Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 275, 2001 г.

З. А. Янсон

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН ЛЯВА В АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ СРЕДАХ

**Посвящается прекрасному человеку
и замечательному ученому
Василию Михайловичу Бабичу**

Введение

Постановка задач для математического описания волн Лява в анизотропной и изотропной упругих средах принципиально не отличаются друг от друга. Поэтому построения асимптотики для волн типа шепчущей галереи, каковыми являются поверхностные волны Лява, для упомянутых сред оказываются идейно близкими. Одной из первых работ, где представлена асимптотика волн Лява, распространяющихся вблизи поверхности анизотропного упругого тела, является [1]. Как в [1], так и в более ранних работах [2, 3], для математического описания и построения асимптотики волн Лява используется анзац Ю. А. Кравцова [4] (точнее, – его нестационарный аналог), который позволяет получить равномерную асимптотику (каустическое разложение) для волнового поля в окрестности простой каустики.

В случае изотропной упругой среды использование анзаца Кравцова приводит к двум известным типам поверхностных волн, см. [2, 3], или к двум типам колебаний: а) крутильным (волны SH) и б) сфероидальным (волны SV). В анизотропной упругой среде краевые условия также приводят (формально) к двум возможным решениям задачи. Результаты [1] соответствуют волнам Лява типа SV в изотропной и трансверсально-изотропной упругих средах, [2, 5]. Второе возможное асимптотическое решение соответствует волнам Лява типа SH. Построению асимптотики волн этого типа в случае трансверсально-изотропной среды посвящено исследование [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант No. 99-01-00107.

Настоящая работа дополняет результаты [1] в части доказательства разрешимости задачи построения равномерной асимптотики волн Лява, которая представлена в виде ПВ (пространственно-временного) лучевого решения, сосредоточенного вблизи граничной поверхности. Необходимость упомянутого доказательства возникает в связи с исследованием линейной системы для коэффициентов лучевых рядов, к которой приводят краевые условия задачи. Выводу достаточных условий существования нетривиального решения этой линейной системы посвящен §2. В §3 приводятся несколько первых коэффициентов асимптотического разложения и уравнение переноса для амплитуды главного члена асимптотики.

В заключение предложенная схема построения высокочастотной асимптотики волн Лява иллюстрируется на примере частного типа анизотропии – модели трансверсально-изотропной упругой среды. В этом случае приведены формулы для коэффициентов асимптотических рядов, определяющих амплитуду, фазу и дисперсию отдельных мод Лява.

§1. Вид асимптотического решения

1. В настоящем параграфе мы приведем асимптотическое разложение для волн Лява, построенное в [1], но представим его в несколько других обозначениях, использованных в [2, 3]. Выбирая в качестве эталонного решения задачи анзац Ю. А. Кравцова [4], волну Лява представляем в виде

$$\begin{gathered}\widehat{\vec{u}}(\vec{x},t) = \Big[\vec{A}v(-p^{2/3}m) + ip^{-1/3}\vec{B}v'(-p^{2/3}m)\Big]e^{ip\ell(\vec{x},t)} \\ \vec{A}(\vec{x},t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\vec{A}^{\,k}}{(ip)^k}, \quad \vec{B}(\vec{x},t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\vec{B}^{\,k}}{(ip)^k}, \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $\vec{A}^{\,k}$, $\vec{B}^{\,k}$, m, ℓ зависят от x_1, x_2, x_3, t; v и v' – функция Эйри (в определении В. А. Фока) и ее производная; p – большой параметр (частота). Координаты x_1, x_2, x_3 мы естественным образом связываем с поверхностью упругого тела Σ, полагая $x_3 = n$, где $\vec{n} = n\vec{n}_0$ – нормаль к Σ, x_1, x_2, $n = 0$ – координаты точек поверхности Σ. Для простоты x_1, x_2 будем считать декартовыми координатами. Нормаль $\vec{n}$ направлена внутрь упругого тела.

Выражение (1.1) должно быть решением следующей краевой задачи:

$$(L\vec{U})_j \equiv \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} = 0, \tag{1.2}$$

$$\sigma_{3j}\Big|_{\Sigma} = a_{3j\alpha\beta} \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta}\Big|_{\Sigma} = 0, \quad i, j, \alpha, \beta = 1, 2, 3. \tag{1.3}$$

Кроме того, по аналогии с [2, 3], считаем выполненным равенство

$$m\Big|_{\Sigma} = \gamma > 0, \quad \gamma = \mathrm{const}., \tag{1.4}$$

которое обеспечивает (вблизи Σ) синфазное наложение волн, формирующих волну Лява.

В формулах (1.2), (1.3) σ_{ij} – тензор напряжений, $a_{ij\alpha\beta}(\vec{x})$ – положительно определенный и симметричный тензор 4-го ранга (тензор модулей упругости): $a_{ij\alpha\beta} = a_{\alpha\beta ij} = a_{ji\alpha\beta}$.

Подстановка (1.1) в краевые условия (1.3) приводит к выражению в виде линейной комбинации функций $v(-p^{2/3}\gamma)$ и $v'(-p^{2/3}\gamma)$, которое должно обращаться в ноль на Σ. Формально здесь имеются две возможности: 1) $v'(-p^{2/3}\gamma) = 0$, либо 2) $v(-p^{2/3}\gamma) = 0$. Мы выбираем случай 2), который (если среда изотропна) приводит к асимптотическим решениям для волн Лява SV, см. [3], или к классу сфероидальных колебаний, если иметь в виде упругую модель Земли.

Итак,

$$\gamma = \gamma_\nu = \frac{s_\nu}{p^{2/3}}, \quad \nu = 1, 2, \dots, \tag{1.5}$$

где $-s_\nu$ – корни уравнения $v(\tau) = 0$, так что γ_ν (ν – номер волны Лява) при небольших ν является малым параметром задачи.

Система рекуррентных уравнений для коэффициентов $\vec{A}^{\,k}$ и $\vec{B}^{\,k}$ (результат подстановки (1.1) в (1.2)) имеет тот же вид, как и в изотропной среде:

$$\begin{cases} (N_\ell + mN_m)\vec{A}^{\,k} + 2mN_{\ell m}\vec{B}^{\,k} = \vec{F}_1^{k-1}, \\ \quad 2N_{\ell m}\vec{A}^{\,k} + (N_\ell + mN_m)\vec{B}^{\,k} = \vec{F}_2^{k-1}, \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\begin{cases} -\vec{F}_1^{k} \equiv M_\ell \vec{A}^{\,k} + (N_m + mM_m)\vec{B}^{\,k} + L\vec{A}^{\,k-1}, \\ -\vec{F}^{\,k}_2 \equiv M_m\vec{A}^{\,k} + M_\ell \vec{B}^{\,k} + L\vec{B}^{\,k-1}; \end{cases}$$

$$\vec{A}^{-r} = \vec{B}^{-r} = 0, \quad r = 1, 2, \tag{1.6a}$$

где N_ξ, N_ξ, M_ξ – известные лучевые операторы, которые в случае анизотропной упругой среды имеют вид

$$\begin{cases} (N_\xi \vec{D})_j \equiv a_{ij\alpha\beta}\xi^i\xi^\alpha D^\beta - \rho\Big(\dfrac{\partial\xi}{\partial t}\Big)^2 D_j, \\ 2(N_{\xi\widetilde{\xi}}\vec{D})_j \equiv a_{ij\alpha\beta}(\xi^i\widetilde{\xi}^\alpha + \xi^\alpha\widetilde{\xi}^i)D^\beta - 2\rho\Big(\dfrac{\partial\xi}{\partial t}\Big)\Big(\dfrac{\partial\widetilde{\xi}}{\partial t}\Big)D_j; \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\xi^i \equiv \frac{\partial\xi}{\partial x_i}, \quad \widetilde{\xi}^i \equiv \frac{\partial\widetilde{\xi}}{\partial x_i}$$

$$(M_\xi \vec{D})_j \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij\alpha\beta}\xi^\alpha\Big)D^\beta + a_{ij\alpha\beta}\xi^i\frac{\partial}{\partial x_\alpha}D^\beta +$$

$$+a_{ij\alpha\beta}\xi^\alpha\frac{\partial}{\partial x_i}D^\beta - 2\rho\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial D_j}{\partial t} - \rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}D_j. \tag{1.8}$$

Обратимся к нулевому приближению асимптотики и положим в (1.6) $k=0$. При $n=0$ (т.е. на Σ) в приближении $\gamma=0$ первое уравнение системы (1.6) дает

$$\Big(N_\ell\vec{A}^{\,0}\Big)_j \equiv a_{ij\alpha\beta}\ell^i\ell^\alpha(A^0)^\beta - \rho\ell_t^2(A^0)_j = 0, \quad j=1,2,3, \tag{1.9}$$

так что $\vec{A}^{\,0} \not\equiv 0$ – собственный вектор матрицы $(a_{ij\alpha\beta}\ell^i\ell^\alpha)$, а $\rho\ell_t^2$ – её собственное число. Второе уравнение системы (1.6) определяет $\vec{B}^{\,0}$, и условием его разрешимости является равенство

$$\Big(N_{\ell m}\vec{A}^{\,0},\vec{A}^{\,0}\Big)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial m}{\partial n}a_{3\alpha i\beta}(A^0)^\alpha(A^0)^\beta\ell^i\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0. \tag{1.10}$$

В соответствии с [1], представим $\vec{A}^{\,0}$ и $\vec{B}^{\,0}$ в виде

$$\vec{A}^{\,0}\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = \varphi^0\vec{\eta}, \quad \vec{B}^{\,0}\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = \psi^0\vec{\eta} + \varphi^0\vec{\sigma}, \tag{1.11}$$

где $\vec{\eta}$ (вектор поляризации) удовлетворяет уравнению (1.9) и, например, условию нормировки $|\vec{\eta}|^2=1$, а $\vec{\sigma}$ – решение неоднородного уравнения (оно следует из упомянутого выше уравнения для $\vec{B}^{\,0}$)

$$N_\ell\vec{\sigma} = -2N_{\ell m}\vec{\eta}, \tag{1.12}$$

причем $(N_{\ell m}\vec{\eta},\vec{\eta})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$. Функции φ^0 и ψ^0 подлежат определению.

