Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 276, 2001 г.

**Е. П. Голубева**

# О СПЕКТРАХ КОНСТАНТ ЛЕВИ ДЛЯ КВАДРАТИЧНЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ И ЧИСЛАХ КЛАССОВ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ПОЛЕЙ

**1. Введение.** Пусть $a$, $b$, $d$ – целые числа, $d$ не является полным квадратом и $d > 0$. Пусть $b^2 \equiv d (\mathrm{mod}\, a)$. Тогда число $\alpha = (b+\sqrt{d})/a$ является квадратичной иррациональностью определителя $d$.

Разложим число $\alpha$ в обыкновенную непрерывную дробь. Как хорошо известно, эта дробь является периодической:

$$\alpha = \left[m_1, \dots, m_k, \overline{r_1, \dots, r_l}\right]. \tag{1}$$

Число $\alpha$ называется приведенной квадратичной иррациональностью, если это разложение является чисто периодическим.

Для произвольного вещественного числа $\gamma$ константой Леви называется число $\beta(\gamma)$, которое определяется с помощью соотношения

$$\beta(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log Q_n}{n},$$

где $Q_n$ – знаменатель подходящей дроби $P_n/Q_n$ разложения $\gamma$ в обыкновенную непрерывную дробь.

Как известно (см., например, [1]), для квадратичных иррациональностей константа Леви существует. Она характеризует среднее значение элементов $r_i$ периодической части разложения (1). Для эквивалентных (собственно или несобственно) иррациональностей константы Леви совпадают, поскольку каждая из них входит в период другой.

Величина $\beta(\alpha)$ играет крайне важную роль в теории бинарных квадратичных форм и вещественных квадратичных полей, поскольку она непосредственно связана со значением соответствующей основной единицы. Эта связь задается равенством

$$R = \beta(\sqrt{d})\, l(\sqrt{d}), \tag{2}$$

где $R$ – регулятор поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $l(\sqrt{d}) = l$ – длина периода разложения (1) при $\alpha = \sqrt{d}$.

Константа Леви заключена в пределах

$$\log \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leqslant \beta < \log 2\sqrt{d}.$$

Она влияет на значение регулятора в гораздо меньшей степени, чем длина периода. Последняя ведет себя крайне хаотично. Тем не менее, есть все основания предполагать, что для почти всех (в смысле плотности) значений $d$ имеет место соотношение $l(\sqrt{d}) > \sqrt{d}/\log^\lambda d$, где $\lambda > 0$ – постоянная.

Последнее неравенство согласуется со всеми известными гипотезами о поведении $h(d)$ – числа классов поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ (см. [2–4]).

Как хорошо известно, для почти всех вещественных чисел $\gamma$ константа Леви – одна и так же, $\beta(\gamma) = \pi^2/12\log 2$. Для квадратичных иррациональностей $\alpha$ это равенство не может иметь место, поскольку $\beta(\alpha)$ является логарифмом алгебраического числа. Тем не менее, если $h(d) = 1$ и целые точки на однополостном гаперболоиде

$$d = b^2 - ac \tag{3}$$

распределены асимптотически по мере $dadb/|a|$ (которая задает площадь Лобачевского на поверхности (3)), то при $d \to \infty$

$$\beta(\sqrt{d}) = \frac{\pi^2}{12\log 2} + o(1) \tag{4}$$

(см. [5, 6]).

Приведенный факт о распределении целых точек на гиперболоиде (3) был доказана в работе [7] при условии, грубо говоря, справедливости расширенной гипотезы Римана для $L$-функций с вещественными квадратичными характерами. В работе [8] этот результат был получен при другой гипотезе (см. также [9]).

С помощью этих соображений в работе [10] было показано, что постоянная $\pi^2/12\log 2$ является предельной точкой для спектра констант Леви квадратичных иррациональностей, принадлежащих главным классам. В связи с этим естественно возникает вопрос, имеет ли этот спектр другие предельные точки.

Можно предположить, что, по крайней мере, самая левая точка спектра $\log((1+\sqrt{5})/2)$ является изолированной. Некоторые подтверждения в пользу этого предположения были получены в работе [11]. Там было показано, что если $p$-простое и $p \equiv 3(\bmod 4)$, то множество $\{\beta(\sqrt{p})\}$ изолировано от $\log((1+\sqrt{5})/2)$. Там же были получены аналогичные результаты для некоторого множества составных определителей.

В настоящей работе показано (см. теорему 1 ниже), что для простых $p \equiv 3(\bmod 4)$ на промежутке $\left[\log((1+\sqrt{5})/2), \log((1+\sqrt{3})/\sqrt{2})\right)$ нет значений $\beta(\sqrt{p})$. Этот результат является неулучшаемым, поскольку $\beta(\sqrt{3}) = \log((1+\sqrt{3})/\sqrt{2})$. В качестве следствия из него для таких $p$ мы получаем новый критерий одноклассности для $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$:

для достаточно больших $p$ $h(p) = 1$ тогда и только тогда, когда $l(\sqrt{p}) > \sqrt{p} L_p(1)/\log((1+\sqrt{3})/\sqrt{2})$, где $L_p(s)$ – $L$-функция с характером $\left(\frac{p}{\cdot}\right)$.

Заметим, что если $h(p) = 1$, то $l(\sqrt{p}) \sim \sqrt{p} L_p(1) 12 \log 2/\pi^2$ (при условии справедливости расширенной гипотезы Римана).

Кроме того, для некоторого множества составных $d$ здесь также получена лучшая оценка снизу для $\beta(\sqrt{d})$, чем в работе [10] (см. теорему 2 ниже и замечание к этой теореме).

Еще один результат, подтверждающий предположение об изолированности точки $\log((1+\sqrt{5})/2)$, содержится в следствии из теоремы 3 настоящей работы. В нем показано, что точек рассматриваемого спектра, близких к $\log((1+\sqrt{5})/2)$, достаточно мало.

