Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 275, 2001 г.

**П. В. Крауклис, Л. А. Крауклис**

# МЕДЛЕННАЯ ВОЛНА В АНИЗОТРОПНОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ, МОДЕЛИРУЮЩЕМ КОЛЛЕКТОР

**Посвящается юбилею**
**Василия Михайловича Бабича**

Важной задачей промысловой геофизики является выделение в глубинном разрезе коллекторов газа и нефти с помощью сейсмических исследований. До настоящего времени не существует единой физической модели углеводородного коллектора, заполненного полностью или частично смесью воды, газа и нефти. Наиболее простыми моделями коллекторов, рассмотренными ранее, были: жидкий слой в упругой среде [1–3], трещиноватый слой, состоящий из чередующихся твердых и жидких слоев и находящийся в упругой среде [4], пороакустический слой Био [5]. Общей особенностью волнового поля, наблюдающейся в этих моделях и не имеющей аналога в твердых слоях, является существование медленной низкочастотной волны, распространяющейся в слое. При конечной длине слоя эта волна интерферирует, многократно отражаясь от концов трещины, и создает во внешнем пространстве дифрагированное низкочастотное поле, которое и может служить индикатором существования нефте-водо-газового коллектора в геологическом разрезе. Здесь мы показываем, что и в анизотропном жидком слое, состоящем из двух тонких чередующихся слоев: вода-нефть, вода-газ, нефть-газ, тоже существует медленная волна и определяем ряд ее характеристик. Распространение волн в безграничной анизотропной жидкой среде такого типа рассматривалось в работах [6, 7].

Рассмотрим периодическую, состоящую из двух чередующихся жидких слоев, среду. Мощности слоев, составляющих пространственный период $\widetilde{h}$ обозначим через $h_1$ и $h_2$, плотности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований 99-05-65537

слоев через $\widetilde{\rho}_1$ и $\widetilde{\rho}_2$, модули сжатия соответственно через $\widetilde{\lambda}_1$ и $\widetilde{\lambda}_2$. Введем также следующие обозначения $\varepsilon_1 = h_1/\widetilde{h}$; $\varepsilon_2 = h_2/\widetilde{h}$; $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1$.

В длинноволновом приближении такая среда становится эффективной средой, уравнения движения которой в декартовой системе координат $(x, z)$, с осью $oZ$ перпендикулярной к границам слоев, записываются в терминах напряжений $t_{xx}$, $t_{zz}$ и смещений $u_x$, $u_z$ в следующем виде,

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} &= \rho_2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} &= \rho_1 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\rho_1 = \varepsilon_1 \widetilde{\rho}_1 + \varepsilon_2 \widetilde{\rho}_2, \quad \rho_2 = \frac{\widetilde{\rho}_1 \widetilde{\rho}_2}{\varepsilon_1 \widetilde{\rho}_2 + \varepsilon_2 \widetilde{\rho}_1} \ . \tag{2}$$

Напряжения и смещения в эффективной среде связаны законом Гука

$$t_{xx} = t_{zz} = \lambda \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \tag{3}$$

в котором $\lambda = \frac{\widetilde{\lambda}_1 \widetilde{\lambda}_2}{\varepsilon_1 \widetilde{\lambda}_2 + \varepsilon_2 \widetilde{\lambda}_1}$. Подстановка (3) в (1) приводит к уравнениям движения в терминах смещений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} &= \frac{1}{v_\parallel^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} &= \frac{1}{v_\perp^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \end{aligned} \tag{4}$$

в которых $v_\parallel^2 = \lambda/\rho_2$ и $v_\perp^2 = \lambda/\rho_1$ являются скоростями распространения вдоль слоев и поперек их соответственно.

