Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 275, 2001 г.

**В. Б. Филиппов, Н. Я. Кирпичникова,
А. С. Кирпичникова**

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА МАЛОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ В СЛОЕ

**Посвящается юбилею
Василия Михайловича Бабича**

В работе [1] была рассмотрена задача дифракции электромагнитной плоской волны от неоднородности Ω_3, помещенной в слое. Эта неоднородность являлась кругом, радиус которого мал по сравнению с толщиной слоя и длиной волны. Было показано при некоторых ограничениях, что в главном приближении *неоднородность* излучает как *точечный источник типа монополя* при скачке *диэлектрической* проницаемости ε или как *диполь* (при скачке *магнитной* проницаемости μ), *пропорциональный площади неоднородности* (области Ω_3) (см. рис. 1).

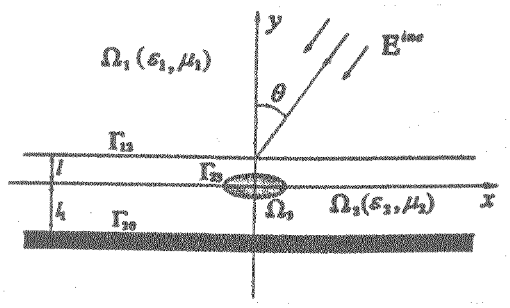

Рис. 1.

Покажем теперь, что подобный результат сохраняется и для случая, когда область Ω_3 является эллипсом, т.е., что диаграмма

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 99-01-00107).

направленности для рассеянного поля в главном приближении зависит от площади области Ω_3 и не зависит от формы эллипса и его положения.

Кроме этого результата найдем решение задачи дифракции электромагнитной плоской волны от малой неоднородности в слое Ω_2.

Пусть на идеально проводящую поверхность Γ_{12}, покрытую диэлектрическим слоем толщины $l+l_1$, падает из среды Ω_1 плоская волна $\mathbf{E}^{inc}$. Предположим, что в слое Ω_2 имеется включение Ω_3 с другими параметрами ε, μ, чем у слоя.

Вначале найдем волну, рассеянную неоднородностью Ω_3 в однородной среде Ω_2.

§1. Решение задачи отражения плоской волны от неоднородности Ω_3

Введем эллиптические координаты (ξ, η), если декартовы координаты выбраны так, чтобы ось x проходила через фокусы эллипса. Обозначим фокусное расстояние через $2h$. Тогда декартовы координаты связаны с эллиптическими соотношениями [5]

$$\begin{cases} x = h\cosh\xi\cos\eta, \\ y = h\sinh\xi\sin\eta, \quad \xi > 0, \quad 0 \leqslant \eta < 2\pi. \end{cases} \tag{1.1}$$

В эллиптических координатах уравнение Гельмгольца запишется следующим образом:

$$(\Delta + k_i^2)u_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial \eta^2} + 2k^2(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)u_i = 0,$$

$$i = 2, 3; \quad 2k = k_i h \ll 1. \tag{1.2}$$

Если искать решение в виде произведения функций, зависящих от ξ и η:

$$u(\xi, \eta) = u_i(\xi, \eta) = \Psi(\xi)\Phi(\eta), \quad i = 2, 3, \tag{1.3}$$

то получим, что функции Ψ и Φ являются решениями уравнений Матье (Mathieue)

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + (a - 2k^2\cosh 2\xi)\Psi = 0, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + (a - 2k^2\cos 2\eta)\Phi = 0. \tag{1.5}$$

Кроме уравнения мы должны удовлетворить граничному условию непрерывности касательных компонент электрического и магнитного поля на границе Γ_{23}

$$\begin{cases} u_2 & = u_3, \\ \dfrac{1}{\mu_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial n} & = \dfrac{1}{\mu_3}\dfrac{\partial u_3}{\partial n}. \end{cases} \tag{1.6}$$

Как и ранее (см. [1, 2]) решение невозмущенной задачи дифракции, когда область Ω_3 отсутствует, представляется в виде суперпозиции плоских волн.

В первом приближении при малых размерах области Ω_3 и при толщине слоя порядка длины волны эффектами вторичной дифракции, т.е. дифракции поля, рассеянного на Γ_{23} можно пренебречь.

