От автора

1. Предлагаемая монография – тематическое учебное пособие повышенного типа – первое из серии планируемых автором тематических пособий по теории распространения сейсмических волновых полей и ее приложений к практике. Она посвящена всестороннему обсуждению математических основ динамической теории упругости в той ее части, которая связана с распространением волновых полей сигнального типа. В основу ее легли две книги автора, посвященные распространению волн в слоистых средах [1, 2], ставшие за двадцать лет своего существования библиографической редкостью, а также – выдержки из разделов курса высшей математики акад. В. И. Смирнова, посвященных: основам вариационного исчисления, теории поля экстремалей и теории дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка. Достаточно близкое знакомство с такими разделами математики крайне полезно специалистам по теории распространения волн сигнального типа, которые, как раз составляют сущность волновых полей, рассматриваемых в монографии.

2. Все определения, общие понятия и соотношения формализма теории даются в монографии сразу для общего случая анизотропии среды. Физические же следствия теории обсуждаются при возможном сопоставлении явлений в анизотропных и изотропных упругих средах. В разделах, относящихся к теории анизотропных сред, повсюду применяется алгоритмический подход к получению количественных соотношений теории. Это, до некоторой степени, позволяет снять с теории (обычный) присущий ей, налет громоздкости и необозримости, особенно, если предполагать возможность применения при ее изучении персональных компьютеров, хотя бы лишь в самых небольших количествах (для более глубокого уяснения смысла и значения для практики некоторых из основных ее алгоритмов).

Количественные алгоритмы теории оказываются во многом однотипными и простыми: или относящимися к алгебраическому типу, связанному с уравнениями Кристоффеля, или же – сводящимися к несложным системам обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка для лучей волн. Их нетрудно было бы

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант No. 98-01-00316.

воплотить в программы для персональных компьютеров уже в этой книге и тем самым способствовать приданию количественным соотношениям теории наглядно-осязаемый характер. Это не сделано здесь в основном потому, что в общеобразовательном отношении представляется более правильным такую работу предоставлять самому читателю, который должен быть заинтересован в глубоком ("образном") усвоении изучаемого материала, и который уже несомненно находится с компьютером в самых тесно-дружественных отношениях.

Итак, предлагаемая монография – учебное пособие. Однако – пособие такого типа, к которому уместно обращатьмя не только "обучающимся", но и лицам, "бредущим" по непротоптанным еще тропам теории волн.

Что же касается ее содержания, то оно, по-видимому, достаточно хорошо просвечивается через разделы оглавления.

3. И вот в оглавлении обращает на себя внимание короткая глава 6, осуществляющая подразделение монографии на две части по "территориальному признаку", т.е. – по расположению их в двух соседних томах 273 и 274 "Записок". Такое подразделение – следствие очевидного факта, что при избранной технологии монтажа томов Записок всякий том, содержащий более 300 стр., не сохраняет стабильности. (Он сразу же растреплется!) Поэтому пришлось пойти на произведенное подразделение монографии, не нарушающее смыслового содержания ее частей I и II, и потому не приносящего вреда.

Что же касается самой главы 6, стоящей несколько особняком, то она написана в убеждении, что научная общественность Запада еще не достаточно хорошо знакома с научной жизнью и с ее результатами в России и тем более – в СССР, находившимся многие годы за железным (послевоенным) занавесом. В частности, и исследования по теории упругих (сейсмических) волн, равно как и по приложению этой теории к практике сейсморазведки, проводившиеся в СССР в первые два-тра десятилетия сразу после войны, вероятно, на Западе плохо известны. А ведь тогда у нас получались весьма интересные (во многом пионерские) результаты, которые приходилось освещать литературно в малотиражных специальных (заказных) изданиях, не доходивших в полной мере до заинтересованного читателя даже в СССР. Помимо этого применяемые нами тогда формы научной деятельности – коллективные и массовые, – базирующиеся лишь на научном энтузиазме молодых преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов математического, физического и геолого-почвенного факультетов Ленинградского (ныне Петербургского) Университета (ЛГУ), должны были бы представлять известный интерес на Западе. Однако все это прошло мимо него и осталось незамеченным.

И вот теперь, когда Россия начинает входить в семью государств Запада, нам показалось уместным обратить внимание специалистов на наши результаты в области теории волн, полученные, правда, давно, но быть может и не потерявшие еще научного интереса. Для этого помимо кратких пояснений существа проводимых тогда исследований, следовало дать и ссылки на научные публикации того времени, издания которых сохранились, например, в библиотеках Санкт-Петербурга.

К изложенному как раз и сводятся соображения, побудившие автора включить в монографию инородную главу 6. Она содержит известную информацию о "Петербургской школе по распространению упругих (сейсмических) волн" и в этом ее фактическое назначение.

Автор

Часть I. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ

ГЛАВА 1

Математический формализм и постановка задач в теории линейной упругости.

Напоминаются основные понятия математического аппарата механики сплошных сред; выводятся уравнения движения и выписываются в линейном приближении различные дифференциальные и интегральные соотношения, полезные для изучения общих вопросов динамики упругих сред и ее приложений. Для облегчения ссылок на основания теории в §2 приводится сводка всех необходимых формул и обозначений. Изложение ведется в рамках классических представлений о сейсмической среде, имеющей блоковое строение с границами раздела в виде математических поверхностей достаточно высокой гладкости.

§1. Основные положения математической теории упругости

1. Предполагая известным в общих чертах понятие “механическая сплошная среда и ее (термодинамическое) состояние”, будем рассматривать такие сплошные среды, состояние которых определяется лишь вектором смещения материальных точек от положения их равновесия. Состояние среды до приложения к ней внешних воздействий будем называть невозмущенным. Положение материальных точек в невозмущенном состоянии будем определять координатами (x, y, z) или радиусом-вектором $\vec{r} = x\vec{i} + yj + z\vec{\kappa}$ относительно произвольной фиксированной правовинтовой декартовой системы координат L с ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{\kappa}$. Для удобства будем применять обозначения $x \equiv x_1$, $y \equiv x_2$, $z \equiv x_3$, $\vec{i} \equiv \vec{i}_1$, $\vec{j} \equiv \vec{i}_2$, $\vec{\kappa} \equiv \vec{i}_3$. Возмущения в среде будем описывать вектором смещений

$$\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + \omega\vec{\kappa} \equiv \sum_{k=1}^{3} u_k \vec{i}_k, \tag{1.1}$$

определяющим отклонение материальной точки среды от ее положения (x, y, z) в невозмущенном состоянии. Функции $\vec{u}$, $u \equiv u_x \equiv u_1$, $v \equiv u_y \equiv u_2$ и $\omega \equiv u_z \equiv u_3$ зависят, вообще говоря, от координат x, y, z и времени t. Все необходимые для описания сплошной среды понятия и уравнения будем давать применительно к классу правовинтовых декартовых координатных систем, в которых вводимые понятия имеют наглядный физический смысл. При этом все рассматриваемые соотношения будут иметь тензорный характер. Последнее обстоятельство дает очевидную возможность перехода к описанию рассматриваемых процессов в произвольных криволинейных координатах x_1', x_2', x_3' во всех случаях, когда это может понадобиться.

2. Если в фиксированный момент времени $t = \text{const}$ оказывается $\vec{u} \neq \vec{u}_0 + [\,\vec{r} \times \vec{\omega}\,]$, где $\vec{u}_0$ и $\vec{\omega}_0$ постоянны, то говорят, что в среде произошли деформации. Для количественного описания деформаций рассматривают произвольную материальную точку M среды и (бесконечно) близкую к ней (материальную) точку M', положение которых в невозмущенном состоянии определяется координатами (x_1, x_2, x_3) и $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$.

Взаимное расположение точек M и M' до и после деформации характеризуется соответственно векторами

$$d\vec{r} = dx_1\vec{i}_1 + dx_2\vec{i}_2 + dx_3\vec{i}_3, \quad d\vec{r}\,' = d\vec{r} + d\vec{u},$$

где

$$d\vec{u} = \vec{u}(x_1 + dx_1, \dots, t) - \vec{u}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k} dx_k + O\big((dr)^2\big).$$

В случае весьма малых $d\vec{r}$ вторым слагаемым правой части можно пренебрегать, что дает

$$d\vec{u} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k} dx_k, \tag{1.2}$$

причем производные здесь вычисляются в точке $M(x_1, x_2, x_3)$.

Квадраты расстояний между точками M и M' до и после деформации соответственно равны

$$\left.\begin{aligned} ds_0^2 = dr^2 = \sum_{i=1}^{3} dx_i^2, \\ ds^2 = \sum_{i=1}^{3} \left[dx_i + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \right]^2 = ds_0^2 + 2 \sum_{i,k=1}^{3} E_{ik} dx_i dx_k, \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

где

$$E_{ik} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \sum_{r=1}^{3} \frac{\partial u_r}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial x_k} \right] \tag{1.4}$$

при $i,\ k = 1, 2, 3$.

Так как ds^2 и ds_0^2 – инварианты в рассматриваемом классе преобразований координат, то

$$\sum_{i,k=1}^{3} E_{ik} dx_i dx_k = \text{инв.}$$

Отсюда, а также из симметрии $E_{ik} = E_{ki}$ из (1.4) следует, что (1.4) представляет собой тензор 2-го ранга.[1] В общем случае

[1] Напомним определение понятия "тензор". Пусть x'_α и x_k (при $\alpha,\ k = 1, 2, 3$) – координаты одной и той же физической точки M относительно про-

тензор деформации есть квадратичная функция от производных u_i. Однако, если выполняются условия

$$\left|\varepsilon_{ik}\right| \gg \frac{1}{2}\left|\sum_{r=1}^{3} \frac{\partial u_r}{\partial x_i}\ \frac{\partial u_r}{\partial x_k}\right|, \tag{1.5}$$

в которых положено

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right), \tag{1.6}$$

то

$$E_{ik} \approx \varepsilon_{ik}, \tag{1.7}$$

где ε_{ik} линейно относительно упомянутых производных. При этом (1.3) переписывается в виде

$$ds^2 = ds_0^2 + 2\sum_{i,k=1}^{3} \varepsilon_{ik} dx_i dx_k. \tag{1.8}$$

Относительно класса афинных ортогональных преобразований координат таблица величин ε_{ik} из (1.6) определяет симметричный тензор 2-го ранга, так как производные по координатам x_k от компонент u_i вектора образуют, как известно, тензор.

извольно выбранных координатных систем L' и L рассматриваемого класса, причем предполагается, что имеют место однозначные и дифференцируемые в окрестности M формулы преобразования координат $x'_\alpha = x'_\alpha(x_k)$ и $x_k = x_k(x'_\alpha)$. Тогда совокупности величин A'_α, B'^α, $(A'_{\alpha\beta}$, A'^{β}_{α}, $A'^{\alpha\beta})$ и A_k, B^k, (A_{ki}, A^i_k, A^{ki}) при α, $\beta = 1,2,3$ и k, $i = 1,2,3$, заданных в точке M соответственно по отношению к системам L и L' определяют в точке M ковариантный, контравариантный вектор (тензор второго ранга), если имеют место формулы преобразования

$$A'_\alpha = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_k}{\partial x'_\alpha} A_k \qquad B'^\alpha = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_k} B^k$$
$$A'_{\alpha\beta} = \sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial x_k}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial x'_\beta} A_{ki}, \ldots, \quad A'^{\alpha\beta} = \sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_k}\ \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_i} A^{ki},$$

в которых производные вычисляются в точке M.

Следует помнить, что понятие "тензор" определено по отношению к некоторому классу преобразований координат, образующих группу в том смысле, что последовательное преобразование координат $L \to L'$ и $L' \to L''$ дает преобразование $L \to L''$ для любых L, L', L'' класса. В случае ортогональных преобразований координат ко- и контравариантые векторы (тензоры) не отличаются друг от друга.

В нелинейной теории сплошной среды в качестве тензора деформации берут выражение (1.4). В линейной же теории предполагаются выполняющимися неравенства (1.5), вследствие чего под тензором деформации понимается (1.6). Заметим, что в случае сплошной среды невырожденного типа (когда в ней не существует направлений, вдоль которых “размеры среды” пренебрежимо малы по сравнению с размерами среды по другим направлениям) условия (1.5) эквивалентны неравенствам

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right| \ll 1. \qquad (1.9)$$

Такие неравенства дают основания говорить о малости деформаций (1.6), а также о малости относительных смещений $d\vec{u}$ материальных точек линейной деформируемой среды.

3. Для выяснения геометрического смысла компонент введенных тензоров рассмотрим материальные точки среды, заполнявшие до деформации прямоугольный параллелепипед, построенный на векторах $d\vec{r}_1 = \vec{i}_1 dx_1$, $d\vec{r}_2 = \vec{i}_2 dx_2$, $d\vec{r}_3 = \vec{i}_3 dx_3$, с началом в точке M. После деформации эти материальные точки будут заполнять (косоугольный) параллелепипед, определяемый векторами $d\vec{r}_i' = d\vec{r}_i + d\vec{u}$, т.е.

$$dr_i' = \sum_{k=1}^{3}\left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\vec{i}_k dx_i, \qquad (1.10)$$

где $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$, $\delta_{ik} = 0$ при $\subset\neq k$ – значок (символ) Кронекера. Длины таких векторов, очевидно, равны

$$|dr_i'| = \sqrt{1 + 2E_{ii}}\; dx_i, \qquad (1.11)$$

где E_{ik} имеет значение из (1.4). Углы же $\alpha_{ik} = \pi/2 - \varphi_{ik}$ между векторами (1.10) определяются формулами (при $i \neq k$)

$$\cos\alpha_{ik} = \sin\varphi_{ik} = \frac{d\vec{r}_i'; d\vec{r}_k'}{|d\vec{r}_i'|\,|d\vec{r}_k'|} = \frac{2E_{ik} dx_i\, dx_k}{|d\vec{r}_i'|\,|d\vec{r}_k'|}. \qquad (1.12)$$

В случае малых деформаций, когда выполняются равенства (1.5) или (1.9), имеет место (1.7) и $|\varepsilon_{ik}| \ll 1$, вследствие чего (1.11) и (1.12) переписываются в виде

$$|d\vec{r}_i'| \approx (1 + \varepsilon_{ii}) dx_i,$$

$$\sin\varphi_{ik} = \frac{2\varepsilon_{ik}dx_i\,dx_k}{|d\vec{r}_i'|\,|d\vec{r}_k'|} \approx 2\varepsilon_{ik}.$$

Таким образом, при условиях (1.5) или (1.9) величины ε_{ii} характеризуют относительное удлинение векторов $d\vec{r}_k = \vec{i}_k dx_k$ при деформации, а $2\varepsilon_{ik}$ (при $i \neq k$) определяют углы поворота этих векторов.

Если ввести в рассмотрение антисимметичный тензор

$$\omega_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right), \tag{1.13}$$

то формулу (1.2) можно переписать в виде

$$du_i = \sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ik}dx_k + \sum_{k=1}^{3}\omega_{ik}dx_k. \tag{1.2$'$}$$

В случае $\varepsilon_{ik} = 0$ в точке M (что для линейной среды выражает условие отсутствия деформаций в точке M) для относительного смещения материальных точек M и M' будем иметь

$$du_i = \sum_{k=1}^{3}\omega_{ik}dx_k \quad \text{и} \quad d\vec{u} = \frac{-1}{2}\left[\,d\vec{r}\times\operatorname{rot}\vec{u}\,\right].$$

Это означает, что элементы среды, прилегающие к точке M, кроме, возможно, параллельного смещения (т.е. переноса, при котором, конечно, $d\vec{u} = 0$), испытывают поворот как целое. Тензор (1.13) поворотов не играет заметной роли в линейной теории сплошной среды. Что же касается тензора деформаций ε_{ik} из (1.6), то он оказывается одним из основных ее элементов.

Полезно отметить, что если в области V сплошной среды поле смещений $\vec{u}$ непрерывно вместе со всеми первыми частными производными и имеет вторые производные, то из условия $\varepsilon_{ik} \equiv 0$ в области V элементарно следует формула

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \left[\,\vec{r}\times\vec{\omega}\,\right],$$

в которой $\vec{u}_0$ и $\vec{\omega}$ постоянны. Таким образом, указанное условие является необходимым и достаточным для того, чтобы среда, заполняющая область V, испытывала лишь поступательное и вращательное движение как целое.

Мы определили понятие деформации сплошной среды через посредство тензоров (1.4) или (1.6) относительно класса афинных ортогональных преобразований координат, и во всех таких координатах компоненты тензоров имеют указанный геометрический смысл. В любых других (не декартовых) координатных системах тензоры деформации можно определить на основе формул преобразования тензоров той или иной размерности. Однако при этом компоненты тензоров в таких системах уже не будут иметь указанного геометрического смысла. Тензорная (точнее, ковариантная) запись уравнений и любых соотношений теории сплошной среды обладает многими преимуществами (однако далеко не столь серьезными как, например, в электродинамике). Одно из ее преимуществ состоит в простоте перехода от описания процессов в одной координатной системе к другой, а также в простоте получения различных инвариантов относительно преобразований координат. Так, например, из тензорных свойств таблицы величин ε_{ik} (1.6) следует инвариантность выражений

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}, \quad \sum_{i,k=1}^{3} \varepsilon_{ik}\varepsilon_{ik} \tag{1.14}$$

и т.д. относительно афинных ортогональных преобразований координат.

Наконец, следует отметить, что в линейной динамической теории упругости сложилась традиция называть тензором деформации не величины ε_{ik} из (1.6), а величины ε_{ik} из равенств

$$e_{ii} = \varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad e_{ik} = 2\varepsilon_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \quad (i \neq k). \tag{1.15}$$

Конечно, таблица e_{ik} не определяет тензор 2-го ранга. Однако от названия величины e_{ik} тензором особых неприятностей не происходит. Следует только помнить, что настоящим тензором является ε_{ik}, связанный с e_{ik} (в декартовой системе координат) соотношениями (1.15). Инварианты (1.14) тензора ε_{ik} выражаются через e_{ik} следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} I_1 \equiv e_{11} + e_{22} + e_{33} = \text{инв}, \\ I_2 \equiv e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2 + \frac{1}{2}\left(e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2\right) = \text{инв}. \end{aligned}\right\} \tag{1.14$'$}$$

4. При установлении понятий "вектор смещений" и "тензор деформаций" мы фиксировали некоторую декартову систему координат L и рассматривали (произвольно выбираемую) материальную точку M, которая до деформации занимала положение (x, y, z) относительно L. В результате были определены функции $\vec{u}(x, y, z, t)$, $E_{ik}(x, y, z, t)$, $\varepsilon_{ik}(x, y, z, t)$ и т.д., зависящие в динамике также и от времени t. Переменные x, y, z в таких функциях являются как бы номером рассматриваемой точки среды и не определяют ее положения в деформированном состоянии. Такие переменные называются субстанциональными, а описание среды в координатах x, y, z называется лагранжевым.

Однако в некоторых ситуациях удобнее применять другой способ описания движения сплошной среды, восходящий к Эйлеру. В нем рассматриваются произвольно выбираемые фиксированные точки $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$ системы координат L (той же самой, что и ранее) и изучаются такие материальные точки среды, которые в рассматриваемый момент времени t имеют координаты ξ, η, ζ. При этом в эйлеровом описании понятие "вектор смещений" не играет обычно существенной роли, так как движение среды характеризуют вектором $\vec{v}(\xi, \eta, \zeta, t)$, определяющим скорость перемещения той материальной точки, которая в момент времени t имеет координаты ξ, η и ζ. (Заметим, что по вектору $\vec{v}$ можно определить тензор, аналогичный (1.4), называемый тензором скоростей деформации.) Не задерживаясь на последовательном описании процесса движения сплошной среды с точки зрения эйлеровых или лагранжевых координат, установим лишь связь между такими описаниями в случаях, когда она существует.

Если для лагранжевых координат сохранить обозначения $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, а эйлеровы координаты описания среды обозначить посредством $\xi = \xi_1$, $\eta = \xi_2$, $\zeta = \xi_3$, то из понятия "вектор смещений $\vec{u}$" вытекают равенства

$$\xi_i = x_i + u_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad (i = 1, 2, 3). \tag{1.16}$$

Чтобы формулы (1.16) устанавливали одно-однозначное соответствие между x_i и ξ_k при $t = \mathrm{const}$ необходимо и достаточно чтобы

$$0 < \left| \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \right| \equiv \left| \delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right| < \infty. \tag{1.17}$$

Если (1.17) выполняется, то, разрешая (1.16) относительно x_i и представляя результат в виде

$$x_i = \xi_i - U_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \quad (i = 1, 2, 3), \tag{1.16'}$$

получаем эйлерово представление для компонент U_i вектора смещений. Заметим, что формула (1.16′) определяет координаты x_i невозмущенного состояния именно той материальной точки, которая в момент времени t имеет относительно рассматриваемой L координаты, равные ξ_i.

Нам понадобится выражение для скорости $\vec{v}$ и ускорения $\vec{w}$ материальной точки в лагранжевых и эйлеровых координатах.[2] Чтобы их получить, фиксируем материальную точку значениями x_i ее лагранжевых координат и воспользуемся формулами (1.16) и (1.16′).

Дифференцирование по t равенств (1.16) дает

$$v_i \equiv \frac{\partial \xi_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad w_i \equiv \frac{\partial^2 \xi_i}{dt^2} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \tag{1.18}$$

что, очевидно, соответствует представлению проекций векторов $\vec{u}$ и $\vec{w}$ на оси системы L при лагранжевом описании.

Если же продифференцировать по y (1.16′), то сначала получится

$$v_i \equiv \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial U_i}{\partial \xi_k}\ \frac{\partial \xi_k}{dt},$$

или

$$\sum_{k=1}^{3} \left(\delta_{ik} - \frac{\partial U_i}{\partial \xi_k}\right) v_k = \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{1.19}$$

Такие соотношения можно рассматривать как линейные алгебраические уравнения относительно v_k. Определитель системы, имеющий значение, обратное определителю (1.17), отличен от нуля, вследствие чего из (1.19) определяются выражения для компонент скорости $\vec{v}$ в эйлеровом описании

$$v_i = v_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \tag{1.20}$$

[2] При лагранжевом описании, например, $v_i = v_i(x_1, x_2, x_3)$ определяют (относительно системы L) составляющие скорости движения элемента среды, находящегося в момент времени t в точке с координатами ξ_i из формулы (1.16).

явный вид которых нам не понадобится. После же того как функции (1.20) найдены, для ускорения материальной точки M в эйлеровом описании получается выражение

$$w_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial \xi_k} v_k, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{1.21}$$

Заметим, что применительно к нелинейной теории сплошной среды, в которой не выполняются условия (1.5) или (1.9), изложенные соображения следовало бы несколько углубить и расширить. Однако нас будет интересовать в дальнейшем лишь линейная теория упругости, для которой предыдущее нужно только для того, чтобы произвести более логичным образом вывод основных уравнений движения. Для этих целей приведенных соображений оказывается вполне достаточно. Полезно только подчеркнуть, что если выполняется (1.9), то соотношение (1.17), лежащее в основе сопоставления лагранжева и эйлерова способов описания, естественно выполняется.

5. Перейдем к определению следующего важнейшего понятия механики сплошной среды – понятия о тензоре напряжений. Компоненты этого тензора мы будем рассматривать как функции пространственных координат относительно выбранной фиксированной системы L и времени t. Если обозначать упомянутые пространственные координаты посредством $\xi \equiv \xi_1$, $\eta \equiv \xi_2$, $\eta \equiv \xi_3$, то ξ_i можно будет считать эйлеровыми координатами материальных точек среды, в которой возникают напряжения. Под системой L мы будем подразумевать произвольную правовинтовую декартову координатную систему. Однако, все результаты п. 5 окажутся справедливыми и в случае любых ортогональных координат.

Пусть в фиксированный момент времени t в точке $M_0 = (\xi, \eta, \zeta)$ пространства, заполненного средой, выбрана бесконечно малая площадка $d\sigma$ с нормалью $\vec{n}$. Материал среды, расположенный по положительную сторону площадки (т.е. по ту ее сторону, в которую направлена нормаль $\vec{n}$), действует на материал по другую сторону площадки с силой, плотность которой

$$\vec{t}_n = t_{n1}\vec{i}_1 + t_{n2}\vec{i}_2 + t_{n3}\vec{i}_3$$

называется вектором напряжений в точке M_0 на площадке $d\sigma$ с нормалью $\vec{n}$. Здесь $\vec{i}_1 \equiv \vec{i}$, $\vec{i}_2 \equiv \vec{j}$, $\vec{i}_3 \equiv \vec{\kappa}$ обозначают взаимно ортогональные координатные орты в точке M_0.

Полагая последовательно $\vec{n} = (\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$, получаем три координатных вектора напряжений в точке M_0:

$$\vec{t}_i = \sum_{k=1}^{3} t_{ik}\,\vec{i}_k, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{1.22}$$

Если считать t_{ik} непрерывными функциями от ξ, η, ζ и построить в точке M_0 бесконечно малый тетраэдр с ребрами, параллельными координатным ортам в точке M_0 и с бо́льшей гранью, имеющей нормаль $\vec{n}$, то из условия равновесия тетраэдра следует равенство[3]

$$\vec{t}_n = \vec{t}_1 \cos n\xi_1 + \vec{t}_2 \cos \xi_2 + \vec{t}_3 \cos n\xi_3 \equiv \sum_{k=1}^{3} \vec{t}_k \cos n\xi_k, \tag{1.23}$$

из которого, как известно, вытекает тензорный характер таблицы величин t_{ik} из (1.22) по отношению к любым ортогональным преобразованиям координат.

Нетрудно доказать симметрию таблицы величин t_{ik} из (1.22). Это можно было бы сделать лишь в предположении непрерывности t_{ik} от координат ξ_1, ξ_2 и ξ_3 путем элементарного рассмотрения условий равновесия "по моментам" бесконечно малого параллелепипеда, построенного на ортах $\vec{i}_1$, $\vec{i}_2$ и $\vec{i}_3$ в точке M_0. Однако целесообразнее исходить из более сильных предположений о свойствах гладкости t_{ik} и применять способ, основанный на использовании теоремы Гаусса, к которой часто придется обращаться в последующем.

Чтобы провести такое доказательство, будем предполагать, что t_{ik} непрерывны и имеют интегрируемые частные производные по ξ, η, ζ. Введем (временно) в рассмотрение векторы

$$\vec{t}_i^{\,*} = \sum_{k=1}^{3} t_{ki}\vec{i}_k, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{1.22$'$}$$

[3] Из-за бесконечной малости тетраэдра в условиях равновесия нет нужды учитывать массовые силы, действующие на элементы среды. Они дают эффект более высокого порядка малости. Заметим, что здесь и далее всюду для косинусов угла между нормалью $\vec{n}$ и координатными осями $O\xi_k$, Ox_k и т.п. приняты обозначения $\cos n\xi_k$, $\cos nx_k$ и т.п.