Подставляя разложение (1.1) в краевые условия (1.3), используя (1.11) и полагая $v(-p^{2/3}\gamma)=0$, в нулевом приближении асимптотики ($k=0$) получаем на Σ

$$[\varphi^0(\vec{r}_1+\vec{r}_2)+\psi^0\vec{r}_0]_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}=0, \tag{1.13}$$

где компоненты векторов $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3$ имеют соответственно вид

$$(r_1)_j\equiv a_{3j\alpha\beta}\ell^\alpha\sigma^\beta,\ \ (r_2)_j\equiv a_{3j\alpha\beta}m^\alpha\eta^\beta,\ \ (r_0)_j\equiv a_{3j\alpha\beta}\ell^\alpha\eta^\beta. \tag{1.13a}$$

Докажем, что равенство (1.13) приводит к значениям $\varphi^0=\psi^0=0$. Для удобства изложения рассмотрим в качестве базиса линейно-независимые векторы

$$\vec{\eta},\ \ \vec{\sigma},\quad \vec{\omega}=\vec{\eta}\times\vec{\sigma}. \tag{1.14}$$

Пусть $\varphi^0\neq 0$, $\psi^0\neq 0$ и пусть векторы $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ – линейно зависимы. Обозначим $\vec{R}=\vec{r}_1+\vec{r}_2$. Так как $(\vec{r}_0,\vec{\eta})=0$ (при $n=0$, $\gamma=0$), см. (1.10), то $(\vec{R},\vec{\eta})=(\vec{r}_1+\vec{r}_2,\vec{\eta})=0$ и в силу линейной зависимости $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, очевидно ($\vec{\eta}$ – один из базисных векторов (1.14)), что $\vec{R}\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}=0$. Это означает, что при $n=0$, $\gamma=0$

$$a_{3j\alpha\beta}\ell^\alpha\sigma^\beta=-m_1a_{3j3\beta}\eta^\beta,\quad m_1=\frac{\partial m}{\partial n}\neq 0. \tag{1.15}$$

Но вектор $\vec{\sigma}$ уже определен из неоднородного векторного уравнения (1.12) через $\vec{\eta}$, и (1.15) может выполняться только в том случае, если системы (1.12) и (1.15) эквивалентны (или если (1.15) является следствием (1.12)).

Заметим, что одним из условий, при которых система (1.15) может быть сведена к (1.12), является линейная зависимость векторов $N_{\ell m}\vec{\eta}$ и $\vec{r}_2$ в правых частях равенств (1.12) и (1.15). В базисе векторов (1.14), в силу (1.10), $N_{\ell m}\vec{\eta}\Big|_{\vec{\eta}}=0$, в то время как $\vec{r}_2\Big|_{\vec{\eta}}\neq 0$ (при $n=0$, $\gamma=0$). Действительно,

$$(\vec{r}_2,\vec{\eta})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}=m_1(a_{3j3\beta}\eta^j\eta^\beta)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}\neq 0,$$

так как $a_{3j3\beta}\eta^j\eta^\beta>0$ вследствие положительной определенности тензора $a_{ij\alpha\beta}$. Следовательно, векторы $N_{\ell m}\vec{\eta}$ и $\vec{r}_2$ – линейно независимы.

Далее, если $\vec{R}\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$ $\psi^0 \neq 0$, то из (1.13) имеем $\vec{r}_0\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$. Но тогда из $(N_\ell\vec{\eta}, \vec{n}_0)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$, см. (1.9), следует, что $\vec{\eta}_0\Big|_{\vec{n}} = 0$. В случаях изотропной и трансверсально-изотропной упругих сред $\vec{\eta}\Big|_{\vec{n}_0} = 0$ противоречит постановке решаемой краевой задачи, [3, 5]. Легко убедиться, что в этих случаях $\vec{R}\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} \neq 0$, см. §3.

Будем считать в дальнейшем $\vec{R} \neq 0$. Легко видеть, что при этом $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_0$ – линейно независимы, так как $(\vec{r}_1, \vec{\eta}) = -(\vec{r}_2, \vec{\eta}) \neq 0$, $(\vec{r}_0, \vec{\eta}) = 0$, и из (1.13) следует, что $\varphi^0 = \psi^0 = 0$, т.е. $\vec{A}^{\,0}\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$, $\vec{B}^{\,0}\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$.

Чтобы преодолеть возникшую трудность и сделать задачу построения асимптотики поверхностных волн разрешимой, учтем вклад двух более быстрых (в сравнении с волной Лява (1.1)), но затухающих при удалении от границы волн. В [1], так же как в [5], эти волны представлены лучевыми рядами с комплексными эйконалами и по сути являются (во всяком случае локально) неоднородными волнами.

2. Волновое поле $\vec{u}(\vec{x}, t)$ поверхностной волны теперь представим в виде

$$\vec{u} = \widehat{\vec{u}} + \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \tag{1.16}$$

здесь $\widehat{\vec{u}}$ – разложение (1.1), а $\vec{u}_{1,2}$ – ПВ лучевые ряды

$$\vec{u}_{1,2}(\vec{x}, t) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vec{C}^k_{1,2}(\vec{x}, t)}{(ip)^k}\, e^{ip\theta_{1,2}(\vec{x},t)}. \tag{1.17}$$

где $\theta_{1,2}$ – комплексные эйконалы – такие, что

$$\theta_{1,2}\Big|_\Sigma = \ell\Big|_\Sigma, \quad \operatorname{Im}\frac{\partial\theta_{1,2}}{\partial n}\Big|_\Sigma > 0. \tag{1.18}$$

Коэффициенты $\vec{C}^{\,k}_{1,2}$ лучевых рядов удовлетворяют рекуррентным уравнениям лучевого метода

$$\begin{gathered} N_{\theta_{1,2}}\vec{C}^k_{1,2} + M_{\theta_{1,2}}\vec{C}^{k-1}_{1,2} + L\,\vec{C}^{k-2}_{1,2} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots; \\ \vec{C}^{-r}_{1,2} = 0, \quad r = 1, 2, \end{gathered} \tag{1.19}$$

и имеют вид

$$\vec{C}^{k}_{1,2} = \widetilde{\phi}^{k}_{1,2}\vec{\varkappa}_{1,2} + \widetilde{\vec{U}}^{k0}_{1,2}, \quad \widetilde{\vec{U}}^{00}_{1,2} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{1.19a}$$

где L, M, N – операторы вида (1.2), (1.8), (1.7); $\vec{\varkappa}_{1,2}$ (векторы поляризации) – решения однородных уравнений, получаемых из (1.19) при $k = 0$

$$N_{\theta_r}\vec{\varkappa}_r \equiv a_{ij\alpha\beta}\,\theta^i_r\,\theta^\alpha_r\,\varkappa^\beta_r - \rho\left(\frac{\partial\theta_r}{\partial t}\right)^2(\varkappa_r)_j = 0, \quad r = 1, 2 \tag{1.20}$$

Подставляя (1.16) в краевые условия (1.3) и учитывая (1.5), т.е. $v = (-p^{2/3}\gamma) = 0$, получим

$$\sigma^k_{3j}(\vec{u})\Big|_{n=0} = [\sigma^k_{3j}(\widehat{\vec{u}}) + \sigma^k_{3j}(\vec{u}_1) + \sigma^k_{3j}(\vec{u}_2)]_{n=0} = 0, \tag{1.21}$$

где $\sigma^k_{3j}(\vec{u})\Big|_{n=0}$ – коэффициенты разложения $\sigma_{3j}(\vec{u})\Big|_{n=0}$ по степеням $1/(ip)^k$, а слагаемые в квадратных скобках имеют вид, см. [1, 5]

$$\sigma^k_{3j}(\widehat{\vec{u}})\Big|_{n=0} \equiv ip^{-1/3}\Big[a_{3j\alpha\beta}\ell^\alpha(B^k)^\beta + a_{3j\alpha\beta}m^\alpha(A^k)^\beta +$$

$$+\sigma_{3j}(\vec{B}^{\,k-1})\Big]_{n=0} v'(-p^{2/3}\gamma)\exp ip\ell_0(x_1, x_2, t), \tag{1.22}$$

$$\sigma^k_{3j}(\vec{u}_{1,2})\Big|_{n=0} \equiv \alpha\Big[a_{3j\alpha\beta}\theta^\alpha_{1,2}(C^k_{1,2})^\beta + \sigma_{3j}(\vec{C}^{k-1}_{1,2})\Big]_{n=0}\exp[ip\ell_0(x_1, x_2, t)],$$

$$\ell_0(x_1, x_2, t) \equiv \ell(\vec{x}, t)\Big|_{n=0}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{1.23}$$

Положим $\alpha = ip^{-1/3}$ и введем вместо $\widetilde{\phi}^{\,k}_{1,2}$ из (1.19а) коэффициенты $\phi^k_{1,2} \equiv \widetilde{\phi}^{\,k}_{1,2}v'(-p^{2/3}\gamma)$. Пусть $k = 0$. В этом случае (если учесть формулы (1.11)) краевые условия (1.21) доставляют уравнения, которые связывают четыре неизвестные φ^0, ψ^0, ϕ_1 и ϕ_2 на поверхности Σ. Полагая $\gamma = 0$, запишем эту систему в виде

$$\Big[(r_0)_j\psi^0 + (s_1)_j\phi^0_1 + (s_2)_j\phi^0_2\Big]_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = -\varphi^0 R_j\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} \quad j = 1, 2, 3, \tag{1.24}$$

где $\vec{R} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$, $\vec{R} \neq 0$; $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_0$ определены равенствами (1.13а), а компоненты векторов $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ имеют вид

$$(s_1)_j = a_{3j\alpha\beta}\theta^\alpha_1\varkappa^\beta_1, \quad (s_2)_j = a_{3j\alpha\beta}\theta^\alpha_2\varkappa^\beta_2, \quad j = 1, 2, 3. \tag{1.25}$$

Если определитель системы (1.24) отличен от нуля, то коэффициенты ψ^0, $\phi^0_{1,2}$ однозначно выражаются через φ^0. Величина же φ^0, в свою очередь, определяется из условия разрешимости системы (1.6), см. §3, а также [5].