Итак, в первом приближении задача сводится к задаче дифракции плоской волны на малом полупрозрачном эллипсе. Для получения решения задачи дифракции воспользуемся формулой разложения плоской волны по функциям Матье:

$$\begin{aligned} u_2^{inc} = e^{ik_2 r\cos(\varphi-\theta)} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{P_{2n}}Ce_{2n}(\xi)ce_{2n}(\eta)ce_{2n}(\theta)+ \\ +\frac{1}{S_{2n+2}}Se_{2n+2}(\xi)se_{2n+2}(\eta)se_{2n+2}(\theta)+ \\ +i\{\text{ то же с номером } 2n+1\}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где ce_m и se_m четные и нечетные периодические функции Матье, Ce_m и Se_m соответствующие им непериодические функции. Имеют место следующие разложения для этих функций:

$$\begin{aligned} ce_{2n}(z,q) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}^{2n}\cos 2mz, \\ ce_{2n+1}(z,q) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1}^{2n+1}\cos(2m+1)z, \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} se_{2n+2}(z,q) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+2}^{2n+2}\sin(2m+2)z, \\ se_{2n+1}(z,q) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+1}^{2n+1}\sin(2m+1)z, \end{aligned} \tag{1.9}$$

где $q = k^2 > 0$, $q_i = k^2 = \left(\frac{k_i h}{2}\right)^2 \ll 1$, $i = 2, 3$.

$$Ce_{2n}(z,q) = \frac{ce_{2n}(1/2\pi, q)}{A_0^{2n}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m A_{2m}^{2n} J_{2m}(2k\cosh z),$$

$$Ce_{2n+1}(z,q) = \frac{ce'_{2n+1}(1/2\pi, q)}{kA_1^{2n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m A_{2m+1}^{2n+1} J_{2m+1}(2k\cosh z), \tag{1.10}$$

$$\begin{gathered} Se_{2n+1}(z,q) = \frac{se_{2n+1}(1/2\pi, q)\tanh z}{kB_1^{2n+1}} \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m+1) B_{2m+1}^{2n+1} J_{2m+1}(2k\cosh z), \\ Se_{2n+2}(z,q) = -\frac{se'_{2n+2}(1/2\pi, q)\tanh z}{k^2 B_2^{2n+2}} \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m+2) B_{2m+2}^{2n+2} J_{2m+2}(2k\cosh z). \end{gathered} \tag{1.11}$$

В дальнейшем нам потребуется кроме этих решений еще решения $Fey_m(z,q)$ и $Gey_m(z,q)$, которые получаются из $Ce_m(z,q)$ и $Se_m(z,q)$ заменой в разложениях функций Бесселя J на функции Неймана Y, а также функции

$$Me_m^{(1)} = Ce_m + iFey_m, \quad Ne_m^{(1)} = Se_m + iGey_m, \tag{1.12}$$

которые имеют разложения в ряды, содержащие функции Ханкеля $H_m^{(1)}$ вместо J_m.

Коэффициенты P_m и S_m в (1.7) определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} P_{2n} &= \frac{ce_{2n}(0,q)ce_{2n}(1/2\pi, q)}{A_0^{2n}}, \\ P_{2n+1} &= \frac{ce_{2n+1}(0,q)ce'_{2n+1}(1/2\pi, q)}{kA_1^{2n+1}}, \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &= \frac{se'_{2n+1}(0,q)se_{2n+1}(1/2\pi, q)}{kB_1^{2n+1}}, \\ S_{2n+2} &= \frac{se'_{2n+2}(0,q)se_{2n+2}(1/2\pi, q)}{k^2 B_2^{2n+2}}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Коэффициенты P_m и S_m в (1.7)–(1.14) находятся из рекуррентных соотношений:

$$\begin{cases} aA_0 - qA_1 = 0, & \\ (a-4)A_2 - q(A_4 + 2A_0) = 0, & \text{для функции} . \\ (a-4m^2)A_{2m} - q(A_{2m+2} + A_{2m-2}) = 0, & ce_{2m}(z,q). \end{cases} \quad (1.15)$$

$$\begin{cases} (a-1-q)A_1 - qA_3 = 0, & \text{для функции} \\ (a-(2m+1)^2)A_{2m+1} - q(A_{2m+3} + A_{2m-1}) = 0, & ce_{2m+1}(z,q). \end{cases} \quad (1.16)$$

$$\begin{cases} (a-1-q)B_1 - qB_3 = 0, & \text{для функции} \\ (a-(2m+1)^2)B_{2m+1} - q(B_{2m+3} + B_{2m-1}) = 0, & se_{2m+1}(z,q). \end{cases} \quad (1.17)$$

$$\begin{cases} (a-4)B_2 - qB_4 = 0, & \text{для функции} \\ (a-4m^2)B_{2m} - q(B_{2m+2} + B_{2m-2}) = 0, & se_{2m+2}(z,q). \end{cases} \quad (1.18)$$