отличающиеся от векторов (1.22) лишь тем, что таблица их компонентов t_{ik} является транспонированной по отношению к таблице из (1.22). Нетрудно видеть, что это позволяет переписать формулу (1.23) в следующем виде:

$$\vec{t}_n = \big(t_{11}\cos n\xi_1 + t_{21}\cos n\xi_2 + t_{31}\cos n\xi_3\big)\vec{i}_1 + \ldots = \sum_{k=1}^{3}\big(\vec{t}_i^{\,*}\,\vec{n}\big)\vec{i}_k. \quad (1.23')$$

Вследствие тензорного характера величин t_{ik} доказательство симметрии t_{ik} достаточно провести в какой-либо одной системе координат L. Фиксируя L, выберем в ней произвольную область V эйлеровых переменных $\xi = \xi_1$, $\eta = \xi_2$, $\zeta = \xi_3$, содержащую точку M и ограниченную гладкой поверхностью S с внешней нормалью $\vec{n}$. На материальную среду, заключенную в V, со стороны внешней среды действуют поверхностыне силы $\vec{t}_n dS$. Кроме того, на внутренние элементы выделенной среды действуют некоторые объемные силы с общей плотностью $\vec{F}$, которую мы будем также предполагать интегрируемой. Под действием всех таких сил среда, заключенная в области V, в каждый момент времени t должна находиться в (динамическом) равновесии. Поэтому, в частности, момент всех сил (приложенных к элементам нашей среды) относительно любой точки $O = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ должен равняться нулю, т.е.

$$\iint\limits_{(S)} [\,\vec{r}\times\vec{t}_n\,]\,dS + \iiint\limits_{(V)} [\,\vec{r}\times\vec{F}\,]\,dV = 0.$$

Обозначая через $M' = (\xi', \eta', \zeta')$ переменную точку интегрирования, рассмотрим проекцию выписанного равенства, например, на направление $\vec{i}_1$, причем учтем (1.23′). Так как

$$\vec{r} = (\xi' - \xi_0)\vec{i}_1 + (\eta' - \eta_0)\vec{i}_2 + (\zeta' - \zeta_0)\vec{i}_3,$$

$$\big[\,\vec{r}\times\vec{F}\,\big]_1 = (\eta' - \eta_0)F_3 - (\zeta' - \zeta_0 F_2,$$

$$\big[\,\vec{r}\times\vec{t}_n\,\big] = (\eta' - \eta_0)(\vec{t}_3^{\,*}\,\vec{n}) - (\zeta' - \zeta_0)(\vec{t}_2^{\,*}\,\vec{n}) =$$

$$= \big[(\eta' - \eta_0)\vec{t}_3^{\,*} - (\eta' - \eta_0)\vec{t}_2^{\,*}\big]_n,$$

$$\operatorname{div}\big[(\eta' - \eta_0)\vec{t}_3^{\,*} - (\zeta' - \zeta_0)\vec{t}_2^{\,*}\big] =$$

$$= t_{23} - t_{32} + (\eta' - \eta_0)\operatorname{div}\vec{t}_3^{\,*} - (\eta' - \eta_0)\operatorname{div}\vec{t}_2^{\,*},$$

то применение теоремы Гаусса дает

$$\iiint\limits_{(V)} \Big\{ t_{23} - t_{32} + (\eta' - \eta_0)\big[\operatorname{div} \vec{t_3}^{\,*} + F_3\big] -$$

$$-(\zeta' - \zeta_0)\big[\operatorname{div} \vec{t_2}^{\,*} + F_2\big]\Big\} dV = 0. \qquad (1.24)$$

Такое равенство должно выполняться, в частности, если в качестве точки $O = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$, относительно которой вычисляется момент всех сил, взята интересующая нас точка $M = (\xi, \eta, \zeta)$. При таком выборе точки O величины $\eta' - \eta_0 = \eta' - \eta$ и $\zeta' - \zeta_0 = \zeta' - \zeta$ имеют значения, сравнимые с линейными размерами объема V. Поэтому, если в дополнение к исходному предполагать, например, ограниченность выражений $\operatorname{div} \vec{t_k}^{\,*} + F_k$, разделить равенство (1.24) на величину объема V и рассмотреть процесс, при котором V стягивается к точке M, то в пределе из (1.24) получается: $t_{23}(\xi, \eta, \zeta, t) = t_{32}(\xi, \eta, \zeta, t)$. Аналогино устанавливаются и остальные соотношения

$$t_{ik} = t_{ki} \qquad (1.25)$$

симметрии таблицы t_{ik} в любой точке $(\xi, \eta, \zeta) \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ рассматриваемой среды.

Из (1.25) вытекают равенства $\vec{t_k} = \vec{t_k}^{\,*}$ для векторов из (1.22) и (1.22$'$), позволяющие переписать формулу (1.23) в следующем окончательном виде:

$$\vec{t_n} = \sum_{k=1}^{3} \vec{t_k} \cos n\xi_k = \sum_{k=1}^{3} (\vec{t_k}\vec{n})\vec{i_k}. \qquad (1.26)$$

Остается лишь отметить, что, исходя из формул преобразования компонент тензора 2-го ранга, можно распространить понятие тензора напряжений на произвольный класс преобразований координат. Однако это, конечно, будет сопряжено с потерей наглядного физического смысла компонент тензора. Вследствие этого переход к неортогональным системам координат (без какой-либо крайней необходимости) нерационален.

6. Для вывода уравнений движения фиксируем в выбранной декартовой координатной системе L неподвижную область V, ограниченную поверхностью S с внешней нормалью $\vec{n}$, и рассмотрим условия динамического равновесия материальных точек среды, заполняющих V. При этом пространственные координаты точек области V будем обозначать посредством $\xi \equiv \xi_1$, $\eta \equiv \xi_2$ и $\zeta \equiv \zeta_3$, как и в п. 5.

Если плотность массовых сил, действующих на элементы среды, обозначить через $\vec{f}$, а вектор плотности ускорения частиц – через $\vec{w}$, то, согласно принципу Даламбера, основное условие равновесия запишется в виде

$$\iiint\limits_{(V)} [\,\vec{f} - \rho\vec{w}\,]\, dV + \iint\limits_{(S)} \vec{t}_n\, dS = 0,$$

где ρ – плотность вещества в среде. В предположении достаточной гладкости частных производных t_{ik} по ξ, η и ζ можно воспользоваться (1.26) и примнить формулу Гаусса. В результате получается равенство

$$\iiint\limits_{(V)} [\,\vec{f} - \rho\vec{w} + \overrightarrow{\mathrm{Div}}\, t_{ik}\,]\, dV = 0,$$

в котором

$$\overrightarrow{\mathrm{Div}}\, t_{ik} \equiv \vec{i}_1 \operatorname{div} \vec{t}_1 + \vec{i}_2 \operatorname{div} \vec{t}_2 + \vec{i}_3 \operatorname{div} \vec{t}_3. \tag{1.27}$$

Если подинтегральное выражение из (1.27), например, непрерывно, то в силу произвола в выборе области V из (1.27) вытекают уравнения движения

$$\overrightarrow{\mathrm{Div}}\, t_{ik} + \vec{f} = \rho\vec{w}, \tag{1.28}$$

переписывающиеся в проекциях на оси координат в виде

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial t_{ik}}{\partial \xi_k} + f_i = \rho w_i, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{1.28$'$}$$

Заметим, что второе условие равновесия (по моментам) нет необходимости учитывать, так как легко видеть, что оно автоматически выполняется в силу (1.28) и (1.25).

При выводе уравнений (1.28) мы фактически пользовались координатами Эйлера $\xi \equiv \xi_1$, $\eta \equiv \xi_2$ и $\zeta \equiv \xi_3$. Если для описания движения среды сохранять эти координаты, то вместо w_i в (1.28$'$) необходимо подставлять выражения, получающиеся из

(1.21) и (1.20). Если же пользоваться лагранжевыми координатами $x \equiv x_1$, $y \equiv x_2$, $z \equiv x_3$, связанными с эйлеровыми координатами формулами (1.16) и содержащими компоненты вектора смещений $\vec{u}(x, y, z, t)$, то для w_i следует брать простое выражение из (1.18). Но при этом t_{ik} следует рассматривать как фунции лагранжевых координат $x \equiv x_1$, $y \equiv x_2$, $z \equiv x_3$ и учитывать, что

$$\frac{\partial t_{ik}}{\partial \xi_k} = \sum_{r=1}^{3} \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_r} \, \frac{\partial x_r}{\partial \xi_k}.$$

В результате уравнение (1.28′) перепишется в виде

$$\sum_{k,r=1}^{3} \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_r} \, \frac{\partial x_r}{\partial \xi_k} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \tag{1.29}$$

Входящие сюда производные x_r по ξ_k должны определяться в виде функций от x_i и t на основании формул (1.16′), обратных (1.16). Однако, как часто бывает удобно при рассмотрении обратных функций, указанные производные можно определять из соотношений

$$d\xi_i = \sum_{k=1}^{3} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \quad (i = 1, 2, 3),$$

вытекающих из (1.16), если их рассматривать как систему уравнений относительно dx_k. Определитель такой системы, совпадающий с (1.17), отличен от нуля. Вследствие этого при помощи теоремы Крамера для dx_r однозначно получаются выражения

$$dx_r = \sum_{k=1}^{3} \frac{dx_r}{\partial \xi_k} \, d\xi_k \equiv \sum_{k=1}^{3} \Phi_{rk}(\varepsilon, \omega) d\xi_k.$$

Нетрудно видеть, что в общем случае величины $\Phi_{rk}(\varepsilon, \omega)$ оказываются нелинейными функциями от $\partial u_l / \partial x_k$, т.е. в конечном счете функциями от компонент тензоров ε_{ik} и ω_{ik} из (1.6) и (1.13). Если же выполняются условия (1.9) справедливости линейного приближения, то, очевидно,

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} = \Phi_{ik} \approx \delta_{ik} \tag{1.30}$$

и уравнения движения (1.29) переписываются в виде

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_k} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{1.31}$$

или в векторной форме

$$\overrightarrow{\mathrm{Div}}\, t_{ik} + \vec{f} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \tag{1.32}$$

где

$$\overrightarrow{\mathrm{Div}}\, t_{ik} \equiv \sum_{k=1}^{3} \vec{i}_k \operatorname{div} \vec{t}_k, \quad \left(\operatorname{div} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\right). \tag{1.32$'$}$$

При этом все величины, входящие в (1.31), (1.32), рассматриваются как функции лагранжевых координат $x \equiv x_1$, $y \equiv x_2$, $z \equiv x_3$ материальных точек среды относительно выбранной декартовой системы координат L и времени t. По правилам тензорного анализа уравнение (1.31) легко переписывается в общековариантной форме, справедливой для любых криволинейных систем координат. Мы не задерживаемся здесь на таком вопросе, так как в последующем уравнение движения будет применяться лишь в форме (1.31) и (1.32).

7. При выполнении многих преобразований удобно пользоваться тождеством

$$\operatorname{div}\left(\sum_{k=1}^{3} a_k \vec{t}_k\right) \equiv \left(\vec{a}\, \overrightarrow{\mathrm{Div}}\, t_{ik}\right) + \sum_{k=1}^{3} \left(\vec{t}_k \operatorname{grad} a_k\right), \tag{1.33}$$

справедливым для произвольного дифференцируемого вектора $\vec{a} = \sum\limits_{k=1}^{3} a_k \vec{i}_k$. Если учесть (1.25) и ввести обозначения

$$\widetilde{a}_{ii} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}, \quad \widetilde{a}_{ik} = \frac{\partial a_i}{\partial x_k} + \frac{\partial a_k}{\partial x_i}, \quad (i \neq k), \tag{1.34}$$

то последние слагаемые из (1.33) можно представить в следующих двух формах:

$$\sum_{k=1}^{3} \left(\vec{t}_k \operatorname{grad} a_k\right) \equiv \sum_{k=1}^{3} \left(\vec{t}_k \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_k}\right) \equiv \sum_{i \leqslant k} t_{ik} \widetilde{a}_{ik}. \tag{1.35}$$

Заметим, по-первых, что $\widetilde{a}_{ik}$ из (1.34) образованы из a_k совершенно также, как и e_{ik} из (1.15) образованы из составляющих u_k вектора смещений, во-вторых, что в дальнейшем нам придется пользоваться (1.35) при $\vec{a} = \delta\vec{u}$, $\vec{a} = \vec{u}$ и $\vec{a} = \dot{\vec{u}}$.

8. Как и в любых других физических явлениях, в теории сплошной среды важную роль играют энергетические соображения. Для формулировки их удобно предварительно ввести понятия вариаций полей смещений и тензора деформации. При описании движения среды в лагранжевых координатах эти понятия можно определить следующим образом.

Пусть $\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ – некоторое поле смещений в рассматриваемой среде, а Ω – множество всех достаточно гладких полей смещений $\vec{u}_0(x_1, x_2, x_3, t)$, близких к $\vec{u}$. (Например, таких, что $|\vec{u} - \vec{u}_0| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – заданное число.)

Вариацией поля $\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ будем называть выражение

$$\delta\vec{u} = \vec{u}_0(x_1, x_2, x_3, t) - \vec{u}(x_1, x_2, x_3, t),$$

где $\vec{u}_0$ – произвольный элемент множества Ω.

Если поля $\vec{u}_0$ и $\vec{u}$ дифференцируемы, то по ним можно вычислить составляющие тензоров деформаций $e^0_{ik} = e^0_{ik}(x_1, x_2, x_3, t)$ из (1.15).

Выражения

$$\delta e_{ik} = e^0_{ik} - e_{ik}$$

(при произвольном $\vec{u}_0 \in \Omega$) будем называть вариацией тензора деформации. Заметим, что вопрос о (физическом) происхождении вариации не имеет никакого значения. Однако в одном из важных случаев будет удобно под вариацией понимать $\delta\vec{u} = \vec{u}(x_1, x_2, x_3, t + \Delta t) - \vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)$.

9. Из термодинамики известно, что если в рассматриваемом процессе количество тепла dQ, сообщаемое изолированной системе, оказывается полным дифференциалом, то существует функция состояния системы F, называемая термодинамическим потенциалом. В частности, dQ оказывается полным дифференциалом в изотермических и адиабатических процессах.

Будем рассматривать только такие среды (системы), состояние которых в момент времени t определяется вектором смещений $\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)$, причем плотность $\rho(x_1, x_2, x_3)$ среды предполагается неизменной. Опыт показывает, что среды, (приближенно) удовлетворяющие указанному условию, в природе существуют: таковой оказывается любая "твердая" среда, если она подвергается достаточно малым деформациям. По сравнению с термодинамической релаксацией динамические процессы в средах протекают настолько медленно, что термодинамическое равновесие не нарушается. С точки же зрения теплообмена указанные процессы протекают весьма быстро, и потому в любом выбранном объеме dV среды практически оказывается $dQ = 0$, так как теплообмен не успевает произойти за времена, характерные для динамики. Таким образом, динамические процессы в сплошных средах можно считать адиабатическими и вследствие этого утверждать, что в средах рассматриваемого типа существует термодинамический потенциал. Будем характеризовать его плотностью W и называть упругим потенциалом или, проще, плотностью потенциальной энергии упругой деформации, причем эту плотность $W \equiv W[\,\vec{u}\,] \equiv W\big[\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)\big]$ будем описывать в лагранжевых координатах среды.

Получим выражение вариации W, отвечающей произвольной вариации $\delta\vec{u}$ исходного поля смещений $\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)$, которое предполагается достаточно гладким. Для этого выделим произвольную часть среды, состоящую из фиксированных материальных точек, которые в невозмущенном состоянии (т.е. при $\vec{u} \equiv 0$) заполняли область V лагранжевых переменных x_1, x_2, x_3 относительно выбранной системы координат L. В возмущенном состоянии, характеризующемся полем исходного вектора смещений $\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ (от которого затем берется вариация $\delta\vec{u}$), истинное положение выделенных материальных точек в фиксированный момент t определяется (относительно той же системы L) эйлеровыми координатами (ξ_1, ξ_2, ξ_3) из (1.16), изменяющимися в некоторой области V_0. Очевидно, что V_0 характеризует область истинного расположения (в момент времени t) материальных точек выделенной части среды и что при соответствующем выборе V_0 поверхность S_0 с внешней нормалью $\vec{n}$, ограничивающую область V_0, можно считать достаточно гладкой (если, конечно, гладкость исходного поля смещений $\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ достаточно высока).

В соответствии с первым началом термодинамики изменение полной энергии выделенного участка среды при вариации $\delta\vec{u}$ исходного поля $\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ определяется формулой

$$\Delta(E_{\text{пот}} + E_{\text{кин}}) = \Delta A + \Delta Q, \tag{1.36}$$

в которой $\Delta Q = 0$ – сообщаемое среде количество тепла, а ΔA – работа всех внешних сил на перемещениях $\delta\vec{u}$.

Для определения $\Delta E_{\text{пот}}$ удобно использовать лагранжевы координаты рассматриваемых точек среды, позволяющие писать

$$\Delta E_{\text{пот}} = \iiint\limits_{(V)} \Big\{ W[\,\vec{u} + \delta\vec{u}\,] - W[\,\vec{u}\,] \Big\} dV \equiv \iiint\limits_{(V)} \delta W\, dV.$$

Для вычисления остальных слагаемых в (1.36) удобнее описывать среду в эйлеровых координатах из п. 3.

Пусть в этих координатах $\vec{w}$ обозначает ускорение материальных точек среды, ρ – ее массовую плотность, а $\vec{f}$ и $\vec{t}_n$ – векторы плотностей массовых и поверхностных сил, приложенных соответственно к точкам области V_0 и ее граничной поверхности S_0.

До вариации исходного поля $\vec{u}$ каждая точка выделенного материального участка среды (заполняющего область V_0) характеризуется плотностью сил инерции $\rho\vec{w}$. При малой вариации $\delta\vec{u}$ поля смещений каждая материальная точка области V_0 смещается на величину $\delta\vec{u}$. Поэтому работа сил инерции на перемещениях $\delta\vec{u}$, равная изменению кинетической энергии выделенного участка среды, определится (с точностью до малых высшего порядка по сравнению с $\delta\vec{u}$) выражением

$$\Delta E_{\text{кин}} = \iiint\limits_{(V_0)} \rho\vec{w}\,\delta\vec{u}\, dV_0.$$

Аналогичные же соображения приводят к формуле

$$\Delta A = \iiint\limits_{(V_0)} \vec{f}\,\delta\vec{u}\, dV_0 + \iiint\limits_{(S_0)} \vec{t}_n\,\delta\vec{u}\, dS_0 + O\big[(\delta\vec{u})^2\big]$$

для работы внешних сил (приложенных к рассматриваемому участку среды) на перемещениях $\delta\vec{u}$.

Таким образом, на основании (1.36) мы приходим к соотношению

$$\iiint\limits_{(V)} \delta W\, dV = \iiint\limits_{(V_0)} (\vec{f} - \rho\vec{w})\delta\vec{u}\, dV_0 + \iint\limits_{(S_0)} \vec{t}_n \delta\vec{u}\, dS_0, \tag{1.36$'$}$$

справедливому с точностью до малых высшего порядка относительно $\delta\vec{u}$. (Напомним, что все величины, входящие в правую часть (1.36′), рассматриваются как функции введенных эйлеровых координат (1.16), причем значения $\vec{f}$, $\vec{w}$ и $\vec{t}_n$ отвечают исходному полю смещений $\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ в фиксированный момент времени t). Чтобы преобразовать (1.36′) нужно учесть (1.28), а также соотношение

$$\vec{t}_n\,\delta\,\vec{u} = \big(\vec{t}_1\,\delta u_1 + \vec{t}_2\,\delta u_2 + \vec{t}_3\,\delta u_3\,\big)\vec{n},$$

вытекающее из (1.26), из которых следует

$$\iint\limits_{(S_0)} \vec{t}_n\,\delta\,\vec{u}\,dS_0 = \iiint\limits_{(V_0)} \operatorname{div}\big(\,\vec{t}_1\,\delta u_1 + \vec{t}_2\,\delta u_2 + \vec{t}_3\,\delta u_3\,\big)\,dV_0.$$

Пользуясь такими выражениями и производя в интеграле замену переменных интегрирования по формулам (1.16), получаем равенства

$$\iiint\limits_{(V)} \delta W\,dV = \iiint\limits_{(V_0)} \Big\{\operatorname{div}\big(\,\vec{t}_1\,\delta u_1 + \vec{t}_2\,\delta u_2 + \vec{t}_3\,\delta u_3\,\big) - \overrightarrow{\mathrm{Div}}\,t_{ik}\,\delta\,\vec{u}\Big\}\,dV_0 =$$

$$= \iiint\limits_{(V)} \Big\{\operatorname{div}\big(\,\vec{t}_1\,\delta u_1 + \vec{t}_2\,\delta u_2 + \vec{t}_3\,\delta u_3\,\big) - \overrightarrow{\mathrm{Div}}\,t_{ik}\,\delta\,\vec{u}\Big\}\frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}\,dV,$$

которые должны иметь место при любом выборе области V. Отсюда (в предположении непрерывности подинтегральных функций интегралов по V) вытекает формула

$$\delta W = \left[\operatorname{div}\sum_{k=1}^{3}\vec{t}_k\delta u_k - \overrightarrow{\mathrm{Div}}\,t_{ik}\delta\vec{u}\right]\frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}, \tag{1.37}$$

в которой расходимости вычисляются в координатах ξ_1, ξ_2, ξ_3, а затем в выражении всей квадратной скобки производится замена переменных ξ_1, ξ_2, ξ_3 на x_1, x_2, x_3 по (1.16).

Для нас основной интерес представляет случай линейной теории упругости, в которой деформации предполагаются малыми в смысле (1.9). При выполнении же условий (1.9) в соответствии с (1.17) и (1.30) оказывается

$$\frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \approx 1, \qquad \frac{\partial}{\partial\xi_k} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x_i}{\partial\xi_k}\,\frac{\partial}{\partial x_i} \approx \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Поэтому в случае линейной теории упругости формула (1.37) переписывается в виде

$$\delta W = \operatorname{div}\left(\vec{t}_1\,\delta u_1 + \vec{t}_2\,\delta u_2 + \vec{t}_3\,\delta u_3\right) - \overrightarrow{\mathrm{Div}}\, t_{ik}\,\delta\,\vec{u} \equiv$$

$$\equiv \left(\vec{t}_1 \operatorname{grad}\delta u_1\right) + \left(\vec{t}_2 \operatorname{grad}\delta u_2\right) + \left(\vec{t}_3 \operatorname{grad}\delta u_3\right) \equiv \sum_{i\leqslant k} t_{ik}\delta e_{ik}, \quad (1.37')$$

причем все входящие в $(1.37')$ величины рассматриваются как функции лагранжевых координат x_1, x_2, x_3 и времени t, а все дифференциальные операции имеют стандартный относительно x_1, x_2, x_3 вид.

Заметим, во-первых, что при написании второй и третьей частей равенства $(1.37')$ мы воспользовались тождествами (1.33) и (1.35), и, во-вторых, что из $(1{,}37')$, в частности, вытекает важная формула

$$t_{ik} = \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}, \quad (1.38)$$

в которой все величины рассматриваются как функции лагранжевых координат.

Остается лишь подчеркнуть, что так как

$$W \equiv W\left[\,\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)\right] \equiv W(x_1, x_2, x_3, t)$$

определяет плотность упругого потенциала, или, что то же, потенциальной энергии упругой среды, то упругий потенциал (или потенциальная энергия) произвольно выбранного малого объема dV, содержащего точку $M = (x_1, x_2, x_3)$, определяется выражением $WdV = W(M,t)dV$, которое должно оставаться инвариантным по отношению к любым преобразованиям координат. В случае афинных ортогональных преобразований координат (сохраняющих инвариантными расстояния $dr^2 = \sum_i dx_i^2$ между любыми точками объема dV) величина dV сама оказывается инвариантом. Поэтому и плотность W потенциальной энергии упругой деформации среды является инвариантом относительно афинных ортогональных преобразований координат, для которых, в частности, были получены инварианты (1.14). Это обстоятельство используется, например, при написании формулы (1.43), правая часть которой должна быть квадратичным инвариантом относительно компонент e_{ik} тензора деформаций.

10. Результаты п. 9 относились к произвольной сплошной среде, испытывающей малые деформации в смысле (1.9), состояние которой в момент времени t определяется вектором $\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ поля смещений. Для перехода к теории конкретной среды (например, идеально упругой) необходимо обратиться к опыту, из которого устанавливается связь между W и составляющими тензора деформаций.

Опыт показывает, что существуют среды, в которых при достаточно малых деформациях выполняется закон Гука. При этом упругий потенциал таких сред оказывается определенно положительной квадратичной формой от компонентов тензора деформации, т.е.

$$W = \sum_{i \leqslant k; \nu \leqslant \mu}^{3} c_{ik,\nu\mu}\, e_{ik}\, e_{\nu\mu}. \tag{1.39}$$

Коэффициенты $c_{ik,\nu\mu}$, удовлетворяющие условиям симметрии

$$c_{ik,\nu\mu} = c_{ki,\nu,\mu} = c_{ik,\mu\nu} = c_{\nu\mu,ik}, \tag{1.40}$$

определяются из эксперимента для каждой конкретной среды. При этом вследствие симметрии таблицы $c_{ik,\nu\mu}$ существует не более 21 различных значений ее элементов. Из свойства (1.40) следует соотношение

$$\frac{\partial W}{\partial e_{ik}} = 2 \sum_{\nu \leqslant \mu}^{3} c_{ik,\nu\mu}\, e_{\nu\mu} = t_{ik}, \tag{1.41}$$

при получении которого учтено (1.38).

В соответствии с левой частью (1.41) и равенством (1.38) для упругого потенциала получаем выражения

$$2W = 2 \sum_{i \leqslant k; \nu \leqslant \mu}^{3} c_{ik,\nu\mu}\, e_{ik} e_{\nu\mu} = \sum_{i \leqslant k}^{3} \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} e_{ik} =$$

$$= \sum_{i \leqslant k}^{3} t_{ik} e_{ik} = \operatorname{div}\left(\vec{t}_1 u_1 + \vec{t}_2 u_2 + \vec{t}_3 u_3\right) - \left(\vec{u}\, \overrightarrow{\mathrm{Div}}\, t_{ik}\right), \tag{1.42}$$

при выводе которых учитывались тождества (1.35) и (1.33).

В заключение остается отметить, что в случае изотропной упругой среды из 21 параметра $c_{ik,\nu\mu}$ (1.40) только два оказываются независимыми. В качестве таковых обычно берут (инвариантные) параметры Ламе $\lambda > 0$ и $\mu > 0$, через посредство которых упругий потенциал выражается формулой

$$2W = \lambda I_1^2 + \frac{\mu}{2} I_2 \equiv \big(\lambda + 2\lambda\big)\big(e_{11} + e_{22} + e_{33}\big)^2 +$$

$$+\mu\Big[e_{12}^2 + e_{23}^2 + e_{13}^2 - 4\big(e_{11}e_{22} + e_{11}e_{33} + e_{22}e_{33}\big)\Big], \qquad (1.43)$$

где I_1 и I_2 обозначают инваринты из $(1.14')$.

В соответствии с (1.38) из (1.43) следуют формулы

$$\left.\begin{aligned} t_{ii} &= \lambda \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu e_{ii} \quad (i = 1, 2, 3), \\ t_{ik} &= \mu e_{ik} \qquad\qquad\quad (i \neq k), \end{aligned}\right\} \qquad (1.44)$$

связывающие компоненты тензоров напряжений и деформаций. В общем случае упругие параметры λ и μ, равно как и $c_{ik,\nu\mu}$, в анизотропных средах, оказываются функциями рассматриваемой точки (x_1, x_2, x_3) среды. (Они могут зависеть и от времени t, однако в динамической теории упругости такой зависимостью допустимо пренебрегать).

11. Из формулы $(1.37')$ для вариации упругого потенциала следует закон сохранения энергии идеально упругой среды, играющий фундаментальную роль в выяснении ряда принципиальных вопросов, связанных с постановкой и со свойствами решений динамических задач теории упругости.

Предположим, что за время δt под влиянием внешних воздействий поле смещений изменилось на величину $\delta\vec{u}$. На основании формулы $(1.37')$, справедливой при любых вариациях $\delta\vec{u}$, получаем

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \operatorname{div}\left[\sum_{k=1}^{3} \vec{t}_k\, \dot{\vec{u}}\right] - \big(\dot{\vec{u}}\, \overrightarrow{\mathrm{Div}}\, t_{ik}\big),$$

где точкой сверху над u_k и u обозначено дифференциарование по t. Подставляя сюда выражение $\overrightarrow{\mathrm{Div}}\, t_{ik}$ из (1.32) и замечая, что

$$\left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}\dot{\vec{u}}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right)^2\right],$$

окончательно находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[W+\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right)^2\right]=(\vec{f}\ \vec{u})+\operatorname{div}\left[\sum_{k=1}^{3}\vec{t}_k\vec{u}_k\right]. \tag{1.45}$$

Это равенство выражает в дифференциальной форме закон сохранения энергии линейной теории упругости, записанный в лагранжевых координатах x_1, x_2, x_3.

Если обозначить через V произвольную область переменных x_1, x_2, x_3, ограниченную гладкой поверхностью S с внешней нормалью $\vec{n}$, то (в случае поля смещений, для которого все величины из (1.45) интегрируемы, а $\vec{t}_k\vec{u}_k$ непрерывны) результат интегрирования (1.45) по области V, с применением формулы Гаусса, приводит к интегральному закону сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{(V)}\left[W+\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right)^2\right]dV=$$

$$=\iiint\limits_{(V)}(\vec{f}\,\vec{u})dV+\iint\limits_{(S)}(\vec{t}_n\,\vec{u})dS, \tag{1.46}$$

допускающему более наглядное физическое истолкование. Члены, стоящие в правой части формулы (1.46), имеют смысл мощностей (работ за единицу времени) плотностей внешних сил. Слева же под знаком интеграла стоит выражение плотности энергии среды, состоящее из потенциальной и кинетической частей.