Коэффициенты и эйконалы асимптотических разложений (1.1) и (1.17), что очевидно, зависят от параметра $\gamma = \gamma_\nu$, см. (1.5) (индекс ν – номер волны Лява – мы будем опускать). В силу малости γ упомянутые коэффициенты и эйконалы $\ell, \theta_{1,2}$, по аналогии с [2, 3], вблизи граничнрой поверхности заменяем степенными рядами

$$\vec{A}^{\,k} = \sum_{s,j=0}^{\infty} \vec{A}^{\,k}_{sj}\, n^s \gamma^j\,,\ \vec{B}^{\,k} = \sum_{s,j=0}^{\infty} \vec{B}^{\,k}_{sj}\, n^s \gamma^j\,,\ \vec{\mathrm{C}}^{\,k}_{1,2} = \sum_{s,j=0}^{\infty} \left(\vec{\mathrm{C}}^{\,k}_{1,2}\right)_{sj} n^s \gamma^j, \tag{1.26}$$

$$\ell = \sum_{i,j=0}^{\infty} \ell_{ij}\, n^i \gamma^j\,, \quad m = \sum_{i,j=0}^{\infty} m_{ij}\, n^i \gamma^j\,, \quad \theta_{1,2} = \sum_{i,j=0}^{\infty} (\theta_{1,2})_{ij}\, n^i \gamma^j \tag{1.27}$$

причем в (1.26), в отличие от [2, 6], отсутствуют члены с отрицательными степенями γ.

Коэффициенты выше приведенных разложений последовательно определяются в результате единого рекуррентного процесса, включающего в себя также построения приближений асимптотики при $k \geqslant 1$.

§2. Доказательство существования асимптотического решения

Выражение (1.16), представляющее отдельную моду (волну Лява) в виде суммы каустического разложения (1.1) и двух поправочных слагаемых (1.17) (лучевых решений, экспоненциально затухающих с глубиной), является асимптотическим решением краевой задачи (1.2), (1.3) лишь в том случае, когда линейная система (1.24) разрешима и имеет единственное решение. Это означает, что определитель системы (1.24) должен быть отличен от нуля. Доказательству этого факта и посвящен настоящий параграф.

Приведем формулы и докажем вспомогательные утверждения, которые будут использованы в процессе основного доказательства.

Имеют место следующие соотношения между векторами поляризации $\vec{\eta}$ и $\vec{\varkappa}_{1,2}$ при $n=0$, $\gamma=0$:

$$a_{3j\alpha\beta}\overline{\varkappa}^{\,j}_{1,2}(\ell^\alpha\eta^\beta) = -a_{3j\alpha\beta}\eta^j(\overline{\theta}^{\,\alpha}_{1,2}\overline{\varkappa}^{\,\beta}_{1,2}) \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} a_{3j\alpha\beta}\overline{\varkappa}^{\,j}_1(\theta^\alpha_2\varkappa^\beta_2) = -a_{3j\alpha\beta}\varkappa^j_2(\overline{\theta}^{\,\alpha}_1\overline{\varkappa}^{\,\beta}_1) \\ a_{3j\alpha\beta}\overline{\varkappa}^{\,j}_2(\theta^\alpha_1\varkappa^\beta_1) = -a_{3j\alpha\beta}\varkappa^j_1(\overline{\theta}^{\,\alpha}_2\overline{\varkappa}^{\,\beta}_2) \end{cases} \tag{2.2}$$

где $\theta^j_{1,2} \equiv \frac{\partial\theta_{1,2}}{\partial x_j}$, $\overline{\theta}^{\,j}_{1,2} \equiv \frac{\partial\overline{\theta}_{1,2}}{\partial x_j}$, $\ell^j \equiv \frac{\partial\ell}{\partial x_j}$, $j=1,2,3$, – соответственно компоненты векторов $\nabla\theta_{1,2}$, $\nabla\overline{\theta}_{1,2}$ и $\nabla\ell$; $\varkappa^j_{1,2}$ и $\overline{\varkappa}^{\,j}_{1,2}$ – компоненты векторов $\vec{\varkappa}_{1,2}$ и $\vec{\overline{\varkappa}}_{1,2}$; $\vec{\varkappa}_{1,2}$ – решения однородных уравнений (1.20). Вектор $\vec{\eta}$ – решение однородного уравнения (собственная функция матрицы $(a_{ij\alpha\beta}\ell^i\ell^j)$)

$$(N_\ell\vec{\eta})_j \equiv a_{ij\alpha\beta}\ell^i\ell^\alpha\eta^\beta - \rho\ell^2_t\eta_j = 0, \quad n=0,\ \gamma=0. \tag{2.3}$$

Формулы (2.1), (2.2) справедливы при условии

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial n} \neq \frac{\partial\theta_2}{\partial n} \neq \frac{\partial\ell}{\partial n}, \quad n=0, \quad \gamma=0, \tag{2.4}$$

и их доказательство не составляет труда, см. Приложение, п. 1.

Приведем еще одно соотношение, получаемое по аналогии с (2.1), (2.2) при условии $\operatorname{Im}\frac{\partial\theta_{1,2}}{\partial n}\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} \neq 0$, а именно

$$a_{3j\alpha\beta}\overline{\varkappa}_r(\theta^\alpha_r\varkappa^\beta_r) + a_{3j\alpha\beta}\varkappa^j_r(\overline{\theta}^{\,\alpha}_r\overline{\varkappa}^{\,\beta}_r) = 0, \quad r=1,2, \tag{2.2a}$$

откуда следует, что при $n=0$, $\gamma=0$

$$\operatorname{Re} a_{3j\alpha\beta}\overline{\varkappa}^{\,j}_r(\theta^\alpha_r\varkappa^\beta_r) = \operatorname{Re}\varkappa^j_r(\overline{\theta}^{\,\alpha}_r\overline{\varkappa}^{\,\beta}_r) = 0, \quad r=1,2.$$

В дальнейшем мы будем использовать обозначения

$$(\theta_{1,2})_3 \equiv \frac{\partial\theta_{1,2}}{\partial n}, \quad (\overline{\theta}_{1,2})_3 \equiv \frac{\partial\overline{\theta}_{1,2}}{\partial n}, \quad \ell_3 \equiv \frac{\partial\ell}{\partial n}.$$

Неравенства (2.4) исключают случай кратных собственных чисел у матричного оператора $\mathbb{A} = \left(a_{ij\alpha\beta}\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\frac{\partial\tau}{\partial x_\alpha}\right)$, где под τ имеются в виду эйконалы волн, отвечающие трем собственным функциям этого оператора. С физической точки зрения это означает, что скорости этих волн на граничной поверхности Σ различны.

Используя обозначения (1.25), запишем (2.1), (2.2) в виде

$$
\begin{aligned}
&(\vec{r}_0, \overline{\vec{\varkappa}}_{1,2}) = -(\vec{\eta}, \overline{\vec{s}}_{1,2}) = -(\overline{\vec{s}_{1,2}, \vec{\eta}}),\\
&(\vec{s}_2, \overline{\vec{\varkappa}}_1) = -(\vec{\varkappa}_2, \overline{\vec{s}}_1) = -(\overline{\vec{s}_1, \overline{\vec{\varkappa}}_2}),\\
&(\vec{s}_r, \overline{\vec{\varkappa}}_r) = -(\vec{\varkappa}_r, \overline{\vec{s}}_r) = -(\overline{\vec{s}_r, \overline{\vec{\varkappa}}_r}), \quad r = 1, 2.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Приведем здесь также равенство (см. (1.10), (1.11))

$$
(\vec{r}_0, \vec{\eta})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0, \quad (r_0) \equiv a_{3j\,\alpha\beta}\ell^\alpha \eta^\beta, \quad j = 1, 2, 3. \tag{2.6}
$$

Лемма. *Вектор-функции $\vec{\eta}$, $\vec{\varkappa}_1$, $\vec{\varkappa}_2$ – линейно независимы.*

Докажем это утверждение, предполагая обратное.