Как уже говорилось выше, если $d$ – велико, то любое значительное отклонение $\beta(\sqrt{d})$ от $\pi^2/12 \log 2$ ведет к неравенству $h(d) > 1$. В теореме 3 получена оценка снизу для $h(d)$, если значение $\beta(\sqrt{d})$ близко к $\log((1+\sqrt{5})/2)$. А в теореме 4 рассмотрен случай больших значений $\beta(\sqrt{d})$. В ней показано, что $h(d)$ растет, грубо говоря, как $\exp \beta(\sqrt{d})/\beta^2(\sqrt{d})$ при росте $\beta(\sqrt{d})$.

**2. Определения и известные факты.** Пусть $\varphi(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ – целочисленная бинарная квадратичная форма дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.

Форма $\varphi$ называется примитивной, если $(a,b,c) = 1$. Определитель формы $d$ и дискриминант связаны следующими соотношениями: $D = d$, если $b$ – нечетное число, и $D = 4d$, если $b$ является четным.

Пусть $d > 0$ и не является полным квадратом. Каждой форме поставим в соответствие две вещественные квадратичные иррациональности $\xi_1$ и $\xi_2$:

$$\xi_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2c}, \quad \xi_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2c}.$$

Эти иррациональности называются корнями формы $\varphi$. Очевидно, что формы $\varphi(x,y)$ и $-\varphi(x,y)$ имеют одинаковые корни.

Форма $\varphi$ называется приведенной, если ее корни удовлетворяют условию

$$\xi_1 > 1, \quad -1 < \xi_2 < 0 \tag{5}$$

(или наоборот, $\xi_2 > 1$, $-1 < \xi_1 < 0$). Можно показать (см., например, [12]), что форма является приведенной в том и только в том случае, когда $\xi_1$ является приведенной иррациональностью, т.е. ее разложение в непрерывную дробь является чисто периодическим,

$$\xi_1 = [\,\overline{r_1, \dots, r_l}\,]. \tag{6}$$

Если $\xi = \sqrt{d}$, то разложение (6) обладает свойством симметрии,

$$\sqrt{d} = [\,m\overline{r_1, \dots, r_n, r_{n+1}, r_n, \dots, r_1, 2m}\,], \tag{7}$$

где $m = [\sqrt{d}\,]$, $l = 2n+2$.

Если $a > 0$ и форма является приведенной, то $c < 0$. Из неравенств (5) следует, что условия приведения в этом случае можно записать в виде

$$b < \sqrt{D}, \quad b + 2a > \sqrt{D}, \quad b + \sqrt{D} > 2a. \tag{8}$$

Если форма $\varphi$ имеет четный средний коэффициент, $\varphi(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, то $d = b^2 - ac$ и условия приведения (8) можно переписать в виде

$$b < \sqrt{d}, \quad b + a > \sqrt{d}, \quad b + \sqrt{d} > a. \tag{9}$$

Если формы $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ эквивалентны (собственно или несобственно), то их первые корни являются эквивалентными иррациональностями. Формы $\varphi(x,y)$ и $-\varphi(x,y)$ имеют одинаковые корни, но, вообще говоря, не эквивалентны.

Разложению (6) отвечают или два класса форм, или один. В первом случае длины периодов разложений всех иррациональностей определителя $d$ четны и норма соответствующей основной единицы равна 1, во втором – длины периодов нечетны и норма основной единицы равна $-1$.

Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать только те формы, для которых $a > 0$.

Для удобства мы будем говорить о поле $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ (соответственно, о его регуляторе и числе классов) и в тех случаях, когда дискриминант $D$ не является фундаментальным. При этом мы имеем в виду число классов и, соответственно, основную единицу порядка дискриминанта $D$ (не обязательно максимального).

Число классов этого порядка мы обозначим через $h(d)$, основную единицу – через $\varepsilon(d)$ и через $R = \log \varepsilon(d)$ – регулятор. Напомним, что мы рассматриваем корни только тех форм $\varphi$, для которых $a > 0$. Таким образом, число классов форм дискриминанта $D$ равно или $h(d)$, или $2h(d)$.

Величина $h(d)$ вычисляется по известной формуле Дирихле. Используя соотношение (2), эту формулу можно записать в виде

$$h(d) = \frac{\sqrt{d}\, L_d(1)}{\beta(\sqrt{d}) l(\sqrt{d})}, \tag{10}$$

где $L_d(s)$ – ряд Дирихле с характером $\left(\frac{d}{\cdot}\right)$.

Через $\{F_n\}$ мы всюду в дальнейшем обозначаем последовательность чисел Фиббоначи: $F_0 = 1$, $F_1 = 1, \dots, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

**3. Формулировка основных результатов работы.**

**Теорема 1.** *Пусть $p$ – простое число, $p > 3$ и $p \equiv 3 (\operatorname{mod} 4)$. Тогда*

$$\beta(\sqrt{p}) > \log \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

*и*

$$l(\sqrt{p}) \leqslant \frac{\sqrt{p}\, L_p(1)}{h(p) \log \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}. \tag{11}$$

**Следствие 1.** *Пусть выполнены условия теоремы 1 и $p$ – достаточно велико. Тогда $h(p) = 1$ в том и только в том случае, когда $l(p) > 0.53\sqrt{p}\, L_p(1)$.*

**Замечание.** Ранее для $l(\sqrt{p})$ были известны менее точные оценки с $\log \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (см. [13]) и с $\log \frac{4}{3}\sqrt{2}$ (см. [11]) вместо $\log \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ в формуле (11).

Обозначим через $P$ множество простых чисел $p$ таких, что $F_k \not\equiv 0 (\operatorname{mod} p)$ при $1 \leqslant k \leqslant p+1$.

**Теорема 2.** *Пусть $p \in P$ и главный класс форм определителя $d$ представляет число $\pm p$. Тогда при $d > p^{Cp}$*

$$\beta(\sqrt{d}) > \log\frac{2^{1/2p} + \sqrt{4 + 2^{1/p}}}{2}, \tag{12}$$

*если постоянная $C$ – достаточно велика.*

**Замечание.** Ранее в работе [10] было показано, что в условиях теоремы 2 имеет место неравенство

$$\beta(\sqrt{d}) > \log\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2p}\log\frac{7}{6} + \frac{1}{pC}\log\frac{6}{7}, \tag{13}$$

где $C$ – произвольная постоянная.