Следует отметить, что с формально-математической точки зрения к толкованию закона сохранения энергии идеально упругой среды нет нужды ничего добавлять, кроме, пожалуй, того, что этот закон играет фундаментальную роль в динамической теории упругости. С физической же точки зрения в толковании слагаемых формулы (1.46) (кроме первого, содержащего W) может возникнуть затруднение, вызванное тем обстоятельством, что под V в (1.46) подразумевается не истинная область, занимаемая в момент времени t выделенной (материальной) частью среды,[4] а область, которую выделенная часть среды занимала в невозмущенном состоянии, т.е. когда в ней было $\vec{u}\equiv 0$. При этом все

[4] В п. 9 такая область обозначалась через V_0, а ее граничная поверхность – через S_0.

величины, входящие под знаки интегралов в (1.46), рассматриваются как функции лагранжевых координат x_1, x_2, x_3 и, следовательно, например, значения величин $\dot{\vec{u}} = \partial\vec{u}/\partial t = \vec{v}(x_1, x_2, x_3, t)$ и $t_{ik} = t_{ik}(x_1, x_2, x_3, t)$ относятся не к материальной точке среды, имеющей (в возмущенном состоянии) координаты (x_1, x_2, x_3, t), а к материальной точке, координаты которой (ξ_1, ξ_2, ξ_3) связаны с (x_1, x_2, x_3, t) формулами (1.16). Из-за этого обстоятельства, например, выражение $(\vec{t}_n \dot{\vec{u}})$, стоящее под знаком поверхностного интеграла в (1.46), относится не к точке N поверхности S (как требовалось бы для строго физического толкования поверхностного интеграла в смысле мощности поверхностных сил, приложенных к материальному объему среды), а к точке $\widetilde{N}$, отстоящей от $N \in S$ на величину вектора смещений $\vec{u}(N, t)$.

Легко видеть, что указанные трудности физического толкования формулы (1.46), равно как и других формул математического формализма теории идеально упругих сред, отпадают, если все функции, входящие в математический формализм (например, $\vec{u}$, $\dot{\vec{u}}$, t_{ik} и $\vec{f}$) изменяются пренебрежимо мало при изменении их пространственных аргументов x_1, x_2, x_3 на величины Δx_1, Δx_2, Δx_3, не превосходящие $|\vec{u}|$, т.е., если

$$\left|\Delta\vec{u}\right| \ll \left|\vec{u}\right|, \quad \left|\Delta\dot{\vec{u}}\right| \ll \left|\dot{\vec{u}}\right|, \quad \left|\Delta\vec{t}_{ik}\right| \ll \left|t_{ik}\right| \quad \text{и т.д.} \tag{1.47}$$

при $\sqrt{\Sigma(\Delta x)^2} \leqslant \left|\vec{u}\right|$ и

$$\Delta\vec{u} \equiv \vec{u}\left(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_3 + \Delta x_3, t\right) - \vec{u}(x_1, x_2, x_3, t) \quad \text{и т.д.} \tag{1.48}$$

Такие условия называют обычно условиями малости вектора упругих смещений.

Следует подчеркнуть, что условия малости вектора упругих смещений действительно выполняются для многих твердых ("упругих") невырожденных систем или сред, подвергаемых не слишком сильным и не слишком быстро изменяющимся в пространстве и времени внешним воздействиям. В таких случаях выводам теории можно верить безоговорочно. Однако встречаются и ситуации, в которых теория приводит к практически хорошим результатам, в то время как некоторые из условий физического ее обоснования не выполняются. Поэтому наиболее целесообразно математический формализм (линейной) теории идеальной упругости рассматривать как нечто цельное и самостоятельное, не связанное с какими-либо физическими ограничениями.

Получаемые же из формализма следствия должны проверяться практикой, которая в конце концов и устанавливает истинную область практической применимости любой естественной теории.

12. Во многих вопросах весьма полезной оказывается формула Бетти, играющая роль формулы Грина для уравнений теории упругости. Чтобы ее вывести, выберем два произвольных (дважды дифференцируемых) поля смещений $\vec{u}\,(x_1, x_2, x_3, t)$ и $\vec{u}^{\,0}\,(x_1, x_2, x_3, t)$ в одной и той же упругой среде и вычислим по таким полям составляющие тензоров e_{ik} и e^0_{ik} деформации из (1.15) и тензоров напряжений

$$\left.\begin{aligned} t_{ik} &= 2\sum_{\nu\leqslant\mu}^{3} c_{ik,\nu\mu}\, e_{\nu\mu}, \\ t^0_{ik} &= 2\sum_{\nu\leqslant\mu}^{3} c_{ik,\nu\mu}\, e^0_{\nu\mu}, \end{aligned}\right\} \tag{1.49}$$

используя формулы (1.38) и (1.39). Рассмотрим тождество

$$2\sum_{\substack{i\leqslant k\\ \nu\leqslant\mu}}^{3} c_{ik,\nu\mu}\, e_{ik}\, e^0_{\nu\mu} \equiv 2\sum_{\substack{i\leqslant k\\ \nu\leqslant\mu}}^{3} c_{ik,\nu\mu}\, e^0_{ik}\, e_{\nu\mu},$$

очевидное в силу (1.40). На основании правой части (1.41) получаем равенство

$$\sum_{i\leqslant k}^{3} t_{ik}\, e^0_{ik} = \sum_{i\leqslant k}^{3} t^0_{ik}\, e_{ik}, \tag{1.50}$$

называемое формулой Бетти. Если теперь воспользоваться формулой (1.35), полагая сперва $t_{ik} = t_{ik}$, $\vec{a} = \vec{u}^{\,0}$, а затем $t_{ik} = t^0_{ik}$, $\vec{a} = \vec{u}$, то (1.50) перепишется в виде

$$\begin{gathered} \big(\vec{t}_1 \operatorname{grad} u^0_1\big) + \big(\vec{t}_2 \operatorname{grad} u^0_2\big) + \big(\vec{t}_3 \operatorname{grad} u^0_3\big) \equiv \\ \equiv \big(\,\overrightarrow{t^0_1}\, \operatorname{grad} u_1\big) + \big(\,\overrightarrow{t^0_2}\, \operatorname{grad} u_2\big) + \big(\,\overrightarrow{t^0_3}\, \operatorname{grad} u_3\big). \end{gathered} \tag{1.51}$$

Вследствие же тождества вида (1.33) соотношение (1.51) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\big(\,\vec{u}\, \overrightarrow{\mathrm{Div}}\, t^0_{ik}\,\big) - \big(\,\vec{u}^{\,0}\, \overrightarrow{\mathrm{Div}}\, t_{ik}\,\big) \equiv$$

$$\equiv \operatorname{div}\Big[\big(\overrightarrow{t_1^0}\, u_1 - \vec{t}_1\, u_1^0\big) + \big(\overrightarrow{t_2^0}\, u_2 - \vec{t}_2\, u_2^0\big) + \big(\overrightarrow{t_3^0}\, u_3 - \vec{t}_3\, u_3^0\big) \equiv$$

$$\equiv \operatorname{div}\left[\sum_{k=1}^{3}\big(\overrightarrow{t_1^0}\,\vec{u} - \vec{t}_k\,\vec{u}^{\,0}\big)\vec{i}_k\right]. \tag{1.52}$$

Заметим, что при переходе к правой части тождества мы учли формулы (1.22) и симметрию $t_{ik} = t_{ki}$ компонент тензора напряжений.

Обозначим, наконец, через $\vec{f}$ и $\vec{f}^{\,0}$ плотности массовых сил, соответствующие векторам смещений $\vec{u}$ и $\vec{u}^{\,0}$, и воспользуемся уравнением движения (1.32) и подобным же уравнением для t_{ik}^0, $\vec{u}^{\,0}$ и $\vec{f}^{\,0}$. Тогда (1.52) можно переписать в следующем окончательном виде:

$$\vec{f}\,\vec{u}^{\,0} - \vec{f}^{\,0}\,\vec{u} = \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\overrightarrow{t_k^0}\,\vec{u} - \vec{t}_k\,\vec{u}^{\,0}\Big) + \frac{\partial}{\partial t}\rho\Big(\vec{u}^{\,0}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - \vec{u}\frac{\partial\vec{u}^{\,0}}{\partial t}\Big). \tag{1.53}$$

Такое равенство, содержащее в правой части выражение типа четырехмерной дивергенции, будем называть дифференциальной формулой Грина–Вольтерра.

§2. Сводка обозначений и важнейших формул теории идеально упругих сред. Основные положения линейной акустики и линейной теории неидеальной упругости

В пп. 1–8 настоящего параграфа приводится сводка результатов §1, составляющих содержание математического формализма теории идеальной упругости. В пп. 9–14 кратко обсуждаются основные положения линейной акустики и линейной теории неидеально упругих сред, обладающих последействием.

Математический формализм теории идеально упругих сред

Приводимый формализм, равно как и “физическая интерпретация” величин, характеризующих возмущенное состояние упругой среды, вытекает из результатов §1 в предположении (1.9), а также “малости” вектора упругих смещений из п. 11 §1, что позволяет не различать лагранжевы и эйлеровы координаты материальных точек. Формализм дается применительно к произвольно выбранной правовинтовой декартовой системе координат $x \equiv x_1$, $y \equiv x_2$, $z \equiv x_3$ с ортами $\vec{i} \equiv \vec{i}_1$, $\vec{j} \equiv \vec{i}_2$, $\vec{\kappa} \equiv \vec{i}_3$,

1. Возмущенное состояние идеально упругой среды характеризуется вектором (упругих) смещений

$$\vec{u} \equiv \vec{u}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{k=1}^{3} \vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)\, \vec{i}_k, \tag{2.1}$$

определяющим отклонение материальной точки от того положения равновесия (x_1, x_2, x_3), которое она занимала в невозмущенном состоянии.

2. По полю смещений вычисляются компоненты тензора деформаций

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right), \quad (i, k = 1, 2, 3) \tag{2.2}$$

или

$$e_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad e_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \quad (i \neq k) \tag{2.3}$$

как функции координат x_1, x_2, x_3 и времени t. Таблица значений ε_{ik} из (2.2) определяет симметричный тензор 2-го ранга относительно афинных ортогональных преобразований координат в точном смысле этого понятия. Таблица же e_{ik} не является тензором, хотя и носит такое название. Физический смысл ε_{ik} разъяснен в п. 2 §1.

3. Напряженное состояние идеально упругой среды характеризуется тремя координатными векторами напряжений

$$\vec{t}_i = \sum_{k=1}^{3} t_{ik}\, \vec{i}_k, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{2.4}$$

рассматриваемыми как функции от времени t и пространственных координат x_1, x_2, x_3, таких же, как и в (2.1). Вектором $\vec{t}_k$ определяется плотность силы, с которой элементы среды, расположенные по положительную сторону от (бесконечно малой) площадки dS, проходящей через точку (x_1, x_2, x_3) и имеющей нормаль $\vec{n} = \vec{i}_k$, действуют на элементы среды, расположенные по отрицательную сторону площадки. Таблица $t_{ik} = t_{ki}$ симметрична и является тензором 2-го ранга относительно любых преобразований координат. Вектор напряжений на площадке с нормалью

$\vec{n}$ определяется формулой

$$\vec{t}_n = \sum_{k=1}^{3} \left(\vec{t}_k \cos nx_k\right) = \sum_{k=1}^{3} \left(\vec{t}_k\, \vec{n}\right) \vec{i}_k. \tag{2.5}$$

4. В каждой точке (x_1, x_2, x_3) среды между t_{ik} и e_{ik} выполняются линейные соотношения

$$t_{ik} = \sum_{nu,\mu=1}^{3} c_{ik,\nu\mu}\varepsilon_{\nu\mu} \equiv 2\sum_{\nu\leqslant\mu} c_{ik,\nu\mu}\, e_{\nu\mu} =$$

$$= \sum_{p,q=1}^{3} c_{ik,pq}\frac{\partial u_q}{\partial x_p}, \quad (i,k = 1,2,3), \tag{2.6}$$

выражающие закон Гука. Таблица коэффициентов в (2.6) симметрична, причем

$$c_{ik,\nu\mu} = c_{\nu\mu,ik} = c_{ki,\nu\mu} = c_{ki,\mu\nu}. \tag{2.6$'$}$$

Все $c_{ki,\mu\nu}$ (определяющие в общем случае тензор 4-го ранга) являются, вообще говоря, функциями x_1, x_2, x_3.

В случае изотропных сред формулы (2.6) упрощаются и принимают вид

$$t_{ii} = \lambda \operatorname{div}\vec{u} + 2\mu e_{ii} \quad t_{ik} = \mu e_{ik} \quad (i \neq k) \tag{2.7}$$

при $(i, k = 1, 2, 3)$, где $\operatorname{div}\vec{u} = e_{11} + e_{22} + e_{33}$, а $\lambda > 0$ и $\mu > 0$ – (инвариантные) параметры Ламе, зависящие, вообще говоря, от координат x_1, x_2, x_3.

5. Уравнения движения идеально упругой среды записываются в виде

$$\overrightarrow{\mathrm{Div}}\, t_{ik} + \vec{f} = \rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}, \quad \overrightarrow{\mathrm{Div}}\, t_{ik} = \sum_{k=1}^{3}\vec{i}_k \operatorname{div}\vec{t}_k, \tag{2.8}$$

где $\vec{f}$ – вектор плотности массовых сил, ρ – плотность вещества среды, а $\vec{t}_k$ из (2.4) связаны с вектором смещений $\vec{u}$ формулами (2.6), (2.2) в общем случае и (2.7), (2.3) в случае изотропных сред. Уравнение (2.8) имеет тензорный характер. На его основе легко получаются уравнения движения в произвольных криволинейных координатах. (Необходимо только частное выражение для $\overrightarrow{\mathrm{Div}}\, t_{ik}$ заменить его общековариантным выражением.)

В компонентах уравнение (2.8) переписывается в виде

$$\sum_{k,p,q=1}^{3} c_{ik,pq}\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} + \sum_{k,p,q=1}^{3} \frac{\partial c_{ik,pq}}{\partial x_k}\ \frac{\partial u_q}{\partial x_p} + f_i =$$

$$= \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{2.9}$$

причем слагаемое, содержащее первые производные $\partial u_q/\partial x_p$, обращается в нуль в случае однородных анизотропных сред. Если же среда однородна и изотропна, ($\rho = \text{const}.$, $\mu = \text{const}.$, $\lambda = \text{const}.$) то уравнение (2.8) принимает форму

$$(\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} + \mu\Delta\vec{u} + \vec{f} = \rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} \tag{2.10}$$

уравнения Ламе. В компонентах такое уравнение удобно переписывать в виде

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial t_{ik}}{\partial x_k} + f_i = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2.11}$$

6. Существует положительно-определенная квадратичная форма

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i,k,\nu\mu=1}^{3} c_{ik,\nu\mu}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{\nu\mu} \equiv \sum_{\substack{i\leqslant k\\ \nu\leqslant\mu}}^{3} c_{ik,\nu\mu}\, e_{ik}\, e_{\nu\mu} \geqslant 0, \tag{2.12}$$

коэффициенты $c_{ik,\nu\mu}$ которой совпадают с коэффициентами $c_{ik,\nu\mu}$ из (2.6) и (2.6′), а e_{ik} имеет значение (2.3), определяющая плотность потенциальной энергии деформации идеально упругой среды. Из условия $W = 0$ с необходимостью следует $e_{ik} = 0$.

В случае изотропных сред W определяется выражением

$$2W = (\lambda + 2\mu)\big(e_{11} + e_{22} + e_{33}\big)^2 +$$

$$+\mu\Big[e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2 - 4\big(e_{11}e_{12} + e_{11}e_{23} + e_{22}e_{33}\big)\Big]. \tag{2.13}$$

Из (2.6) и (2.12) следуют равенства

$$t_{ik} = \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} = 2\sum_{\nu\leqslant\mu} c_{ik,pq}\frac{\partial u_q}{\partial x_p}, \tag{2.14}$$

а также весьма полезные формулы

$$2W = \sum_{i\leqslant k} t_{ik} e_{ik} = \sum_{k=1}^{3} \left(\vec{t}_k \, \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k} \right) =$$

$$= \operatorname{div} \left(\sum_{k=1}^{3} \vec{t}_k \, u_k \right) - \left(\vec{u} \, \overrightarrow{\mathrm{Div}} \, t_{ik} \right), \tag{2.15}$$

при выводе которых использовались тождества (1.33) и (1.35) при $\vec{a} = \vec{u}$.

Путем дифференцирования (2.12) по времени t (с использованием тождеств (1.33) и (1.35) при $\vec{a} = \vec{u}$) получаются важные соотношения

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 2 \sum_{\substack{\nu\leqslant\mu \\ i\leqslant k}}^{3} c_{ik,\nu\mu} \, e_{ik} \, \dot{e}_{\nu\mu} = \sum_{i\leqslant k} t_{ik} \, \dot{e}_{ik} =$$

$$= \operatorname{div} \left(\sum_{k=1}^{3} \vec{t}_k \, \dot{u}_k \right) - \left(\dot{\vec{u}} \, \overrightarrow{\mathrm{Div}} \, t_{ik} \right), \tag{2.16}$$

7. Справедлив закон сохранения энергии, выражающийся в дифференциальной форме равенством

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[W + \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)^2 \right] = (\vec{f} \, \dot{\vec{u}}) + \operatorname{div} \left(\sum_{k=1}^{3} \vec{t}_k \, \dot{u}_k \right). \tag{2.17}$$

Интегральная запись закона сохранения энергии имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_{(V)} \left[W + \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)^2 \right] dV = \iiint\limits_{(V)} (\vec{f} \, \dot{\vec{u}}) \, dV - \iint\limits_{(S)} (\vec{\mathcal{P}} \, \vec{n}) \, dS, \tag{2.18}$$

где (V) – произвольная фиксированная трехмерная область, ограниченная гладкой поверхностью S с внешней нормалью $\vec{n}$, а выражение

$$\vec{\mathcal{P}} = -\sum_{k=1}^{3} (\vec{t}_k \, \dot{u}_k) \tag{2.19}$$

определяет вектор плотности потока энергии поля в области V, удовлетворяющий, в силу (2.5), очевидному равенству

$$(\vec{\mathcal{P}}\,\vec{n}) = -\sum_{k=1}^{3} (\vec{t}_k\,\vec{n})\,\dot{u}_k = -(\vec{t}_n\,\dot{\vec{u}}).$$

Составляющие вектора $\vec{\mathcal{P}}$ определяются выражениями

$$\mathcal{P}_k = -\sum_{i=1}^{3} t_{ki}\,\dot{u}_i = -\sum_{i,p,q=1}^{3} c_{ik,pq}\frac{\partial u_q}{\partial x_p}\,\dot{u}_i, \tag{2.20}$$

полученными из (2.19), (2.6) при учете (2.6′). Заметим, что для перехода от (2.17) к (2.18) кроме интегрируемости по V трех членов равенства (2.17) необходима также непрерывность в области V вплоть до S всех составляющих вектора $\vec{\mathcal{P}}$.

8. Если $\vec{u}(x_1,x_2,x_3,t)$ и $\vec{u}^{\,0}(x_1,x_2,x_3,t)$ – два произвольных поля смещений в одной и той же упругой среде, а e_{ik}, t_{ik}, $\vec{f}$ и e^0_{ik}, t^0_{ik}, $\vec{f}^{\,0}$ – соответствующие им тензоры деформаций, напряжений (вычисленные по (2.3) и (2.6)) и векторы плотностей массовых сил (вычисляемых по (2.8)), то справедливо тождество

$$\sum_{k=1}^{3} (\vec{t}_k\,\mathrm{grad}\,u^0_k) \equiv \sum_{k=1}^{3} (\vec{t}^{\,0}_k\,\mathrm{grad}\,u_k),$$

переписывающееся в следующей эквивалентной форме

$$\Big(\overrightarrow{\mathrm{Div}}\,t^0_{ik},\vec{u}\Big) - \Big(\overrightarrow{\mathrm{Div}}\,t_{ik},\vec{u}^{\,0}\Big) \equiv$$
$$\mathrm{div}\Big(\vec{t}^{\,0}_1 u_1 - \vec{t}_1 u^0_1 + \vec{t}^{\,0}_2 u_2 - \vec{t}_2 u^0_2 + \vec{t}^{\,0}_3 u_3 - \vec{t}_3 u^0_3\Big) \equiv$$
$$\equiv \mathrm{div}\left\{\sum_{k=1}^{3}\Big[(\vec{t}^{\,0}_k\,\vec{u}_k) - (\vec{t}_k\,\vec{u}^{\,0}_k)\Big]\vec{i}_k\right\}.$$

В силу (2.8) оно может быть записано и в виде

$$(\vec{f}\,\vec{u}^{\,0}) - (\vec{f}^{\,0}\,\vec{u}) = \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\Big[\vec{t}^{\,0}_k\,\vec{u} - \vec{t}_k\,\vec{u}^{\,0}\Big] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{u}^{\,0}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - \vec{u}\frac{\partial\vec{u}^{\,0}}{\partial t}\right]. \tag{2.21}$$

Такое соотношение называется дифференциальной формулой Грина–Вольтерра в теории упругости. Если в четырехмерной области B, ограниченной поверхностью Σ с кусочно-непрерывной внешней нормалью ν, упругие параметры среды непрерывны, а поля $\vec{u}$ и $\vec{u}^{\,0}$ непрерывны вместе с первыми производными вплоть до Σ, то справедлива интегральная формула Грина–Вольтерра

$$\iiiint\limits_{(B)} \left[\vec{f}\,\vec{u}^{\,0} - \vec{f}^{\,0}\,\vec{u}\right] dB = \iiint\limits_{(\Sigma)} \left[\vec{u}\,\vec{M}_4(\vec{u}^{\,0}) - \vec{u}^{\,0}\,\vec{M}_4(\vec{u})\right] d\Sigma, \quad (2.22)$$

в которой

$$\vec{M}_4(\vec{u}) = \sum_{k=1}^{3} \vec{t}_k \cos \nu x_k - \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cos \nu t, \quad (2.23)$$

и аналогично для $\vec{M}_4(\vec{u}^{\,0})$. Такая формула находит весьма полезные приложения.

Линейная акустика

9. В случае гидродинамики или акустики описание движения среды обычно ведется в (локальных) эйлеровых координатах ξ_1, ξ_2, ξ_3 и времени t (см. п. 4 §1). При этом состояние среды в точке (ξ_1, ξ_2, ξ_3, t) характеризуется плотностью ρ, давлением p и вектором $\vec{v}$ скорости движения частиц, находящихся в этой точке, причем ρ, p и $\vec{v}$ рассматриваются как функции переменных ξ_1, ξ_2, ξ_3 и t. Изменим обозначения и будем понимать под x_1, x_2, x_3 эйлеровы координаты материальных точек среды. Тогда окажется $\vec{v} = \vec{v}(x_1, x_2, x_3, t)$, $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3, t)$ и $p = p(x_1, x_2, x_3, t)$.

В жидких и газообразных (невязких) средах тензор напряжений имеет значение

$$t_{ik} = -p\delta_{ik}, \quad (2.24)$$

где δ_{ik} – символ Кронекера. Поэтому уравнение (1.29) движения среды принимает форму

$$\rho \frac{d\,\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \operatorname{grad} p, \quad (2.25)$$

причем под $d\vec{v}/dt$ следует понимать субстанциональную производную, определяемую формулой (1.19), т.е.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k}\, v_k. \quad (2.26)$$

10. Кроме уравнений движения (2.25) состояние жидкой или газообразной среды определяется: 1) уравнением неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\rho}{\partial x_k}v_k+\rho\operatorname{div}\vec{v}=0 \tag{2.27}$$

и 2) уравнением состояния вещества, связывающим между собой давление p и плотность ρ, т.е.

$$p=\Phi(\rho) \quad \text{и} \quad \rho=\varphi(p). \tag{2.28}$$

Пусть в невозмущенном состоянии среда характеризовалась значениями $p=p_0(x_1,x_2,x_3)$ и $\rho=\rho_0(x_1,x_2,x_3)$ давления и плотности, и пусть возникающие в среде возмущения настолько малы, что в сильной степени выполняются неравенства

$$\left|p-p_0\right|\ll p_0, \quad \left|\rho-\rho_0\right|\ll\rho_0. \tag{2.29}$$

Тогда

$$\frac{d\rho}{dp}=\varphi'(p)\approx\varphi'(p_0)\equiv\frac{1}{c^2(x_1,x_2,x_3)},$$

что позволяет считать $d\rho/dp$ величиной, не зависящей от изменения давления p в процессе возмущений. При этом

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\varphi'(p)\frac{\partial p}{\partial t}\approx\varphi'(p_0)\frac{\partial p}{\partial t}\equiv\frac{1}{c^2(x_1,x_2,x_3)}\,\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{2.30}$$

11. Если рассматривать настолько "малые" возмущения, что выполняются неравенства

$$\left|\sum_{r=1}^{3}\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_k}v_k\right|\ll\left|\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right|, \quad \left|\sum_{r=1}^{3}\frac{\partial\rho}{\partial x_k}v_k\right|\ll\left|\frac{\partial\rho}{\partial t}\right|, \tag{2.31}$$

то на основании (2.30), (2.31) уравнения (2.25) и (2.27) можно переписать в виде

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=\vec{f}-\operatorname{grad}p, \quad \frac{\partial p}{\partial t}=-c^2\rho\operatorname{div}\vec{v}.$$

В такие уравнения не входит производная от ρ по t. Поэтому в силу (2.29) можно положить

$$\rho\approx\rho_0(x_1,x_2,x_3),$$

где ρ_0 не зависят от времени. В результате получаются линейные уравнения движения акустики

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{f} - \operatorname{grad} p, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -c^2 \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}, \tag{2.32}$$

условиями применимости которых (2.29) оказывается еще неравенство

$$|\vec{v}| \ll c. \tag{2.33}$$

Заметим, что уравнения (2.32) формально в полной мере укладываются в схему физических предположений, которые были положены в основу п. 9 и 10 §1. При этом нужно считать, что: 1) состояние среды определяется вектором смещений $\vec{u} = \vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)$, для которого $\vec{v} = \dot{\vec{u}}$; 2) тензор напряжений t_{ik} дается формулой (2.24); 3) потенциальная энергия деформации определяется выраженим

$$2W = \rho c^2 \big(e_{11} + e_{22} + e_{33}\big)^2 \equiv \lambda_0 \big(\operatorname{div} \vec{u}\big)^2, \tag{2.34}$$

где $\lambda_0 = c^2(x_1, x_2, x_3)\rho(x_1, x_2, x_3)$, а закон Гука (2.7) записывается в виде

$$t_{ii} = \lambda_0 \operatorname{div} \vec{u}, \quad t_{ik} = 0 \quad (i \neq k). \tag{2.35}$$

Итак, линейные уравнения (2.32) акустики можно рассматривать как частный случай уравнений (2.8) идеально упругой изотропной среды, у которой модуль сдвига $\mu = 0$. Это позволяет не останавливаться специально на изучении уравнений линейной акустики, а необходимые результаты получать из уравнений теории упругости в случае изотропных сред, у которых $\mu = 0$.

Замечание о формализме теории линейных неидеально упругих сред

12. Представление об идеально упругой среде, математическое описание движения которой обсуждалось в §1, появилось в результате идеализации условий протекания динамических процессов в реальных средах. В основе такого представления лежало предположение о существовании функции состояния W, плотности потенциальной энергии деформации упругой среды, которая является однородной положительно-определенной квадратичной функцией от компонент тензора малых деформаций. Это предположение влекло за собой выполнение закона Гука, связывающего значение компонент тензора напряжений t_{ik} в любой момент времени t со значениями компонент тензора деформаций e_{ik}, вычисляемых для того же самого момента времени t. Однако опыт показывает, что, строго говоря, такая связь между t_{ik} и e_{ik} весьма редко встречается в природе. Обычно значения t_{ik} в точке M среды в момент времени t зависят в той или иной степени от значений e_{ik} в точке M, вычисленных не только для момента t, но также и для значений t в предшествующие моменты времени. Таким образом, оказывается, что более адекватное описание реальных ("твердых") сред при малых деформациях получается из математической схемы описания среды в п. 1–8 настоящего параграфа, если сохранить внешнюю форму уравнений движения и (линейной) связи между t_{ik} и e_{ik}, но под упругими параметрами среды вида $c_{ik,\mu\nu}$ из (2.6) или λ и μ из (2.7) понимать некоторые операторы, зависящие от времени. Простейшим оказывается случай линейных интегральных операторов вольтерровского типа. Этот случай мы и рассмотрим более подробно в предположении об изотропности изучаемой среды.