Пусть $\vec{\eta} = a\vec{\varkappa}_1 + b\vec{\varkappa}_2$, где либо $a \neq 0$, $b \neq 0$, либо $a \neq 0$, $b = 0$ (или $b \neq 0$, $a = 0$). Воспользуемся формулами (2.1), умножая эти равенства (при $\vec{\varkappa} = \overline{\vec{\varkappa}}_1$ и $\vec{\varkappa} = \overline{\vec{\varkappa}}_2$) соответственно на $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Складывая полученные выражения, находим

$$
\begin{aligned}
&[(|a|^2\widetilde{\Psi}_1 + |b|^2\widetilde{\Psi}_2) - (\overline{a}b\Psi_1 + a\overline{b}\Psi_2)]_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} =\\
&= [(\overline{\theta}_1)_3|a|^2 a_{3j3\beta}\varkappa_1^j\overline{\varkappa}_1^\beta + (\overline{\theta}_2)_3|b|^2 a_{3j3\beta}\varkappa_2^j\overline{\varkappa}_2^\beta]_{\substack{n=0\\ \gamma=0}},
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

где обозначено

$$
\widetilde{\Psi}_r \equiv a_{3j\,\alpha'\beta}(\varkappa_r^j\overline{\varkappa}_r^\beta + \overline{\varkappa}_r^j\varkappa_r^\beta)\ell^{\alpha'} + \ell_3 a_{3j3\beta}\varkappa_r^j\overline{\varkappa}_r^\beta, \quad r = 1, 2, \quad \alpha' = 1, 2
$$

$$
\Psi_1 \equiv a_{3j\,\alpha\beta}\varkappa_1^j(\overline{\theta_2^\alpha\varkappa_2^\beta}) + a_{3j\,\alpha\beta}\overline{\varkappa}_2^j\varkappa_1^\beta\ell^\alpha,
$$

$$
\Psi_2 \equiv a_{3j\,\alpha\beta}\varkappa_2^j(\overline{\theta_1^\alpha\varkappa_1^\beta}) + a_{3j\,\alpha\beta}\overline{\varkappa}_1^j\varkappa_2^\beta\ell^\alpha.
$$

Далее, умножая (2.3) соответственно на $\overline{\vec{\varkappa}}_1$ и на $\overline{\vec{\varkappa}}_2$, получим

$$
\Psi_1 = 0, \quad \Psi_2 = 0, \quad n = 0, \quad \gamma = 0,
$$

откуда следует, что левая часть равенства (2.7) вещественна.

Таким образом, мнимая часть выражения в правой части равенства (2.7) должна обращаться в ноль, что в силу $a_{3j3\beta}\overline{\vec{\varkappa}}_r\varkappa_r > 0$ приводит к требованию

$$
\operatorname{Im}\frac{\partial\theta_{1,2}}{\partial n}\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0,
$$

что противоречит постановке задачи, т.е. условию (1.18).

В случаях $a \neq 0$, $b = 0$ или $a = 0$, $b \neq 0$ (т.е. $\vec{\eta} = a\vec{\varkappa}_1$ или $\vec{\eta} = b\vec{\varkappa}_2$) из (2.7) следует, что либо $\mathrm{Im}\,\frac{\partial\theta_1}{\partial n}\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$ либо $\mathrm{Im}\,\frac{\partial\theta_2}{\partial n}\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$.

Линейную независимость векторов $\vec{\varkappa}_1$ и $\vec{\varkappa}_2$ можно установить, используя (1.20) при $\vec{\varkappa}_{1,2}$ и $\overline{\vec{\varkappa}}_{1,2}$. Доказательство этого факта мы здесь опускаем. Итак, векторы $\vec{\eta}, \vec{\varkappa}_1, \vec{\varkappa}_2$ линейно независимы, и лемма доказана.

Вернемся к линейной системе (1.24). Обозначим матрицу этой системы через A и введем матрицу T, составленную из линейно-независимых векторов $\vec{\eta}, \vec{\varkappa}_1, \vec{\varkappa}_2$. Имеем

$$A = \begin{pmatrix} (r_0)_1 & (s_1)_1 & (s_2)_1 \\ (r_0)_2 & (s_1)_2 & (s_2)_2 \\ (r_0)_3 & (s_1)_3 & (s_2)_3 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} \eta_1 & (\varkappa_1)_1 & (\varkappa_2)_1 \\ \eta_2 & (\varkappa_1)_2 & (\varkappa_2)_2 \\ \eta_3 & (\varkappa_1)_3 & (\varkappa_2)_3 \end{pmatrix}, \qquad (2.8)$$

где векторы $\vec{r}_0$, $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ – столбцы матрицы A, а векторы $\vec{\eta}$, $\vec{\varkappa}_1$, $\vec{\varkappa}_2$ – столбцы матрицы $T = (t_{ik})$.

Преобразуем систему (1.24) с помощью матрицы T (записывая результат в матричной форме) следующим образом:

$$\widetilde{A} \begin{pmatrix} \psi^0 \\ \phi_1^0 \\ \phi_1^0 \end{pmatrix} = \varphi^0 \begin{pmatrix} (\vec{R}, \vec{\eta}_0) \\ (\vec{R}, \vec{\varkappa}_1) \\ (\vec{R}, \vec{\varkappa}_2) \end{pmatrix}, \quad n = 0, \quad \gamma = 0. \qquad (2.9)$$

где $\widetilde{A} = T^* A$, матрица $T^* = (\bar{t}_{ki})$ – эрмитово сопряженная с T, причем $\det T^* = \overline{\det T}$.

Матрица $\widetilde{A}$ в (2.8) имеет вид

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} (\vec{r}_0, \vec{\eta}) & (\vec{s}_1, \vec{\eta}) & (\vec{s}_2, \vec{\eta}) \\ (\vec{r}_0, \vec{\varkappa}_1) & (\vec{s}_1, \vec{\varkappa}_1) & (\vec{s}_2, \vec{\varkappa}_1) \\ (\vec{r}_0, \vec{\varkappa}_2) & (\vec{s}_1 \vec{\varkappa}_2) & (\vec{s}_2, \vec{\varkappa}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(\overline{\vec{r}_0, \vec{\varkappa}_1}) & -(\overline{\vec{r}_0, \vec{\varkappa}_2}) \\ (\vec{r}_0, \vec{\varkappa}_1) & (\vec{s}_1, \vec{\varkappa}_1) & -(\overline{\vec{s}_1, \vec{\varkappa}_2}) \\ (\vec{r}_0, \vec{\varkappa}_2) & (\vec{s}_1, \vec{\varkappa}_2) & (\vec{s}_2, \vec{\varkappa}_2) \end{pmatrix}$$

$$\text{при} \qquad n = 0, \quad \gamma = 0. \qquad (2.10)$$

Во втором из этих равенств матрица $\widetilde{A}$ записана с учетом (2.6) и соотношений (2.5). Определители матриц $\widetilde{A}, A$ и T связаны с равенством $\det\widetilde{A} = (\det T^*) \cdot (\det A)$ и поскольку $\det T^* \neq 0$ (в силу линейной независимости $\vec{\eta}, \vec{\varkappa}_1, \vec{\varkappa}_2$), то $\det\widetilde{A}$ равен нулю в том и только том случае, если $\det A$ равен нулю.

Итак, если $\det \widetilde{A} \neq 0$, то и $\det A \neq 0$, и наоборот.

Векторы $\vec{\varkappa}_{1,2}$, $\vec{s}_{1,2}$ являются элементами комплексного эвклидова пространства, в котором скалярное произведение векторов $\vec{y}$ и $\vec{z}$ определено формулой

$$(\vec{y}, \vec{z}) = y_i \overline{z}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (\vec{y}, \vec{z}) = (\overline{\vec{z}, \vec{y}}) \tag{2.11}$$

и если λ – комплексное число, то $(\lambda y, z) = \lambda(\vec{y}, \vec{z})$, $(\vec{y}, \lambda\vec{z}) = \overline{\lambda}(\vec{y}, \vec{z})$. Именно эти равенства использованы в (2.10) (при записи матрицы $\widetilde{A}$) и будут использоваться ниже.

Приведем здесь выражение для системы (1.24) в векторной форме, которое потребуется ниже

$$\psi^0 \vec{r}_0 + \phi_1^0 \vec{s}_1 + \phi_2^0 \vec{s}_2 = -\varphi^0 \vec{R}, \quad R \neq 0, \tag{2.12}$$

Утверждение. *Если выполнены условия* (2.4), *то определитель матрицы A отличен от нуля лишь в том случае, когда $\vec{r}_0 \neq 0$, где $(r_0)_j = a_{3j\alpha\beta} \frac{\partial \ell}{\partial x_\alpha} \eta^\beta$, $j = 1, 2, 3$*).*

Докажем это утверждение, предполагая обратное. (Заметим, что если $\vec{r}_0 = 0$, то $\det A = 0$ и $\det \widetilde{A} = 0$.)

Итак, пусть

$$\det A = \det \widetilde{A} = 0, \quad \vec{r}_0 \neq 0.$$

Так как $\det A = 0$, то столбцы матрицы A должны быть линейно зависимы, т.е. должно выполняться равенство

$$\delta \vec{r}_0 + \alpha \vec{s}_1 + \beta \vec{s}_2 = 0, \tag{2.13}$$

где хотя бы один из коэффициентов α, β, δ отличен от нуля.

Доказательство разобьем на 3 части.

I. Пусть

$$\vec{r}_0 = \alpha \vec{s}_1 + \beta \vec{s}_2, \quad \alpha \neq 0, \ \beta \neq 0, \tag{2.14}$$

$$(\vec{r}_0, \vec{\varkappa}_1) \neq 0, \quad (\vec{r}_0, \vec{\varkappa}_2) \neq 0. \tag{2.14a}$$

Согласно лемме, векторы $\vec{\eta}$, $\vec{\varkappa}_1$, $\vec{\varkappa}_2$ в точках поверхности Σ линейно независимы, и выбирая их в качестве базиса комплексного пространства, представим

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= a_0 \vec{\varkappa}_1 + b_0 \vec{\varkappa}_2 + e_0 \vec{\eta}, \\ \vec{s}_{1,2} &= a_{1,2} \vec{\varkappa}_1 + b_{1,2} \vec{\varkappa}_2 + e_{1,2} \vec{\eta}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

*) При $(\vec{r}_0, \vec{\varkappa}_{1,2}) \neq 0$ 2-й и 3-й столбцы матрицы $\widetilde{A}$ отличны от нуля. С другой стороны, если $\vec{s}_{1,2} = 0$, то эти равенства и уравнения (1.20) приводят к значениям $\vec{\varkappa}_{1,2} = 0$, что невозможно.

где векторы $\vec{r}_0, \vec{s}_1$ (и $\vec{r}_0, \vec{s}_2$) будем считать (согласно с (2.14)) линейно независимыми.