Константа разделения $a = a(q)$ находится, вообще говоря, из некоторых цепных дробей, но при малых q удобно использовать разложения в ряды по степеням q.

Если обозначить через a_m собственные значения функции $ce_m(z,q)$ и через b_m собственные значения функции $se_m(z,q)$, то для них можно получить следующие разложения:

$$\begin{gathered} a_0 = -\frac{1}{2}q^2 + \frac{7}{128}q^4 + O(q^6), \\ b_1 = 1 - q - \frac{1}{8}q^2 + O(q^4), \quad a_1 = 1 + q - \frac{1}{8}q^2 + O(q^4), \qquad (1.19) \\ b_2 = 4 - \frac{1}{12}q^2 + O(q^4), \quad a_2 = 4 + \frac{5}{12}q^2 + O(q^4), \quad \text{и т.д.} \end{gathered}$$

Если подставить эти выражения в (1.15)–(1.18), то для коэффициентов A и B при малых q имеют место соотношения ($l \geqslant 0$)

$$\begin{aligned} A^m_{m+2l} &\simeq (-1)^l \frac{m!}{l!(m+l)!}\left(\frac{q}{4}\right)^l, \\ A^m_{m-2l} &\simeq (-1)^l \frac{(m-l-1)!}{l!(m-l)!}\left(\frac{q}{4}\right)^l. \end{aligned} \qquad (1.20)$$

Аналогичные формулы имеются для коэффициентов B^m_{m-2l}.

Вернемся к решению задачи рассеяния на полупрозрачном эллипсе.

Итак, пусть на эллипс $\xi = \xi_0$ падает плоская волна (1.7). Требуется найти поле, удовлетворяющее граничному условию (1.6).

Решение вне эллипса Γ_{23} будем искать в виде:

$$u_2 = u_2^{inc} + \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}^{(2)} Me_{2m}^{(1)}(\xi) ce_{2m}(\eta) ce_{2m}(\theta) + b_{2m+1}^{(2)} Ne_{2m+2}^{(1)}(\xi) \times \\ \times se_{2m+2}(\eta) se_{2m+2}(\theta) + \{\text{то же с номером}\, 2m+1\}, \quad (1.21)$$

а решение внутри эллипса Γ_{23} имеет иной вид:

$$u_3 = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}^{(3)} Ce_{2m}(\xi) ce_{2m}(\eta) ce_{2m}(\theta) + b_{2m+2}^{(3)} Se_{2m+2}(\xi) \times \\ \times se_{2m+2}(\eta) se_{2m+2}(\theta) + i\{\text{то же с номером}\, 2m+1\}. \quad (1.22)$$

Заметим, что выражение (1.21) есть функции от $q_2 = k_2^2 h^2/4$, а (1.22) есть функции от $q_3 = k_3^2 h^2/4$, что, ради краткости, мы опускаем. Легко видеть, что выражения (1.21) и (1.22) являются решениями уравнения Гельмгольца вне и внутри эллипса Γ_{23}, приэтом функция $u_2 - u_2^{inc}$ удовлетворяет условию излучения. Остается удовлетворить только граничным условиям (1.6). Подстановка выражений (1.21) и (1.22) в условие (1.6) приводит нас, вообще говоря, к бесконечной системе алгебраических уравнений для коэффициентов $a_m^{(2,3)}$ и $b_m^{(2,3)}$. Однако, используя соотношения (1.8)–(1.20) для функций Матье, можно показать, что при малых $q = q_i = k_i^2 h^2/4$, $k_i h \ll 1$, $i = 2, 3$ система является асимптотически (по $q \to 0$) диагональной и это позволяет выразить главный член асимптотики по q в явном виде. При малых q имеем

$$ce_m(\eta, q_3) = ce_m(\eta, q_2) + O(q_2),$$
$$se_m(\eta, q_3) = se_m(\eta, q_2) + O(q_2).$$