13. Состояние среды при таком описании по-прежнему определяется вектором смещений (2.1), по которому вычисляются компоненты "тензора" деформаций (2.3). Также, как и в п. 1–8, вводятся понятия координатных векторов напряжений (2.4) и симметричного тензора напряжений $t_{ik} = t_{ki}$; при этом естественно сохраняется формула (2.5). Линейная связь (2.7), связь t_{ik} и e_{ik} сохраняет свой внешний вид, но под λ и μ подразумеваются не множители, зависящие от рассматриваемой точки (x_1, x_2, x_3) среды, а операторы следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \int\limits_0^t \lambda_1(t-\tau)\ldots d\tau, \\ \mu &= \mu_0 + \int\limits_0^t \mu_1(t-\tau)\ldots d\tau \end{aligned}\right\}. \tag{2.36}$$

Здесь $\lambda_0 = \lambda_0(x_1, x_2, x_3) > 0$, $\mu_0 = \mu_0(x_1, x_2, x_3) > 0$ – функции точек среды, а разностные ядра $\lambda_1(t-\tau)$ и $\mu_1(t-\tau)$ операторов также могут завесить и от x_1, x_2, x_3.

С учетом указанного изменения в формулах (2.7) уравнения движения имеют прежний вид (2.8), а в случае однородных сред записываются в форме (2.10) уравнений Ламе, где под λ и μ подразумеваются операторы из (2.36), в которых λ_0 и μ_0 являются постоянными, а ядра $\lambda_1(t)$ и $\mu_1(t)$ не зависят от x_1, x_2, x_3.

Заметим, что среды, динамические процессы деформации в которых описываются обсуждаемыми уравнениями, обычно называют вязкоупругими.

14. Пусть $\vec{u} = \vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ – вектор смещений в вязкоупругой изотропной среде, а e_{ik} – отвечающие ему компоненты тензора деформации из (2.3). Учитывая (2.36), представим компоненты t_{ik} тензора напряжений в виде двух слагаемых:

$$t_{ik} = t^0_{ik} + t^{(1)}_{ik}, \tag{2.37}$$

и

$$\left.\begin{aligned} t^0_{ii} &= \lambda_0 \operatorname{div}\vec{u} + 2\mu_0\, e_{ii}, \quad t^0_{ik} = \mu_0\, e_{ik}, \quad (i \neq k),\\ t^{(1)}_{ii} &= \lambda_1 \operatorname{div}\vec{u} + 2\mu_1\, e_{ii}, \quad t^{(1)}_{ik} = \mu_1\, e_{ik}, \quad (i \neq k),\end{aligned}\right\} \tag{2.38}$$

причем под λ_1 и μ_1 понимаются операторы из (2.36).

По таблице $t_{ik} = t_{ki}$ из (2.37) определим координатные векторы напряжений типа (2.4), представим эти векторы в виде слагаемых

$$\vec{t}_k = \vec{t}^{\,0}_k + \vec{t}^{\,(1)}_k,$$

соответствующих слагаемым в (2.37), и воспользуемся тождествами (1.33) и (1.35) при $\vec{a} = \dot{\vec{u}}$. Тогда легко получается равенство

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\big(\dot{u}_1\vec{t}_1 + \dot{u}_2\vec{t}_2 + \dot{u}_3\vec{t}_3\big) - \big(\dot{\vec{u}},\, \overrightarrow{\operatorname{Div}}\, t_{ik}\big) = \\ = \sum_{i\leqslant k}\big(t^0_{ik} + t^{(1)}_{ik}\big)\dot{e}_{ik} = \sum_{i\leqslant k} t^0_{ik}\,\dot{e}_{ik} + \sum_{i\leqslant k} t^{(1)}_{ik}\,\dot{e}_{ik},\end{gathered} \tag{2.39}$$

в котором точкой сверху обозначено дифференцирование по времени t.

Нетрудно проверить, что если по тензору деформаций $e_{ik} = e_{ki}$ вязкоупругой среды построить определенно положительную квадратичную функцию

$$2W_0 = (\lambda_0 + 2\mu_0)\big(e_{11} + e_{22} + e_{33}\big)^2 +$$

$$+\mu_0\bigl\{\bigl(e_{12}^2+e_{13}^2+e_{23}^2-4\bigl(e_{11}e_{22}+e_{11}e_{33}+e_{22}e_{33}\bigr)\bigr\}, \qquad (2.40)$$

аналогичную (2.13) и содержащую (положительные) параметры λ_0 и μ_0 из (2.36), то окажется

$$t_{ik}^0=\frac{\partial W_0}{\partial e_{ik}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial W_0}{\partial t}=\sum_{i\leqslant k} t_{ik}^0\,\dot e_{ik}, \qquad (2.41)$$

где t_{ik}^0 – первое слагаемое из (2.37). Вторая формула из (2.41) дает нужное нам выражение для первого слагаемого правой части формулы (2.39). Что же касается второго слагаемого этой формулы, то на основании нижней строки (2.38) и вида операторов λ_1 и μ_1 (вытекающего из (2.36)) для него легко получается выражение

$$I\equiv\sum_{i\leqslant k} t_{ik}^{(1)}\,\dot e_{ik}=\operatorname{div}\dot{\vec u}\int_0^t \lambda_1(t-\tau)\operatorname{div}\vec u\,d\tau+$$

$$+2\sum_{k=1}^3 \dot e_{kk}\int_0^t \mu_1(t-\tau)e_{kk}d\tau+\sum_{i<k}\dot e_{ik}\int_0^t \mu_1(t-\tau)e_{ik}\,d\tau, \qquad (2.42)$$

в котором $\dot{\vec u}$ и $\dot e_{ik}$ являются функциями от x_1, x_2, x_3, t, а $\vec u$ и e_{ik} (входящие под знаки интегралов) – функциями от x_1, x_2, x_3, τ.

Важно обратить внимание на особенность конструкции выражения I из (2.42), содержащего (с одинаковыми знаками) несколько слагаемых вида

$$j(t)=\dot e(t)\int_0^t \chi(t-\tau)e(\tau)\,d\tau, \qquad (2.43)$$

где под $\chi(t)$ подразумевается $\lambda_1(t)$ или $\mu_1(t)$, а под $e(t)$ – или $\operatorname{div}\vec u$, или же $e_{ik}(t)$, причем пространственные переменные x_1, x_2, x_3 упомянутых функций не выписаны ради краткости. Эта особенность состоит в тривиально доказуемом факте, что если $\chi(t)>0$, а $e(t)$ и $\dot e(t)$ непрерывны, причем $e(0)=0$, то существует некоторый (конечный) промежуток времени $0<t<t_1$, в котором с необходимостью оказывается $j(t)\geqslant 0$. Совершенно таким же свойством обладает величина I из (2.42), если ядра операторов из (2.36) удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_1(t)\geqslant 0, \quad \mu_1(t)\geqslant 0. \qquad (2.44)$$

Указанное свойство, которое мы назовем свойством неотрицательности I, оказывается весьма существенным при доказательстве единственности решения динамических задач в случае вязкоупругих сред (п. 6 §3).

Если учесть (2.41) и (2.42) и уравнение движения (2.8), то равенство (2.39) после интегрирования по области V, ограниченной гладкой поверхностью S с внешней нормалью $\vec{n}$, приводят к формуле

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{(V)}\left[W_0+\frac{1}{2}\rho(\dot{\vec{u}})^2\right]dV+\iiint\limits_{(V)} I\,dV = \\ = \iiint\limits_{(V)}(\vec{f}\,\dot{\vec{u}})\,dV+\iint\limits_{(S)}(\vec{f}\,\dot{\vec{u}})\,dS, \tag{2.45}$$

похожей на (2.18), которую можно толковать как закон сохранения энергии в линейной теории вязкоупругих сред. При этом выражение

$$\iiint\limits_{(V)} I\,dV \equiv \iiint\limits_{(V)}\sum_{i\leqslant k} t_{ik}^{(1)}\,\dot{e}_{ik}\,dV \tag{2.46}$$

соответствует энергии, поглощенной средой из-за вязкости материала. Остается отметить, что в реальных вязкоупругих средах условия (2.44) выполняются. При этом на основании вышеизложенного нельзя утверждать, что интеграл (2.46) всегда $\geqslant 0$. Однако, если при $t=0$ было $\vec{u}\equiv 0$, а при $t>0$ в среде появлялись возмущения, то можно утверждать существование такого интервала $0<t<t_1$ времени, в котором $I\geqslant 0$ и, следовательно, интеграл (2.46) неотрицателен. Этого уже достаточно для доказательства единственности решений динамических задач в случае вязкоупругих материалов.

§3. Постановка задач в динамической теории упругости. Единственность решения в классе функций со слабыми разрывами

1. Пусть V – произвольная конечная или бесконечная область переменных $x\equiv x_1$, $y\equiv x_2$, $z\equiv x_3$, ограниченная поверхностью S с внешней нормалью $\vec{n}$. Предполагается, что область V заполнена упругой средой, характеризующейся упругими параметрами $c_{ik,\nu\mu}=c_{ik,\nu\mu}(x_1,x_2,x_3)$ и массовой плотностью $\rho=$

$\rho(x_1, x_2, x_3)$. На элементы среды действуют внешние массовые силы $\vec{f} = \vec{f}(x_1, x_2, x_3)$. В начальный момент времени, принимаемый за $t = 0$, считаются известными поля смещений и скоростей смещений, т.е.

$$\vec{u}\Big|_{t=0} = \vec{u}_0(x_1, x_2, x_3), \qquad \dot{\vec{u}}\Big|_{t=0} = \vec{v}_0(x_1, x_2, x_3). \tag{3.1}$$

В точках N граничной поверхности S предполагаются заданными:

a) или значения вектора смещений

$$\vec{u}\Big|_N = \vec{U}(N, t), \tag{3.2}$$

b) или значения вектора напряжений

$$\vec{t}_n\Big|_N = \vec{T}(N, t), \tag{3.3}$$

c) или же, наконец, смешанные условия вида

$$u_{\tau_3}\Big|_N = U_3(N, t), \quad (\vec{t}_n)_{\tau_n}\Big|_N = T_\nu(N, t), \tag{3.4}$$

или

$$u_{\tau_\nu}\Big|_N = U_\nu(N, t), \quad (\vec{t}_n)_{\tau_3}\Big|_N = T_3(N, t), \tag{3.4$'$}$$

в которых на границе S задаются частино составляющие вектора $\vec{u}$, а частично составляющие вектора $\vec{t}_n$. Заметим, что в (3.4) и (3.4$'$) входят проекции векторов $\vec{u}$ и $\vec{t}_n$ на систему взаимно перпендикулярных ортов $\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_2$, $\vec{\tau}_3$, определенных для каждой точки N на S. Обычно один из этих векторов (вектор $\vec{\tau}_3$) совпадает с нормалью $\vec{n}$ к S.

Функции $\vec{f}$, $\vec{u}_0$, $\vec{v}_0$, а также функции из правых частей того (одного!) из граничных условий (3.2), или (3.3), или (3.4), или (3.4$'$), при которых рассматривается формулируемая ниже задача, считаются известными. При этом в случае бесконечных областей V всегда предполагается существование такого конечного $R > 0$, что все упомянутые функции тождественно равны нулю вне сферы радиуса R с центром в какой-нибудь фиксированной точке области V. Это условие выражает тривиальный факт, что любые измерения и (контролируемые) воздействия на среду могут производиться лишь на конечных расстояниях от выбранной точки сферы.

Если внутри области V параметры $c_{ik\nu\mu}$ и ρ остаются непрерывными, то нестационарные динамические задачи теории упругости формулируются следующим образом. Требуется найти поле смещений $\vec{u}(x,y,z)$ в области V из решения уравнения (2.8)

$$\overrightarrow{\mathrm{Div}}\, t_{ik} + \vec{f} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$$

при начальных условиях (3.1) во всех внутренних точках V и при одном из граничных условий (3.2), (3.3), (3.4) или (3.4′). При этом может оказаться, что на различных частях граничной поверхности S заданы различные граничные условия из указанных (но обязательно на каждой части S только одно из таких условий).

2. Докажем единственность решения поставленной задачи в предположении, что при заданных функциях $\vec{f}$, $\vec{u}_0$ и $\vec{v}_0$ и функциях из правых частей граничных условий решение реализуется в классе векторов $\vec{u}(x_1,x_2,x_3,t)$ со слабыми разрывами, т.е. таких векторов, что $\vec{u}$ непрерывно вместе с первыми частными производными в области V вплоть до S и имеет в V интегрируемые вторые частные производные. При указанной гладкости решения $\vec{u}$ можно пользоваться законом сохранения энергии в его интегральной форме (2.18). При этом будем сначала считать V конечной областью, ограниченной достаточно гладкой замкнутой поверхностью S.

Если существуют два решения $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$, то разность $\vec{u} \equiv \vec{u}_1 - \vec{u}_2$ удовлетворяет в V уравнению

$$\overrightarrow{\mathrm{Div}}\, t_{ik} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \tag{3.5}$$

и нулевыи начальным данным

$$\vec{u}\Big|_{t=0} \equiv 0, \qquad \dot{\vec{u}}\Big|_{t=0} \equiv 0. \tag{3.6}$$

На границе же S поле $\vec{u}$ удовлетворяет одному из однородных условий (3.2), (3.3), (3.4) или (3.4′), в правой части которого появляется нуль. При этом, например, в случае (3.2) оказывается $\vec{u}\big|_N = 0$, следовательно, и $\dot{\vec{u}}\big|_N = 0$. Нетрудно видеть, что какое бы из указанных граничных условий ни рассматривалось, в точках N границы S для поля $\vec{u}$ всегда выполняется равенство

$$\left(\vec{t}_k\, \dot{\vec{u}}\right)\Big|_N = 0. \tag{3.7}$$

Применяя к полю $\vec{u}$ формулу (2.18), в которой следует положить $\vec{f} \equiv 0$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_{(V)} \left[W + \frac{\rho}{2} (\dot{\vec{u}})^2 \right] dV = \iint\limits_{(S)} \left(\vec{t}_n \, \dot{\vec{u}} \right) dS, \tag{3.8}$$

где поверхностный интеграл из правой части равен нулю в силу (3.7). Поэтому из (3.8) следует

$$\iiint\limits_{(V)} \left[W + \frac{\rho}{2} (\dot{\vec{u}})^2 \right] \Big|_{t=t} dV = \iiint\limits_{(V)} \left[W + \frac{\rho}{2} (\dot{\vec{u}})^2 \right] \Big|_{t=0} dV = 0, \tag{3.9}$$

так как в момент $t = 0$ оказывается $(\dot{\vec{u}})^2 \equiv 0$ и $e_{ik} \equiv 0$ в силу (3.6). Значит $W \Big|_{t=0} = 0$ из-за (2.12). Но при любых t для W из (2.12) справедливо $W \geqslant 0$. Поэтому из (3.9) и предположенной непрерывности всех первых частных производных от $\vec{u}$ следует $W \equiv 0$ и $\dot{\vec{u}} \equiv 0$.

Итак, $e_{ik} \equiv 0$ и $\dot{\vec{u}} \equiv 0$. Отсюда вытекает, что

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \left[\vec{r} \times \vec{\omega}_0 \right], \quad \text{где} \quad \vec{u}_0 = \text{const}, \quad \vec{\omega}_0 = \text{const}\,.$$

Но в силу (3.6) оказывается, что $\vec{u}_0 = 0$, $\vec{\omega}_0 = 0$ и, следовательно, $\vec{u} \equiv 0$, что и требуется.

3. Нетрудно видеть, что приведенное доказательство фактически применимо и для случая безграничной области V. Действительно, при рассмотрении процессов в течение любого конечного промежутка $0 \leqslant t \leqslant T$ времени всегда можно дополнить S такой поверхностью Σ, что замкнутая область, ограниченная поверхностью S и Σ, будет конечной и что в окрестности Σ оказывается $\vec{u} \equiv 0$. Возможность выбора Σ, обладающей указанными свойствами: следует из гиперболичности системы уравнений (2.8),[5)] а также из условия, что на достаточно больших расстояних все внешние воздействия на среду равны нулю (см. п. 1).

4. Если в области V имеется конечное число границ раздела σ_q, при переходе через которые (все или некоторые) параметры ρ и $c_{ik,\nu\mu}$ из (2.6) испытывают разрывы непрерывности, то поле смещений $\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t) \equiv \vec{u}(M, t)$ и его частные производные могут

[5)] т.е. конечности скорости распространения упругих сигналов иметь разрывы на σ_q. Будем понимать под классом полей $\vec{u}$ со слабыми разрывами в области V такое множество векторов $\vec{u}$, что: 1) в области V существуют интегрируемые вторые производные от $\vec{u}$, 2) $\vec{u}$ и все его первые частные производные непрерывны в V вплоть до S везде, за исключением границ раздела σ_q, и 3) существуют конечные предельные значения $\vec{u}^{\,\pm}$ и $\vec{u}^{\,\pm}_{x_k}$ производных $\vec{u}(M,t)$ и $\vec{u}_{x_k}(M,t)$ при стремлении точек $M = M^+$ и $M = M^-$ к точке $N \in \sigma_1$ вдоль нормали $\vec{n}(N)$ как с положительной, так и с отрицательной стороны от σ_q (Рис. 1). При этом нормаль $\vec{n}$ к σ_q направлена от поверхности σ_q в положительную ее сторону.

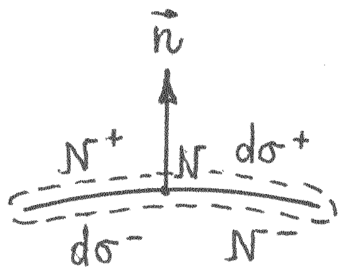

Рис. 1.

Обволакивая каждую границу раздела σ_q бесконечно тонким чехлом с элементами $d\sigma^+ = d\sigma = d\sigma^-$ и понимая под V часть среды, ограниченную внешней поверхностью S, а также упомянутыми чехлами $(\sigma_q^+ + \sigma_q^-)$ вместо (3.8) будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{(V)}\left[W + \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right)^2\right] dV =$$

$$= \iint\limits_{(S)} (\vec{t}_n\,\vec{u})\,dS + \sum_q \iint\limits_{\sigma_q}\left[(\vec{t}_n^{\,-}\,\vec{u}^{\,-}) - (\vec{t}_n^{\,+}\,\vec{u}^{\,+})\right] d\sigma_q,$$

а вместо (3.9) получим

$$\iiint\limits_{(V)}\left[W + \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right)^2\right] dV = \sum_q \iint\limits_{\sigma_q}\left[(\vec{t}_n^{\,-}\,\vec{u}^{\,-}) - (\vec{t}_n^{\,+}\,\vec{u}^{\,+})\right] d\sigma_q.$$

Поэтому вследствие неотрицательной определенности выражения $(W + \rho/2(\vec{\dot{u}})^2)$ можно утверждать, что теорема единственности имеет место (т.е. $\vec{u}_1 \equiv \vec{u}_2$), если оказывается

$$(\vec{t}_n^{\,-}\, \vec{\dot{u}}^{\,-}) - (\vec{t}_n^{\,+}\, \vec{\dot{u}}^{\,+}) \leqslant 0. \tag{3.10}$$

Условия (3.10) нелинейны, поэтому в линейных задачах теории упругости их заменяют такими линейными условиями, из которых с необходимостью следует (3.10). Чаще всего встречаются условия

$$\vec{t}_n^{\,+} = \vec{t}_n^{\,-}, \quad \vec{u}^{+} = \vec{u}^{-} \tag{3.11}$$

жесткого контакта (когда при переходе через границу σ_q непрерывными остаются векторы смещений $\vec{u}$ и напряжений $\vec{t}_n$, где $\vec{n}$ нормаль к границе). Также встречаются условия скользящего контакта

$$\begin{aligned} &\left(\vec{t}_n^{\,+}\right)_n = \left(\vec{t}_n^{\,-}\right)_n, \quad (\vec{u}^{\,+})_n = (\vec{u}^{\,-})_n \\ &\left(\vec{t}_n^{\,+}\right)_{\tau_\nu} = \left(\vec{t}_n^{\,-}\right)_{\tau_\nu} = 0, \quad (\nu = 1, 2), \end{aligned} \tag{3.12}$$

где $\vec{\tau}_1$ и $\vec{\tau}_2$ – два независимых касательных направления к границе σ_q, а индексом n обозначено нормальное к границе направление.

Однако соотношение (3.10) выполняется и при неполно-скользящем контакте, когда вместо (3.12) на границе σ_q выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \left(\vec{t}_n^{\,+}\right)_n = \left(\vec{t}_n^{\,-}\right)_n, &\quad (\vec{u}^{\,+})_n = (\vec{u}^{\,-})_n \\ \left(\vec{t}_n^{\,+}\right)_{\tau_\nu} = \left(\vec{t}_n^{\,-}\right)_{\tau_\nu} = k\Big[(\vec{\dot{u}}^{\,-})_{\tau_\nu} - (\vec{\dot{u}}^{\,+})_{\tau_\nu}\Big], &\quad (\nu = 1, 2), \end{aligned} \tag{3.12$'$}$$

где $k \leqslant 0$. Контакты такого типа, по-видимому, могут встречаться в некоторых моделях сейсмических сред.

5. При наличии границ раздела в области V задачи динамической теории упругости формулируются следующим образом. Найти поле смещений $\vec{u}$ в области V, ограниченной поверхностью S, из решения уравнения (2.8) при начальных условиях (3.1) и при одном из граничных условий (3.2), (3.3), (3.4) или (3.4$'$), такое, чтобы на границах раздела σ_q выполнялись заданные условия контакта. Что касается аналитических свойств границ раздела, то без ограничения практической общности можно считать, что они задаются поверхностями, нормаль к которым непрерывно дифференцируема почти везде.

Единственность решения сформулированной задачи в классе векторов смещений $\vec{u}$ со слабыми разрывами (определенном в п. 4) доказывается также, как и в п. 2 с той только разницей, что из-за разрывов непрерывности первых частных производных от $\vec{u}$ на границах раздела σ_q закон энергии в интегральной форме приходится сначала писать не для всей области V, а для области V, с выделенными (например, поверхностями σ_q^- и σ_q^+, параллельными границам раздела σ_q) чехлами.

6. В заключении параграфа полезно остановиться на случае вязкоупругих сред, нестационарные процессы в которых описываются формализмом теории упругости, с той только разницей, что упругие параметры $c_{ik\mu\nu}$ из (2.6) или λ и μ из (2.7) заменяются на операторы вида (2.36). Указанное различие не влияет на постановки корректных задач, которые формулируются теперь точно также, как и в п. 1 или в п. 5.

Покажем, что в случае изотропных вязкоупругих сред с операторами (2.36), ядра которых удовлетворяют неравенствам (2.44), теорема о единственности решения задач из п. 1 имеет место. При этом будем считать, что решение $\vec{u}$ реализуется в классе векторных функций, непрерывных вместе со всеми частными производными, а также вторыми производными вида $\vec{u}_{x_i x_k}$ при $(k = 1, 2, 3)$. (Заметим, что для случая вязкоупругости такой класс решений обычно оказывается исчерпывающе общим.)

Доказательство теоремы единственности можно проводить буквально на основе рассуждений п. 2 настоящего параграфа, с той только разницей, что из-за присутствия в (2.45) слагаемого (2.46) вместо (3.9) получается соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_{(V)} \left[W_0 + \frac{\rho}{2} (\dot{\vec{u}})^2 \right] dV + \iint\limits_{(V)} I \, dV = 0, \tag{3.13}$$

в котором под $\vec{u}$ подразумевается разность любых двух решений $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ рассматриваемой задачи, удовлетворяющая, очевидно, нулевым начальным данным (3.6).

Непрерывная функция $\vec{u}(x_k, t) = \vec{u}_1(x_k, t) - \vec{u}_2(x_k, t)$ равна нулю тождественно $\vec{u}(x_k, t) \equiv 0$ при $t = 0$ в силу условий (3.6). Если бы при $t > 0$ оказалось $\vec{u}(x_k, t) \equiv 0$, то единственность решения задачи (в указанном классе функций) имела бы место. В противном же случае должно было бы существовать значение $t_0 > 0$, такое, что $\vec{u} \equiv 0$ при $t < t_0$, и $\vec{u} \neq 0$, если $t = t_0 + \delta$, где $\delta > 0$. Но тогда, по свойству интегралов вида (2.43), при достаточно малом значении $\delta > 0$ должно было бы оказаться

$$\iint\limits_{(V)} I\, dV > 0,$$

вследствие чего из (3.13) следовало бы

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_{(V)} \left[W_0 + \frac{\rho}{2}(\vec{\dot{u}})^2 \right] dV < 0$$

и

$$\iiint\limits_{(V)} \left[W_0 + \frac{\rho}{2}(\vec{\dot{u}})^2 \right] dV < 0,$$

что невозможно.

Итак, предположение, что $\vec{u} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 \neq 0$ приводит к противоречию. Значит $\vec{u} \equiv 0$, т.е. единственность решения задач из п. 1 для случая вязкоупругих сред имеет место.

§4. О структуре тензора упругих параметров в случаях основных типов анизотропной среды и о классических моделях сейсмических сред

Уравнения движения (2.9) линейной упругой анизотропной среды содержат вещественные параметры $c_{ik,\mu\nu} \equiv c_{ik,\mu\nu}(x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяющие естественным условиям симметрии

$$c_{ik,\mu\nu} = c_{ki,\mu\nu} = c_{ik,\nu\mu} = c_{\mu\nu,ik}. \tag{4.1}$$

Вследствие этого в общем случае произвольной анизотропии среда характеризуется 21-им независимым упругим параметром. При этом неустранимых параметров в уравнениях (2.9) оказывается 18, так как тремя параметрами всегда можно распорядиться по произволу путем подходящего выбора направлений осей рассматриваемой декартовой системы координат.

Однако при столь большом числе параметров, определяющих свойства среды, описание волновых процессов в ней становится физически бессодержательным. Поэтому приобратает прикладной интерес поиск таких классов упругих сред, которые характеризуются меньшим числом вещественных параметров.

К меньшему числу вещественных параметров можно прийти лишь путем наложения на класс рассматриваемых сред некоторых ограничительных условий, подобных условиям пространственной симметрии, характерной для монокристаллов (которые как раз и послужили отправной базой для первичного этапа изучения явлений упругой анизотропии). Такого рода условия могут реализовываться и в блоках сейсмических сред. Вследствие этого получаемые упрощенные уравнения движения выборочных классов анизотропных сред оказываются полезными и в сейсмической практике.

1. При выяснении вопросов, касающихся возможно более простых структурных форм таблицы коэффициентов $c_{ik,\mu\nu}$ тензора упругих параметров среды целесообразно исходить из следующих двух положений.

Во-первых, из факта инвариантности (относительно афинных ортогональных преобразований координат $L \equiv L(x_k)$) выражения (2.12), т.е.

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,k,\mu,\nu=1}^{3} c_{ik,\mu\nu} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{\mu\nu} = \text{инв}, \tag{4.2}$$

для плотности энергии упругой деформации среды (которое лежит в основе реалогии представления об упругой среде в теории упругости). И, во-вторых, из закона преобразования

$$c'_{ab,cd} = \frac{\partial x'_a}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x'_b}{\partial x_\beta} \frac{\partial x'_c}{\partial x_\gamma} \frac{\partial x'_d}{\partial x_\delta} c_{\alpha\beta,\gamma\delta} \tag{4.3}$$

компонент тензора 4-го ранга упругих параметров при переходе ($L \leftrightarrow L'$) от одной правовинтовой декартовой системы координат $\{x_k\}$ к другой подобной же системе $\{x'\}$, связанной с первой системой формулами ортогонального преобразования

$$x'_k = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} x_i; \quad \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} \alpha_{\tau i} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ik} \alpha_{i\tau} = \delta_{k\tau}. \tag{4.4}$$

Заметим, что в формуле (4.3) каждый из индексов a, b, c и d принимает независимо от других любые значения из 1, 2 и 3, а в правой части равенства подразумевается суммирование по значкам α, β, γ и δ, принимающим независимо друг от друга значения 1,2 и 3. Кроме того, напомним, что инвариантность выражения (2.12) следует из инвариантности (в классической физике) энергии $W\,dV$ материального элемента среды относительно любого преобразования координат и инвариантности элемента объема dV относительно ортогональных преобразований координат. Что же касается формулы (4.3) преобразования компонент тензора упругих параметров, то она, как известно, непосредственно вытекает из инвариантности выражения (2.12), а также из тензорного характера величин ε_{ik} из (2.2).