Матрица $\widetilde{A}$, как следует из 2-го равенства (2.10), определяется пятью независимыми элементами

$$(\vec{r}_0, \vec{\varkappa}_1), (\vec{r}_0, \vec{\varkappa}_2), (\vec{s}_1, \vec{\varkappa}_1), (\vec{s}_1, \vec{\varkappa}_2), (\vec{s}_2, \vec{\varkappa}_2). \tag{2.16}$$

Учитывая это обстоятельство, и тот факт, что векторы $\vec{r}_0, \vec{s}_1$ (и $r_0, \vec{s}_2$) – линейно независимы, мы можем получить линейные соотношения между элементами (2.16). Вывод этих соотношений является основой доказательства сформулированного выше утверждения.

Проецируя (2.14) соответственно на $\vec{\eta}$, $\vec{\varkappa}_1$, $\vec{\varkappa}_2$ и учитывая (2.6), получим

$$(\vec{r}_0, \alpha\vec{\varkappa}_1 + \beta\vec{\varkappa}_2) = 0, \quad (\vec{r}_0, \vec{\eta}) = 0, \tag{2.17}$$

$$\begin{cases} (\vec{s}_1, \alpha\vec{\varkappa}_1 + \beta\vec{\varkappa}_2 - \vec{\eta}) = 0, \\ (\vec{s}_2, \alpha\vec{\varkappa}_1 + \beta\vec{\varkappa}_2 - \vec{\eta}) = 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Далее, выберем из (2.15) пару линейно независимых векторов $\vec{r}_0$ и $\vec{s}_2$ и представим их в виде

$$\vec{r}_0 = \begin{cases} c_1(\alpha\vec{\varkappa}_1 + \beta\vec{\varkappa}_2) + \widetilde{c}_1\varkappa_1 + e_0\vec{\eta}, \\ c_2(\alpha\vec{\varkappa}_1 + \beta\vec{\varkappa}_2) + \widetilde{c}_2\vec{\varkappa}_2 + e_0\vec{\eta}, \end{cases} \tag{2.19}$$

$$\vec{s}_2 = d_2(\alpha\vec{\varkappa}_1 + \beta\vec{\varkappa}_2) + \widetilde{d}_2\vec{\varkappa}_2 + e_2\vec{\eta}, \tag{2.19a}$$

где коэффициенты $c_{1,2}$ и $\widetilde{c}_{1,2}$ связаны соотношениями

$$(c_1 - c_2)\alpha = -\widetilde{c}_1, \quad (c_1 - c_2)\beta = \widetilde{c}_2, \quad \widetilde{c}_1/\widetilde{c}_2 = -\alpha/\beta. \tag{2.20}$$

Заметим, что при $\widetilde{c}_1 = 0$ или $\widetilde{c}_2 = 0$ из (2.19) (в силу (2.17)) следует, что $\vec{r}_0 = 0$. Выражая скалярное произведение $(\vec{s}_2, \vec{r}_0)$ соответственно из (2.19) и (2.19a) и используя (2.5), приходим к следующим соотношениям

$$\begin{aligned} &(\vec{s}_2, \widetilde{c}_1\vec{\varkappa}_1 + (c_1 + \overline{\widetilde{d}}_2 + e_0)\vec{\eta}) = 0, \\ &(\vec{s}_2, \widetilde{c}_2\vec{\varkappa}_2 + (c_2 + \overline{\widetilde{d}}_2 + e_0)\vec{\eta}) = 0, \end{aligned} \tag{2.21}$$

Так как $\widetilde{c}_1 \neq 0$, $\widetilde{c}_2 \neq 0$, то $c_1 \neq c_2$, и равенства (2.21) являются независимыми как между собой, так и с равенством $(\vec{s}_2, \alpha\vec{\varkappa}_1 + \beta\vec{\varkappa}_2 - \vec{\eta}) = 0$ из (2.18). Таким образом, для $\vec{s}_2$ мы получили однородную линейную систему, определитель которой отличен от нуля и которая имеет единственное решение $\vec{s}_2 = 0$. Отсюда следует, что $(r_0, \vec{\varkappa}_2) = -(\overline{s_2, \eta}) = 0$ и в силу (2.17), $\vec{r}_0\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$, что противоречит (2.14a).

II. Пусть 2-ой и 3-ий столбцы матрицы $\vec{A}$ линейно зависимы, т.е.

$$\alpha\vec{s}_1 + \beta\vec{s}_2 = 0, \quad \alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0 \tag{2.22}$$

и выполнены (2.14a).

Легко видеть, что по-прежнему выполнены (2.17), а вместо (2.18) имеем

$$(\vec{s}_{1,2}, \alpha\vec{\varkappa}_1 + \beta\vec{\varkappa}_2) = 0, \tag{2.23}$$

где $\vec{s}_{1,2}$ теперь линейно зависимы. Как и выше, будем считать векторы $\vec{r}_0$, $\vec{s}_2$ линейно независимыми и вычисляя $(\vec{r}_0, \vec{s}_2)$ соответственно из (2.19) и (2.19a), найдем

$$\begin{aligned}
&(\vec{s}_2, \widetilde{c}_1\vec{\varkappa}_1 + (\overline{\widetilde{d}}_2 + e_0)\vec{\eta}) = 0,\\
&(\vec{s}_2, \widetilde{c}_2\vec{\varkappa}_2 + (\overline{\widetilde{d}}_2 + e_0)\vec{\eta}) = 0.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Нетрудно убедиться, см. (2.20), что в отличие от пункта I, равенство (2.23) является следствием соотношений (2.24).

В данном случае, располагая (2.5), (2.17) и (2.22) мы имеем для пяти неизвестных

$$(\vec{s}_1, \vec{\varkappa}_1), \quad (\vec{s}_1, \vec{\varkappa}_2), \quad (\vec{r}_0, \vec{\varkappa}_1), \quad (\vec{r}_0, \vec{\varkappa}_2), \quad (\vec{s}_1, \vec{\eta}) \tag{2.25}$$

пять независимых соотношений, а именно

$$(\vec{r}_0, \alpha\vec{\varkappa}_1 + \beta\vec{\varkappa}_2) = 0, \quad (\vec{s}_1, \vec{\varkappa}_2) = -(\overline{\vec{s}_2, \vec{\varkappa}_1}), \quad (\vec{s}_1, \vec{\eta}) = -(\overline{\vec{r}_0, \vec{\varkappa}_1})$$

и два равенства (2.24). Эти соотношения составляют линейную однородную систему для неизвестных (2.25), которая имеет единственное нулевое решение.

Таким образом, мы снова приходим к равенствам $(\vec{r}_0, \vec{\varkappa}_1) = (\vec{r}_0, \vec{\varkappa}_2) = 0$, которые противоречат (2.14a).

III. Пусть 1-ый и 2-ой (или 3-ий) столбцы матрицы A линейно зависимы, так что

$$\vec{r}_0 = \alpha\vec{s}_1, \quad (\vec{r}_0, \vec{\eta}) = 0, \quad \alpha \neq 0 \tag{2.26}$$

и по-прежнему $\vec{r}_0 \neq 0$.

1) Из (2.26) и (2.5) получаем, что $(\vec{r}_0, \vec{\varkappa}_1) = -(\overline{\vec{s}_1, \vec{\eta}}) = 0$, и следовательно $(\vec{r}_0, \vec{\varkappa}_2) \neq 0$. Для определителя матрицы $\widetilde{A}$ находим

$$\det \widetilde{A} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -(\overline{\vec{r}_0, \vec{\varkappa}_2}) \\ 0 & (\vec{s}_1, \vec{\varkappa}_1) & -(\overline{\vec{s}_1, \vec{\varkappa}_2}) \\ (\vec{r}_0, \vec{\varkappa}_2) & (\vec{s}_1, \vec{\varkappa}_2) & (\vec{s}_2, \vec{\varkappa}_2) \end{vmatrix} = -(\vec{s}_1, \vec{\varkappa}_1)\, |\vec{r}_0, \vec{\varkappa}_2|^2 = 0,$$

откуда следует, что $(\vec{s}_1, \vec{\varkappa}_1) = 0$.

В Приложении, п. 2, показано, что из равенств $(\vec{s}_1, \vec{\varkappa}_1) = 0$ или $(\vec{s}_2, \vec{\varkappa}_2) = 0$ следует, что $\mathrm{Im}(\theta_{1,2})_3 = 0$ (что противоречит 1.18). Нетрудно убедиться, что, неравенства $(\vec{s}_r, \vec{\varkappa}_r) \neq 0$, $r = 1, 2$, справедливы, например, в случае трансверсально-изотропной среды [5].

2) Приведем другой вариант доказательства в рассматриваемом случае (2.26). Представим $\vec{s}_2$ и $\vec{r}_0$ в виде

$$\vec{r}_0 = c_0 \vec{\varkappa}_1 + \widetilde{c}_0 \vec{\varkappa}_2 + e_0 \vec{\eta}, \tag{2.27}$$

$$\vec{s}_2 = d_2 \vec{\varkappa}_1 + \widetilde{d}_2 \vec{\varkappa}_2 + e_2 \vec{\eta},$$

где $\vec{s}_2$ и $\vec{r}_0$ – линейно-независимы и $(\vec{r}_0, \vec{\varkappa}_1) = 0$, (см. п. 1).

Вычисляя из этих равенств $(\vec{r}_0, \vec{s}_2)$, мы, как и выше (см. п. I и II), придем к соотношению

$$(\vec{s}_2, c_0 \vec{\varkappa}_1 + \widetilde{c}_0 \vec{\varkappa}_2 + (e_0 + \overline{\widetilde{d}}_2) \vec{\eta}) = 0.$$

Рассматривая это равенство совместно с (2.5) и равенством $(\vec{r}_0, \vec{\varkappa}_2) = \alpha(\vec{s}_1, \vec{\varkappa}_2)$, найдем, что $(\vec{r}_0, \vec{\varkappa}_2) = 0$. Так как $(\vec{r}_0, \vec{\eta}) = (\vec{r}_0, \vec{\varkappa}_1) = 0$, то $\vec{r}_0 = 0$, что противоречит условию теоремы.