Можно показать, что

$$\frac{2^{1/2p} + \sqrt{4 + 2^{1/p}}}{2} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big(\frac{7}{6}\Big)^{1/2p}.$$

Таким образом, неравенство (12) является более сильным, чем (13).

Множество $P$ содержит числа $3, 7, \ldots$. Вопрос о том, является ли оно бесконечным, является очень старой и до сих пор открытой проблемой в теории чисел Фиббоначи (более подробное обсуждение этого вопроса см. в [10]).

**Теорема 3.** *Пусть $\beta(\sqrt{d}) \leqslant \log\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \delta$, где $\delta$ – достаточно малая постоянная, тогда*

$$C_1\frac{\sqrt{d}\,L_d(1)}{d^{\delta\log 1/\delta}} \leqslant h(d) \leqslant C_2\delta\frac{\sqrt{d}\,L_d(1)}{\log d},$$

*где $C_1$ и $C_2$ – положительные абсолютные постоянные.*

**Следствие 2.** *Пусть $Q(X,\delta)$ – количество $d$ таких, что $X/2 \leqslant d \leqslant X$ и $\beta(\sqrt{d}) < \log\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \delta$. Тогда при достаточно малых $\delta$ имеет место оценка*

$$Q(X,\delta) = O\big(\delta X^{C\delta\log 1/\delta}\big),$$

*где $C$ – абсолютная постоянная.*

**Теорема 4.** *Существует постоянная $C$ такая, что, если $\beta(\sqrt{d}) > C\log d$, то*

$$h(d) > C_1 \frac{L_d(1)\exp\beta(\sqrt{d})}{\log d\beta^2(\sqrt{d})}, \tag{14}$$

*если $\beta(\sqrt{d}) < C\log d$, то*

$$h(d) > C_2 \frac{\exp\beta(\sqrt{d})}{\beta^2(\sqrt{d})}, \tag{15}$$

*где $C_1$ и $C_2$ – абсолютные положительные постоянные.*

**4. Вспомогательные результаты.** В этом параграфе мы приводим несколько лемм, необходимых для доказательства основных результатов.

Заметим, что лемма 2 представляет и самостоятельный интерес, поскольку в ней получен неулучшаемый результат, устанавливающий связь между $\beta(\gamma)$ для произвольного иррационального числа $\gamma$ и произведением элементов $r_i$ из разложения (6).

**Лемма 1.** *Пусть $z_i (1 \leqslant i \leqslant n+1)$ – вещественные числа, $z_i > 0$ и*

$$\prod_{i=1}^{n+1} z_i \geqslant \lambda^{n+1},$$

*тогда*

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1+z_i) \geqslant (1+\lambda)^{n+1}.$$

**Доказательство.** Поскольку функция, стоящая в левой части последнего неравенства, убывает по любой из переменных $z_i$, мы можем считать, что

$$\prod_{i=1}^{n+1} z_i = \lambda^{n+1}.$$

Тогда $z_{n+1} = \lambda^{n+1}/z_1 \ldots z_n$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} \log(1+z_i) + \log\left(1 + \frac{\lambda^{n+1}}{z_1 \ldots z_n}\right).$$

Найдем наименьшее значение $\varphi(z_1, \dots, z_n)$ в области $z_i > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Критические точки этой функции можно найти из системы уравнений:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_i} = \frac{1}{1+z_i} - \frac{\lambda^{n+1}}{z_i(z_1 \dots z_n + \lambda^{n+1})} = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{z_i}{1+z_i} = \frac{\lambda^{n+1}}{z_1 \dots z_n + \lambda^{n+1}}.$$

Поскольку правая часть последнего равенства не зависит от $i$, то в критических точках имеет место равенство $z_1 = \dots = z_n$. Отсюда сразу же следует, что мы имеем единственную критическую точку, в которой

$$\frac{z_i}{1+z_i} = \frac{\lambda^{n+1}}{z_i^n + \lambda^{n+1}}.$$

Тогда $z_i = \lambda$.

Поскольку $\varphi \to \infty$ при стремлении хотя бы одной из переменных $z_i$ к 0 или $\infty$, то ее наименьшее значение достигается в этой критической точке. Так как

$$\varphi(\lambda, \dots, \lambda) = (n+1)\log(1+\lambda),$$

то лемма доказана.

**Лемма 2.** *Пусть $r_i$ – элементы разложения (6) и $\xi_i$ – соответствующие полные частные. Пусть*

$$\prod_{i=1}^{l} r_i = A^l \quad \text{и} \quad \prod_{i=1}^{l} \xi_i = B^l,$$

*тогда*

$$B \geqslant \frac{A + \sqrt{A^2+4}}{2}.$$

**Доказательство.** Имеем

$$\xi_i = r_i + \frac{1}{\xi_{i+1}} = r_i\left(1 + \frac{1}{\xi_{i+1} r_i}\right).$$

В силу утверждения леммы 1, отсюда следует, что

$$B^l = \prod_{i=1}^{l} r_i \prod_{i=1}^{l} \left(1 + \frac{1}{\xi_{i+1} r_i}\right) \geqslant A^l \left(1 + \frac{1}{AB}\right)^l.$$

Отсюда следует, что $B \geqslant A + 1/B$. После очевидных преобразований получаем неравенство (16).