2. К высказанным только что предварительным замечаниям следует присовокупить, что сразу же после выяснения структуры тензора упругих параметров встает вопрос о способах достаточно наглядного представления получающихся окончательных результатов. И здесь оказывается весьма полезной запись таблицы величин $c_{ik,\mu\nu}$ в форме шестирядной квадратной матрицы, возможность чего непосредственно следует из соотношений симметрии (4.1).

Для осуществления упомянутой записи устанавливают по схеме

$$\begin{gathered}(11) \leftrightarrow (1); \quad (22) \leftrightarrow (2); \quad (33) \leftrightarrow (3); \quad (23) = (32) \leftrightarrow (4); \\ (31) = (13) \leftrightarrow (5); \quad (12) = (21) \leftrightarrow (6)\end{gathered} \tag{4.5}$$

соответствие между парами индексов (ik) и $(\mu\nu)$ симметричной матрицы $c_{ik,\mu\nu}$ и значением индекса α, изменяющегося от 1 до 6. Кроме же этого вводят обозначения

$$\begin{aligned} &t_{ik} = t_\alpha, \quad && c_{ik,\mu\nu} = c_{\alpha\beta}, \\ &\varepsilon_{ii} = \varepsilon_\alpha, \quad && (\alpha = i = 1, 2, 3), \\ &2\varepsilon_{ik} = \varepsilon_\alpha, \quad && (i \neq k,\ \alpha = 4, 5, 6), \end{aligned} \tag{4.6}$$

позволяющие переписать формулы (2.12) и (2.6) в форме

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{6} c_{\alpha\beta}\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta \geqslant 0, \quad t_\alpha = \sum_{\beta=1}^{6} c_{\alpha\beta}\varepsilon_\beta, \tag{4.6$'$}$$

которые в последующем, правда, не используются.

Что касается тензора упругих параметров среды, то в соответствии с (4.5) и (4.6) его составляющие представляются шестирядной симметричной матрицей

$$(c_{\alpha\beta}) \equiv \begin{pmatrix} c_{11}, & c_{12}, & \ldots, & c_{16} \\ c_{21}, & c_{22}, & \ldots, & c_{26} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{61}, & c_{62}, & \ldots, & c_{66} \end{pmatrix}, \quad c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}, \tag{4.7}$$

элементы которой подчинены, например, условиям

$$c_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11}, & c_{22} \\ c_{21}, & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11}, & c_{12}, & c_{13} \\ c_{21}, & c_{22}, & c_{23} \\ c_{31}, & c_{32}, & c_{33} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} c_{11}, & c_{12}, & \ldots, & c_{14} \\ c_{21}, & c_{22}, & \ldots, & c_{24} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{41}, & c_{42}, & \ldots, & c_{44} \end{vmatrix} > 0, \ldots, |c_{\alpha\beta}| > 0, \tag{4.8}$$

обеспечивающим положительную определенность квадратичной формы из $(4.6')$.

3. При установлении структуры таблицы $c_{\alpha\beta}$ из (4.7) в случае изотропной среды естественно исходить из условия

$$c'_{ab,cd} = c_{ab,cd},$$

выражающего факт физической эквивалентности в описании полей смещений всех координатных систем L, связанных друг с другом ортогональными преобразованиями (вращения) (4.4). Поэтому в условии инвариантности (4.2) плотности энергии величины $c_{ik,\mu\nu}$ оказываются постоянными в любых координатных системах L из (4.4). Само же выражение (4.2), содержащее постоянные величины $c_{ik,\mu\nu}$, должно представлять собой (в классе указанных систем координат L) квадратичный инвариант относительно величин ε_{ik} – компонентов тензора деформации. Однако существует лишь два таких квадратичных инварианта, представляемых, например, выражениями J_1 и J_2 из (1.14). Поэтому для плотности потенциальной энергии W из (4.2) получается выражение

$$2W = aJ_1 + bJ_2, \tag{4.9}$$

в котором обычно полагают $a = \lambda$ и $b = 2\mu$. Это приводит к следующему окончательному выражению:

$$W = \frac{\lambda}{2} I_1 + \mu I_2 = \frac{\lambda + 2\mu}{2}\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right)^2 +$$

$$+2\mu\Big[\varepsilon_{12}^2+\varepsilon_{13}^2+\varepsilon_{23}^2-\big(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}+\varepsilon_{11}\varepsilon_{33}+\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}\big)\Big]. \qquad (4.10)$$

Для составляющих же тензора напряжений в соответствии с (2.6) получаются формулы

$$t_{ii}=\lambda\sum_{q=1}^{3}\varepsilon_{qq}+2\mu\varepsilon_{ii}=\lambda\operatorname{div}\vec{u}+2\mu\frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad (i=1,2,3),$$

$$t_{ik}=2\mu\varepsilon_{ik}=\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right), \quad (i\neq k),$$

или

$$t_{ik}=\lambda\sum_{q=1}^{3}\varepsilon_{qq}\delta_{ik}+2\mu\varepsilon_{ik}, \quad (i,k=1,2,3), \qquad (4.11)$$

выражающие закон Гука в случае изотропных упругих сред. Что касается матрицы $(c_{\alpha\beta})$ из (4.7), то в случае изотропных сред она выглядит следующим образом:

$$(c_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix}\lambda+2\mu, & \lambda, & \lambda, & 0, & 0, & 0\\ \lambda, & \lambda+2\mu, & \lambda, & 0, & 0, & 0\\ \lambda, & \lambda, & \lambda+2\mu, & 0, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 0, & \mu, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 0, & \mu, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \mu\end{pmatrix}. \qquad (4.12)$$

4. При установлении структуры матрицы $(c_{\alpha\beta})$ в случае сред с осью симметрии второго порядка (моноклинные кристаллы) будем считать, что оси Ox_3 рассматриваемых декартовых координатных систем совмещены с осью симметрии среды. Тогда при вращении среды вокруг оси Ox_3 на угол $\varphi=\pi$ среда совмещается сама с собой.

Обозначая через L и L' соответственно исходную координатную систему и систему, повернутую относительно оси Ox_3 системы L на угол $\varphi=\pi$, для преобразования координат $L\to L'$ будем иметь

$$\frac{\partial x_1'}{\partial x_k}=-\delta_{k1}, \quad \frac{\partial x_2'}{\partial x_k}=-\delta_{k2}, \quad \frac{\partial x_3'}{\partial x_k}=-\delta_{k3}, \qquad (4.13)$$

где δ_{ki} – символ Кронекера. При рассматриваемом преобразовании в формуле (4.3) должно оказаться $c'_{ab,cd}=c_{ab,cd}$ (так как среда совмещается сама с собой при переходах типа $L \to L'$). При учете (4.13) это приводит, как легко видеть, к уравнениям

$$c_{ab,cd} = (-)^p c_{ab,cd}, \quad (a,\, b,\, c,\, d = 1, 2, 3), \tag{4.14}$$

в которых p равно числу, указывающему, сколько раз цифра 3 встречается в последовательности чисел a, b, c, d. Очевидно, что тем комбинациям чисел a, b, c, d, которым отвечает нечетное значение p, соответствует $c_{ab,cd} = 0$. Таким образом, мы убеждаемся, что

$$c_{ii,k3} = 0, \quad c_{12,k3} = 0, \quad (k = 1, 2, 3). \tag{4.15}$$

При учете обозначений (4.5) и (4.6) это приводит к равенствам

$$c_{64} = c_{46} = c_{65} = c_{56} = c_{\alpha 4} = c_{4\alpha} = c_{\alpha 5} = c_{5\alpha} = 0, \quad (\alpha \leqslant 3) \tag{4.15$'$}$$

и к следующей таблице упругих параметров

$$\begin{pmatrix} c_{11}, & c_{12}, & c_{13}, & 0, & 0, & c_{16} \\ c_{12}, & c_{22}, & c_{23}, & 0, & 0, & c_{26} \\ c_{13}, & c_{23}, & c_{33}, & 0, & 0, & c_{36} \\ 0, & 0, & 0, & c_{44}, & c_{45}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & c_{45}, & c_{55}, & 0 \\ c_{16}, & c_{26}, & c_{36}, & 0, & 0, & c_{66} \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

Такая таблица содержит 13 независимых параметров, из которых один может быть отнесен за счет неопределенности ориентации оси Ox_1. Соответствующим выбором оси Ox_1 число независимых параметров может быть уменьшено на единицу.

5. В случае сред с тремя взаимно перпендикулярными осями симметрии второго порядка (ромбические кристаллы) естественно оси симметрии совмещать с осями координат рассматриваемых декартовых систем. Так как каждая координатная ось является осью симметрии второго порядка, то искомые элементы таблицы упругих параметров должны удовлетворять трем (независимым друг от друга) соотношениям вида (4.14), получаемым в случае вращения вокруг каждой из координатных осей.

При рассмотрении оси Ox_3 получаются соотношения (4.15) или (4.15$'$). Рассмотрение же осей Ox_1 и Ox_2 приводит к соотношениям

$$c_{ii,k1} = c_{23,k1} = 0, \quad (k \neq 1,\ i = 1, 2, 3),$$
$$c_{ii,k2} = c_{13,k2} = 0, \quad (k \neq 2,\ i = 1, 2, 3)$$

или

$$c_{45} = c_{46} = c_{56} = c_{\alpha 4} = c_{\alpha 5} = c_{\alpha 6} = 0, \quad (\alpha = 1, 2.3), \tag{4.17'}$$

где, конечно, $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$. Нетрудно видеть, что при учете равенств (4.15′) и (4.17′) мы приходим к таблице упругих параметров

$$\begin{pmatrix} c_{11}, & c_{12}, & c_{13}, & 0, & 0, & 0 \\ c_{12}, & c_{22}, & c_{23}, & 0, & 0, & 0 \\ c_{13}, & c_{23}, & c_{33}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & c_{44}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & c_{55}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & c_{66} \end{pmatrix}, \tag{4.18}$$

содержащей 9 неустранимых независимых величин.

6. В случае сред с осью симметрии четвертого порядка целесообразно ось Ox_3 координатной системы совместить с осью симметрии среды. Свойства рассматриваемой среды таковы, что при повороте вокруг оси Ox_3 на угол $\varphi = \pi/2$ (следовательно, и на угол $\varphi = \pi$) среда совмещается сама с собой, т.е. ось симметрии четвертого порядка оказывается в то же время осью симметрии второго порядка. Вследствие последнего обстоятельства элементы $c_{\alpha\beta}$ таблицы $(c_{\alpha\beta})$ должны удовлетворять равенствам (4.15′). Но и среди оставшихся 13 элементов вида (4.16) 6 оказываются равными нулю.

Действительно, при переходе от системы координат L к системе L' вращением вокруг оси Ox_3 на угол $\varphi = \pi/2$ в левой части равентв (4.3) следует писать $c_{ab,cd}$ вместо $c'_{ab,cd}$. Что же касается коэффициентов из правой части преобразования (4.3), то для них, очевидно, справедливы формулы

$$\frac{\partial x'_1}{\partial x_k} = \delta_{2k}, \quad \frac{\partial x'_2}{\partial x_k} = \delta_{1k}, \quad \frac{\partial x'_3}{\partial x_k} = \delta_{3k}. \tag{4.19}$$

Учитывая (4.19), воспользуемся соотношениями (4.3) (при $c'_{ab,cd} = c_{ab,cd}$) и применим их лишь при значениях индексов ab, cd, отвечающих отличным от нуля элементам таблицы (4.16). В результате получаем равенства

$$c_{16} = -c_{26}, \quad c_{44} = c_{55}, \quad c_{11} = c_{22}, \quad c_{13} = c_{23}, \quad c_{36} = c_{45} = 0,$$

при учете которых таблица (4.16) упрощается и принимает вид

$$\begin{pmatrix} c_{11}, & c_{12}, & c_{13}, & 0, & 0, & c_{16} \\ c_{12}, & c_{12}, & c_{13}, & 0, & 0, & -c_{16} \\ c_{13}, & c_{13}, & c_{33}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & c_{44}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & c_{44}, & 0 \\ c_{16}, & -c_{26}, & 0, & 0, & 0, & c_{66} \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Таким образом, тензор упругих параметров содержит в рассматриваемом случае 7 независимых параметров, из которых один может быть исключен выбором соответствующего направления оси Ox_1.

7. Не ставя здесь целью рассмотреть все типы анизотропии, отвечающие известным классам симметрии кристаллов, мы стремились лишь пояснить способы установления структуры тензоров упругих параметров анизотропных сред, а также получить результаты для случаев, которые, как нам кажется, имеют бóльшую вероятность найти приложения в сейсмике. И вот в последнем отношении первенствующее положение несомненно занимают так называемые трансверсально-изотропные среды, которые и надлежит еще рассмотреть.

В трансверсально-изотропных средах существует лишь одна ось симметрии бесконечно высокого порядка (принимаемая далее за ось Ox_3 декартовой координатной системы L), т.е. такая ось, что при повороте среды вокруг нее на любой угол φ среда совмещается сама с собой. Таким образом, все направления, перпендикулярные такой оси, оказываются равноправными во всех отношениях.

Для установления структуры таблицы $c_{\alpha\beta}$ в таком случае удобно поступать аналогично тому, как и в п. 3.

Так как при повороте среды относительно выбранной оси Ox_3 на произвольный угол φ среда совмещается сама с собой, то в выражении (4.2) величины $c_{ik,\mu\nu}$ должны иметь одинаковые значения $c^0_{ik,\mu\nu}$ во всех системах координат L из (4.4), образующих класс $L(\varphi)$ указанных вращений на углы φ. С другой стороны, выражение

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,k,\mu\nu} c^0_{ik,\mu\nu} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{\mu\nu} \tag{4.21}$$

должно быть квадратичным инвариантом (по ε_{ik}) в классе преобразований $L(\varphi)$, записываемых явно, например, в виде

$$x'_3 = x_3; \quad x'_1 = x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi; \quad x'_2 = x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi,$$

или (4.22)

$$x_3 = x'_3; \quad x_1 = x'_1 \cos\varphi + x'_2 \sin\varphi; \quad x_2 = -x'_1 \sin\varphi + x'_2 \cos\varphi.$$

Итак, дело сводится к нахождению всех однородных квадратичных форм $f_k(\varepsilon)$ от ε_{ik}, инвариантных относительно преобразований (4.22).

Компоненты ε_{ik} тензора деформации преобразуются, как известно, по закону

$$\varepsilon'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}\,\frac{\partial x_k}{\partial x'_\beta}\varepsilon_{ik} \equiv \sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}\,\frac{\partial x_k}{\partial x'_\beta}\varepsilon_{ik},$$

где в соответствии с (4.22) оказывается

$$\frac{\partial x_i}{\partial x'_1} = \cos\varphi; \qquad \frac{\partial x_1}{\partial x'_2} = -\frac{\partial x_2}{\partial x'_1} = \sin\varphi; \qquad \frac{\partial x_3}{\partial x'_3} = 1,$$

а все остальные производные x_k по x'_k равны нулю. Поэтому имеют место формулы

$$\begin{gathered}
\varepsilon'_{11} = \cos^2\varphi\cdot\varepsilon_{11} + 2\sin\varphi\cos\varphi\cdot\varepsilon_{12} + \sin^2\varphi\cdot\varepsilon_{22},\\
\varepsilon'_{22} = \cos^2\varphi\cdot\varepsilon_{22} - 2\sin\varphi\cos\varphi\cdot\varepsilon_{12} + \sin^2\varphi\cdot\varepsilon_{11},\\
\varepsilon'_{12} = -\cos\varphi\sin\varphi\cdot\varepsilon_{11} + (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\varepsilon_{12} + \sin\varphi\cos\varphi\cdot\varepsilon_{22},\\
\varepsilon'_{13} = \cos\varphi\cdot\varepsilon_{13} + \sin\varphi\cdot\varepsilon_{23},\\
\varepsilon'_{23} = -\sin\varphi\cdot\varepsilon_{13} + \cos\varphi\cdot\varepsilon_{23}; \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon'_{33},
\end{gathered} \tag{4.23}$$

из которых явствует, что выражения

$$\begin{gathered}
\varepsilon'_{33} = \varepsilon_{33}, \quad {\varepsilon'}^2_{13} + {\varepsilon'}^2_{23} = \varepsilon^2_{13} + \varepsilon^2_{23},\\
{\varepsilon'}^2_{11} + {\varepsilon'}^2_{12} + {\varepsilon'}^2_{22} = \varepsilon^2_{11} + \varepsilon^2_{12} + \varepsilon^2_{22}
\end{gathered} \tag{4.24}$$

оказываются инвариантами преобразований (4.22). Если еще учесть наличие общих квадратичных инвариантов (1.14′) (относительно любых афинных ортогональных преобразований координат), то полный набор независимых квадратичных инвариантов преобразований (4.22) сведется к следующему

$$\bigl(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}\bigr)^2; \quad \varepsilon^2_{11} + 2\varepsilon^2_{12} + \varepsilon^2_{22}; \quad \varepsilon^2_{33}; \quad \varepsilon^2_{13} + \varepsilon^2_{23}; \quad \varepsilon_{33}\bigl(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}\bigr). \tag{4.25}$$

Итак, исходя из представления (4.21), на основании изложенного можно утверждать, что плотность потенциальной энергии трансверсально-изотропной среды представляется в виде

$$2W = a_1\bigl(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\bigr)^2 + 2a_2\bigl(\varepsilon_{11}^2+2\varepsilon_{12}^2+\varepsilon_{22}^2\bigr)+ \\ +a_0\varepsilon_{33}^2 + a_3\varepsilon_{33}\bigl(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\bigr)+4a_4\bigl(\varepsilon_{13}^2+\varepsilon_{23}^2\bigr), \qquad (4.21')$$

где a_0, $a_1, \ldots, a_4$ обозначают материальные параметры среды, введенные вместо параметров $c_{ik,\mu\nu}$ из (4.21).

С целью облегчить сопоставление волновых процессов в изотропных и трансверсально-изотропных средах целесообразно для материальных параметров применять следующие обозначения

$$a_0 = \lambda+2\mu-p,\quad a_1=\lambda,\quad a_2=\mu,\quad a_3=\lambda-l,\quad a_4=\mu-m. \quad (4.26)$$

При этом на основании (4.21′), (4.4), (4.5)–(4.6′) для матрицы $(c_{\alpha\beta})$ из (4.7) элементов тензора упругих параметров трансверсально-изотропной среды получается представление

$$(c_{\alpha\beta}) = \\ = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu, & \lambda, & \lambda-l, & 0, & 0, & 0\\ \lambda, & \lambda+2\mu, & \lambda-l, & 0, & 0, & 0\\ \lambda-l\mu, & \lambda-l, & \lambda+2\mu-p, & 0, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 0, & \mu-m, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 0, & \mu-m, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \mu \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Сопоставление (4.7) с (4.12) показывает, что при $p = l = m = 0$ трансверсально-изотропная среда вырождается в изотропную среду, характеризующуюся параметрами Ламе λ и μ.

Остается лишь отметить, что на основании (4.21′), (4.26) и (4.6′) для составляющих тензора напряжений в трасверсально-изотропной среде получаются формулы

$$t_{11} = \lambda\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{ii} + 2\mu\varepsilon_{11} - l\varepsilon_{33} \equiv t_{11}^0 - l\varepsilon_{33},$$

$$t_{22} = \lambda\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{ii} + 2\mu\varepsilon_{22} - l\varepsilon_{33} \equiv t_{22}^0 - l\varepsilon_{33},$$

$$
\begin{gathered}
t_{33} = \lambda \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii} + 2\mu\varepsilon_{33} - l(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) - p\varepsilon_{33} \equiv \\
\equiv t_{33}^{0} - l(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) - p\varepsilon_{33}, \qquad (4.28) \\
t_{12} = t_{21} = 2\mu\varepsilon_{12} \equiv t_{12}^{0}, \\
t_{13} = t_{31} = 2(\mu - m)\varepsilon_{13} \equiv t_{13}^{0} - 2m\varepsilon_{13}, \\
t_{23} = t_{32} = 2(\mu - m)\varepsilon_{23} \equiv t_{23}^{0} - 2m\varepsilon_{23},
\end{gathered}
$$

в которых через посредство t_{ik}^{0} обозначены составляющие (4.11) тензора напряжений в изотропной среде с параметрами λ и μ.

Итак оказывается, что трансверсально-изотропная среда характеризуется пятью неустранимыми (материальными) параметрами. Более полные сведения о составляющих тензора упругих параметров кристаллов различных типов (равно как и типичных геологических образований) можно получить из специальной линературы (см. [5] и [6]). Они здесь далее не понадобятся.

В заключение основной части §4 необходимо подчеркнуть, что представления (4.16), (4.18), (4.20) и (4.27) для составляющих $c_{\alpha\beta}$ их (4.7) тензоров упругих параметров среды получены в специальных системах координат L^0, связанных с осями симметрии среды, как указано в начале каждого из разделов параграфа.

Поэтому для получения значений составляющих тензора упругих параметров $c_{ik,\mu\nu}$ из (4.2) в рассматриваемой (рабочей) системе координат L необходимо, во-первых, получить значения составляющих $c_{ik,\mu\nu}^{0}$ тензора упругих параметров в (специальной) системе координат L^0, используя связь между $c_{\alpha\beta}$ и $c_{ik,\mu\nu}^{0}$ из соотношений (4.5) и (4.6). И, во-вторых, совершить переход от системы координат $L^0 \equiv L^0(x_k)$ к рабочей системе $L = L(x'_k)$ по формулам вида (4.3) (при $c_{\alpha\beta,\gamma\delta} = c_{\alpha\beta,\gamma\delta}^{0}$) для преобразования элементов тензоров 4-го ранга.

8. Обращаясь к завершающему разделу параграфа уместно отметить, что основной задачей последующего является изложение методов и алгоритмов получения информации о распространении волновых полей, возбуждаемых в упругих средах с тем, чтобы судить по ним о типе (характере) анизотропии или неоднородностей среды, а также – предложить наглядные количественные способы описания течения волновых процессов в моделях сейсмических сред достаточно общего вида.

Что же касается самих таких процессов, то первоочередным представляется изучение закономерностей в распространении полей сигнального типа, связанных с представлениями о фронтах (или квазифронтах – "вступлениях") и лучах волновых полей, распространяющихся в, так называемых, классических моделях сейсмических сред. Последние задаются в виде неподвижных областей V, имеющих блоковую структуру с конечным (и небольшим) числом границ раздела Σ_k, реализующихся в виде гладких математических поверхностей $\psi_k(x_1, x_2, x_3) = 0$. Предполагается, что такие поверхности имеют почти везде непрерывные орты нормалей

$$\vec{n}_k = \frac{\operatorname{grad} \psi_k(x_1, x_2, x_3)}{\left| \operatorname{grad} \psi_k(x_1, x_2, x_3) \right|},$$

и, что они пересекаются любой прямой лишь в конечном (небольшом) числе точек. Наконец, предполагается, что внутри блоков области V параметры среды $\rho(x_p)$ и $c_{ik,\mu\nu}(x_p)$ имеют требующуюся гладкость. При стремлении же точки $M = M(x_k)$ к границе раздела Σ по некасательному пути они имеют определенные предельные значения $\rho^{\pm}$ и $c^{\pm}_{ik,\mu\nu}$, различные, вообще говоря, с разных сторон ($\pm$) границы.

Остается лишь отметить, что под полями смещений сигнального типа здесь понимаются волновые поля, в структуре которых содержатся некоторые экстремальные образования (реперные отметки), перемещение которых как раз и определяет феномен распространения волн в пространстве. Основу таких образований всегда составляют какие-либо "быстро-изменяющиеся" части волновых полей. При этом наиболее простыми физически яркими представителями таких частей всегда оказываются разрывные (или – весьма близкие к разрывным) части полей смещений или их производных по x_k и t.

Таким образом, закономерности в распространении поверхностей разрыва поля упругих смещений в выбранных типах модельных сейсмических сред должны нести в себе именно ту информацию о свойствах рассматриваемой среды, которую стремятся получать в сейсмике при регистрации нестационарных волновых импульсов, для тех или иных сейсмических волн сигнального типа.

ГЛАВА 2

Волновые поля сигнального типа. Поверхности разрыва (фронты) упругих волновых полей.

В главе рассматриваются упругие среды, параметры ρ и $c_{ik,\mu\nu}$ которых всюду непрерывны, а в §6 предполагаются, кроме того, непрерывными и все их частные производные, встречающиеся при выкладках. Целью главы является вывод дифференциальных уравнений в частных производных, определяющих движение поверхностей разрывов (фронтов) поля упругих смещений в анизотропных упругих средах, а также – получение уравнений (для векторов поляризации разрывов). описывающих характер разрывов производных поля смещений при переходе через упомянутые поверхности. При этом обнаруживается глубокая аналогия в распространении элементов поверхностей разрывов волновых полей с распространением в анизотропных средах локально-плоских волн различных типов.

§5. Слабые и сильные разрывы поля упругих смещений. Кинематические и динамические условия совместности

Как известно, в сейсмической практике приходится иметь дело, главным образом, с полями смещений сигнального характера, возбуждаемыми сравнительно кратковременными воздействиями. В эксперименте такие поля регистрируются обычно в виде вступлений волн, т.е. в виде главных, наиболее быстро изменяющихся частей волнового поля, отвечающих той или иной возбудившейся в среде волне. Главные части поля в условиях практики всегда непрерывны и имеют непрерывные производные всех порядков. Относительно же их распространения в сейсмологии и сейсморазведке безраздельно принимается (и притом в удовлетворительном согласии с практикой), что оно происходит по законам геометрической сейсмики.

Но хорошо известно, что законы геометрической сейсмики строго применимы (в точном смысле слова) только лишь к описанию движения поверхностей разрывов поля смещений или его производных, отвечающих в математическом формализме теории упругости некоторым разрывным воздействиям над средой. Поэтому изучение закономерностей в распространении поверхностей разрывов поля смещений в анизотропных упругих средах должно привести к установлению соответствующих законов геометрической сейсмики, описывающих приближенно и распространение поверхностей главных частей волнового поля, в окрестности которых поле упругих смещений изменяется наиболее быстро. Пояснение последнего утверждения может быть получено, в частности, на основе известной общей формулы

$$\vec{u}(\vec{r},t) = \int\limits_0^t \vec{u}_0(\vec{r},t-\tau)f'(\tau)d\tau,$$

связывающей разрывное поле смещений $\vec{u}_0(\vec{r},t)$ и гладкое поле $\vec{u}(\vec{r},t)$, возбуждаемые в одной и той же среде одним и тем же источником, включаемым при $t=0$, но зависящим от времени соответственно как $f_o(t) \equiv \varepsilon(t)$, где $\varepsilon(t)$ – функция Хевисайда (т.е. $\varepsilon(t) \equiv 0$ при $t<0$ и $\varepsilon(t)=1$, если $t>0$), и как $f(t)$, где $f(t)$ – достаточно гладкая функция. Нетрудно видеть, что в случае кратковременно действующей функции $f(t)$ быстро изменяющаяся (сигнальная) часть гладкого поля $\vec{u}(\vec{r},t)$ сосредотачивается в узкой окрестности поверхности разрыва поля $\vec{u}_0(\vec{r},t)$. Поэтому за фронт поля $\vec{u}(\vec{r},t)$ с хорошей точностью можно брать поверхность разрыва поля $\vec{u}_0(\vec{r},t)$.

Изложенными соображениями как раз и определяется практическое значение изучения круга вопросов, касающихся распространения в анизотропных упругих средах разрывных частей полей смещений или их производных.

1. Пусть на поверхности

$$\psi(x_1,x_2,x_3,t)=0 \tag{5.1}$$

испытывают разрыв непрерывности некоторые частные производные составляющих поля смещений $\vec{u}(x_1,x_2,x_3,t)$. Говорят, что поле $\vec{u}$ имеет на поверхности (5.1) сильные разрывы, если при переходе через поверхность само поле $\vec{u}$ остается непрерывным, но по крайней мере одна из частных производных первого порядка от его составляющих терпит разрыв непрерывности. Если же при переходе через поверхность (5.1) остаются непревными поле $\vec{u}$ и все его частные производные первого порядка, а среди частных производных порядка $n \geqslant 2$ от составляющих $\vec{u}$ имеются разрывные, то говорят, что поле $\vec{u}$ испытывает на поверхности (5.1) слабые разрывы.