Итак, мы доказали, что векторы-столбцы матрицы A линейно независимы, откуда следует, что $\det A \neq 0$.

Замечание.

1. Если $\vec{r}_0\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$, то краевая задача имеет только нулевое решение. Система (2.12) при этом принимает вид

$$\phi_1 \vec{s}_1 + \phi_2 \vec{s}_2 + \varphi^0 \vec{R} = 0, \quad \vec{R} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2,$$

где согласно (2.5), $(\vec{s}_{1,2}, \vec{\eta}) = -(\vec{r}_0, \vec{\varkappa}_{1,2}) = 0$, если $\vec{r}_0 = 0$. Тогда, если $(\vec{R}, \vec{\eta}) \neq 0$, то $\varphi^0 = 0$. Если же $(\vec{R}, \vec{\eta}) = 0$, то получим равенство

$$\varphi^0 \vec{r}_2 + \varphi^0 \vec{r}_1 + \vec{\tau} = 0, \quad \vec{\tau} \equiv \phi_1 \vec{s}_1 + \phi_2 \vec{s}_2, \tag{2.28}$$

где $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ – линейно независимые векторы ($(\vec{r}_2, \vec{\eta}) \neq 0$, см. выше), и из (2.28) следует, что $\varphi^0\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$.

2. Если $\vec{r}_0\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$, то $\vec{\eta}\big|_{\vec{n}} = 0$. Этот факт был отмечен выше.

В этом случае, проецируя (2.3) на $\vec{n}$, получаем

$$(N_\ell \vec{\eta}, \vec{n}) = a_{3i\alpha\beta}\ell^i \ell^\alpha \eta^\beta - \rho \ell_t^2 \eta_n = 0,$$

где $a_{3i\alpha\beta}\ell^i\ell^\alpha\eta^\beta = (\vec{r}_0, \nabla\ell) = 0$, так как $\vec{r}_0 = 0$. Следовательно, $\eta_n\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$. При этом, если $\eta_n \neq 0$, то и $\vec{r}_0 \neq 0$.

Доказанное выше утверждение теперь может быть сформулировано следующим образом.

Если в точках граничной поверхности Σ *выполнены условия* (2.4) *(т.е. все три собственных числа матричного оператора* $\mathbb{A} = \left(a_{ij\alpha\beta}\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\frac{\partial\tau}{\partial x_\alpha}\right)$ *различны), а также равенство* $(\vec{r}_0, \vec{\eta}) = 0$, *то разложение вида* (1.16), (1.1), (1.17) *является нетривиальным асимптотическим решением краевой задачи* (1.2), (1.3) *только в том случае, когда* $\vec{\eta}\big|_{\vec{n}} \neq 0$, *где* $\vec{n}$ *– нормаль к* Σ, *а вектор* $\vec{\eta}$ *определяет поляризацию главного члена асимптотики.*

В случае $\eta\big|_{\vec{n}} = 0$ задача построения поля лучей на поверхности Σ оказывается некорректной, см. §3.

§3. Уравнение эйконала и уравнение переноса. Пример трансверсально-изотропной среды

1. При описании процесса распространения высокочастотных волн с помощью лучевого метода к уравнению эйконала обычно приводит построение главного члена асимптотики волнового поля. Так и в нашем случае, для построения поля лучей (а фактически, уравнения эйконала) как в окрестности граничной поверхности Σ, так и на самой поверхности, рассмотрим нулевое приближение асимптотики, а именно, уравнения (1.6) при $k = 0$. Полученная при этом однородная система для $\vec{A}^{\,0}$ и $\vec{B}^{\,0}$ может быть преобразована к виду

$$(N_{\tau_s}\vec{U}^{\,0}_{s})_j \equiv a_{ij\alpha\beta}\tau_s^i\tau_s^\alpha (U_s^0)^\beta - \rho\left(\frac{\partial\tau_s}{\partial t}\right)^2 (U_s^0)_j = 0, \tag{3.1}$$

$$\tau_{1,2} = l \mp \frac{2}{3}m^{3/2}, \quad \vec{U}^{\,0}_{1,2} = m^{-1/4}\vec{A}^{\,0} \mp m^{1/4}\vec{B}^{\,0}, \quad \tau_s^i \equiv \frac{\partial\tau_s}{\partial x_i},$$

где $\tau_{1,2}$ и $\vec{U}^{\,0}_{1,2}$ – соответственно эйконалы и амплитуды падающих на поверхность Σ и отраженных от нее волн. Величины $\lambda = \rho(\tau_s)^2_t$ – собственные числа матрицы $\mathbb{A} = (a_{ij\alpha\beta}\tau^i\tau^\alpha)$ из (3.1), определяемые из характеристического уравнения этой матрицы, так что (см. также [1])

$$(-\tau)_t = \frac{1}{\rho^{1/2}}\, H\left(x_i, \frac{\partial \tau}{\partial x_i}\right). \tag{3.2}$$

Полученное равенство есть уравнение эйконала для поля лучей вблизи Σ, причем собственная функция, соответствующая (3.2), согласно утверждению §2, должна иметь отличную от нуля компоненту в плоскости нормального сечения Σ, являясь при этом "квазипоперечной" медленной волной, [7].

Располагая (3.1), можно получить известные выражения для групповой скорости распространяющихся волн, компоненты которой равны:

$$g_j = \begin{cases} \dfrac{a_{ji\alpha\beta}m^{1/4}(U^0_s)^i m^{1/4}(U^0_s)^\beta\,\tau^\alpha_s}{\rho|m^{1/4}\vec{U}^{\,0}_s|^2(-\tau_s)_t}, \\ \dfrac{1}{\rho^{1/2}}\,\dfrac{\partial H}{\partial \tau^j_s}, \quad \tau^j_s = \frac{\partial \tau_s}{\partial x_j}, \quad j = 1,2,3, \end{cases} \tag{3.3}$$

где первое равенство отождествляется со скоростью распространения энергии волн, см., например, [7], а второе равенство следует из системы уравнений для характеристик – ПВ лучей, соответствующей уравнению эйконала (3.2).

Положим в (3.3) $j = 3$ и устремим точку M на Σ, где $m\big|_{n=0} = \gamma$. В пределе при $\gamma = 0$, $n = 0$, учитывая (1.10), (1.11), получим равенство

$$\vec{g}\big|_{\vec{n}} = g_3 = \frac{a_{3i\alpha\beta}(A^0)^i(A^0)^\beta\ell^\alpha}{\rho|\vec{A}^{\,0}|^2(-\ell_t)} = \frac{(\vec{r}_0, \vec{\eta})}{\rho|\vec{\eta}|^2(-\ell_t)} = 0, \tag{3.4}$$

которое означает, что скорость поверхностной волны должна быть направлена вдоль Σ. Второе из неравенств (3.3) при этом дает, см. [1]

$$\left.\frac{\partial H}{\partial \ell_3}\right|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0, \quad \ell_3 \equiv \frac{\partial \ell}{\partial n}. \tag{3.5}$$

Это равенство определяет в точках поверхности Σ функцию $\ell_3 = f\left(\frac{\partial \ell}{\partial x_{i'}}, x_{i'}\right)$, $i' = 1,2$. Подставляя это значение l_3 в (3.2) и полагая $n = 0$, $\gamma = 0$, получаем уравнение эйконала $(-l_{00})_t = \dfrac{1}{\rho^{1/2}} H\left(x_{i'}, \frac{\partial \ell}{\partial x_{i'}}\right)\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ для поля лучей на поверхности Σ.

Таким образом (согласно сформулированному в конце §2 утверждению), условия, обеспечивающие построение нетривиального асимптотического решения задачи (1.2), (1.3) в виде разложений (1.1), (1.16), (1.17), оказываются выполненными.

Покажем теперь, что условие $\vec{\eta}\big|_{\vec{n}} \neq 0$ является не только достаточным, но и необходимым условием существования асимптотического решения указанного выше вида. Пусть $\vec{\eta}\big|_{\vec{n}} = 0$ при $n = 0$, $\gamma = 0$. Проецируя (2.3) на $\vec{n}$, найдем

$$(\vec{A}^0, \vec{\xi}) = 0, \quad \vec{\xi} = (a_{3i\alpha 1}\ell^i\ell^\alpha, a_{3i\alpha 2}\ell^i\ell^\alpha). \tag{3.5a}$$

Проецируя, далее, (2.3) на $\vec{\xi}$ и учитывая (3.5a), в каждой точке поверхности Σ получим конус 4-го порядка в пространстве направлений $\frac{\partial l}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \ell}{\partial x_2}$, $\frac{\partial \ell}{\partial x_3}$, так что $\ell_3 = \frac{\partial \ell}{\partial x_3}$ оказывается функцией переменных $\frac{\partial \ell}{\partial x_{i'}}$, $x_{i'}$, $i' = 1, 2$, отличной от функции $f\left(\frac{\partial \ell}{\partial x_{i'}}, x_{i'}\right)$, которая следует из (3.5), что приводит к невозможности построения уравнения эйконала на поверхности Σ.

Приведем результаты вычислений коэффициентов m_{10}, ℓ_{01}, ℓ_{20} разложений (1.27), являющихся существенными при определении амплитуды и дисперсии отдельных мод Лява. Заметим, что при этом функцию $\ell_{00}(x_1, x_2, t)$ – решение уравнения эйконала будем считать известной.