Тогда с точностью $O(q)$ получим выражение для коэффициентов поля, рассеянного на эллипсе

$$a_{2m}^{(2)} = \frac{\varkappa_{23} Ce_{2m}'(\xi_0, q_3) Ce_{2m}(\xi_0, q_2) - Ce_{2m}(\xi_0, q_3) Ce_{2m}'(\xi_0, q_2)}{\varkappa_{23} Ce_{2m}'(\xi_0, q_3) Me_{2m}^{(1)}(\xi_0, q_2) - Ce_{2m}(\xi_0, q_3) Me_{2m}^{(1)'}(\xi_0, q_2)},$$

где $\varkappa_{23} = \sqrt{\dfrac{\mu_2 \varepsilon_3}{\mu_3 \varepsilon_2}}$.

Подставляя сюда разложения (1.10), (1.11), учитывая (1.20), а также разложение в окрестности нуля для цилиндрических функций Бесселя и Неймана, получим при $m = 0$

$$a_0^{(2)} = i(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)k_2^2\frac{S}{\pi}.$$

Аналогичные рассмотрения для коэффициентов $b_{2m+1}^{(2)}$ приводят к выражению при $m = 0$

$$b_1^{(2)} = a_1^{(2)} = -\varepsilon_2\mu_2\frac{\mu_3 - \mu_2}{\mu_3 + \mu_2}k_2^2\frac{S}{\pi}.$$

Поскольку, как известно, площадь эллипса равна (h – фокусное расстояние)

$$S = \pi h^2 \cosh\xi_0 \sinh\xi_0,$$

то видно, что как и для случая круга, характеристики рассеяния при $kh \ll 1$ зависят только от площади рассеивателя (эллипса Ω_3) и не зависят от его формы и ориентации. Напомним, что все рассмотрения проводились в первом приближении по $kh \ll 1$.

Дальнейшие рассмотрения аналогичны тем, которые проводились в работах [1, 2] для случая, когда неоднородность – круг Ω_3.

Окончательно формулы для диаграммы направленности поля, рассеянного неоднородностью (эллипс Ω_3) сохраняются.

§2. Решение задачи рассеяния плоской волны от слоя с эллиптическим включением Ω_3

Пусть на идеально проводящую поверхность $\Gamma_{12} : y = l$, покрытую диэлектрическим слоем толщины $l + l_1$, падает из среды Ω_1 плоская волна $\mathbf{E}^{inc}$ поляризованная перпендикулярно плоскости падения (xy). На границах $\Gamma_{12} : y = l$ и Γ_{23} должны выполнятся условия непрерывности касательных компонент электрического и магнитного поля типа (1.6). На границе $\Gamma_{20} : y = -l_1$ выполнено условие Дирихле (см. рис. 1).

Решение этой задачи известно и его значение понадобится нам лишь на малой эллиптической области Ω_3 в слое. Приведем здесь это решение, которое асимптотически при $kh \ll 1$ не зависит от ξ, η:

$$u_1^0(\xi,\eta) = \frac{2e^{-ik_1 l\sin\varphi_1}e^{ik_2 l\sin\varphi_2}\sin\varphi_1}{\Delta(\varphi_2)}[1 + e^{2ik_2\sin\varphi_2 l_1}]. \qquad (2.1)$$

Здесь углы $\varphi_1 = \pi/2 - \theta$, φ_2 есть углы скольжения падающей и преломленной слоем волн, $\Delta(\varphi_2)$ равен

$$\Delta(\varphi_1) = \sin\varphi_1[1+E_2^2] + \frac{\mu_1 k_2}{\mu_2 k_1}\sqrt{1-k_1^2/k_2^2\cos^2\varphi_1}[1-E_2^2], \tag{2.2}$$

где

$$E_2^2 = e^{2ik_2(l+l_1)\sin\varphi_2},\ \sin\varphi_2 = \sqrt{1-k_1^2/k_2^2\cos^2\varphi_1}. \tag{2.3}$$

