{\Gamma_i; \Pi_i; V_i\}$ и пометка соответствующих поддеревьев $U_1, \dots, U_l$, для которых выполняются свойства 1)–3).

  Не умаляя общности, множества неизвестных $V_1, \dots, V_l$ не содержат общих переменных помимо $t_1, \dots, t_n$.

  Определим ОТ-систему $\Xi(U; S; t_1, \dots, t_n)$ как $\{\Gamma_1 \cup \Gamma_l; \Pi_1 \cup \Pi_l \cup \Pi\{S; t_1, \dots, t_n\}; V_1 \cup V_l\}$. Соображения, аналогичные тем, что мы приводили в доказательстве базы индукции, показывают, что индукционное предположение выполняется.
- Предположим, что L является правилом сечения, тогда оно имеет две посылки. Рассмотрим A – тип последнего анализа схемы U и множество V предметных переменных, входящих свободно в формулу A. Поскольку секвенция S отобразима в последнюю секвенцию вывода $\mathcal{D}$ и формула A ото-

бразима в формулу сечения применения L, можно построить секвенции S_1 и S_2 , из которых S получается по правилу сечения с формулой A в качестве формулы сечения. Тогда, вывод $\mathcal{D}_i$ является $(t_1, \dots, t_n, V)$-выводом секвенции S_i (список $t_1, \dots, t_n, V$ следует понимать как объединение списка всех неизвестных, входящих в множество V, и списка $t_1, \dots, t_n$). По индукционному предположению, существуют ОТ-системы $\Xi(U_i; S_i; t_1, \dots, t_n, V) = \{\Gamma_i; \Pi_i; V_i\}$, и пометка соответствующих поддеревьев U_1, U_2, для которых выполняются свойства 1)–3).

Не умаляя общности, множества неизвестных V_1, V_2 не содержат общих неизвестных помимо $t_1, \dots, t_n, V$.

Определим ОТ-систему $\Xi(U; S; t_1, \dots, t_n)$ как

$$\{\Gamma_1 \cup \Gamma_2; \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi\{S; t_1, \dots, t_n\}; V_1 \cup V_2 \cup V\}.$$

Ясно, что индукционное предположение выполняется.

- Предположим, что L является правилом $\to \forall$ или $\exists \to$. Тогда оно однопосылочное, $l = 1$. Рассмотрим предметную переменную b, не встречающуюся в S и отличную от $t_1, \dots, t_n$. Поскольку секвенция S отобразима в последнюю секвенцию вывода $\mathcal{D}$, можно построить секвенцию S_1, из которой S получается по правилу L и для которой b является собственной переменной. Заменим в выводе $\mathcal{D}_1$ все свободные вхождения собственной переменной последнего применения правила вывода $\mathcal{D}$ на b. Ясно, что полученный вывод D'_1 является $(t_1, \dots, t_n)$-выводом секвенции S_1. По индукционному предположению, существует ОТ-система $\Xi(U_1; S_1; t_1, \dots, t_n) = \{\Gamma_1; \Pi_1, V_1\}$ и пометка поддерева U_1, для которых выполняются свойства 1)–3). В качестве ОТ-системы $\Xi(U; S; t_1, \dots, t_n)$ мы берем

$$\{\Gamma_1; \Pi_1 \cup \Pi\{S; t_1, \dots, t_n\} \cup \{b \notin t_{i_1}, \dots, b \notin t_{i_r}\}; V_1\},$$

где $t_{i_1}, \dots, t_{i_r}$ – список тех предметных переменных из $t_1, \dots, t_n$, которые входят свободно в S. Дополнительные ограничения обеспечивают, что b не входит в заключение применения L. Нетрудно видеть, что индукционное предположение выполняется.

- Предположим, что L является правилом $\forall \to$ или $\to \exists$. Тогда оно однопосылочное, $l = 1$. Пусть предметная переменная

t не входит в S и отлична от $t_1, \dots, t_n$. Поскольку секвенция S отобразима в последнюю секвенцию вывода $\mathcal{D}$, можно построить секвенцию S_1, из которой S получается по правилу L, причем t является собственным термом правила L. Заметим, что вывод $\mathcal{D}_1$ является $(t_1, \dots, t_n, t)$-выводом секвенции S_1. По индукционному предположению, существует ОТ-система $\Xi(U_1; S_1; t_1, \dots, t_n) = \{\Gamma_1; \Pi_1, V_1\}$, и пометка дерева U_1, для которых выполняются свойства 1)–3). В качестве ОТ-системы $\Xi(U; S; t_1, \dots, t_n)$ мы берем ОТ-систему $\{\Gamma_1; \Pi_1 \cup \Pi\{S; t_1, \dots, t_n\}; t_1, \dots, t_n, t\}$. Нетрудно видеть, что индукционное предположение выполняется.