Дифференцируя по γ первое уравнение системы (1.6) (при $k = 0$), найдем

$$\ell_{01} = \frac{\partial \ell}{\partial \gamma}\bigg|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = \frac{-1}{(-\ell_{00})_t} \int\limits_{M_0}^{M_1} \frac{(m_{10})^2}{2} \frac{a_{3j3\beta}\eta^j\eta^\beta}{\rho|\vec{\eta}|^2}\, dt, \tag{3.6}$$

где интеграл берется вдоль ПВ луча.

При выводе этой формулы было использовано выражение для групповой скорости на поверхности Σ

$$\frac{dx_{j'}}{dt} = (\vec{g}_{\text{гр}})_{j'} = \frac{a_{j'i\alpha\beta}\eta^i\eta^\beta\ell^\alpha}{\rho|\vec{\eta}|^2(-\ell_t)}\bigg|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}, \quad j' = 1, 2. \tag{3.7}$$

Коэффициент $m_{10} = \frac{\partial m}{\partial n}\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$, входящий в подинтегральную функцию (3.6), определяет (наряду с малым параметром γ) ширину погранслоя, в котором сосредоточена отдельная мода Лява, при условии, что $m_{10} < 0$. В [1] коэффициент m_{10} вычислен в виде

$$m_{10} = -\left(\frac{(-\ell_{00})_t}{R}\right)^{1/3} \frac{1}{\sqrt{g^{33}}}\Bigg|_{n=0},$$

где $R^{-1} > 0$ – изотропная нормальная кривизна в псевдофинслеровой метрике, $g^{33} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_3^2}$, $\dot{x}_3 = \frac{dx_3}{d\sigma}$, $\mathcal{L}$ – лагранжиан (известная функция переменных x_i, $\frac{dx_i}{d\sigma}$), $d\sigma$ – элемент длины, см. также [8]. Выражение для коэффициента $\ell_{20} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ell}{\partial n^2}\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ приведено ниже.

2. Остановимся на вычислении пока неизвестной функции $\varphi^0(x_1, x_2, t)$ из (1.11), т.е. амплитуды главного члена асимптотики. Рассмотрим 1-е уравнение системы (1.6) при $k = 1$. Условием разрешимости этого векторного уравнения при $n = 0$, $\gamma = 0$ является ортогональность его правой части к $\vec{A}^{\,0}\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$, т.е.

$$(M_\ell \vec{A}^{\,0} + N_m \vec{B}^{\,0}, \vec{A}^{\,0})\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0, \tag{3.8}$$

где оператор M_ℓ определен формулой (1.8).

Воспользуемся равенством

$$(2N_{\ell m}\vec{A}^{\,0}, \vec{A}^{\,0}) = m(2N_{\ell m}\vec{B}^{\,0}, \vec{B}^{\,0}), \tag{3.9}$$

которое, как легко убедиться, следует из системы (1.6) при $k = 0$. Используя (1.7) и учитывая, что $m_t\big|_{n=0} = 0$, $\frac{\partial m}{\partial x_{i'}}\Big|_{n=0} = 0$, $i' = 1, 2$, найдем

$$\frac{\partial}{\partial n}(N_{\ell m}\vec{A}^{\,0}, \vec{A}^{\,0})\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = \Big\{ a_{i'j\alpha\beta}(A^0)^j(A^0)^\beta \ell^\alpha)\frac{\partial m_{10}}{\partial x_{i'}} + \rho(-\ell_t)m_t|\vec{A}^{\,0}|^2 +$$
$$+ m_{10}\frac{\partial}{\partial n}(a_{3j\alpha'\beta}(A^0)^j(A^0)^\beta \ell^{\alpha'}) + \ell_3 m_{10}\frac{\partial}{\partial n}\big(a_{3j3\beta}(A^0)^j(A^0)^\beta\big) +$$
$$+ 2m_{10}\,\ell_{20}\,a_{3j3\beta}(A^0)^j(A^0)^\beta \Big\}_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = m_{10}(N_{\ell m}\vec{B}^{\,0}, \vec{B}^{\,0})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}. \tag{3.10}$$

Затем, вычисляя $M_\ell \vec{A}^0\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ в соответствии с (1.8) и сравнивая полученное выражение с (3.10) (мы опускаем промежуточные выкладки), приведем равенство (3.8) к виду

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha'}}(a_{i'j\alpha\beta}(A^0)^j(A^0)^\beta\ell^\alpha)+\rho(-\ell_t)\frac{\partial}{\partial t}|\vec{A}^0|^2-\rho(-\ell_t)\frac{1}{m_{10}}\,\frac{dm_{10}}{dt}|\vec{A}^0|^2+$$

$$+(N_{\ell m}\vec{B}^0,\vec{B}^0)+(N_m\vec{B}^0,\vec{A}^0)=0, \tag{3.11}$$

где $\frac{dm_{10}}{dt}=\left(g_{j'}\frac{\partial m_{10}}{\partial x_{j'}}+\frac{\partial m_{10}}{\partial t}\right)$ – производная вдоль ПВ луча, $g_{j'}$ определено формулой (3.7). Введем $\mathcal{A}^2\equiv\frac{|\vec{A}^0|^2\rho}{|m_{10}|}=\frac{(\varphi^0)^2|\vec{\eta}|^2\rho}{|m_{10}|}$ и пользуясь (3.7), окончательно для (3.10) получаем

$$(-l_{00})_t\left[\operatorname{div}_s\,\vec{g}_{\text{гр}}\mathcal{A}^2+\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{A}^2\right]+\mathcal{A}^2\mathcal{E}=0, \tag{3.12}$$

$$\mathcal{E}\equiv-\frac{|m_{10}|}{(\varphi^0)^2|\eta|^2\rho}[(N_{\ell m}\vec{B}^0,\vec{B}^0)+(N_m\vec{B}^0,\vec{A}^0)].$$

Так как при $n=0$, $\gamma=0$ коэффициенты $\vec{A}^0$, $\vec{B}^0$ пропорциональны φ^0, см. (1.11) и (2.9), то (3.12) – однородное дифференциальное уравнение для $\mathcal{A}^2$. Это уравнение переноса на Σ для амплитуды $\mathcal{A}^2$ поверхностной волны. Интегрирование (3.12) вдоль ПВ луча (в любой точке поверхности Σ) приводит к модифицированной формуле лучевого метода. Мы приведем эту формулу ниже для трансверсально-изотропной среды.

2. Пусть упругая среда трансверсально изотропна. В этом случае тензор $a_{ij\alpha\beta}$ сводится к симметричной матрице (c_{rs}), $r,s=1,2,\dots,6$, определяемой пятью независимыми параметрами. Отличными от нуля являются следующие элементы c_{rs}:

$$c_{11}=c_{22},\quad c_{12}=c_{21},\quad c_{13}=c_{31}=c_{23}=c_{32},\quad c_{33},$$

$$c_{44}=c_{55},\quad 2c_{66}=c_{11}-c_{12}. \tag{3.13}$$

Условия положительности всех миноров матрицы (c_{rs}) (обеспечивающие положительность упругой энергии деформации) имеют вид

$$c_{11}>0,\quad c_{33}>0,\quad c_{44}=c_{55}>0,\quad c_{11}>|c_{12}|,\quad (c_{12}+c_{66})c_{33}>c_{13}^2. \tag{3.14}$$

В соответствии с результатами, изложенными выше, в рассматриваемом частном случае анизотропии среды (при $n = 0$, т.е. на Σ, и $\gamma = 0$) находим

$$\vec{\eta} = \eta_n \vec{n}_0, \quad (\sigma \nabla_s \ell) = -m_{10} \frac{c_{13} + c_{44}}{c_{11} - c_{44}} \eta_n, \quad \sigma_n = 0. \tag{3.15}$$

В базисе ортогональных на Σ векторов $\vec{n}_0$, $\nabla_s \ell$, $\vec{\zeta} = \vec{n}_0 \times \nabla_s \ell$ ($\nabla_s \ell$ – поверхностный градиент функции ℓ) таким образом имеем

$$\vec{\eta} = (\eta_n, 0, 0), \quad \vec{\sigma} = (0, \vec{\sigma}\big|_{\nabla_s \ell}, 0).$$

Равенства (1.10) и (2.6) принимают вид $\left(\frac{\partial \ell}{\partial n} c_{33} \eta_n^2\right)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$, откуда следует, что $\ell_3 = \frac{\partial \ell}{\partial n}\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$.

Единственную ось симметрии, которой обладает трансверсально-изотропная среда, мы выбираем сонаправленной оси x_3 декартовой системы координат x_1, x_2, x_3. Поверхность Σ при этом следует считать плоскостью ($x_3 = n = 0$ – уравнение Σ).

Используя выражение для $N_\xi \vec{D}$ из (1.7), полученное в обозначениях (3.13) в [5], мы находим из 1-го уравнения системы (1.6) (при $k = 0$) как поверхностное уравнение эйконала, так и коэффициент m_{10} соответственно в виде

$$(-\ell_{00})_t^2 = \frac{c_{44}}{\rho} (\nabla_s \ell_{00})^2, \quad m_{10} = -\left(\frac{2(-\ell_{00})_t^2}{\widetilde{c}_{33/\rho} R_Э}\right)^{1/3}_{n=0}, \tag{3.16}$$

где $\widetilde{c}_{33} = P^2/(c_{11} - c_{44})$, $P^2 \equiv (c_{11} - c_{44})c_{33} - (c_{13} + c_{44})^2$, $\frac{2}{R_Э} = \left(\frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{c_{44}}{\rho}\right)_{n=0}$, $R_Э > 0$. Для величин $\left(\frac{\partial \theta_{1,2}}{\partial n}\right)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ из (1.20) имеем (см. [5]):

$$(\theta_1)_n^2 = -\frac{P^2}{c_{33} c_{44}} (\nabla_s \ell)^2, \quad (\theta_2)_n^2 = -\frac{\widetilde{m}}{c_{44}} (\nabla_s \ell)^2, \quad \widetilde{m} \equiv c_{66} - c_{44}. \tag{3.17}$$

Если $\widetilde{m} > 0$ (т.е. $c_{44} < c_{66}$), то неравенство $P^2 > 0$ будет тем более выполнено, если

$$(c_{12} + c_{66}) c_{33} > (c_{13} + c_{66})^2. \tag{3.18}$$

При этом будут выполнены и неравенства (3.14), если $c_{13} > 0$.