**Лемма 3.** *Пусть $\delta > 0$ и $T(N,\delta)$ – количество различных (с учетом порядка) наборов $\{r_1, \dots, r_N\}$ из натуральных чисел, для которых выполнено условие*

$$\sum_{j=1}^{N} \log r_j \leqslant C\delta N. \tag{17}$$

*Тогда*

$$T(N,\delta) = O\biggl(\exp\left(C_1 N\delta \log \frac{1}{\delta}\right)\biggr),$$

*где $C_1 = C_1$ – постоянная, зависящая только от $C$.*

**Доказательство.** Зафиксируем целые числа $2 \leqslant i_R < \dots < i_1$ и $k_{i_m} > 0$. Рассмотрим наборы $\{r_1, \dots, r_N\}$ такие, что выполнено условие (17), каждое из чисел $i_m$ $(1 \leqslant m \leqslant R)$ участвует в наборе, любое из $r_j \neq 1$ совпадает с одним из $i_m$ и кратность числа $i_m$ равна $k_{i_m}$. Количество таких наборов обозначим через $S$.

Количество мест в наборе, на которых находится число $i_m$, оценивается как

$$\binom{N}{k_{i_m}} \leqslant \frac{N^{k_{i_m}}}{(k_{i_m})!}.$$

Используя формулу Стирлинга для $k!$, получаем отсюда оценку

$$S = O\biggl(\frac{N^{k_{i_1} + \dots + k_{i_R}}}{k_{i_1}^{k_{i_1}} \dots k_{i_R}^{k_{i_R}}} \exp(k_{i_1} + \dots + k_{i_R})\biggr), \tag{18}$$

где постоянная, входящая в символ $O$, является абсолютной.

Условие (17) в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$\sum_{m=1}^{R} k_{i_m} \log i_m \leqslant C\delta N. \tag{19}$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{m=1}^{R} k_{i_m} \leqslant 2C\delta N$$

и

$$S = O\left(\frac{N^{k_{i_1}+\dots+k_{i_R}}}{k_{i_1}^{k_{i_1}} \dots k_{i_R}^{k_{i_R}}} \exp(2C\delta N)\right).$$

Для того, чтобы оценить первый множитель в последнем выражении, рассмотрим функцию

$$\varphi(k_{i_1}, \dots, k_{i_R}) = (k_{i_1} + \dots + k_{i_R}) \log N - \sum_{j=1}^{R} k_{i_j} \log k_{i_j}.$$

Найдем наибольшее значение этой функции в многограннике, ограниченном плоскостями $k_{i_j} = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant R)$ и

$$\sum_{j=1}^{R} k_{i_j} \log i_j = CN\delta. \tag{20}$$

Частные производные

$$\frac{\partial\varphi}{\partial k_{i_j}} = \log N - 1 - \log k_{i_j}$$

при достаточно малых $\delta$ удовлетворяют в этом многограннике условию

$$\frac{\partial\varphi}{\partial k_{i_j}} > 0,$$

поскольку $k_{i_j} < 2CN\delta$. Таким образом, наибольшее значение функция $\varphi$ принимает на плоскости (20).

Найдем критические точки функции $\varphi$ при условии (20). Интересующее нас наибольшее значение либо принимается в одной из этих критических точек, либо в таких же критических точках, но при меньших $R$, либо при

$$k_{i_m} = \frac{C\delta N}{\log i_m}, \quad k_{i_j} = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant R, \quad j \neq m).$$

В критических точках выполнены условия

$$\frac{\partial\varphi}{\partial k_{i_j}} - \lambda\frac{\partial\psi}{\partial k_{i_j}} = 0, \quad (1 \leqslant j \leqslant R),$$

где $\psi$ задается уравнением связи (20), а $\lambda$ – множитель Лагранжа. Таким образом, мы имеем систему уравнений

$$\log N - \log k_{i_j} - 1 - \lambda \log i_j = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant R), \qquad \sum_{j=1}^{R} k_{i_j} \log i_j = C\delta N.$$

Следовательно, $k_{i_j} = N/(ei_j^\lambda)$ и $\lambda$ ищется из условия

$$\sum_{j=1}^{R} \frac{\log i_j}{i_j^\lambda} = Ce\delta. \tag{21}$$

Вычислим значение $\varphi$ в этой точке:

$$\varphi\left(\frac{N}{ei_1^\lambda}, \dots, \frac{N}{ei_R^\lambda}\right) = \frac{N\log N}{e}\sum_{j=1}^{R}\frac{1}{i_j^\lambda} - \frac{N}{e}\sum_{j=1}^{R}\frac{1}{i_j^\lambda}(\log N - 1 - \lambda\log i_j) =$$

$$= \frac{N}{e}\left(\sum_{j=1}^{R}\frac{1}{i_j^\lambda} + \lambda\sum_{j=1}^{R}\frac{\log i_j}{i_j^\lambda}\right).$$

Из равенства (21) видно, что при малых $\delta$ параметр $\lambda$ является большим. Поэтому первое слагаемое в последней сумме мало по сравнению со вторым и, значит,

$$\varphi\left(\frac{N}{e_1^\lambda}, \dots, \frac{N}{e_R^\lambda}\right) = O(\lambda N\delta).$$

Оценим теперь значение $\lambda$,

$$Ce\delta = \sum_{j=1}^{R}\frac{\log i_j}{i_j^\lambda} \leqslant \sum_{j=2}^{R+1}\frac{\log i}{i^\lambda} \leqslant \int\limits_2^\infty \frac{\log i di}{i^\lambda} + \frac{\log 2}{2^\lambda} = O\left(\frac{1}{2^\lambda}\right).$$

Таким образом, $\lambda = O(\log 1/\delta)$ и

$$\varphi\left(\frac{N}{e_1^\lambda}, \dots, \frac{N}{e_R^\lambda}\right) = O(N\delta\log 1/\delta).$$

Последняя оценка является равномерной по $R$ и поэтому нам осталось только рассмотреть те точки, в которых все переменные, кроме одной равны 0, имеем

$$\varphi\left(0, \dots, \frac{C\delta N}{\log i_j}, \dots, 0\right) = \log N\frac{CN\delta}{\log i_j} - \frac{CN\delta}{\log i_j}\Big(\log(CN\delta) - \log\log i_j\Big) =$$

$$= \frac{CN\delta}{\log i_j}\Big(\log 1/C\delta + \log\log i_j\Big) = O(N\delta \log 1/\delta),$$

где постоянная, входящая в символ $O$, зависит только от $C$.