Пусть теперь слой анизотропной жидкости $(-h \leqslant z \leqslant h)$ находится в упругой среде со скоростями распространения продольной и поперечной волн $a_1$ и $b_1$ и плотностью $\rho$. Продольный $\varphi$ и поперечный $\psi$ потенциалы смещений в упругой среде удовлетворяют волновым уравнениям

$$\begin{aligned} \Delta \varphi - \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0, \\ \Delta \psi - \frac{1}{b_1^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Смещения $u_{x1}$, $u_{z1}$ и напряжения $t_{zz1}$, $t_{xz1}$ выражаются через потенциалы $\varphi$ и $\psi$ равенствами

$$u_{x1} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad u_{z1} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial x},$$
$$t_{zz1} = \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - 2\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - 2\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}, \tag{6}$$
$$t_{xz1} = \mu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right),$$

где $\mu$ – модуль сдвига в упругой среде, связанный с плотностью $\rho$ и скоростью $b_1$ равенством $\mu = \rho b_1^2$. На границах слоя $(z = \pm h)$ со средой выполняются граничные условия непрерывности нормальных смещений и напряжений и равенство нулю тангенциального напряжения в упругой среде

$$u_z = u_{z1}, \quad t_{zz1} = t_{zz}, . \quad t_{xz1} = 0. \tag{7}$$

Решение задачи (4)–(7) для симметричных колебаний, к которым и относится медленная волна, в симметричной относительно плоскости $z = 0$ модели среды, можно искать в виде:
в слое –

$$u_z = A\cos kx \operatorname{sh} kz\alpha e^{k\eta t}, \quad t_{zz} = A\frac{\eta^2\rho_1}{\alpha}\cos kx \operatorname{ch} kz\alpha e^{k\eta t}, \tag{8}$$

где $\alpha = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_1}{\lambda}\eta^2\right)^{1/2}$,
и в окружающей среде –

$$\varphi = X_1 \cos kx e^{kt\eta - k(z\mp h)\alpha_1}, \quad \psi = -Y_1 \sin kx e^{kt\eta - k(z\mp h)\beta_1}, \tag{9}$$

где $\alpha_1 = \left(1 + \frac{\eta^2}{a_1^2}\right)^{1/2}$, $\beta_1 = \left(1 + \frac{\eta^2}{b_1^2}\right)^{1/2}$, $\eta = iv$, $v$ – фазовая скорость.

Подстановка (8)–(9) в граничные условия (7) приводит к системе трех линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов $A, X_1, Y_1$. Условием существования ненулевого решения системы является равенство нулю определителя системы

$$\left[\left(2 + \frac{\eta^2}{b_1^2}\right)^2 - 4\alpha_1\beta_1\right] \operatorname{sh} \operatorname{kh}\alpha + \frac{\eta^4}{b_1^4}\,\frac{\alpha_1\rho_1}{\alpha\rho} \operatorname{ch} \operatorname{kh}\alpha = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) является дисперсионным уравнением задачи, определяющим связь фазовой скорости нормальных волн с безразмерным волновым числом kh. Из него следует существование фундаментальной моды колебаний, начинающейся с нулевой частоты. Для малых kh фазовая скорость $v_{\mathrm{ph}}$ явно выражается через kh:

$$v_{\mathrm{ph}} = \sqrt{2\mathrm{kh}}\left((1-\gamma^2)\frac{\rho}{\rho_1}\frac{v_\parallel}{v_\perp}\right)^{1/2} b_1, \quad \gamma = \frac{b_1}{a_1}. \tag{11}$$

Из уравнения (11) следует, что скорость этой волны, которую назовем медленной волной, пропорциональна корню квадратному из волнового числа и при малых частотах равна

$$v_{\mathrm{ph}} = \left(4\pi h f(1-\gamma^2)\frac{\rho v_\parallel}{\rho_1 v_\perp}\right)^{1/3} b_1^{2/3}. \tag{12}$$

В этом же приближении групповая скорость $v_g$ выражается через $v_{\mathrm{ph}}$ простым соотношением $v_g = 3/2 v_{\mathrm{ph}}$.

С ростом частоты $v_{\mathrm{ph}}$ растет и при частоте $f \to \infty$ стремится к скорости волны Стоунли, распространяющейся вдоль границы твердое тело – анизотропная жидкость.