Предполагая, что на поверхности (5.1) поле смещений имеет слабые или сильные разрывы, поставим вопрос об описании движения любых поверхностей разрыва, т.е. в конечном счете вопрос об уравнениях для функций ψ, посредством которых в форме (5.1) определяются поверхности разрывов. Ответ на такой вопрос в случае слабых разрывов дается в §6, а в случае сильных разрывов – в §7. Предварительно же надлежит привести ряд вспомогательных результатов, касающихся описания движения поверхности (5.1), а также соотношений между составляющими поля упругих смещений по разные стороны поверхности разрыва, выражающих так называемые условия совместности. Такого рода вопросы подробно и с полными выводами обсуждаются в §4 монографии [1]. Поэтому здесь мы ограничимся лишь приведением необходимых нам результатов с краткими их пояснениями.

2. Во всем последующем будем изучать поверхности (5.1), определяемые функциями $\psi(x_1, x_2, x_3, t)$ непрерывными вместе с их частными производными $\partial\psi/\partial x_k$, $(k = 1, 2, 3)$, $\partial\psi/\partial t$ первого порядка при всех рассматриваемых далее значениях аргументов x_1, x_2, x_3, t. Так как в (5.1) входит время t, то расположение поверхности (5.1) в пространстве переменных x_1, x_2, x_3 изменяется во времени и, следовательно, можно говорить о скорости перемещения точек N поверхности в упомянутом (трехмерном) пространстве.

Если $N = (x_1, x_2, x_3,)$ – некоторая точка поверхности (5.1) (рассматриваемая в момент времени t), то за направления скорости движения точки N берут орт нормали

$$\vec{n} = \frac{\operatorname{grad}\psi}{|\operatorname{grad}\psi|} \tag{5.2}$$

к поверхности (5.1) в точке (N, t), где

$$\operatorname{grad}\psi = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial\psi}{\partial x_k}\vec{i_k} \equiv \sum_{k=1}^{3} p_k \vec{i}_k, \tag{5.2$'$}$$

причем производные

$$p_k \equiv \frac{\partial\psi}{\partial x_k}, \quad (k = 1, 2, 3), \tag{5.3}$$

функции ψ из (5.1) вычисляются в точке (N, t).

Что же касается величины скорости движения выбранной точки N поверхности (5.1) вдоль нормали $\vec{n}$, то она определяется обычным образом и имеет значение

$$v(N,t) = \frac{-\psi_t}{|\operatorname{grad}\psi|} \equiv \frac{-p_0}{\left(\sum\limits_{k=1}^{3} p_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{5.4}$$

где по аналогии с (5.3) обозначено

$$p_0 = \frac{\partial\psi}{\partial t} \equiv \psi_t. \tag{5.3$'$}$$

Итак, за скорость распространения поверхности (5.1) принимают скорость (5.4) движения ее точек (N, t) вдоль нормалей $\vec{n} = \vec{n}(N, t)$, построенных к поверхности (5.1) в тех же точках (N, t), движение которых изучается.

3. Принимая за положительную и отрицательную стороны поверхности (5.1) такие множества точек (x_1, x_2, x_3, t), в которых выполняются соответственно неравенства $\psi(x_1, x_2, x_3, t) > 0$ и $\psi(x_1, x_2, x_3, t) < 0$, рассмотрим поле смещений $\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)$, имеющее на поверхности (5.1) сильные разрывы. В соответствии с определением такое поле имеет составляющие $u_k(x_1, x_2, x_3, t)$, непрерывные во всем пространстве, включая, конечно, и точки поверхности (5.1). Что же касается их частных производных $\partial u_k/\partial x_i$ и $\partial u_k/\partial t$, то они непрерывны с каждой из сторон поверхности (5.1), но при переходе через поверхность по крайней мере одна из них терпит разрыв непрерывности.

При рассмотрении не слишком резко включаемых воздействий в среде возбуждаются поля смещений с такими (сильными) разрывами, что упомянутые частные производные (непрерывные с каждой из сторон поверхности) при стремлении точек (M, t), не принадлежащих поверхности (5.1), к точкам (N, t) этой поверхности имеют определенные предельные значения, разные, вообще говоря, с разных сторон поверхности. В таких случаях легко доказывается, что все производные $\partial u_k/\partial x_i$ и $\partial u_k/\partial t$ фактически непрерывны с каждой из сторон поверхности (5.1) вплоть до точек поверхности. Это обстоятельство совместно со свойством непрерывности составляющих u_k поля смещений позволяет доказать, что при переходе через поверхность (5.1) остаются непрерывными все выражения вида

$$M_{ki} \equiv p_k \frac{\partial u_i}{\partial t} - p_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \text{непр.}, \quad (i, k = 1, 2, 3), \tag{5.5}$$

в которых p_k и p_0, имеющие значения из (5.3) и (5.3′), являются непрерывными функциями аргументов x_k и t вследствие предположенной гладкости функции ψ из (5.1). Условия непрерывности (5.5) носят название кинематических условий совместности для поля $\vec{u}$ с сильными разрывами на поверхности (5.1).

Следует отметить, во-первых, что условия (5.5), выводимые в случае полей $\vec{u}$ указанного выше частного вида, оказываются справедливыми и в случае практически произвольных полей $\vec{u}$ с сильными разрывами. Во-вторых же, что условия (5.5), по существу говоря, выражают требование непрерывности при переходе через поверхность (5.1) частных производных от $\vec{u}$ по направлениям, касательным к поверхности (5.1). Действительно, если учесть, что всегда $\psi_t \not\equiv 0$, то уравнение (5.1) может быть разрешено относительно $t = t(x_1, x_2, x_3)$. При этом дифференцирование вдоль касательных к поверхности (5.1) направлений приводит к выражениям

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial x_k} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial t}\,\frac{\psi_{x_k}}{\psi_t} = \frac{1}{\psi_t}\left[p_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - p_k \frac{\partial u_i}{\partial t}\right],$$

отличающимися от M_{ki} из (5.5) лишь непрерывным множителем $[-\psi_t]^{-1}$.

4. Приведенные в п. 3 условия (5.5) носили чисто кинематический характер и не имели отношения к каким-либо законам механики. Но очевидно, что при распространении поверхностей разрыва (5.1) должны выполняться и законы механики, в частности закон импульса сил и изменения количества движения (при переходе через поверхность разрыва). Применение этого закона приводит к заключению, что при переходе через поверхность (5.1) сильных разрывов должны оставаться непрерывными выражениями

$$M_{4i} = \sum_{k=1}^{3} t_{ik} p_k - \rho p_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} = \text{непр.}, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{5.6}$$

в которых p_k и p_0 имеют значения из (5.3) и (5.3′), ρ обозначает плотность вещества, а t_{ik} – компоненты тензора напряжения из

(1.11). При этом, как и везде в настоящей главе, предполагается, что параметры ρ и $c_{ik,\mu\nu}$ упругой среды всюду непрерывны, а выражения p_k и p_0 из (5.3) и (5.3$'$) непрерывны вследствие предположенной гладкости функции ψ из (5.1). Условия (5.6) называются динамическими условиями совместности для поля упругих смещений с сильными разрывами.

В заключение отметим, что поля смещений $\vec{u}$ с разрывами в частных производных первого порядка, удовлетворяющие кинематическим (5.5) и динамическим (5.6) условиям совместности, образуют класс, называемый в математической физике классом полей с правильными сильными разрывами. Такой класс полей настолько широк, что он охватывает практически все случаи полей, представляющих прикладной интерес.

§6. Поверхности слабых разрывов как характеристические поверхности системы уравнений движения

1. В теории систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка гиперболического типа вроде системы (2.9) (т.е. таких систем, которые описывают распространение каких-либо волн) важную роль играет задача Коши, заключающаяся в нахождении решения системы по начальным условиям, задаваемым на некоторой поверхности

$$\psi(x_1, x_2, x_3, x_0) = 0, \quad (x_0 \equiv t). \tag{6.1}$$

В задачах физики начальные условия очень часто задают на поверхности $\psi \equiv t - t_0 = 0$, причем такие условия для вектора смещений сводятся к равенствам

$$\vec{u}\Big|_{t=t_0} = \vec{u}^{\,0}(x_1, x_2, x_3), \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = \vec{v}^{\,0}(x_1, x_2, x_3), \tag{6.2}$$

физический смысл которых очевиден.

Однако в более общих случаях приходится рассматривать задачи Коши с начальными данными в точках поверхности (6.1) более общего вида. При этом всегда подобные данные выбираются в такой форме, чтобы по ним и по уравнению поверхности (6.1) (на которой они заданы) можно было определить во всех точках поверхности (6.1) значение как искомой функции (т.е. вектора $\vec{u}$ в наших задачах), так и всех ее частных производных первого порядка. Поэтому в принципиальном отношении мы не погрешим, если будем считать, что начальные условия Коши сводятся в задачах обсуждамого типа к заданию в точках поверхности (6.1) правых частей всех следующих равенств:

$$\vec{u} = \vec{u}_0(x_1, x_2, x_3, x_0), \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_\nu} = \vec{u}_0{}^{(\nu)}(x_1, x_2, x_3, x_0),$$
$$(\nu = 0, 1, 2, 3). \tag{6.3}$$

2. Если поверхность (6.1) не является особой поверхностью, точнее, если она, как говорят, не является характеристической поверхностью для рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (2.9), то задача Коши имеет решение и притом единственное (при условии, конечно, что функция ψ из (6.1), равно как и функции из правых частей равенств (6.3), обладают достаточной гладкостью). В таком случае поле $\vec{u}(x_1, x_2, x_3, x_0)$, а значит, и любые его частные производные, в том числе и производные второго порядка, однозначно определяются на основании изучаемой системы (2.9) дифференциальных уравнений (второго порядка), а также начальных данных (6.3). При этом в случае дифференцируемых функций $\vec{u}_0{}^{(\nu)}(x_1, x_2, x_3, x_0)$ из (6.3) все частные производные второго порядка от искомой функции $\vec{u}$ по направлениям, касательным к поверхности (6.1), определяются непосредственно по (6.3) путем дифференцирования функций $\vec{u}_0{}^{(\nu)}$ вдоль поверхности (6.1).[1]

Подставляя значения всех таких частных производных второго порядка (равно как и значения частных производных первого порядка из (6.3)) в систему дифференциальных уравнений (2.9), мы приходим к одному векторному алгебраическому уравнению для частной производной второго порядка от $\vec{u}$ по направлению, нормальному к поверхности (6.1), из которого (в соответствии с предположением о существовании и единственности решения обсуждаемой задачи Коши) эта производная должна однозначно определяться. В результате в точках поверхности (6.1) для всех частных производных второго порядка получаются вполне определенные значения, что свидетельствует об отсутствии

[1]После такого дифференцирования условий (6.3) из всех частных производных второго порядка от $\vec{u}$ неопределенной остается лишь производная $\partial^2\vec{u}/\partial\nu^2$ по направлению ν, нормальному (в пространстве x_1, x_2, x_3, x_0) к поверхности (6.1).

у упомянутых производных каких-либо разрывов непрерывности при переходе через поверхность (6.1).

Итак, мы видим, что поле $\vec{u}$ со слабыми разрывами может иметь разрывы непрерывности в частных производных второго порядка в точках поверхности (6.1) только в том случае, когда начальные условия (6.3), заданные на поверхности (6.1), приводят совместно с уравнением (2.9) к неразрешимой алгебраической системе уравнений для частных производных второго порядка от поля $\vec{u}$, т.е. если (6.1) оказывается характеристической поверхностью системы уравнений (2.9).

К аналогичному же заключению нетрудно прийти и в случае полей смещений $\vec{u}$ со слабыми разрывами, у которого наинизший порядок разрывных производных $n > 2$. Для этого лишь необходимо рассматривать кроме (2.9) уравнения, получающиеся из (2.9) в результате всевозможных дифференцирований порядка $m \leqslant n-2$, а кроме условий (6.3) – подобные же условия, получающиеся дифференцированием (6.3) m раз по всевозможным направлениям, касательным к поверхности (6.1). При этом следует предполагать непрерывными все частные производные от упругих параметров $c_{ik,\mu\nu}$ и ρ среды, входящие как в (2.9), так и в уравнения, получающиеся из (2.9) в результате упомянутого дифференцирования.

3. Уравнения движения (2.9) идеально упругой анизотропной среды будем записывать в виде

$$\sum_{q=1}^{3}\sum_{p,k=0}^{3} a_{iq}^{kp}\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} + F_i\left(\frac{\partial u_q}{\partial x_p}, x_k, \dots\right) = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \tag{6.4}$$

где обозначено

$$a_{iq}^{kp} = \begin{cases} c_{ik,pq}, & \text{если} \quad p \geqslant 1, \quad k \geqslant 1, \\ -\rho\delta_{iq}\delta_{0p}\delta_{0k} & \text{при} \quad p = 0, \quad \text{или } k = 0 \end{cases} \tag{6.5}$$

и не выписаны в явном виде заведомо непрерывные слагаемые F_i уравнений, не содержащие частных производных второго порядка. Начальные же условия будем считать заданными на поверхности (6.1) в форме (6.3).

От независимых переменных x_1, x_2, x_3, x_0 перейдем к новым независимым переменным x_1', x_2', x_3', x_0' по формулам

$$\begin{aligned} &x_0' = \psi(x_1, x_2, x_3, x_0) \equiv \omega_0(x_1, x_2, x_3, x_0), \\ &x_k' = \omega_k(x_1, x_2, x_3, x_0), \quad (k = 1, 2, 3), \end{aligned} \tag{6.6}$$

где непрерывные вместе со всеми частными производными первого порядка функции ω_k выбраны так, что в рассматриваемой области изменения переменных x_1, x_2, x_3, x_0 оказывается

$$\frac{\partial(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\partial(x_0, x_1, x_2, x_3)} \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}. \tag{6.7}$$

При этом преобразование (6.6) реализует одно-однозначное отображение точек (x_ν) в (x'_ν).

По правилам дифференцирования находим

$$\frac{\partial u_q}{\partial x_k} = \sum_{r=0}^{3} \frac{\partial u_q}{\partial x'_r} \frac{\partial x'_r}{\partial x_k} = \sum_{r=0}^{3} \frac{\partial \omega_r}{\partial x_k} \frac{\partial u_q}{\partial x'_r},$$

$$\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} = \sum_{r,s=0}^{3} \frac{\partial \omega_r}{\partial x_k} \frac{\partial \omega_s}{\partial x_p} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x'_r \partial x'_s} + \sum_{r=0}^{3} \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial x_k \partial x_p} \frac{\partial u_q}{\partial x'_r}.$$

Поэтому система уравнений (6.4) переписывается в виде

$$\sum_{q=1}^{3} \sum_{\left.\begin{smallmatrix} p,k \\ r,s \end{smallmatrix}\right\}=0}^{3} a_{iq}^{kp} \frac{\partial \omega_r}{\partial x_k} \frac{\partial \omega_s}{\partial x_p} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x'_r \partial x'_s} + \widetilde{F}_i\left(\frac{\partial u_q}{\partial x'_p}, x'_k, \ldots\right) = 0$$

$$(i = 1, 2, 3), \tag{6.8}$$

где не выписанные явно слагаемые (включенные в выражение $\widetilde{F}_i$) не содержат частных производных второго порядка от u_q.

Поверхность (6.1), на которой заданы начальные условия для системы (6.4) в исходных переменных x_0, x_1, x_2, x_3, преобразуется по формулам (6.6) в поверхность $x'_0 = 0$. Поэтому начальные условия для системы уравнений (6.8) можно считать заданными в виде

$$u_q\big|_{x'_0=0} = u_q^0(x'_1, x'_2, x'_3), \quad \left.\frac{\partial u_q}{\partial x'_0}\right|_{x'_0=0} = v_q^0(x'_1, x'_2, x'_3), \tag{6.2$'$}$$

аналогичном (6.2). При такой записи начальных условий все частные производные первого порядка от u_q по x'_k, $(k = 1, 2, 3)$ вычисляются в точках поверхности $x'_0 = 0$ лишь дифференцированием функций $u_q^0(x'_1, x'_2, x'_3)$.

На основе начальных условий $(6.2')$[2] в точках поверхности $x_0' = 0$ могут быть вычислены следующие частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k' \partial x_p'}, \quad \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k' \partial x_0'}, \quad (q, p, k = 1, 2, 3). \tag{6.9}$$

Не определенными же пока остаются лишь частные производные

$$\frac{\partial^2 u_q}{\partial {x'}_0^2}, \quad (q = 1, 2, 3), \tag{6.9'}$$

для которых из (6.8) получается система трех равенств

$$\sum_{q=1}^{3} \Omega_{iq} \frac{\partial^2 u_q}{\partial {x'}_0^2} = -\Psi_i(x_\nu, \ldots), \quad (i = 1, 2, 3), \tag{6.10}$$

где обозначено

$$\Omega_{iq} = \sum_{p,k=0}^{3} a_{iq}^{kp} \frac{\partial \omega_0}{\partial x_k} \frac{\partial \omega_0}{\partial x_p}, \tag{6.11}$$

причем $\omega_0 \equiv \psi(x_1, x_2, x_3, x_0)$ – функция из (6.6) или (6.1), определяющая поверхность, несущую начальные данные Коши. Посредством же $\Psi_i(x_\nu, \ldots)$ в (6.10) обозначены суммы функций $\widetilde{F}_i(\partial u_q/\partial x_p', \ldots)$ из (6.8) со слагаемыми, содержащими частные производные типа (6.9), известные в точках поверхности (6.1) (или $x_0' = 0$) в силу данных Коши.

4. Три равенства (6.10) можно рассматривать как систему алгебраических уравнений относительно производных из $(6.9')$. Коэффициенты Ω_{iq} такой системы, определяемые формулами (6.11), (6.5), имеют смысл и непрерывны не только в точках поверхности (6.1), но и во всей области точек (x_0, x_1, x_2, x_3), где ρ и $c_{ik,\mu\nu}$ непрерывны, а функция ψ из (6.1) определена и непрерывна вместе со своими первыми частными производными. Что же касается правых частей уравнений (6.10), то они определены и непрерывны лишь в точках поверхности (6.1).

Если в точках поверхности (6.10) (а значит и в ее окрестности) оказывается $|\Omega_{iq}| \neq 0$, то из системы уравнений (6.10) однозначно

[2] С достаточно гладкими функциями u_q^0 и v_q^0 из правых частей.

находятся значения всех производных из $(6.9')$. При этом выясняется, что в точках поверхности (6.1) все частные производные второго порядка от поля смещений $\vec{u}$ имеют вполне определенные непрерывные значения, вследствие чего поверхность (6.1) не может быть поверхностью разрыва для таких производных.

Таким образом, упомянутые производные поля смещений $\vec{u}$ могут иметь разрывы на поверхности (6.1) только в том случае, когда в точках поверхности (6.1) выполняется равенство

$$|\Omega_{iq}| = 0, \tag{6.12}$$

содержащее в правой части определитель матрицы Ω_{iq} из (6.11), (6.5), не зависящей от поля смещений $\vec{u}$, равно как и от значения ψ функции из (6.1). Элементы такой матрицы зависят лишь от упругих параметров $\rho = \rho(x_\mu)$ и $c_{ik,\mu\nu} = c_{ik,\mu\nu}(x_p)$ анизотропной среды, а также от частных производных

$$p_0 = \frac{\partial\psi}{\partial x_0} \equiv \frac{\partial\psi}{\partial x_t}, \quad p_k = \frac{\partial\psi}{\partial x_k}, \quad (k = 1, 2, 3) \tag{6.13}$$

функции из (6.1).

5. Справедливость равенства (6.12) установлена лишь в точках поверхности (6.1), на которой (по предположению) частные производные второго порядка от функции $\vec{u}$ имеют разрывы непрерывности. Однако нетрудно видеть, что подобное равенство должно выполняться не только в точках поверхности (6.1), но и в ее окрестности (точнее, везде, где определены функции ψ и упругие постоянные среды). Чтобы в этом убедиться, достаточно повторить приведенные рассуждения для задач Коши, начальные условия (6.3) которых задаются не на поверхности (6.1), а на поверхностях

$$\psi(x_1, x_2, x_3, x_0) = c, \tag{6.1$'$}$$

содержащих параметр c из промежутка $-c_0 < c < c_0$, и учесть упоминавшуюся независимость левой части (6.12) от значений ψ и поля смещений $\vec{u}$.

При выполнимости же равенства (6.12) во всех точках (x_0, x_1, x_2, x_3) некоторой четырехмерной области это равенство приобретает смысл уравнения в частных производных первого порядка относительно функции $\psi(x_1, x_2, x_3, x_0)$, через посредство которой определяются (в форме (6.1) или $(6.1')$) уравнения поверхностей возможных слабых разрывов поля смещений $\vec{u}$.

Чтобы получить явное выражение для упомянутого уравнения в частных производных, нужно воспользоваться выражениями (6.11), (6.5). При этом получаются формулы

$$\Omega_{iq} = \sum_{p,k=1}^{3} c_{ik,pq} p_k\, p_p - \rho p_0^2 \delta_{iq}, \tag{6.14}$$

в которых p_0 и p_k обозначают производные из (6.13), а упругие параметры ρ и $c_{ik,\mu\nu}$ являются непрерывными функциями координат x_p.

Что же касается самого дифференциального уравнения, имеющего вид

$$\left| \sum_{p,k=1}^{3} c_{ik,pq} p_k\, p_p - \rho p_0^2 \delta_{iq} \right| = 0, \tag{6.12$'$}$$

то к его обсуждению мы обратимся в §8.

§7. Условия совместности при распространении поверхностей сильных разрывов поля смещений

Пусть в некоторой области переменных x_1, x_2, x_3, t заданы упругая среда с непрерывными параметрами ρ и $c_{ik,\mu\nu}$, а также поверхность

$$\psi(x_1, x_2, x_3, t) = 0, \tag{7.1}$$

функция ψ которой определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка

$$p_0 \equiv \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad p_k \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x_k}, \quad (k = 1, 2, 3) \tag{7.1$'$}$$

во всех точках упомянутой области. Рассмотрим в такой области поле упругих смещений $\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ с правильными сильными разрывами на поверхности (7.1). Последнее означает, что поле $\vec{u}$ всюду непрерывно и имеет частные производные первого порядка, непрерывные с обеих сторон вне поверхности (7.1). При переходе же через поверхность (7.1) по крайней мере одна из упомянутых производных терпит разрыв непрерывности, но такой, что выполняются условия совместности (5.5) и (5.6).

Исходя из предположения о наличии у поля $\vec{u}$ указанных разрывов в первых производных и пользуясь только лишь условиями совместности, поставим целью получить уравнения, которым должна удовлетворять функция ψ из (7.1), а также установить характер разрывов у производных от поля $\vec{u}$ на поверхностях, определяемых при помощи (7.1) такими уравнениями.

1. Пользуясь формулой (2.6) для составляющих тензора напряжений, перепишем условие динамической совместности (5.6) в виде

$$\sum_{k,r,q=1}^{3} c_{ik,rq}\, p_k \frac{\partial u_q}{\partial x_r} - \rho p_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} = M_{4i}, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{7.2}$$

где M_{4i} – функции, всюду непрерывные в рассматриваемой области переменных x_k и t.

Что же касается кинематических условий совместности (5.5), то, если в них заменить значки k, i соответственно на r, q, они примут вид

$$p_0 \frac{\partial u_q}{\partial x_r} = p_r \frac{\partial u_q}{\partial t} - M_{rq}, \quad (r, q = 1, 2, 3), \tag{7.3}$$

где $M_{r,q}$ являются непрерывными функциями от x_k и t. При этом под p_k и p_0 здесь и везде далее понимаются производные (7.1$'$) от функции ψ из (7.1), непрерывные во всей рассматриваемой области переменных x_k и t.

Двенадцать соотношений (7.2) и (7.3) можно рассматривать как двенадцать линейных алгебраических уравнений для двенадцати частных производных первого порядка от составляющих поля $\vec{u}$. Коэффициенты таких уравнений, равно как и свободные члены M_{4i} и M_{rq}, – всюду непрерывные функции. Поэтому, если система разрешима, то все первые частные производные от составляющих поля $\vec{u}$ выразятся через непрерывные функции и сами окажутся непрерывными. Таким образом, частные производные первого порядка от $\vec{u}$ могут иметь разрывы непрерывности лишь на таких поверхностях вида (7.1), функции ψ которых определяются из условия неразрешимости системы (7.2) и (7.3).

Прежде чем выписывать условие неразрешимости такой системы, целесообразно привести ее к алгебраически более простому виду. Для этого умножим уравнение (7.2) на p_0/ρ, а получающиеся под знаком суммы выражения $p_0 \partial u_q/\partial x_r$ заменим правыми частями равенства (7.3). В результате придем к системе лишь трех алгебраических уравнений

$$\sum_{k,r,q=1}^{3} \lambda_{ik,rq}\, p_k p_r \frac{\partial u_q}{\partial t} - p_0^2 \frac{\partial u_i}{\partial t} = \widetilde{M}_i, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{7.4}$$

в которой обозначено

$$\lambda_{ik,rq} = \frac{c_{ik,rq}(x_1, x_2, x_3)}{\rho(x_1, x_2, x_3)}, \tag{7.5}$$

$$\widetilde{M}_i = \frac{p_0}{\rho} M_{4i} + \sum_{k,r,q=1}^{3} \lambda_{ik,rq}\, p_k M_{rq}, \tag{7.6}$$

причем $\lambda_{ik,\mu\nu} = \lambda_{ik,\mu\nu}(x)$ и $\widetilde{M}_i$ являются непрерывными функциями в рассматриваемой области переменных x_k и t.

Условие неразрешимости такой системы уравнений, сводящееся к равенству нулю ее главного определителя

$$\left| \sum_{k,r=1}^{3} \lambda_{ik,rq}\, p_k p_r - p_0^2 \delta_{iq} \right| = 0, \tag{7.7}$$

как раз и оказывается искомым дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка относительно функции ψ, по которой определяются поверхности (7.1) правильных сильных разрывов поля смещений. В связи с изложенным уместно напомнить, во-первых, что p_0 и p_k из (7.4) и (7.7) имеют значения частных производных из (7.1$'$). И, во-вторых, что уравнение (7.7) совпадает (с точностью до множителя ρ^{-3}) с уравнением (6.12$'$), которое было получено для поверхностей слабых разрывов поля смещений. Такого совпадения, конечно, следовало ожидать на основании очевидного факта возможности перехода от поля $\vec{u}$ со слабыми разрывами на некоторой поверхности S к полю смещений, например, вида

$$\vec{U} = \frac{d^{(n-1)}}{dt^{n-1}} \vec{u},$$

имеющему уже сильные разрывы на той же поверхности. Значение $n \geqslant 2$ здесь имеет такой же смысл, что и в п. 1 §5.

2. Не обращаясь еще к рассмотрению уравнения (7.7), левая часть которого является однородным алгебраическим многочленом шестой степени относительно величин p_1, p_2, p_3 и p_0, лишь отметим, что оно всегда распадается на три различных независимых уравнения соответственно трем типам волн, распространяющимся в анизотропных средах. К обсуждению подобных вопросов мы обратимся в §8, а сейчас проиллюстрируем высказанное утверждение на простейшем примере изотропной упругой среды.