Следовательно, для всех точек многогранника справедлива оценка

$$\varphi\big(k_{i_1}, \dots, k_{i_R}\big) = O(N\delta \log 1/\delta).$$

Возвращаясь к равенству (18), имеем отсюда оценку

$$S = O\big(\exp\varphi(k_{i_1}, \dots, k_{i_R})\exp(CN\delta)\big) = O\big(\exp(CN\delta\log 1/\delta)\big).$$

Оценим теперь количество различных (без учета порядка) наборов $\{k_{i_1}, \dots, k_{i_R}\}$ таких, что $k_{i_j} \geqslant 1$ и при фиксированных $i_1, \dots, i_R$ выполнено условие (19). Количество таких наборов обозначим через $W = W(i_1, \dots, i_R)$. Очевидно, что $W \leqslant V$, где $V$ – объем многогранника, в котором мы искали наибольшее значение функции $\varphi$.

Легко видеть, что

$$V \leqslant \frac{(CN\delta)^R}{R!}\Big(\prod_{j=1}^{R}\log i_j\Big)^{-1}.$$

Из неравенства (19) вытекает, что $i_1 \dots i_R \leqslant \exp(CN\delta)$ и что

$$\sum_{i=2}^{R+1}\log i \leqslant CN\delta.$$

Из последнего соотношения следует, что $R\log R \leqslant C_1 N\delta$. Значит, $R = O(N\delta/\log(N\delta))$.

Обозначим общее количество интересующих нас наборов через $U$, тогда

$$U = \sum_{i_1, \dots, i_R} W(i_1, \dots, i_R) =$$

$$= O\Bigg(\sum_{R \leqslant C_1\frac{N\delta}{\log N\delta}} \frac{(CN\delta)^R}{R!} \sum_{i_1 \leqslant \exp(CN\delta/R)} \dots \sum_{i_R \leqslant \exp(CN\delta)/i_1 \dots i_{R-1}} 1\Bigg) =$$

$$= O\Bigg(\exp(CN\delta) \sum_{R \leqslant C_1 N\delta/\log(N\delta)} \frac{(CN\delta)^R}{R!}\Bigg(\sum_{i \leqslant \exp(CN\delta)} \frac{1}{i}\Bigg)^{R-1}\Bigg) =$$

$$= O\Big(\exp(CN\delta) \sum_{R \leqslant C_1 N\delta / \log(CN\delta)} \frac{(CN\delta)^{2R}}{R!}\Big).$$

Очевидно, что в последней сумме слагаемые растут вместе с $R$, поэтому

$$U = O\Big(\exp(C_1 N\delta)(CN\delta)^{\frac{CN\delta}{\log(CN\delta)}}\Big) = O\Big(\exp(C_1 N\delta)\Big).$$

Поскольку

$$T(N, \delta) \leqslant SU,$$

в силу последней оценки и (22) имеем утверждение леммы.

**Лемма 4.** *Пусть* $d_1 \leqslant X$, $d_2 \leqslant X$ *и* $\alpha_1 = (b_1 + \sqrt{d_1})/a_1$, $\alpha_2 = (b_2 + \sqrt{d_2})/a_2$ *– две приведенные квадратичные иррациональности. Пусть разложения* $\alpha_1$ *и* $\alpha_2$ *в непрерывную дробь начинаются одинаково:*

$$\alpha_1 = [\,\overline{r_1, \ldots, r_N, r'_{N+1}, \ldots}\,],$$

$$\alpha_2 = [\,\overline{r_1, \ldots, r_N, r''_{N+1}, \ldots}\,],$$

*где* $N \geqslant [4 \log X]$. *Тогда* $\alpha_1 = \alpha_2$.

**Доказательство.** Пусть $P_N/Q_N$ – последняя общая подходящая дробь к $\alpha_1$ и $\alpha_2$, тогда

$$\alpha_1 = \frac{P_N}{Q_N} + \frac{\theta_1}{Q_N^2}, \quad \alpha_2 = \frac{P_N}{Q_N} + \frac{\theta_2}{Q_N^2},$$

где $|\theta_1| \leqslant 1$, $|\theta_2| \leqslant 1$ и $\theta_1$, $\theta_2$ являются одновременно положительными или отрицательными. Отсюда следует, что

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leqslant \frac{1}{Q_N^2}.$$

Как известно, $Q_N \geqslant F_N$. Так как

$$F_N > \frac{1}{5}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^N > \frac{1}{5}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{4\log X - 1} > \frac{1}{10} X^{4\log((1+\sqrt{5})/2)},$$

то

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leqslant \frac{100}{X^{4\log((3+\sqrt{5})/2)}}.$$

Следовательно,

$$\frac{b_1+\sqrt{d_1}}{a_1}-\frac{b_2+\sqrt{d_2}}{a_2}=\frac{\theta}{X^{4\log((3+\sqrt{5})/2)}},$$

где $|\theta|\leqslant 100$.

Таким образом,

$$a_2b_1-a_1b_2+\sqrt{d_1}\,a_2-\sqrt{d_2}\,a_1=\frac{\theta a_1a_2}{X^{4\log((3+\sqrt{5})/2)}}.$$

Так как обе иррациональности являются приведенными, то $a_1<2\sqrt{X}$, $a_2<2\sqrt{X}$, $b_1<\sqrt{X}$, $b_2<\sqrt{X}$ и последнее равенство можно записать в следующем виде:

$$d_1a_2^2+d_2a_1^2-2\sqrt{d_1d_2}\,a_1a_2=$$
$$=a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_1a_2b_1b_2+O\biggl(\frac{a_1a_2}{X^{4\log((3+\sqrt{5})/2)-1}}\biggr).$$

Поскольку $d_1=b_1^2+a_1c_1$ и $d_2=b_2^2+a_2c_2$, то

$$c_1a_2+c_2a_1+2b_1b_2=2\sqrt{d_1d_2}+O\Bigl(X^{1-4\log((3+\sqrt{5})/2)}\Bigr). \qquad (23)$$

Предположим, что $\sqrt{d_1d_2}$ не является целым числом. Тогда разность между $\sqrt{d_1d_2}$ и ближайшим целым не меньше, чем $1/2\sqrt{d_1d_2}\geqslant 1/2X$. Поскольку $4\log((3+\sqrt{5})/2)>2$, в этом случае равенство (23) не может иметь место для достаточно больших $X$.