Таким образом, нами построена ОТ-система $\Xi(U; S; t_1, \dots, t_n)$ такая, что список собственных термов вывода $\mathcal{D}$, а также собственных термов применений правил сечения, правил $\to \exists$ и $\forall \to$ является ее решением, и универсальное решение ОТ-системы $\Xi(U; S; t_1, \dots, t_n)$ порождает универсальный $(t_1, \dots, t_n)$-вывод $\mathcal{D}^*$ секвенции S в соответствии со схемой U.

Если схема U содержит анализы применений правил $\forall \to$ и $\to \exists$, а также правил сечения, ОТ-система $\Xi(U; S; t_1, \dots, t_n)$ помимо неизвестных $t_1, \dots, t_n$ может содержать дополнительные неизвестные. Нетрудно видеть, что если некоторая неизвестная была добавлена при рассмотрении правила сечения, она имеет не более двух вхождений в систему пар термов Γ, причем глубины этих вхождений совпадают. Таким образом, все неизвестные, добавленные при рассмотрении правил сечения, являются неизвестными типа сечения. Не умаляя общности, можно считать, что остальные неизвестные ОТ-системы $\Xi(U; S; t_1, \dots, t_n)$ являются неизвестными не типа сечения. В самом деле, либо разность глубин множества пар термов ОТ-системы $\Xi(U; S; t_1, \dots, t_n)$ равна нулю, тогда, высота наиболее общего унификатора не превосходит высоту системы пар термов (см. [7], теорема 2) и оценка леммы 2 выполнена, либо для каждой неизвестной x помимо неизвестных, введенных при рассмотрении правил сечения, в систему всегда можно добавить уравнение вида $\underbrace{f(f(\cdots f}_{q}(x)) = \underbrace{f(f(\cdots f}_{q}(x))$ таким образом, чтобы разность глубин неизвестной x была ненулевой, не изменив при этом значений h_0, h_1 и h_2 и не изменив решение системы.

Общее количество неизвестных не типа сечения равняется $n + q^-[\mathcal{D}]$. Таким образом, мы можем воспользоваться оценкой теоремы 1, чтобы получить оценку высоты универсального решения ОТ-системы $\Xi(U; S; t_1, \dots, t_n)$. $\square$

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{D}$ является выводом секвенции S в исчислении LK (или LJ). Тогда, заменяя некоторые свободные термы на предметные переменные, можно преобразовать вывод $\mathcal{D}$ в вывод $\mathcal{D}^*$ той же самой секвенции S в исчислении LK (или LJ, соответственно), обладающий следующим свойством. Высота собственных термов применений правил $\to\exists$ и $\forall\to$ в выводе $\mathcal{D}^*$, а также высота термов, входящих свободно в формулы сечения в выводе $\mathcal{D}^*$, не превосходит*

$$\mathrm{ar}\,[\mathcal{D}]^{\delta^c[\mathcal{D}]} \cdot q^-[\mathcal{D}] \cdot \delta^c[\mathcal{D}] + q^-[\mathcal{D}] \cdot \max\{\delta^c[S], \delta^c[\mathcal{D}]\} + \max\{h[S], \delta^c[\mathcal{D}]\},$$

где $\mathrm{ar}\,[\mathcal{D}]$ – максимальная арность функциональных знаков, входящих в секвенцию S и в формулы сечения, $\delta^c[\mathcal{D}]$ – максимальная глубина связанных вхождений предметных переменных в формулы сечения, $\delta^c[S]$ – максимальная глубина связанных вхождений предметных переменных в S, $h[S]$ – максимальная высота термов, входящих в секвенцию S, $q^-[\mathcal{D}]$ – количество анализов применений правил $\to\exists$, $\forall\to$ в схеме U.

Доказательство. Мы доказываем теорему, основываясь на оценке леммы 2, тем же способом, каким в [16] аналогичная теорема следует из оценки на высоту $(t_1, \dots, t_n)$-вывода. Для произвольной формулы A определим формулу A^* такую, что

- A^* не содержит функциональных констант;
- каждая предметная переменная входит свободно в формулу A^* не более одного раза;
- если некоторый терм входит в формулу A^* свободно, то этот терм является предметной переменной;
- формула A^* отобразима в формулу A.

В [16] формула A^* называется q^*-*типом* формулы A. Построим по выводу $\mathcal{D}$ его схему U и допишем в схеме U ко всем применениям правил сечения q^*-типы их формул сечения, переименовывая, если необходимо, предметные переменные, входящие свободно в типы анализов формул сечения так, чтобы типы попарно не имели общих переменных. Обозначим полученную схему вывода с типами сечений U^*. Ясно, что $\mathcal{D}$ является ()-выводом секвенции

S в соответствии со схемой U^*. Из определения q^*-типа формулы следует, что максимум глубин свободных вхождений предметных переменных в формулу A^* не превосходит максимума глубин связанных вхождений предметных переменных в формулу A^*. Применим оценку леммы 2 для завершения доказательства теоремы. □

Замечание. В случае, если сечения осуществляются по формулам, не содержащим связанных вхождений переменных ненулевой глубины, полученная оценка совпадает с оценкой Оревкова [16], лемма 15.6.