Итак, если $\widetilde{m} > 0$ и справедливо (3.18), то $\left(\frac{\partial\theta_{1,2}}{\partial n}\right)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ оказываются чисто мнимыми величинами. Главный член асимптотики поверхностной волны (отдельной моды) является при этом медленной поперечной волной с амплитудой $\vec{A}^{\,0} = \varphi^0\vec{\eta}$, $\vec{\eta} = \eta_n\vec{n}_0$.

Функция ψ^0 из (1.11) пропорциональна φ^0 и находится из неоднородной системы (2.12) в виде

$$\psi^0 = (-i)\frac{\varphi^0 D^2}{|(\theta_1)_n|c_{33}c_{44}^2(c_{11}-c_{44})}, \tag{3.19}$$

где $|(\theta_1)_n| \neq 0$ и $D \equiv (c_{11}-c_{44})c_{33} - c_{13}(c_{13}+c_{44}) > 0$, $c_{11}-c_{44} = c_{12}+c_{66}+\widetilde{m} > 0$, если $\widetilde{m} > 0$ и выполнено (3.18).

Подставляя $\vec{B}^{\,0} = \psi^0\vec{\eta} + \varphi^0\vec{\sigma}$ в (3.12), для функции $\mathcal{E}$ из (3.12) после некоторых преобразований получаем

$$\mathcal{E} = i\left.\frac{2(-\ell_{00})_t^2 D^2}{|(\theta_1)_n|c_{33}c_{44}^2(c_{11}-c_{44})R_{\text{э}}}\right|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}.$$

Интегрируя уравнение (3.12) вдоль ПВ луча, находим

$$\varphi^0 = \chi^0(\alpha_1,\alpha_2)\left(\frac{|m_{10}|}{\rho J}\right)^{1/2} e^{-i\frac{1}{2(-\ell_{00})_t}\int\limits_{M_0}^{M}(\operatorname{Im}\mathcal{E})ds}, \tag{3.20}$$

где $ds = dt$ и интеграл в фазе экспоненты берется вдоль ПВ луча. Выражение (3.20) есть модифицированная формула лучевого метода, и подобная формула имеет место для главного члена асимптотики волн Лява в изотропном случае, см. [3]. В (3.20) $J = \frac{D(x_1,x_2)}{D(\alpha_1,\alpha_2)}$ – якобиан перехода от координат x_1, x_2 к лучевым координатам α_1, α_2; $\chi^0(\alpha_1,\alpha_2) = \text{const}$ вдоль ПВ луча. Нетрудно убедиться, что фаза экспоненты в (3.20) совпадает с соответствующей фазой в [3, 9], когда среда становится изотропной.

Приложение

1. Приведем доказательство формул (2.2) при условии, что $\frac{\partial\theta_1}{\partial n} \neq \frac{\partial\theta_2}{\partial n}$ при $n = 0$, $\gamma = 0$. Рассмотрим уравнение (1.20), например, для $\vec{\varkappa} = \vec{\varkappa}_1$ и умножим его скалярно на $\overline{\vec{\varkappa}}_2$. В результате получим

$$\rho\ell_t^2(\vec{\varkappa}_1,\overline{\vec{\varkappa}}_2) = a_{ij\alpha\beta}\overline{\varkappa}_2^j(\theta_1^i\theta_1^\alpha\varkappa_1^\beta) = ((\theta_1)_3 - (\overline{\theta}_2)_3)a_{3j\alpha\beta}\overline{\varkappa}_2^j(\theta_1^\alpha\varkappa_1^\beta)+$$

$$+a_{ij\alpha\beta}(\overline{\varkappa}_2^j\overline{\theta}_2^i)\theta_1^\alpha\varkappa_1^\beta=((\theta_1)_3-(\theta_2)_3))a_{3j\alpha\beta}\overline{\varkappa}_2^j(\theta_1^\alpha\varkappa_1^\beta)+$$
$$+((\theta_1)_3-(\overline{\theta}_2)_3)a_{ij3\beta}(\overline{\varkappa}_2^j\overline{\theta}_2^i)\varkappa_1^\beta+a_{ij\alpha\beta}(\overline{\theta}_2^i\overline{\theta}_2^\alpha\overline{\varkappa}_2^j)\varkappa_1^\beta. \qquad (1)$$

Так как $a_{ij3\beta}=a_{3\beta ij}$ и $a_{ij\alpha\beta}\overline{\theta}_2^i\overline{\theta}_2^\alpha\overline{\varkappa}_2^\beta=\rho\ell_t^2(\overline{\varkappa}_2)_j$, см. (1.20), то из (1), где $(\theta_1)_3\neq(\overline{\theta}_2)_3$ в силу (1.8), следует второе равенство (2.2), а следовательно, и первое из равенств (2.2). Аналогично доказывается равенство (2.1), см. [6].

Заметим, что из (1) при $\vec{\varkappa}_1=\vec{\varkappa}_2$, в частности, следует равенство (2.2a).

2. Рассмотрим диагональные элементы $(\vec{s}_r,\vec{\varkappa}_r)$, $r=1,2$, матрицы $\widetilde{A}$. С этой целью умножим (1.20) на $\overline{\vec{\varkappa}}_r$ и полученное равенство приведем к виду

$$\rho\ell_t^2|\vec{\varkappa}|^2=a_{ij\alpha\beta}\theta^i\theta^\alpha\overline{\varkappa}^j\varkappa^\beta=(\theta_3-\overline{\theta}_3)(\vec{s},\vec{\varkappa})+a_{ij\alpha\beta}(\overline{\theta}^i\overline{\varkappa}^j)(\theta^\alpha\varkappa^\beta), \quad (2)$$

где под $\vec{s}$, $\vec{\varkappa}$, θ имеются в виду $\vec{s}_r$, $\vec{\varkappa}_r$, $\vec{\theta}_r$, $r=1$ (или $r=2$); $(\vec{s},\vec{\varkappa})=s_j\varkappa^j$.

Пусть

$$(\vec{r}_0,\vec{\varkappa}_1)=0, \quad (\vec{r}_0,\vec{\varkappa}_2)\neq 0 \qquad (3)$$

и пусть $(\vec{s}_1,\vec{\varkappa}_1)=0$ (см. п. III доказательства теоремы).

Из (2) и (1.20), вообще говоря, следует, что $\theta=\overline{\theta}$, т.е. что $\operatorname{Im}\theta=0$, а это значит, что $(\vec{s}_1,\vec{\varkappa}_1)\neq 0$. Покажем, что это так в том специальном случае анизотропии, когда выполнены (3).

В качестве примера рассмотрим трансверсально-изотропную среду. В базисе ортогональных векторов $\vec{n}_0$, $\nabla_s\ell$, $\vec{\zeta}$ (см. §3) имеем, [5]

$$\vec{\varkappa}_2=(\varkappa_n,\vec{\varkappa}\big|_{\nabla_s\ell},0), \quad \vec{\varkappa}_1=(0,0,\vec{\varkappa}\big|_{\vec{\zeta}})$$

и, пользуясь (3.13), после несложных выкладок, находим

$$(\vec{s}_1,\vec{\varkappa}_1)\neq 0, \quad (\vec{s}_2,\vec{\varkappa}_2)\neq 0,$$

причем $\operatorname{Re}(\vec{s}_r,\vec{\varkappa}_r)=0$, $r=1,2$.

Литература

1. В. Д. Ажоткин, В. М. Бабич, *О распространении волн Лява вдоль поверхности анизотропного тела произвольной формы*. Зап. научн. семин. ЛОМИ, **165** (1987), 9–14.
2. В. М. Бабич, З. А. Янсон, *О распространении волн Лява вдоль поверхности упругого тела произвольной формы*. Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли No. 5 (1985), 17–27.

3. З. А. Янсон, *Нестационарные волны типа Релея вблизи поверхности неоднородного упругого тела.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **156** (1986), 168–183.
4. Ю. А. Кравцов, *Об одной модификации метода геометрической оптики.* Изв. вузов. Радиофизика, **7**, No. 4 (1964), 664–673.
5. З. А. Янсон, *О распространении волн Релея типа SV в трансверсально-изотропных упругих средах.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **230** (1995), 278–292.
6. З. А. Янсон, *Высшие приближения асимптотики поверхностных волн Лява SH в трансверсально-изотропных упругих средах.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **257** (1999), 323–345.
7. Г. И. Петрашень, *Распространение волн в анизотропных упругих средах.* Наука, Л. (1980).
8. В. Д. Ажоткин, *К вопросу о понятии нормальной кривизны в псевдофинслеровой геометрии.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **165** (1987), 3–8.
9. П. В. Крауклис, Н. В. Цепелев, *О построении высокочастотной асимптотики волнового поля, сосредоточенного вблизи границы упругой среды.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **34** (1973), 72–92.

Yanson Z. A. On the propagation of the Love waves in anisotropic elastic media.

The Love waves concentrated near the surface of an anisotropic elastic body are studied. The uniform asymptotics of the wave field is constructed with the use of nonstationary caustic expansion (Yu. A. Kravtsov's ansatz) in the form of space-time ray series. Using three types of waves, which propagate along any direction in an elastic medium, as a vector basis we proceed to obtain the sufficient conditions for existence of nonzero asymptotic solution of the problem under study. The procedure for constructing asymptotic series is illustrated for the model of a transversely isotropic medium.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 19 апреля 2001 г.