Следовательно, $\sqrt{d_1d_2}$ – целое число и $d_1=d_0m_1^2$, $d_2=d_0m_2^2$. Подставляя значения $d_1$ и $d_2$ в равенство (23), имеем

$$\bigl(a_2b_1-a_1b_2\bigr)-\sqrt{d_0}\bigl(m_1a_2-m_2a_1\bigr)=O\Bigl(X^{1-4\log((3+\sqrt{5})/2)}\Bigr).$$

Расстояние от иррационального числа $\sqrt{d_0}M$ $(M=m_1a_2-m_2a_1)$ до ближайшего целого не меньше, чем $1/(2\sqrt{d_0}M)>1/\bigl(8X^{-3/2}\bigr)$. Учитывая, что $4\log((2+\sqrt{5})/2)>5/2$, мы видим, что равенство (23) может иметь место при достаточно больших $X$ только в случае, когда $a_2b_1=a_1b_2$ и $m_1a_2=m_2a_1$.

Следовательно, $a_1=tu$, $a_2=tv$, $b_1=ru$, $b_2=rv$, $m_1=su$, $m_2=sv$,

$$\alpha_1=\frac{ru+\sqrt{d_0}\,su}{tu}=\frac{r+\sqrt{d_0}\,s}{t},\quad \alpha_2=\frac{rv+\sqrt{d_0}\,sv}{tv}=\frac{r+\sqrt{d_0}s}{t}$$

и лемма доказана.

**Лемма 5.** *Обозначим через $Q(M,d)$ количество приведенных иррациональностей определителя $D$, удовлетворяющих условию $0 < a < M$.*

*Если $M > d^{1/2-\lambda}$, где $\lambda > 0$ – некоторая постоянная, то*

$$Q(M,d) = CML_d(1) + O(d^{1/2-\eta}), \tag{24}$$

*где постоянная $C = C(d)$ зависит только от вычета $D(\bmod 8)$, $\eta > 0$ – абсолютная постоянная.*

Для доказательства этой леммы можно воспользоваться результатом работы [7]. В лемме этой работы была вычислена сумма

$$\Sigma_M = \sum_{a \leqslant M} \sigma(a),$$

где $\sigma(a)$ – количество решений сравнения $b^2 \equiv D(\bmod a)$.

Значение $Q(M,d)$ легко выражается через $\Sigma_M$.

## 5. Доказательство основных результатов.

**Доказательство теоремы 1.** Мы можем считать, что $p \geqslant 19$, поскольку

$$\beta(\sqrt{3}) = \log\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \quad \beta(\sqrt{7}) = \frac{1}{4}\log\frac{(2+\sqrt{7})^2(1+\sqrt{7})^2}{18} > \log\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

$$\beta(\sqrt{11}) = \log\frac{3+\sqrt{11}}{\sqrt{2}} > \log\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

В работе [14] было показано, что если простое число $p$ удовлетворяет условию $p \equiv 3(\bmod 4)$, то в разложении (7) элементы $r_i$ удовлетворяют неравенству

$$\prod_{i=2}^{n} r_i \geqslant 2^{\frac{n-3}{2}}.$$

Поскольку $r_1 = [m+\sqrt{p}] > 2m \geqslant 8$ и $r_{n+1} \geqslant [(m-1+\sqrt{p})/2] \geqslant m-1 \geqslant 3$, из последнего неравенства следует, что

$$\prod_{i=1}^{l} \geqslant 2^{n-3}\cdot 2m(m-1) > 2^{l/2}.$$

Применяя лемму 2 при $A=\sqrt{2}$, мы получаем оценку $B \geqslant \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Следовательно,

$$\varepsilon(p) \geqslant \left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^l$$

и мы доказали первое утверждение теоремы.

Второе утверждение теоремы непосредственно следует из первого и формулы (10) для числа классов.

**Доказательство следствия.** Из теоремы Редея (см. [12], гл. 4, §15) следует, что $h(p)$ является нечетным числом.

Таким образом, если $h(p) \neq 1$, то $h(p) \geqslant 3$. Если $h(p) \geqslant 3$, то из соотношения (10) мы имеем неравенство

$$l(\sqrt{p}) \leqslant \frac{\sqrt{p}\,L_p(1)}{3\log\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} < 0.53\sqrt{p}\,L_p(1).$$

Если же $h(p)=1$, то из результата работы [6] следует, что для достаточно больших $p$

$$l(\sqrt{p}) > \frac{7-\eta}{\pi^2}\sqrt{p}\,L_p(1),$$

где $\eta>0$ – произвольно малая постоянная. Поскольку $7/\pi^2 > 0.53$, следствие доказано.

**Доказательство теоремы 2.** При доказательстве основного результата работы [10] было показано, в частности, что количество элементов $r_i$ не равных 1 в разложении (7) в условиях теоремы 2 не меньше, чем $l/(2p)-1$. Поскольку $r_1>\sqrt{d}$ и $d \geqslant 17$, то

$$\prod_{i=1}^{l} > \sqrt{d}\,3^{l/(2p)-2} > 2^{l/(2p)}.$$

Применяя лемму 2, получаем при $A=2^{1/(2p)}$ неравенство $B \geqslant \left(2^{1/(2p)}+\sqrt{4+2^{1/p}}\right)/2$. Поскольку $\beta(\sqrt{d})=\log B$, теорема доказана.