Следствие. *В условиях теоремы 3, высота термов, входящих в доказательство $\mathcal{D}^*$, не превосходит*

$$\mathrm{ar}\,[\mathcal{D}]^{\delta^c[\mathcal{D}]} \cdot q^-[\mathcal{D}] \cdot \delta^c[\mathcal{D}] + q^-[\mathcal{D}] \cdot \max\{\delta^c[S], \delta^c[\mathcal{D}]\} + 2\max\{h[S], \delta^c[\mathcal{D}]\}.$$

В самом деле, глубины всех свободных и связанных вхождений переменных в q^*-типы формул сечения вывода $\mathcal{D}$, а также в последнюю секвенцию вывода $\mathcal{D}$, не превосходят $\max\{h[S], \delta^c[\mathcal{D}]\}$. *Вывод $\mathcal{D}^*$ получается применением подстановки, являющейся универсальным решением* ОТ-*системы, к $\widetilde{\mathcal{D}}$. Отсюда следует оценка размера термов, входящих в вывод $\mathcal{D}^*$.*

Литература

1. Г. В. Давыдов, С. Ю. Маслов, Г. Е. Минц, В. П. Оревков, А. О. Слисенко, *Машинный алгоритм установления выводимости на основе обратного метода.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **16** (1969), 8–15.
2. Стефен К. Клини, *Введение в метаматематику.* Иностранная литература, М. (1957).
3. В. П. Оревков, *Нижние оценки увеличения сложности выводов после устранения сечений.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **88** (1979), 137–162.
4. В. П. Оревков, *Верхние оценки удлинения выводов при устранении сечений.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **137** (1984), 87–98.
5. В. П. Оревков, *Системы уравнений в термах с подстановками.* — В кн: Вопросы кибернетики. Сложность вычислений и прикладная математическая логика. Наука, М. 1988, с. 127–148.
6. В. П. Оревков, *Схемы доказательств в аксиоматических теориях гильбертовского типа.* — Зап. научн. сем. ЛОМИ **176** (1988), 132–146.
7. Б. Ю. Конев, *Уточнение оценок высоты термов в наиболее общем унификаторе.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **241** (1997), 117–134.
8. Б. Ю. Конев, *Нижняя оценка на высоту термов в наиболее общем унификаторе.* — Technical Report 21/1998, С.-Петербургское отделение математического института им. В.А. Стеклова, October 1998. Доступен по http://www.pdmi.ras.ru/preprint/1998/index.html.

9. M. Baaz and R. Zach, *Algorithmic structuring of cut-free proofs.* Selected papers from CSL'92, — Lecture Notes in Computer Science (1992) pp. 29–42.
10. S. R. Buss, *The undecidability of k-provability.* — Ann. Pure Appl. Logic **53**(1) (1991), 75–102.
11. W. M. Farmer, *A unification-theoretic method for investigating the k-provability problem.* — Ann. Pure Appl. Logic **51** (1991), 173–214.
12. H. Friedman, *One hundred and two problems in mathematical logic.* J. Symb. Logic **40** (1975), 131–174.
13. G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische schließ.* — Mathematische Zeitschrift 39, (1934), 176–210, 405–433.
14. B. Konev, *Upper bound on the height of terms in proofs with cuts.* Technical Report E1852-GS-981, Technische Universität Wien, In: *Proceedings of First-order Theorem Proving—FTP'98/2nd International Workshop on First-order Theorem Proving, Vienna, Austria*, (1998) pp. 162–172.
15. J. Krajíček and P. Pudlák, *The number of proof lines and size of proofs in first logic.* — Arch. Math. Logic **27** (1988), 69–84.
16. V. P. Orevkov, *Complexity of Proofs and Their Transformations an Axiomatic Theories.* Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society (1991).
17. M. S. Paterson and M. N. Wegman, *Linear unification.* J. Computer System Science **16** (1978), 168–167.
18. J. A. Robinson, *A machine oriented logic based on the resolution principle.* — J. Assoc. Comput. Mach. **12** (1965), 23–41.

Konev B. Yu. Upper bound on the height of terms in proofs with bound-depth-restricted cuts.

We prove an upper bound on the height of terms occurring in a most general unifier for the case when the set of term-variables splits to two subsets. A term-variable belongs to the first sub-set iff the depths of all its occurrences coincide, we call such a variable a term-variable of the cut type; otherwise, it belongs to the second sub-set. We bound from above the height of terms occurring in a most general unifier by the number of term-variables of not the cut type and size of the given unification problem. This bound implies an upper bound on the size of terms occurring in proofs in a sequent-style calculus with bound-depth-restricted cuts.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:konev@pdmi.ras.ru

Поступило 29 августа 2000