Учитывая связь матрицы упругих постоянных $c_{ik,\mu\nu}$ с шестирядным ее представлением $c_{\alpha\beta}$ из п. 2 §4 и пользуясь таблицей (4.12), легко находим элементы матрицы

$$\omega_{iq} = \sum_{k,r=1}^{3} \frac{c_{ik,rq}}{\rho}\, p_k p_r, \tag{7.8}$$

определяющиеся выражениями

$$\begin{gathered} \omega_{ii} = (\lambda' + \mu')p_i^2 + \mu' p^2, \quad (i = 1, 2, 3), \\ \omega_{iq} = (\lambda' + \mu')p_i p_q, \quad (i \neq q), \\ p^2 = \sum_{k=1}^{3} p_k^2, \quad \lambda' = \frac{\lambda}{\rho}, \quad \mu' = \frac{\mu}{\rho}. \end{gathered} \tag{7.8$'$}$$

Обозначая $\Omega_{iq} = \omega_{iq} - p_0^2\delta_{iq}$, составляем определитель из левой части (7.7), имеющий значение

$$\begin{aligned} |\Omega_{iq}| =& \Omega_{11}\big(\Omega_{22}\Omega_{33} - \Omega_{23}^2\big) - \\ & -\Omega_{21}\big(\Omega_{12}\Omega_{33} - \Omega_{13}\Omega_{32}\big) + \Omega_{31}\big(\Omega_{12}\Omega_{23} - \Omega_{22}\Omega_{13}\big) = \end{aligned}$$

$$= \big[(\lambda' + \mu')p_1^2 + \mu' p^2 - p_0^2\big] - (\mu' p^2 - p_0^2)\big[(\lambda' + \mu')(p_2^2 + p_3^2) + \mu' p^2 - p_0^2\big] -$$

$$-(\lambda' + \mu')^2 p_1^2 (\mu' p^2 - p_0^2)(p_2^2 + p_3^2) = \left(\frac{\mu}{\rho}p^2 - p_0^2\right)^2 \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}p^2 - p_0^2\right).$$

Таким образом, уравнение (7.7) для поверхностей разрывов расщепляется на три независимые уравнения,

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}p^2 - p_0^2 = 0, \tag{7.9}$$

$$\frac{\mu}{\rho}p^2 - p_0^2 = 0, \quad \frac{\mu}{\rho}p^2 - p_0^2 = 0, \tag{7.9$'$}$$

два из которых (для поперечных волн) в рассматриваемом случае изотропных сред (и только в этом случае) совпадают друг с другом. При использовании обозначений

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{7.10}$$

для скоростей продольных и поперечных волн, а также обозначений $(7.1')$ для величин p_k и p_0 уравнения (7.9) переписываются в привычной форме

$$(\operatorname{grad}\psi)^2 - \frac{1}{v_p^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 = 0,$$

$$(\operatorname{grad}\psi)^2 - \frac{1}{v_s^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 = 0$$

уравнений для поверхностей разрыва (фронтов) продольных и поперечных волн в изотропных упругих средах.

Что же касается уравнения (7.7) в общем случае анизотропной среды, то, как уже упоминалось, оно распадается на три различных независимых уравнения в частных производных (первого порядка) для трех различных типов волновых фронтов. Однако аналитических представлений для таких независимых уравнений в общем случае анизотропии практически не удается получать вследствие совершенно необозримой их сложности и громоздкости. И вот любопытным и поучительным оказывается тот факт, что упомянутых представлений фактически и не требуется для того, чтобы успешно решать любые задачи, связанные с распространением волновых фронтов в анизотропных упругих средах. Не обращаясь еще к такого рода вопросам, обсудим следствия из (7.4), касающиеся характера разрывов поля смещений при переходе через поверхность (7.1).

3. Допустим, что в результате решения уравнения (7.7) определена некоторая поверхность разрыва (7.1), относящаяся к одному из трех возможных типов волновых фронтов. Если определить, например, как в п. 3 §5, положительную (значок $+$) и отрицательную (значок $-$) стороны поверхности (7.1), то можно ввести в рассмотрение вектор поляризации разрывов $\vec{A}$ с составляющими

$$A_i = \frac{\partial u_i^+}{\partial t} - \frac{\partial u_i^-}{\partial t}, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{7.11}$$

равными разности предельных значений производных $\partial u_i/\partial t$ с положительной и отрицательной сторон поверхности разрыва. Очевидно, что при подчинении условию нормировки

$$(\vec{A}\cdot\vec{A}) \equiv \sum_{i=1}^{3} A_i^2 = 1 \qquad (7.12)$$

вектор поляризации разрывов $\vec{A}$ определит в пространстве x_1, x_2, x_3 направление, вдоль которого составляющая вектора скорости смещений $\partial\vec{u}/\partial t$ испытывает разрыв непрерывности при переходе через поверхность разрыва (7.1).

Выписывая уравнения (7.4) в точках N_+ и N_- с положительной и отрицательной сторон поверхности разрыва и пользуясь непрерывностью выражений (7.5) и (7.6), составим разность выписанных уравнений. В результате приходим к системе трех однородных алгебраических уравнений

$$\sum_{k,r,q=1}^{3} \lambda_{ik,rq}\, p_k p_r A_q - p_0^2 A_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \qquad (7.13)$$

относительно величин A_i из (7.11). Такие уравнения, очевидно, могут рассматриваться лишь после того, как функция ψ из (7.1) уже определена на основании решения уравнения (7.7). Поэтому все величины p_k и p_0 из (7.1′), входящие в (7.13), равно как и величины $\lambda_{ik,\mu\nu}$ из (7.5), следует считать известными. Определитель системы (7.13) удовлетворяет равенству (7.7) и, следовательно, система (7.13) разрешима.

Как уже упоминалось, система уравнений (7.13) определяет характер разрывов составляющих поля скоростей смещений при переходе через поверхность разрыва того или иного типа, распространяющуюся в неоднородной анизотропной упругой среде. Исследование такой поверхности производится в §8.

4. В заключение настоящего параграфа рассмотрим сначала систему уравнений (7.13) в случае изотропной упругой среды. Затем же покажем, что система уравнений (7.13) обнаруживает близкое родство с системой уравнений (7.15), определяющей (совместно с уравнением Кристоффеля (7.18)) процесс распространения плоских волн с нормалью $\vec{n}$ в окрестности упомянутых точек N^+ и N^- рассматриваемой поверхности разрыва.

Если воспользоваться обозначениями (7.5), (7.8) и (7.8′), то не представит труда убедиться в том, что уравнения (7.13) в случае изотропии могут быть записаны в следующих двух эквивалентных формах:

$$\sum_{q=1}^{3}\left[(\lambda+\mu)p_i p_q + (\mu p^2 - p_0^2\rho)\delta_{iq}\right]A_q = 0$$

и (7.13′)

$$\sum_{q=1}^{3}\left\{(\lambda+\mu)(p_i p_q - p^2\delta_{iq}) + \left[(\lambda+2\mu)p^2 - \rho p_0^2\right]\delta_{iq}\right\}A_q = 0.$$

Пусть рассматривается поверхность разрыва, распространяющаяся со скоростью v_p из (7.10) и, следовательно, удовлетворяющая уравнению (7.9) для фронтов продольных волн.

Используя второе представление (7.13′) для нахождения величин A_i из (7.11), получаем систему уравнений

$$\sum_{q=1}^{3} p_i p_q A_q - p^2 A_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3),$$

переписываемую в виде

$$p_i(\vec{p}\cdot\vec{A}) = (\vec{p}\cdot\vec{p})A_i,$$

если воспользоваться векторной записью.

Отсюда сразу получается выражение

$$\vec{A} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \equiv \frac{\operatorname{grad}\psi}{|\operatorname{grad}\psi|} = \vec{n},$$

где $\vec{n}$ – орт нормали из (5.2) к поверхности разрыва (7.1). Итак, мы видим, что на фронтах продольного типа испытывает разрыв непрерывности лишь продольная, т.е. нормальная к поверхности фронта составляющая вектора скорости смещений.

При рассмотрении же поверхностей разрыва (7.9′), распространяющихся со скоростью поперечных волн, следует исходить из системы уравнений в форме первого из приведенных в (7.13′) представлений, сводящегося, очевидно, к одному векторному равенству $(\vec{p}\vec{A}) = 0$, т.е. $(\vec{n}\vec{A}) = 0$. Такое равенство означает, что на фронтах поперечного типа испытывают разрыв непрерывности лишь составляющие вектора скорости смещений, перпендикулярные нормали $\vec{n}$ к поверхности фронта. Обобщение подобных результатов на случай любых анизотропных сред дается в следующем параграфе, где весьма полезными оказываются сведения о плоских волнах (с нормалью $\vec{n}$ к фронту). При этом, в отличие от разделоа 1–4, где рассматриваются неоднородные среды с непрерывными параметрами $\rho(x_p)$ и $\lambda_{ik,\mu\nu}(x_p)$, теперь (в разделах 5–8) анизотропная среда предполагается однородной.

5. Пусть в однородной анизотропной упругой среде с параметрами $\rho = \text{const}$ и $c_{ik,\mu\nu} = \text{const}$, распространяется плоская монохроматическая волна вида

$$\vec{u} = \vec{A} \exp i(\omega t - \vec{k}\,\vec{r}) \equiv \vec{A} \exp ik(vt - \vec{n}\,\vec{r}), \qquad (7.14)$$

$$\vec{A} = \sum_{k=1}^{3} A_k \vec{i}_k; \quad \vec{\kappa} = k\vec{n}; \quad |\,\vec{n}\,| = 1; \quad \omega = kv; \quad \vec{v} = v\vec{n},$$

причем k и v обозначают волновое число и фазовую скорость распространения, $\vec{n}$ – нормаль к фронту, а $\vec{A}$ – векторная амплитуда волны. При этом физический смысл придается, например, вещественной части выражения (7.14). Фронтом волны оказывается плоскость $(vt - \vec{n}\,\vec{r}) = \text{const}$, распространяющаяся в направлении $\vec{n}$ с фазовой скоростью v.

Предполагая значение орта $\vec{n}$ и угловой частоты колебаний ω заданными, поставим вопрос о возможных значениях составляющих A_i амплитудного вектора $\vec{A}$ (вектора поляризации), а также – фазовой скорости v, при которых в заданной анизотропной среде волны вида (7.14) могут распространяться? Для этого выражения (7.14) следует подставить в уравнение движения (2.9) для однородной анизотропной среды, что приводит к системе алгебраических уравнений

$$\sum_{k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q - v^2 A_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \qquad (7.15)$$

которую и предстоит изучить. При этом следует учитывать симметрию

$$\Lambda_{iq} = \Lambda_{qi}$$

матрицы

$$\Lambda_{iq} = \sum_{k,p=1}^{3} \lambda_{ik,pq} n_k n_p, \quad (i, q = 1, 2, 3), \tag{7.16}$$

фактически входящей в систему уравнений (7.15), а также – ее положительную определенность, выражаемую неравенством

$$\sum_{i,q=1}^{3} \Lambda_{iq} b_i b_q > 0, \tag{7.17}$$

справедливым при любых значениях $b_i > 0$.

В матрицу (7.16) входят величины $\lambda_{ik,pq} = \mathrm{const}$ из (7.5), удовлетворяющие соотношениям симметрии, тождественным (4.1). Что же касается неравенства (7.17), то оно является прямым следствием положительной определенности формы (2.12) с матрицей $c_{ik,\mu\nu}$ из (7.5) (удовлетворяющей соотношениям (4.1)), а также возможности представления любой матрицы $(n_k b_i)$ полусуммой

$$n_k b_i = \frac{1}{2}\big[(n_k b_i + n_i b_k) + (n_k b_i - n_i b_k)\big]$$

симметричной и антисимметричной ее частей.

6. Однородная система алгебраических уравнений (7.15), переписываемая в виде

$$\sum_{q=1}^{3} \Lambda_{iq} A_q - v^2 A_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{7.15$'$}$$

характеризуется симметричной положительно-определенной матрицей из (7.16). Решения таких систем хорошо изучены (см. [3], гл. II, п. 26, 27, 32, 33, 40), поэтому можно воспользоваться готовыми результатами.

Условие разрешимости системы (7.15), называемое уравнением Кристоффеля, имеющее вид

$$\left|\Lambda_{iq} - v^2 \delta_{iq}\right| \equiv \left| \sum_{k,p=1}^{3} \lambda_{ik,pq} n_k n_p - v^2 \delta_{iq} \right| = 0, \tag{7.18}$$

оказывается уравнением третьей степени от v^2. Вследствие симметрии Λ_{iq} и неравенства (7.17) все корни такого уравнения положительны, а из (7.18) следует, что каждый из таких корней оказывается однородной квадратичной формой от n_k и, следовательно, не зависит от знака при орте $\vec{n}$.

Расположим корни $v_r^2 = v_r^2(\vec{n})$, $(r = 1, 2, 3)$ в порядке их убывания

$$v_1^2(\vec{n}) > v_2^2(\vec{n}) > v_3^2(\vec{n}) > 0. \tag{7.19}$$

Опыт показывает, что в реально существующих анизотропных средах при любых $\vec{n}$ оказывается $v_1^2(\vec{n}) > v_r^2(\vec{n})$, $(r = 2, 3)$. Что же касается значений $v_2^2(\vec{n})$ и $v_3^2(\vec{n})$ (совпадающих друг с другом в случае изотропии), то в анизотропных средах они могут совпадать лишь при значениях $\vec{n}$, соответствующих некоторым дискретным линиям на сфере $|\vec{n}| = 1$. Таким образом, правильнее писать

$$v_1^2(\vec{n}) > v_2^2(\vec{n}) \geqslant v_3^2(\vec{n}) \tag{7.19$'$}$$

вместо (7.19), считая, что знак равенства реализуется только на упомянутых линиях.

Придавая величине v^2 в системе (7.15) значение $v_r^2(\vec{n})$, $(r = 1, 2, 3)$ из (7.19), получаем разрешаемую систему однородных алгебраических уравнений

$$\sum_{k,p=1}^{3} \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q^{(r)} - v_r^2 A_i^{(r)} = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{7.20}$$

из которой находятся вещественные значения $A_i \equiv A_i^{(r)}$ составляющих амплитудного вектора $\vec{A}$ плоской волны (7.14), распространяющейся в направлении $\vec{n}$ с фазовой скоростью $v_r > 0$. Составляющие вектора $\vec{A}^{(r)}$ определяются из (7.20) с точностью до произвольного множителя. Поэтому их можно подчинить условию нормировки

$$\left(\vec{A}^{(r)} \cdot \vec{A}^{(r)}\right) = \sum_{i=1}^{3} (A_i^{(r)})^2 \equiv \sum_{i=1}^{3} A_i^2 = 1 \tag{7.21}$$

и называть составляющими вектора поляризации $\vec{A}^{(r)}$ плоской волны значка “r”. При этом векторы $\vec{A}^{(r)}$ при различных значках r (т.е. отвечающие различным фазовым скоростям $v_r(\vec{n})$), как известно, всегда ортогональны друг другу, так что оказывается

$$\left(\vec{A}^{(r)} \cdot \vec{A}^{(\rho)}\right) = \sum_{i=1}^{3} A_i^{(r)} A_i^{(\rho)} = \delta_{i\rho}, \quad (r, \rho = 1, 2, 3). \tag{7.21$'$}$$

Итак, выясняется, что в однородной анизотропной среде плоская волна (7.14) может распространяться вдоль заданного направления $\pm\vec{n}$ только при вполне определенных значениях $v = v_r = v_r(\vec{n})$, $(r = 1, 2, 3)$ фазовой скорости и при вполне определенных направлениях $\vec{A}^{(r)} \equiv \vec{A}^{(r)}(\vec{n})$ векторов поляризации. Каждому $\vec{n}$ отвечают три возможных набора значений величин

$$v_1(\vec{n}), \quad \vec{A}^{(1)}(\vec{n}); \quad v_2(\vec{n}), \quad \vec{A}^{(2)}(\vec{n}); \quad v_s(\vec{n}), \quad \vec{A}^{(3)}(\vec{n}), \tag{7.22}$$

определяемых соответственно из уравнения (7.18) для v_r и из системы уравнений (7.20) для векторов поляризации $\vec{A}^{(r)}$. При этом величины из (7.22) от частоты ω не зависят.

Что касается углов между векторами $\vec{A}^{(r)}$ и направлениями $\vec{n}$ фазовой скорости распространения фронта волны, то они могут принимать, вообще говоря, любые (но вполне определенные при заданных $\lambda_{ik,\nu\mu}$ и $\vec{n}$) значения из промежутка $(0, \pi)$. При этом оказывается, во-первых, что в любой анизотропной среде существуют (особые) направления $\vec{n} = \vec{n}_0$, при которых $\vec{A}^{(1)}$ параллелен, а $\vec{A}^{(2)}$ и $\vec{A}^{(3)}$ перпендикулярны орту $\vec{n}_0$. И, во-вторых, что при стремлении к нулю отличий параметров анизотропии от параметров изотропной среды вектор $\vec{A}^{(1)}$ становится параллельным, а векторы $\vec{A}^{(2)}$ и $\vec{A}^{(3)}$ – перпендикулярными орту $\vec{n}$ при любом его направлении. Вследствие этого волну (7.14), отвечающую значениям v_1 и $\vec{A}^{(1)}$ из (7.22), называют квазипродольной, а две другие волны (отвечающие значениям v_2, $\vec{A}^{(2)}$ и v_3, $\vec{A}^{(3)}$ из (7.22)) – квазипоперечными. Фазовая скорость квазипродольной волны всегда превосходит фазовые скорости волн квазипоперечных [2].

7. Важной особенностью волн в анизотропных упругих средах является существование в них второй скорости распространения волн, называемой групповой или лучевой скоростью волны. Такая скорость характеризует в анизотропных средах процесс распространения энергии волнового поля, и в случае плоской волны из (7.14) обычно вводится в теорию путем рассмотрения усредненного значения потока энергии, определяемого формулой (2.19), деленного на усредненное (по частоте) значение плотности энергии.

Представляя поле плоской волны (7.14) в вещественной форме

$$\vec{u} = \vec{A}^{(r)} \cos k(v_r t - \vec{n}\,\vec{r}), \tag{7.14'}$$

где $\vec{A}^{(r)}$ и v_r одно из возможных значений (7.22), воспользуемся выражением (2.12) и вычислим плотность полной энергии волны

$$E = W + \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial \vec{u^{(r)}}}{\partial t}\right)^2.$$

На основании (7.20) и равенства $\vec{k} = \frac{\omega}{v}\vec{n}$ из (7.14), а также формулы (2.12), получаем

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i,k,\mu,\nu=1}^{3} c_{ik,\mu\nu}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{i,k,\mu,\nu=1}^{3} c_{ik,\mu\nu}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\,\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} =$$

$$= \frac{1}{2}\rho\omega^2\sum_{i=1}^{3}\left[A_i^{(r)}\right]^2\sin^2(\omega t - \vec{k},\, \vec{r}), \tag{7.23}$$

причем последняя часть равенства получена на основании (7.20), которое (после умножения на k^2 при учете соотношения $\vec{\kappa} = kv_r$ из (7.14)) может быть переписано в виде

$$\sum_{k,p,q=1}^{3}\lambda_{ik,pq}k_k k_p A_q^{(r)} = \omega^2\, A_i^{(r)}. \tag{7.24}$$

В точности такое же выражение, как и для W, получается для плотности кинетической энергии непосредственно из (7.14$'$). Поэтому полная плотность энергии равна удвоенному выражению (7.2), а результат усреднения по периоду $T = 2\pi/\omega$ приводит к значению

$$\langle E\rangle = \frac{\rho}{2}\omega^2\sum_{i=1}^{3}\left[A_i^{(r)}\right]^2 = \frac{\rho}{2}\omega^2,$$

где предполагается выполненным условие нормировки (7.21).

На основании выражений (2.19), (2.14) и (7.14$'$) для составляющих плотности потока энергии (протекающей через поверхность фронта в сторону напавления орта $\vec{n}$) получаем

$$P_i = -\sum_{k,p,q=1}^{3} c_{ik,pq}\frac{\partial u_q}{\partial x_p}\dot{u}_k =$$

$$= \omega k\sum_{k,p,q=1}^{3} c_{ik,pq}n_p A_q^{(r)}\, A_k^{(r)}\sin^2(vt - \vec{k}\,\vec{r}). \tag{7.25}$$

А для среднего за период будем иметь

$$\langle \widetilde{P}_i \rangle = \frac{\omega^2}{2v_r} \sum_{k,p,q=1}^{3} c_{ik,pq} n_p A_q^{(r)} A_k^{(r)},$$

где v_r обозначает фазовую скорость из (7.15) рассматриваемой волны.

По аналогии с гидродинамикой полагают

$$\vec{\xi}^{(r)} = \sum_{k=1}^{3} \xi_k^{(r)} \vec{i}_k, \quad \xi_k^{(r)} = \frac{\langle \widetilde{P}_k \rangle}{\langle E \rangle}, \tag{7.26}$$

и вектор $\vec{\xi}^{(r)}$ отождествляют со скоростью, с которой распространяется энергия плоской волны из (7.14′), относящейся к типу "r" из (7.22). Для составляющих такой лучевой, или групповой, скорости получаются выражения

$$\xi_k^{(r)} = \frac{1}{v_r} \sum_{i,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} n_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} =$$

$$= \sum_{i,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq}\, k_p^{(r)} A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \quad (k = 1, 2, 3), \tag{7.27}$$

$$\left(\vec{k}^{\,(r)} = \frac{\vec{n}}{v_r} \right),$$

где $\vec{k}^{\,(r)}$ – вектор рефракции волны с индексом r.

8. Вследствие отсутствия у плоской волны (7.14) реперных отметок, рассуждения из п. 7 носят явно формальный характер. В полной мере смысл понятия "лучевая скорость" выясняется в результате изучения поверхностей разрыва поля смещений в анизотропных средах (см. §8). Однако и сейчас, имея дело только с плоскими волнами, этому понятию можно придать физически точный смысл. Для этого достаточно рассмотреть вопрос о распространении волнового пакета

$$\vec{U}(r,t) = \iiint\limits_{(\Delta \vec{k})} \Phi(\vec{k}) \vec{A}\left(\frac{\vec{k}}{k}\right) \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})(d\vec{k}), \tag{7.28}$$

сконструированного из плоских волн (7.14) одной и той же r-природы в смысле (7.22). Здесь $(\Delta\vec{k})$ определяет малый объем, например, параллелепипеда (dk_1, dk_2, dk_3), со срединной точкой $\vec{k} = \vec{k}_0$. При этом учитывают соотношения из (7.14), а также важное равенство

$$\omega^2 = \sum_{i,k,p,q=1} \lambda_{ik,pq} k_k k_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \tag{7.29}$$

вытекающее из (7.24) при умножении на $A_i^{(r)}$ и суммировании по i с учетом нормировки (7.21). Если выполняются порядковые соотношения

$$|\Delta\vec{k}| = |\vec{\chi}| \equiv |\vec{k} - \vec{k}_0| \ll |\vec{k}_0|,$$

$$\Delta\Omega \equiv \left|\frac{\partial^2\omega}{\partial k_p \partial k_k}\right| |\Delta k|^2 t \ll \frac{\pi}{2},$$

то для оценки поля $\vec{U}(r,t)$ из (7.28) можно воспользоваться представлениями фазового выражения $(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$ первыми двуми членами ряда Тейлора

$$\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} = (\omega_0 t - \vec{k}_0\cdot\vec{r}) + \sum_{p=1}^{3}\left(\frac{\partial\omega}{\partial k_p}t - x_p\right)\chi_p + \ldots. \tag{7.30}$$

Подстановка такого выражения в (7.28) приводит к приближенному представлению

$$U = \exp\left[i(\omega_0 t - \vec{k}_0\,\vec{r})\right] \iiint\limits_{|\Delta\vec{k}|} \Phi(\vec{k})\vec{A}^{(r)}\left(\frac{\vec{k}}{|k|}\right) \times$$

$$\times \exp\left[i\sum_{p}\left(\frac{\partial\omega}{\partial k_p}t - x_p\right)\chi_p\right] |d\vec{k}|. \tag{7.31}$$

Первый сомножитель (определяющий частотное заполнение пакета) соответствует “движению” со средней фазовой скоростью пакета (вдоль нормали $\vec{n}$ к фронту волны). Второй же сомножитель (который, в зависимости от значения $\Phi(\vec{k})$, может иметь четкие реперные отметки) распространяется со скоростью

$$\vec{\xi} = \sum_{p=1}^{3} \xi_p \vec{i}_p, \quad \xi_p = \left(\frac{\partial\omega}{\partial k_p}\right)_0, \tag{7.32}$$

называемой лучевой. На основании выражения (7.29) для составляющих лучевой скорости получаем выражения

$$\xi_p^r = \frac{k^{(r)}}{\omega} \sum_{i,k,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} n_k A_q^{(r)} A_i^{(r)} = \frac{1}{v_r} \sum_{i,k,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} n_k A_q^{(r)} A_i^{(r)} =$$

$$= \sum_{i,k,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq}\, k_k^{(r)} A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \tag{7.33}$$

в точности совпадающие с (7.27). Отсюда, при учете (7.20) и (7.21) следует важное соотношение

$$(\vec{n}\,\xi^{(r)}) = v_r, \tag{7.34}$$

связывающее фазовую скорость v_r плоской волны с ее лучевой скоростью $\vec{\xi}^{(r)}$ при любом значении нормали $\vec{n}$ к волновому фронту.

В завершении краткой информации о элементах теории плоских волн, распространяющихся в однородных анизотропных упругих средах, уместно напомнить, что исходным звеном здесь считался призвольно задаваемый орт нормали $\vec{n}$ к фронту изучаемой плоской волны. Поэтому все введенные (вещественные) величины v_r, $\vec{A}^{(r)}$ и $\vec{\xi}^{(r)}$ оказываются функциями задаваемого орта $\vec{n}$, причем эти функции, очевидно, не зависят от знака $\vec{n}$, т.е. они сохраняют вид при замене орта $\vec{n}$ на орт $-\vec{n}$.

§8. Поверхности правильных сильных разрывов и локально-плоские волны

При рассмотрении вопросов, связанных с распространением в произвольных анизотропных упругих средах поверхностей (7.1) разрывов поля смещений $\vec{u}$ (определяемых функцией $\psi(x_1, x_2, x_3, t)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению (7.7)), характеризующихся вектором поляризации разрывов с составляющими (7.11) (удовлетворяющими системе алгебраических уравнений (7.13)), весьма целесообразно сопоставить уравнения (7.7) и (7.13) с алгебраическими уравнениями (7.18) и (7.15) или (7.20) из теории плоских волн. Такое сопоставление, предельно упрощающее все исследования, удобно начинать со случаев, когда функция ψ из (7.1) известна.

1. Считая функцию ψ известной, будем рассматривать поверхность (7.1) в фиксированный момент времени t. На поверхности выберем произвольную точку N и учтем вытекающие из (5.2)–(5.4) формулы

$$v \equiv v(N) = -\frac{p_0}{p}, \quad n_k \equiv n_k(N) = \frac{p_k}{p},$$
$$(k = 1, 2, 3), \quad p = \sqrt{\sum_{n=1}^{3} p_k^2}, \tag{8.1}$$

(где p_k имеют значения из (5.3)) для скорости распространения поверхности S из (7.1) в точке N, а также для составляющих к S орта нормали $\vec{n} \equiv \vec{n}(N)$. Наконец, уравнения (7.13) и (7.7) умножим соответственно на p^{-2} и p^{-6}, где p имеет значение из (8.1). Тогда система уравнений (7.13) примет вид, в точности совпадающий с видом системы уравнений (7.15) из теории плоских волн, а равенство (7.7) превратится в равенство (7.18), являющееся условием разрешимости однородной системы (алгебраических) уравнений (7.15) относительно величин A_i.

Различие же между получающимися теперь из (7.13) и (7.7) уравнениями и уравнениями (7.15) и (7.18) теории плоских волн состоит только в том, что в соотношениях плоских волн величины $\lambda_{ik,pq}$ и $\vec{n}$ считаются постоянными во всех точках (безграничной) упругой среды, а в уравнениях (7.13) и (7.7) (при известной функции ψ из (7.1)) они являются функциями $\lambda_{ik,pq}(N)$ и $\vec{n}(N)$ рассматриваемой точки N на поверхности S из (7.1). Таким образом, в случае произвольной анизотропной среды появляется возможность говорить о локальной тождественности характера распространения бесконечно малого элемента dS_N любой поверхности S правильных сильных разрывов поля смещений и плоской волны вида (7.14). При этом необходимо считать, что плоская волна распространяется в направлении $\vec{n} = \vec{n}(N)$ в среде, упругие параметры которой имеют постоянные значения $\lambda_{ik,pq} \equiv \lambda_{ik,pq}(N)$, отвечающие рассматриваемой точке N. Вектор же поляризации $\vec{A}$ такой волны нужно отождествлять с вектором (7.11) поляризации разрывов поля $\vec{u}$ в точке N.