**Доказательство теоремы 3.** Получим сначала оценку сверху для $h(d)$.

Положим $B=\exp(\beta(\sqrt{d}))$. Тогда для достаточно малых $\delta$ справедливо неравенство $B \leqslant (1+\sqrt{5})/2(1+2\delta)$. В силу утверждения леммы 2, из этого неравенства следует, что

$$\Big(\prod_{i=1}^{l} r_i\Big)^{1/l} \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}(1+2\delta) - \frac{\sqrt{5}-1}{2}(1-2\delta) = 1 + 2\delta\sqrt{5} < 1 + 6\delta.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{l} \log r_i \leqslant 6\delta l.$$

Поскольку $r_1 > \sqrt{d}$, то $1/2 \log d < 6\delta l$. Поэтому $l > C1/\delta \log d$, и из формулы (10) для числа классов получаем оценку

$$h(d) = O\bigg(\delta \frac{\sqrt{d}\, L_d(1)}{\log d}\bigg).$$

Для доказательства оценки снизу разобьем множество $\{r_1, \dots, r_l\}$ на непересекающиеся наборы последовательных элементов $\{r_{i+1}, \dots, r_{i+N}\}$ длины $N = [4 \log d]$. (Последний набор может иметь меньшую длину.) Число таких наборов обозначим через $K$. Ясно, что

$$K < \frac{l}{4\log d - 1} + 1 < \frac{l}{3\log d}.$$

Выберем из этих наборов те, для которых выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{N} \log r_{i+k} \leqslant 12\delta N. \tag{25}$$

Обозначим через $M$ их количество. Из неравенства (25) следует, что $M > K/2 - 1$. Таким образом,

$$M > \frac{l}{6\log d} - 2 \quad \text{и} \quad l = O(M \log d). \tag{26}$$

В силу утверждения леммы 4 все наборы длины $N$ являются различными.

Таким образом, из леммы 3 следует, что

$$M = O\Big(\exp(CN\delta \log 1/\delta)\Big) = O\Big(d^{C_1\delta\log(1/\delta)}\Big).$$

Из равенства (26) следует, что для длины периода справедлива такая же оценка,

$$l = O\Big(d^{C_1\delta\log(1/\delta)}\Big).$$

Подставляя ее в формулу для числа классов, получаем утверждение теоремы.

**Доказательство следствия.** Обозначим множество значений $d$, удовлетворяющих условиям следствия, через $B(\delta, X)$.

В процессе доказательства теоремы 3 мы показали, что

$$\sum_{d \in B(\delta,X)} l(\sqrt{d}) = O\Big(X^{C_1 \delta \log(1/\delta)}\Big).$$

С другой стороны, при доказательстве первой части теоремы 3 было показано, что

$$l(\sqrt{d}) \geqslant \frac{1}{12\delta} \log d > \frac{1}{24\delta} \log X.$$

Подставляя это неравенство в соотношение (27), имеем оценку

$$Q(X, \delta) \frac{\log X}{24\delta} = O\Big(X^{C_1 \delta \log(1/\delta)}\Big),$$

из которой вытекает утверждение следствия.

**Доказательство теоремы 4.** Воспользуемся равенством

$$\varepsilon = \prod_{\xi} \xi, \tag{28}$$

где $\xi$ пробегает все приведенные иррациональности из главного класса. Разобьем множество приведенных иррациональностей $\xi$, участвующих в произведении (28) на два подмножества следующим образом: к первому подмножеству отнесем те $\xi$, которые удовлетворяют условию $\xi > \exp(\beta - 1)$. Их количество мы обозначим через $l_1$. Ко второму подмножеству отнесем все остальные $\xi$. Их количество обозначим через $l_2$.

Тогда $l_1 + l_2 = l$ и

$$\varepsilon = \prod_{\xi > \exp(\beta-1)} \xi \prod_{\xi \leqslant \exp(\beta-1)} \xi.$$

Из последнего равенства следует, что

$$\varepsilon \leqslant \exp\big((\beta - 1) l_2\big) \prod_{\gamma > \exp(\beta-1)} \gamma, \tag{29}$$

где $\gamma$ пробегает множество всех квадратичных приведенных иррациональностей определителя $d$, для которых $a > 0$.

Пусть $\gamma = (b + \sqrt{D})/2a > \exp(\beta - 1)$. Поскольку иррациональность $\gamma$ является приведенной, отсюда следует, что $a < 2\sqrt{d}/\exp(\beta - 1)$. Значит,

$$\log \prod_{\gamma > \exp(\beta-1)} \gamma \leqslant \sum_{a \leqslant \frac{2\sqrt{d}}{\exp(\beta-1)}} \log \frac{2\sqrt{d}}{a} \sigma(a), \tag{30}$$

где $\sigma(a)$ – количество приведенных иррациональностей $\gamma$, для которых значение $a$ фиксировано.

Пусть $\beta > C \log d$. Поскольку $b^2 \equiv D (\operatorname{mod} 4a)$, то $\sigma(a) \leqslant \tau(a)$, где $\tau(m)$ – число различных делителей $m$. Тогда

$$\log \prod_{\gamma > \exp(\beta-1)} \gamma \leqslant \sum_{a \leqslant \frac{2\sqrt{d}}{\exp(\beta-1)}} \log \frac{2\sqrt{d}}{a} \tau(4a) =$$

$$= O\left( \log(2\sqrt{d}) \sum_{a \leqslant \frac{2\sqrt{d}}{\exp(\beta-1)}} \tau(a) - \sum_{a \leqslant \frac{2\sqrt{d}}{\exp(\beta-1)}} \tau(a) \log a \right) =$$

$$= O\left( \log(2\sqrt{d}) \frac{2\sqrt{d}}{\exp(\beta - 1)} \log \frac{2\sqrt{d}}{\exp(\beta - 1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{2\sqrt{d}}{\exp(\beta - 1)} \log^2 \frac{2\sqrt{d}}{\exp(\beta - 1)} \right) + O\left( \frac{\sqrt{d}}{\exp \beta} \log d \right) = O\left( \beta \frac{\sqrt{d} \log d}{\exp \beta} \right).$$

Возвращаясь к неравенству (29), получаем отсюда оценку

$$\beta l \leqslant (\beta - 1) l_2 + O\left( \beta \frac{\sqrt{d} \log d}{\exp \beta} \right).$$

Следовательно,

$$l = O\left( \beta \frac{\sqrt{d} \log d}{\exp \beta} \right)$$

и соотношение (14) доказано.