Для численных расчетов $v_{\mathrm{ph}}$ в слое анизотропной жидкости, состоящей из двух периодически повторяющихся жидкостей, были выбраны: нефть ($v = 1450$м/с, $\rho = 0.8$г/см$^3$), вода ($v = 1500$м/с, $\rho = 1$г/см$^3$), газ ($v = 630$м/с, $\rho = 0.14$г/см$^3$).

Упругие параметры вмещающей среды были взяты следующими $\alpha_1 = 5000$м/с, $b_1 = 3000$м/с, $\rho = 2.5$г/см$^3$. На рис. 1а, 2а, 3а приводятся кривые фазовой и групповой скоростей как функции безразмерного волнового числа kh.

Амплитуда медленной волны экспоненциально убывает с удалением точки наблюдения от слоя. Поэтому задача картирования глубинных коллекторов с помощью наземных наблюдений в случае бесконечно протяженных слоев является очень сложной. Однако в реальных условиях длина слоев-коллекторов конечна и при возбуждении низкочастотной медленной волны последняя дифрагирует на торцах слоев и создает низкочастотное поле даже в случае тонких коллекторов. Например, для слоя длиной 40м и толщиной 0.5м резонансная частота излучения приблизительно равна 3гц. Этот факт может быть одной из конкурирующих гипотез известного в литературе явления низкочастотного отклика углеводородной залежи на вибрационное воздействие.

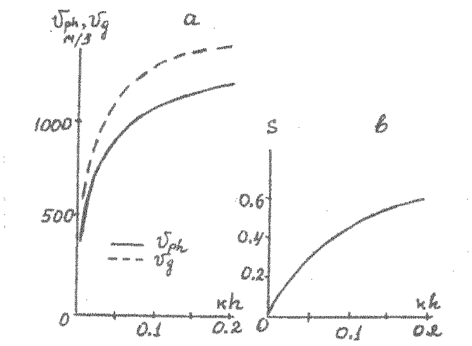

Рис. 1. Фазовая и групповая скорости (a) и затухание (b) медленной волны, распространяющейся в слое вода–нефть, расположенном в упругой среде.

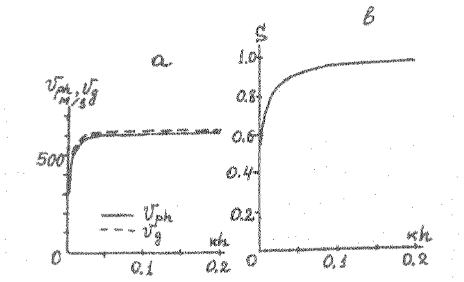

Рис. 2. Фазовая и групповая скорости (a) и затухание (b) медленной волны, распространяющейся в слое газ–нефть, расположенном в упругой среде.

Известно, что заполнитель в коллекторе (газ, нефть) характеризуется большим поглощением акустических волн, распространяющихся в нем. Однако, даже при большом поглощении в материале заполнителя, затухание медленной волны может стать умеренным, если длина волны много больше мощности слоя. Связь между поглощающими характеристиками материалов, составляющих модель, и затуханием нормальной волны, распространяющейся в среде, определяется известной формулой, связывающей декремент поглощения $Q$ волны с декрементами $Q_i$ объемных

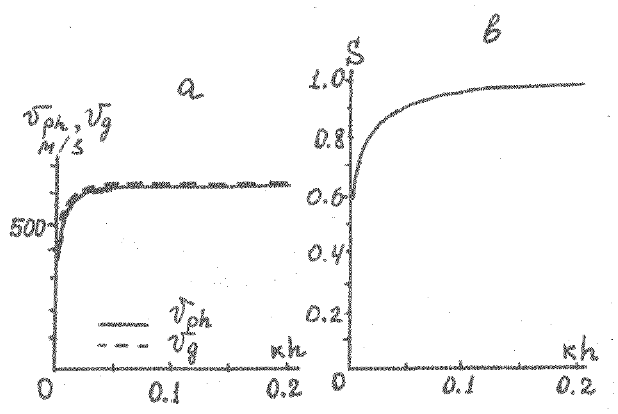


Рис. 3. Фазовая и групповая скорости (a) и затухание (b) медленной волны, распространяющейся в слое газ–вода, расположенном в упругой среде.