Воспользуемся разработанным в работах [2–4] методом интегральных уравнений нахождения поля, рассеянного эллиптической неоднородностью Ω_3, и асимптотикой функции Грина для слоя при $k_1 r \gg 1$ и $k_3 h \ll 1$

$$G_2(r,\varphi;\xi,\eta) = \frac{e^{i(k_1 r - 3\pi/4)}}{\sqrt{2\pi k_1 r}}\times$$

$$\times\frac{e^{-ik_1 l\sin\varphi}e^{ik_2 l\sqrt{1-k_1^2/k_2^2\cos^2\varphi}}\sin\varphi_1\left(1+e^{2ik_2 l_1\sqrt{1-k_1^2/k_2^2\cos^2\varphi}}\right)}{\sin\varphi[1+E^2]+\frac{\mu_1 k_2}{\mu_2 k_1}\sqrt{1-k_1^2/k_2^2\cos^2\varphi}[1-E^2]}. \tag{2.4}$$

В формуле (2.4) E^2 имеет следующее выражение

$$E^2 = e^{2ik_2(l+l_1)\sqrt{1-k_1^2/k_2^2\cos^2\varphi}}, \tag{2.5}$$

а угол φ есть угол наблюдения.

Окончательно, в первом приближении электромагнитная плоская волна поляризованная перпендикулярно плоскости падения, рассеянная от малой эллиптической неоднородности ведет себя также, как и поле, рассеянное от круга малого радиуса:

$$U_E^1(r,\varphi) = \frac{2\mu_1}{\mu_2}\left(\frac{\mu_2\varepsilon_2}{\mu_3\varepsilon_3}-1\right)\pi(k_3 h)^2\times$$

$$\times\cosh\xi_0\sinh\xi_0\frac{e^{i(k_1 r-3\pi/4)}}{\sqrt{2\pi k_1 r}}F(\varphi_1,\varphi), \tag{2.6}$$

где диаграмма направленности $F(\varphi_1,\varphi)$ равна

$$F(\varphi_1,\varphi) = T_{12}(\varphi_1)T_{21}(\varphi) =$$

$$\frac{e^{-ik_1 l\sin\varphi_1}e^{ik_2 l\sqrt{1-k_1^2/k_2^2\cos^2\varphi_1}}\sin\varphi_1\left(1+e^{2ik_2 l_1\sqrt{1-k_1^2/k_2^2\cos^2\varphi_1}}\right)}{\Delta(\varphi_1)}\times$$

$$\times \frac{e^{-ik_1 l \sin\varphi} e^{-ik_2 l\sqrt{1-k_1^2/k_2^2\cos^2\varphi}} \sin\varphi \Big(1 + e^{2ik_2 l_1\sqrt{1-k_1^2/k_2^2\cos^2\varphi}}\Big)}{\Delta(\varphi)}. \quad (2.7)$$

Выводы, следующие из формул (2.6), (2.7), полностью совпадают с выводами работы [2].

Сравнивая рассеяние плоской электромагнитной волны *от эллиптической неоднородности в неограниченном пространстве* с рассеянием *от неоднородности в слое*, видим, что *качественная картина сохранится.*

Неоднородность будет излучать как точечный источник, мощность которого *пропорциональна площади* неоднородности и *скачкам диэлектрической и магнитной проницаемостей* на границах разделов.

Литература

1. В. Б. Филиппов, Н. Я. Кирпичникова, *Дифракция электромагнитных волн на малых неоднородностях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **257** (1999), 304–322.
2. Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов, *Дифракция плоских электромагнитных волн от малой неоднородности, помещенной в слой.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **275** (2001) (настоящий сборник).
3. В. А. Фок, *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.* Советское радио, М. (1970).
4. Ф. Франк и Р. Мизес, *Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики.* ОНТИ ГРОТЛ, Л.- М. (1937).
5. Н. В. Мак-Лахлан, *Теория и приложения функций Матье.* ИЛ., М. (1953).

Philippov V. B., Kirpichnikova N. Ya., Kirpichnikova A. S. Diffraction of electromagnetic wave on a small inhomogeneity elliptic form in a layer.

The problem of the diffraction of the electromagnetic plane wave, scattered on a small inhomogeneity in a layer, is investigated. The inhomogeneity is supposed to be a elliptic cylinder, focal distance of which is small in comparision with the length of the falling wave. It is proved that the small inhomogeneity radiates as a point source, the power of wich is proportional to the cross-section area and the jumps of the dielectric and magnetic constants on the interfaces.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 25 декабря 2000 г.