Пусть теперь $\beta \leqslant C \log d$. Тогда для правой части неравенства (30) имеем

$$\sum_{a \leqslant \frac{2\sqrt{d}}{\exp(\beta-1)}} \log \frac{2\sqrt{d}}{a} \sigma(a) =$$

$$= \log 2\sqrt{d} \sum_{a \leqslant \frac{2\sqrt{d}}{\exp(\beta-1)}} \sigma(a) - \sum_{a \leqslant \frac{2\sqrt{d}}{\exp(\beta-1)}} \sigma(a) \log a. \tag{31}$$

Для первой суммы из соотношения (24) получаем

$$\log 2\sqrt{d} \sum_{a \leqslant \frac{2\sqrt{d}}{\exp(\beta-1)}} \sigma(a) = C \log 2\sqrt{d} \frac{2\sqrt{d}}{\exp(\beta-1)} L_d(1) + O\bigl(d^{1/2-\eta}\bigr), \tag{32}$$

где $\eta > 0$. Для второй суммы, с помощью суммирования по частям, имеем

$$\sum_{a \leqslant \frac{2\sqrt{d}}{\exp(\beta-1)}} \sigma(a) \log a = \sum_{a \leqslant \frac{2\sqrt{d}}{\exp(\beta-1)}} \sigma(a) \log(1+1/a) \sum_{m \leqslant a} \sigma(m) + \\ + \log\left(\frac{2\sqrt{d}}{\exp(\beta-1)}\right) \sum_{a \leqslant \frac{2\sqrt{d}}{\exp(\beta-1)}} \sigma(a).$$

Поскольку $\log(1+1/a) \leqslant 1/a$, $\sigma(m) \leqslant \tau(m)$, то, вновь используя соотношение (24), получаем отсюда оценку

$$\sum_{a \leqslant \frac{2\sqrt{d}}{\exp(\beta-1)}} \sigma(a) \log a = \bigl(\log 2\sqrt{d} - (\beta-1)\bigr) C \frac{2\sqrt{d}}{\exp(\beta-1)} L_d(1) + \\ + O\Biggl(\sum_{a \leqslant d^{1/2-\nu}} \frac{1}{a} a \log a + \sum_{d^{1/2-\nu} \leqslant a \leqslant \frac{2\sqrt{d}}{\exp(\beta-1)}} \frac{1}{a} a L_d(1)\Biggr) = \\ = \bigl(\log 2\sqrt{d} - \beta\bigr) C \frac{2\sqrt{d}}{\exp(\beta-1)} L_d(1) + O\biggl(\frac{\sqrt{d}}{\exp\beta} L_d(1)\biggr).$$

Подставляя последнюю оценку и равенство (32) в соотношение (31), имеем отсюда оценку

$$\sum_{a \leqslant \frac{2\sqrt{d}}{\exp(\beta-1)}} \log \frac{2\sqrt{d}}{a} \sigma(a) = O\biggl(\beta \frac{\sqrt{d}}{\exp\beta} L_d(1)\biggr).$$

Из последнего соотношения с помощью неравенства (30) получается оценка

$$l = O\biggl(\beta \frac{\sqrt{d}\, L_d(1)}{\exp\beta}\biggr),$$

из которой следует второе утверждение теоремы.

## Литература

1. C. Faivre, *Distribution of Lévy constants for quadratic numbers,* Acta Arithm. **61**, No. 1 (1992), 13–34.
2. C. Hooley, *On the Pellian equation and the class number of indefinite binary quadratic forms,* J. reine und angew. Math. **353** (1984), 98–131.
3. P. Sarnak, *Class number of indefinite binary quadratic forms,* J. of Number Theory **15**, No. 2 (1982), 229–247.
4. Е. П. Голубева, *Квадратичные иррациональности с фиксированной длиной периода разложения в непрерывную дробь,* Зап. научн. семин. ПОМИ **196** (1991), 5–30.
5. Л. А. Тахтаджян, *Асимптотическая формула для суммы длин периодов квадратичных иррациональностей дискриминанта $D$,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **91** (1979), 134–144.
6. Е. П. Голубева, *О длине периода квадратичной иррациональности,* Мат. сб. **123**, No. 1 (1984), 120–129.
7. Е. П. Голубева, *Асимптотическое распределение целых точек, принадлежащих заданным классам вычетов, на гиперболоидах специального вида,* Мат. сб. **123**, No. 4 (1984), 510–533.
8. Б. Ф. Скубенко, *Асимптотическое распределение целых точек на однополостном гиперболоиде и эргодические теоремы,* Изв. АН СССР, сер. мат. **26**, No. 5 (1962), 721–752.
9. А. И. Виноградов, Л. А. Тахтаджян, *Об асимптотиках Линника–Скубенко,* Докл. АН СССР **253**, No. 4 (1980), 777–780.
10. Е. П. Голубева, *Спектр констант Леви для квадратичных иррациональностей,* Зап. научн. семин. ПОМИ **263** (2000), 20–33.
11. Е. П. Голубева, *Оценка константы Леви для $\sqrt{p}$ и критерий однoклассности для $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$,* Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 21–30.
12. Б. А. Венков, *Элементарная теория чисел,* М.-Л., (1937).
13. А. С. Пен, Б. Ф. Скубенко, *Оценка сверху периода квадратичной иррациональности,* Мат. заметки **5**, No. 4 (1969), 413–417.
14. Е. П. Голубева, *О числах классов вещественных квадратичных полей дискриминанта $4p$,* Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 40–45.

Государственный
университет
телекоммуникаций
им. М. А. Бонч-Бруевича
E-mail:elena.golubeva@mail.ru

Поступило 25 апреля 2001 г.