волн в материале слоев, образующих модель [8]

$$Q^{-1} = \sum_i \frac{a_i}{c} \frac{\partial c}{\partial a_i} Q_i^{-1}. \tag{13}$$

В (13) $a_i$ представляет скорость продольных или поперечных волн в $i$-ом слое, $c$ есть фазовая скорость рассматриваемой нормальной волны, суммирование производится по всем слоям. При выводе этой формулы предполагается, что выполняются неравенства $Q_i^{-1} \ll 1$. Коэффициенты, стоящие перед $Q_i^{-1}$ в правой части (13) называются коэффициентами разделения $S_i$. Для рассматриваемой простой модели коллектора можно учитывать поглощение только в жидкости и считать скорость в ней комплексной величиной

$$\overline{v} = v(1 + i\delta) = v\left(1 - \frac{i}{2Q}\right), \quad (Q^{-1} \ll 1). \tag{14}$$

В этом случае дисперсионное уравнение (10) становится комплексным и фазовая скорость $\overline{v}_{\mathrm{ph}}$ медленной волны тоже будет комплексной $\overline{v}_{\mathrm{ph}} = v_{\mathrm{ph}}(1 + i\gamma)$. Связь $\delta$ и $\gamma$ находится из решения уравнения (10) разложением левой части (10) в ряд по малым $\delta$ и $\gamma$. Приравнивая члены нулевого порядка малости, получаем дисперсионное уравнение для среды без поглощения. В следующем приближении находится коэффициент разделения $S$, связывающий $\gamma$ и $\delta$: $\gamma = S\delta$. Из приводимых на рис. 1b, 2b, 3b кривых $S$ как функции безразмерного волнового числа kh следует, что при достаточно малых kh затухание волны становится малым.

**Заключение.** В слое анизотропной жидкости, состоящей из чередующих слоев нефть-газ, нефть-вода, вода-газ распространяется медленная низкочастотная волна, затухание которой зависит от отношения мощности слоя к длине волны $h/\lambda$ и при малых значениях этого отношения может быть достаточно малым даже при сильном поглощении объемных волн в материале заполнителя. Последний факт способствует использованию медленной волны при картировании тонких ловушек углеводородов.

## Литература

1. V. Ferrazini, K. Aki, *Slow waves trapped in a fluid-filled infinite crack: implication for volcanic tremors.* J. Geophys. Res., **92**, No. B9 (1987), 9215–9223.
2. П. В. Крауклис, *О некоторых низкочастотных колебаниях жидкого слоя в упругой среде.* ПММ, **26**, No. 6 (1962), 1111–1115.
3. П. В. Крауклис, Г. М. Голошубин, Л. А. Крауклис, *Низкоскоростная волна в слое жидкости, моделирующем нефтяной пласт.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **203**, (1992), 101–112.
4. П. В. Крауклис, Л. А. Крауклис, *О затухании медленной интерференционной волны в трещиноватом слое.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **250** (1998), 153–160.
5. П. В. Крауклис, Л. А. Крауклис, *Интерференционная медленная волна в пороакустическом слое Био.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **257** (1999), 137–148.
6. M. Schoenberg, P. N. Sen, *Properties of a periodically stratified acoustic half-space and its relation to a Biot fluid.* J. Acoust. Soc. Am., **73(1)** (1983), 61–67.
7. Л. А. Молотков, *О новом способе вывода уравнений осредненной эффективной модели периодических фаз.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **195** (1991), 82–102.
8. B. L. Anderson, C. B. Archambeau, *The anelasticity of the Earth.* J. Geophys. Res., **69** (1964), 2071–2084.

Krauklis P. V., Krauklis L. A. Slow wave in the anisotropic liquid layer modeling a collector.

Velocity and attenuation of slow wave propagating in the anisotropic liquid layer sandwiched between two elastic half-spaces are discribed. The liquid layer consist of the alternating liquid layers: water-oil, water-gas, oil-gas. The problem is solved in the low frequencies approximation, when

wavelength is more large than the thicknesse of alternating layers and the layer becames as anisotropic liquid.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 23 ноября 2000 г.