2. Фиксируя по произволу на поверхности S правильных сильных разрывов точку N с нормалью $\vec{n}(N)$ и элементом dS_N поверхности (который допустимо еще считать плоским), воспользуемся установленной локальной тождественностью полей, а также результатами §7 и выясним некоторые закономерности в распространении выделенного элемента волнового фронта. При этом результаты п. 5–8 §7 будем применять для среды с параметрами $\lambda_{ik,pq} = \text{const}$ и для направления нормали $\vec{n} = \text{const}$, где

$$\lambda_{ik,pq} = \lambda_{ik,pq}(N), \quad \vec{n} = \vec{n}(N). \tag{8.2}$$

На основании п. 6 §7 можно утверждать, что элемент dS_N поверхности S вида (7.1) распространяется со скоростью $v(N)$ из (5.4) или (8.1), имеющей одно из трех допустимых значений $v_r = v_r[N, \vec{n}(N)]$, $(r = 1, 2, 3)$, зависящих от выбранной на поверхности S точки N и от направления $\vec{n}(N)$ нормали к S в этой точке. При этом величины допустимых скоростей v_r (совпадающие с возможными значениями фазовых скоростей плоской волны) определяются из уравнения (7.18) при значениях $\lambda_{ik,pq}$ и $\vec{n}$ из (8.2). Что же касается нумерации скоростей $v_r = v_r[N, \vec{n}(N)]$, то ее естественно было бы производить в соответствии с (7.19) и (7.19′), но обязательно так, чтобы всем точкам N рассматриваемой (конкретной) поверхности S (соответствующей волне определенного типа) отвечала скорость распространения v_r с одним и тем же значком r. Однако, как выясняется в п. 3, таким двум условиям удается удовлетворить в общем случае анизотропной среды только по отношению к одному значку $r = 1$, отвечающему квазипродольным волнам. Нумерацию же квазипоперечных волн (значками $r = 2$ и $r = 3$) мы будем производить так, чтобы всегда строго выполнялось второе условие, а первое условие выполнялось бы лишь по возможности.

Таким образом, при принятой нумерации скоростей $v_r = v_r\big[N, \vec{n}(N)\big]$ всегда оказывается

$$v_1\big[N, \vec{n}(N)\big] > v_k\big[N, \vec{n}(N)\big], \quad (k = 2, 3), \tag{8.3}$$

независимо от выбора точки n и направления орта $\vec{n}(n)$. Но между величинами v_2 и v_3 квазипоперечных волн могут выполняться соотношения того или иного типа

$$v_2\big[N, \vec{n}(N)\big] \geqslant v_3\big[N, \vec{n}(N)\big]; \quad v_2\big[N, \vec{n}(N)\big] \leqslant v_3\big[N, \vec{n}(N)\big] \tag{8.3′}$$

в зависимости от рассматриваемой точки N на поверхности S и характера анизотропии упругой среды.

Остается лишь отметить, что вектор $\vec{A} = \vec{A}^{(r)}$ поляризации разрывов из (7.11), отвечающий элементу dS_N поверхности разрыва типа r, распространяющейся со скоростью $v_r\left[N, \vec{n}(N)\right]$, определяется как подчиненное условию нормировки (7.21) решение системы уравнений (7.20), в котором $\lambda_{ik,pq}$ и $\vec{n}$ имеют значения из (8.2), а под v_r подразумевается значение упомянутой скорости $v_r\left[N, \vec{n}(N)\right]$. При этом векторы $\vec{A}^{(r)}$ с различными верхними значками всегда оказываются ортогональными друг дпугу независимо от того, какое из соотношений (8.3) реализуется в точке N.

Итак, мы приходим к общим заключениям, справедливым для произвольных анизотропных (в том числе и изотропных) сред и сводящимся к следующему: существуют три типа поверхностей (правильных сильных) разрывов поля $\vec{u}$, распространяющихся со скоростями $v(N)$ из (8.1), равными фазовым скоростям соответственно квазипродольной и двух квазипоперечных плоских волн (распространяющихся в однородной среде с параметрами и по направлению из (8.2)). При переходе через поверхность разрыва квазипродольного (квазипоперечного) типа в точке N испытывает разрыв непрерывности только составляющая вектора $\vec{u}$, параллельная вектору поляризации $\vec{A}(N)$ упоминавшейся квазипродольной (квазипоперечной) волны. Уместно еще отметить, что приведенные здесь результаты давали бы весьма полезную информацию о движении поверхностей разрывов и характере разрывов поля $\vec{u}$, если бы основные количественные закономерности в распространении плоских волн в различных анизотропных средах были уже изучены. Это еще раз подтверждает безотлагательную необходимость скорейшего изучения количественных закономерностей в распространении плоских волн.

3. Перейдем к обсуждению вопросов, касающихся вида дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка для функций ψ из (7.1), отвечающих поверхностям разрыва поля $\vec{u}$ того или иного типа. В п. 1 §7 было показано, что упомянутые функции ψ обязаны удовлетворять (сложному) дифференциальному уравнению (7.7), которое следует теперь лишь упростить надлежащим образом. Левая часть такого уравнения является полиномом третьей степени от p_0^2, который преобразуется в левую часть алгебраического уравнения (7.18), если от величин p_0 и p_k перейти к величинам $v = v(N)$ и $n_k = n_k(N)$ из (8.1).

Поэтому преобразования алгебраического характера над левой частью (7.7) можно производить на основе уравнения (7.18).

Как уже указывалось в п. 6 §7, уравнение (7.18) является алгебраическим уравнением третьей степени относительно v^2, имеющим три положительных корня

$$v_r^2 = F_r(\lambda_{ik,pq}, n_1, n_2, n_3), \quad (r = 1, 2, 3), \tag{8.4}$$

каждый из которых оказывается однородной второй степени функцией относительно переменных n_1, n_2, n_3. Выражения F_r из (8.4) являются алгебраическими функциями от n_1, n_2, n_3 и $\lambda_{ik,pq}$, которые всегда могут быть выбраны так, чтобы каждая из F_r при $r = 1, 2, 3$ была аналитической функцией от указанных переменных везде, за исключением, быть может, изолированных особых точек. (Указанный выбор можно произвести, например, на основе трех формул Кардана.) Что же касается явных выражений функций (8.4), то они не представляют практического интереса вследствие их крайней громоздкости и необозримости.

Заметим, что к указанному выше способу нумерации корней (8.4) уравнения (7.18) можно добавить еще требование, чтобы значку $r = 1$ всегда отвечал наибольший корень уравнения. Это вытекает из отмеченного в п. 6 §7 факта, что при любых значениях $\lambda_{ik,pq}$ (отвечающих реально существующим анизотропным упругим средам) и при любых направлениях орта $\vec{n}$ между корнями уравнения (7.18) всегда выполняются соотношения $v_1^2 > v_k^2$, $(k = 2, 3)$, в которых знак "равно" исключен. Поэтому, если для корня (8.4) при $r = 1$ выбрать такое аналитическое представление, которому соответствует наибольшее значение v^2 при некоторых фиксированных значениях n_k и $\lambda_{ik,pq}$, то этому же аналитическому представлению $v^2 = F_1$ будет соответствовать наибольший корень v^2 уравнения (7.18) и при любых других параметрах n_k и $\lambda_{ik,pq}$. Действительно, все функции F_r из (8.4) непрерывны и потому соотношение $v_1^2 > v_k^2$ могло бы нарушиться только в том случае, если бы существовала точка n_k^0, $\lambda_{ik,pq}^0$, в которой $v_1^2 = v_2^2 \geqslant v_3^2$. Однако опыт исключает существование такой точки. Итак, при определении корней (7.18) аналитически едиными при каждом фиксированном значении r формулами (8.4) всегда можно считать справедливыми неравенства (8.3).

4. Если учесть свойство однородности второй степени функций F_r из (8.4) относительно величин n_1, n_2, n_3 и возвратиться по формулам (8.1) к переменным p_0, p_1, p_2, p_3, то из формул (8.4) получатся выражения

$$p_0^2 = F_r\big(\lambda_{ik,pq}, p_1, p_2, p_3\big), \quad (r = 1, 2, 3) \tag{8.5}$$

для корней уравнения (7.7), рассматриваемого как алгебраическое уравнение третьей степени относительно p_0^2. Поэтому левая часть уравнения (7.7) может быть разложена на множители, что позволяет переписать это уравнение в виде

$$\prod_{r=1}^{3}\Big[p_0^2 - F_r\big(\lambda_{ik,pq}, p_1, p_2, p_3\big)\Big] = 0. \tag{8.6}$$

Таким образом, оказывается, что дифференциальное уравнение (7.7), в котором p_0, p_1, p_2 и p_3 имеют смысл частных производных из (7.1$'$), допускает тождественное преобразование к виду (8.6) и, следовательно, расщепляется на три независимых дифференциальных уравнения в частных производных первого порядка вида (8.5). При этом, как уже упоминалось, каждая функция F_r из (8.5) оказывается однородной второй степени регулярной функцией от аргументов p_0, p_1, p_2 p_3. Однако аналитические выражения таких функций настолько громоздки, что в форме (8.5) уравнения не представляют практической ценности.

5. Чтобы получить уравнения, эквивалентные (8.5) и удобные в приложениях, вернемся к задачам для плоских волн из п. 6 §7. Обсуждавшееся в связи с формулой (8.4) уравнение (7.18) является, как известно, условием разрешимости однородной алгебраической системы уравнений (7.20), решение которой подчинено условию нормировки (7.21). Поэтому, если подставить в (7.20) вместо v_r^2 какое-либо значение v_r^2 из (8.4), то из системы (7.20) и условия (7.21) однозначно определятся величины

$$A_i^{(r)} \equiv A_i^{(r)}\big(\lambda_{ik,pq}, n_1, n_2, n_3\big), \quad (i = 1, 2, 3), \tag{8.7}$$

являющиеся однородными нулевой степени регулярными функциями от n_1, n_2 и n_3. При помощи таких величин из соотношений (7.20) и (7.21) для корней v_r^2 из (8.4) однозначно выводятся соотношения

$$v_r^2 = F_r\big(\lambda_{ik,pq}, n_1, n_2, n_3\big) \equiv \sum_{i,k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \tag{8.8}$$

тождественные относительно n_1, n_2, n_3. Поэтому, если в (8.8) перейти от величин $v = v_r$ и n_k к величинам p_0 и p_k на основании формул (8.1), то получатся равенства

$$p_0^2 = \sum_{i,k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \quad (r = 1, 2, 3), \tag{8.9}$$

которые можно рассматривать как дифференциальные уравнения в частных производных, эквивалентные уравнениям (8.5).

В уравнения (8.9) входят функции

$$A_i^{(r)} \equiv A_i^{(r)}(\lambda_{ik,pq}, p_1, p_2, p_3), \quad (i = 1, 2, 3), \tag{8.7$'$}$$

совпадающие с функциями из (8.7), подчиненные условию нормировки

$$\left(\vec{A}^{(r)} \cdot \vec{A}^{(r)}\right) \equiv \sum_{i=1}^{3} (A_i^{(r)})^2 = 1 \tag{8.10}$$

и удовлетворяющие соотношениям ортогональности

$$\left(\vec{A}^{(r)} \cdot \vec{A}^{(\rho)}\right) \equiv \sum_{i=1}^{3} (A_i^{(r)}) \cdot A_i^{(\rho)} = 0, \quad (r \neq \rho) \tag{8.11}$$

типа (7.21). Они определяются как решения алгебраической системы уравнений

$$\sum_{k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} - p_0^2 A_i^{(r)} = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{8.12}$$

получающейся из системы уравнений (7.20), которую целесообразно здесь выписать еще раз:

$$\sum_{k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} n_k\, n_p A_q^{(r)} - v_r^2\, A_i^{(r)} = 0, \tag{8.12$'$}$$

в результате замены v_r и n_k на p_0 и p_k по формулам (8.1). В связи с изложенным отметим, что несмотря на очевидную громоздкость и необозримость аналитических предствлений, которые могли бы быть получены для функций $A_i^{(r)}$ в результате решения системы уравнений (8.12$'$), уравнения (8.9) оказываются вполне пригодными (и даже удобными) для эффективного решения прикладных задач. И объясняется это в основном своеобразием конструкции, посредством которой величины $A_i^{(r)}$ из $(8.7')$ входят в правые части дифференциальных уравнений (8.9). Своеобразие же этого состоит в том, что отнюдь не постоянные величины $A_i^{(r)}$ ведут себя в уравнениях (8.9) как постоянные по отношению к (однократному) дифференцированию по p_k и x_k. Дело здесь в следующем.

6. Для конструктивного построения поверхности

$$\psi \equiv \tau(x_1, x_2, x_3) - t = 0 \tag{8.13}$$

разрыва (фронта) волны на основе решения соответствующей задачи для одного из дифференциальных уравнений (8.9) в частных производных первого порядка следует применять метод характеристик, сводящий проблему к предварительному построению системы лучей, отвечающих искомому волновому фронту. При этом лучи определяются как решения некоторых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{dx_m}{ds} &= H_{p_m}(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3), \\ \frac{dp_m}{ds} &= -H_{x_m}(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3), \quad (m = 1, 2, 3), \end{aligned} \tag{8.14}$$

где s – параметр, который в таких задачах, как выясняется, связан со временем t формулой

$$s = \frac{1}{2} t, \tag{8.13$'$}$$

а под H_{p_m} и H_{x_m} понимаются частные производные по p_m и x_m от функции Гамильтона

$$H = \sum_{i,k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}. \tag{8.15}$$

И вот для построения системы лучей необходимо прежде всего вычислить частные производные H_{p_m} и H_{x_m}. Они вычисляются вполне аналогично, вследствие чего мы рассмотрим подробно лишь производную

$$H_{p_m} = \sum_{i,p,q=1}^{3} \lambda_{im,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} + \sum_{i,k,q=1}^{3} \lambda_{ik,mq} p_k A_q^{(r)} A_i^{(r)} +$$

$$+\sum_{i,k,p,q=1}^{3}\lambda_{ik,pq}p_k\,p_p\left(A_i^{(r)}\frac{\partial A_q^{(r)}}{\partial p_m}+A_q^{(r)}\frac{\partial A_i^{(r)}}{\partial p_m}\right).$$

Если учесть свойства симметрии типа (1.10)

$$\lambda_{im,pq}=\lambda_{pq,im}=\lambda_{mi,pq}=\lambda_{im,qp}$$

для величин из (7.5), то нетрудно убедиться в равенстве первого и второго, а также третьего и четвертого слагаемых из правой части выражения для H_{p_m}. Поэтому можно писать

$$H_{p_m}=2\sum_{i,p,q=1}^{3}\lambda_{im,pq}p_pA_q^{(r)}\,A_i^{(r)}+2\sum_{i,k,p,q=1}^{3}\lambda_{ik,pq}p_k\,p_pA_q^{(r)}\frac{\partial A_i^{(r)}}{\partial p_m}=$$

$$=2\sum_{i,p,q=1}^{3}\lambda_{im,pq}p_pA_q^{(r)}\,A_i^{(r)},\tag{8.16}$$

так как в силу (8.12) и (8.10), очевидно, имеет место

$$\sum_{i,k,p,q=1}^{3}\lambda_{ik,pq}p_k\,p_pA_q^{(r)}\frac{\partial A_i^{(r)}}{\partial p_m}=p_0^2\sum_{i=1}^{3}A_i^{(r)}\frac{\partial A_i^{(r)}}{\partial p_m}=$$

$$=\frac{p_0^2}{2}\,\frac{\partial}{\partial p_m}\sum_{i=1}^{3}\left[A_i^{(r)}\right]^2=0.$$

Совершенно также для вторых нужных нам производных получаются выражения

$$H_{x_m}=\sum_{i,k,p,q=1}^{3}\frac{\partial\lambda_{ik,pq}}{\partial x_m}\,p_kp_pA_q^{(r)}\,A_i^{(r)},$$

аналогичные (8.16), показывающие, что величины $A_i^{(r)}$ из (8.7′) действительно ведут себя как постоянные при вычислении производных H_{p_m} и H_{x_m}. Вследствие этого (решающего) обстоятельства правые части уравнений (8.14), переписывающихся в виде

$$\begin{gathered}\frac{dx_m}{ds}=2\sum_{i,k,p,q=1}^{3}\lambda_{im,pq}p_pA_q^{(r)}\,A_i^{(r)},\\ \frac{dp_m}{ds}=-\sum_{i,k,p,q=1}^{3}\frac{\partial\lambda_{ik,pq}}{\partial x_m}\,p_kp_pA_q^{(r)}\,A_i^{(r)},\quad (m=1,2,3),\end{gathered}\tag{8.14′}$$

содержат, помимо $\lambda_{ik,pq}$ и p_k, только лишь функции $A_i^{(r)}$ из (8.7′) (а не функции $A_i^{(r)}$ и их частные производные, как можно было бы думать по внешнему виду функции Гамильтона (8.15)). При этом упомянутые функции, несмотря на крайнюю громоздкость их аналитических представлений, легко определяются численно из алгебраической системы уравнений (8.12′). А этого вполне достаточно для численного интегрирования (с помощью компьютера) системы уравнений (8.14′), определяющей лучи волн в анизотропных упругих средах. После же построения системы лучей поверхности волновых фронтов строятся без труда.

7. В заключение остается сделать три замечания, из которых первое следует рассматривать как принципиальное. Дело в том, что при переходе к окончательной форме (8.9) для уравнений в частных производных, определяющих движение волновых фронтов, мы отказались от использования точных аналитических представлений для величин $A_i^{(r)}$ (которые можно было бы получить) и решили эти величины определять численно на основе системы алгебраических уравнений (8.12). Поэтому необходимо обсудить вопрос, касающийся правила выбора решений указанной системы так, чтобы они отвечали заданным значениям индексов r в уравнении (8.9), определяющим тип рассматриваемых волн.

На основании изложенного в п. 3 ясно, что при рассмотрении квазипродольных волн ($r = 1$) в качестве $A_i^{(r)}$ необходимо брать решение системы (8.12′), отвечающее всегда наибольшему собственному значению v_1^2, удовлетворяющему неравенству (8.3). Что же касается квазипоперечных волн, то при значениях параметров $\lambda_{ik,pq}$ и n_k из (8.2), при которых $v_2^2 \neq v_3^2$, например,

$$v_2^2 > v_3^2, \tag{8.17}$$

трудностей не возникает; за $A_i^{(2)}$ и $A_i^{(3)}$ можно выбрать решения системы (8.12′), отвечающие соответственно собственным значениям v_2^2 и v_3^2 из (8.17), ортогональным друг другу, а также решению $A_i^{(1)}$.

И вот пусть при некоторых исходных значениях Π_0 параметров $\lambda_{ik,pq}$ и n_k системы (8.12′) выполняется неравенство (8.17), позволяющее определять решения $A_i^{(2)}$ и $A_i^{(3)}$, как указано выше. Чтобы правильно продолжить выбранные решения на все пространство

П параметров системы (8.12′) (где наряду с (8.17) может выполняться равенство $v_2^2 = v_3^2$ и неравенство $v_2^2 < v_3^2$) следует учесть, что при любом фиксированном значке r решение $A_i^{(r)}$ как аналитическая функция параметров однозначно определяется во всем пространстве П, если известны значения $A_i^{(r)}$ в любой частичной области Π_0 этого пространства. Поэтому решения $A_i^{(2)}$ и $A_i^{(3)}$, выбранные для области Π_0 параметров, для которых выполняется неравенство (8.17), одназначно определяют функции $A_i^{(2)}$ и $A_i^{(3)}$ при любых значениях v_2^2 и v_3^2, и эти (аналитические) функции уж во всяком случае должны быть непрерывными. Но нетрудно видеть, что вследствие условий ортогональности

$$\left(\vec{A}^{(2)} \cdot \vec{A}^{(3)}\right) = 0, \quad \left(\vec{A}^{(1)} \cdot \vec{A}^{(r)}\right) = 0, \quad (r = 2, 3), \tag{8.18}$$

автоматически выполняющихся при любых $v_2^2 \neq v_3^2$, одно лишь требование непрерывности каждого из решений $A_i^{(2)}$ и $A_i^{(3)}$ при переходе через значения $v_2^2 = v_3^2$ уже обеспечивает единственность продолжения этих решений и, следовательно, фактически приводит к требуемому аналитическому их продолжению.

Итак, мы приходим к заключению, что при выборе решений $A_i^{(r)}$ системы уравнений (8.12′), отвечающих различным значкам r из (8.9), следует брать за исходные такие значения параметров $\lambda_{ik,pq}$ и n_k, при которых справедливо (8.17), а затем продолжать эти решения с жестким контролем их непрерывности.

Второе из обещанных замечаний должно способствовать лучшему пониманию смысла и значения понятия о лучевой скорости (7.26), (7.27′), которое было введено в §7 “на абстрактном примере” плоских волн.

Если учесть упоминавшееся уравнение (8.13) фронта волны, а также формулу (8.13′), связывающую параметр s из (8.14) со временем, и воспользоваться формулами (8.1), из которого следует

$$p_k = pn_k = \frac{n_k}{v_r}, \quad (k = 1, 2, 3),$$

где $n_k = \partial\tau/\partial x_k$ – составляющие орта нормали к фронту, а v_r – ее фазовая скорость распространения, то первая группа уравнений (8.14) перепишется в виде

$$\frac{dx_m}{dt} = \frac{1}{v_r} \sum_{r,p,q=1}^{3} \lambda_{im,pq} n_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} \equiv \xi_m^{(r)}. \tag{8.19}$$

Таким образом, оказывается, что точка пересечения луча с фронтом (8.13) волны движется (вдоль луча) не с фазовой, а с лучевой скоростью. Как выясняется, вдоль лучей (определяемых в результате решения системы уравнений (8.14)) распространяется и энергия волны. При этом элементарные соображения баланса энергии приводят к лучевому методу расчета интенсивностей волн в нулевом приближении.

Что же касается третьего замечания, то оно восходит к естественному стремлению возможно более полной физической наглядности в представлении результатов теории волн особенно в случаях, когда последние реализуются в форме сложных формульных соотношений или математических алгоритмов. Так, например, было показано, что построение волновых фронтов полей волн, возбуждаемых различными источниками, оказывается связанным с построением совокупности лучей, как решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8.14). Такая задача, выписанная для случаев анизотропии среды, подобна построению лучей и фронтов волн в неоднородных изотропных упругих средах на основе решения известной системы уравнений для лучей

$$\frac{dx_m}{d\tau} = v^2 p_m \equiv v n_m, \quad \frac{dp_m}{d\tau} = \frac{-v_{x_m}}{v}, \quad (m = 1, 2, 3), \tag{8.20}$$

где $v = v(x_1, x_2, x_3)$ – скорость распространения волн в среде, а $\vec{p} = \vec{n}/v$ – вектор рефракции с нормалью $\vec{n}$ к волновому фронту. Приведенные системы уравнений для лучей сами по себе еще не привносят количественно-качественной (физической) наглядности в понимании хода процессов распространения волн. Однако подобная наглядность сразу же появляется после численного решения систем уравнений и после построения (на дисплее компьютера) систем лучей и фронтов, отвечающих различным источникам волн и различным случаям вещественных параметров среды. Подобным же образом обстоит дело во многих (если не во всех) разделах теории волн. Вследствие этого представляется крайне целесообразно дополнять математическое изложение вопросов теории упругих волновых полей специальным разделом монографии, содержащим алгоритмы и программы расчета волновых полей в ряде узловых проблем теории.

ГЛАВА 3

Дополнения к общим положениям теории волн

Прежде всего здесь обсуждаются пути обобщения понятия о решении $\vec{u}(x_k, t)$ задач динамической теории упругости на случаи, когда свойства гладкости функций $\vec{u}(x_k, t)$ оказываются (значительно) хуже, чем предполагалось в главе 2. С решениями такого типа часто приходится встречаться в приложениях, в частности, при рассмотрении волновых полей, порожденных сосредоточенными источниками. Что же касается второго круга вопросов, то он связан с принципом взаимности, выражающим своеобразное свойство симметрии полей по отношению к источнику и приемнику волн. Принцип взаимности находит приложение в сейсмической практике, причем не всегда корректное. Поэтому изложение его сущности в точной форме и обсуждение его физического смысла несомненно актуально и теперь.

§9. Обобщенные решения уравнений теории упругости и представления о сосредоточенных источниках упругих возмущений

1. В главе 2 обсуждались различные вопросы, связанные с классическим представлением о решениях уравнения (2.8), причем под решениями подразумевались непрерывные функции $\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)$, имеющие вне границ раздела среды (на которых выполняются те или иные условия контакта, обсуждавшиеся в §3) непрерывные частные производные первого и второго порядка везде, за исключением, быть может, конечного числа характеристических поверхностей. В соответствии с таким представлением для выяснения вопроса о том, является ли $\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ классическим решением некоторой граничной задачи из п. 1 §3, необходимо было проверить непосредственно, удовлетворяет ли $\vec{u}$ уравнению (2.8) и всем дополнительным условиям, а также обладает ли оно требуемой гладкостью и требуемым типом разрывов в производных на характеристиках.

Подобную проверку не всегда легко произвести, особенно в случае сложных областей, а также входных данных, обладающих не слишком высокой гладкостью. Более того, входные данные часто оказываются настолько "неудачными", что им отвечает "решение", не укладывающееся в понятие классического решения уравнения (2.8), но такое, что ему можно придать ясный физический смысл. Наконец, иногда при выбранных входных данных задачи из п. 1 §3 решение $\vec{u}(M,t)$ не удается построить классическим путем, т.е. так, чтобы на каждом шагу можно было проверить удовлетворение решением уравнению и всем дополнительным условиям.

Однако, если рассматривать входные данные как результат предельного перехода по какому-либо параметру n от других, более гладких входных данных, то появляется возможность строить последовательность классических решений $\vec{u}(M,t)$, сходящуюся в некотором смысле к функции $\vec{u}(M,t)$. Возникают вопросы: можно ли (и при каких условиях) такую функцию $\vec{u}(M,t)$ считать решением рассматриваемой задачи, отвечающим предельным значениям ее входных данных; какой математический смысл следует придавать такого рода решению; каково практическое значение таких решений; каков их физический смысл и т.д. Выяснение подобных вопросов, имеющих, в частности, существенное значение в проблеме точечных источников упругих колебаний, базируется на некотором расширении понятия о решении уравнения (2.8). Чтобы наметить формальные пути такого расширения, полезно предварительно рассмотреть простейший случай однородной упругой (анизотропной) среды, для которой уравнение (2.8) может быть записано в форме

$$\vec{A}(\vec{u}) = \sum_{j,q=1}^{3} \vec{i}_j A_{jq} u_q - \rho \sum_{q=1}^{3} \vec{i}_q \frac{\partial^2 u_q}{\partial t^2} = -\vec{f}, \tag{9.1}$$

где симметричные дифференциальные операторы

$$A_{jq} \equiv A_{qj} = \sum_{k,p=1}^{3} c_{jk,pq} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_p} \tag{9.2}$$

содержат упругие параметры $c_{jk,pq}$ среды, удовлетворяющие соотношениям симметрии из (2.8).

2. Пусть $\varphi(M,t)$ – произвольная финитная функция, непрерывная с первыми и вторыми частными производными по x_k и t. (Поэтому, если носителем значений $\varphi(M,t) \neq 0$ является область B_0 с гладкой гланицей Σ^0, то в точках M и t, принадлежащих Σ^0, все функции φ, φ'_{x_k}, $\varphi''_{x_k x_p}$, φ''_{t^2} равны тождественно нулю.) Пусть, кроме того, $\vec{u}(M-M_0,t-t_0)$ такое интегрируемое векторное поле, что

$$\vec{U}(M,t)=\iiiint\limits_{(B_0)}\varphi(M_0,t_0)\vec{u}(M-M_0,t-t_0)dB_0=$$
$$=\iiiint\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(M_0,t_0)\vec{u}(M-M_0,t-t_0)dB_0 \qquad (9.3)$$

является классическим решением уравнения (9.1) при плотности массовых сил

$$\vec{F}(M,t)=\iiiint\limits_{(B_0)}\varphi(M_0,t_0)\vec{f}(M-M_0,t-t_0)dB_0=$$
$$=\iiiint\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(M_0,t_0)\vec{f}(M-M_0,t-t_0)dB_0. \qquad (9.4)$$

(Заметим, что переход к интегралам из правой части в (9.3) и (9.4) возможен потому, что вне B_0 оказывается $\varphi\equiv 0$.)

Спрашивается, каким общим требованиям достаточно подчинить поле $\vec{u}(M,t)$ в области его определения, чтобы функция $\vec{U}$ из (9.3) оказалась классическим решением уравнения (9.1) при $\vec{f}=\vec{F}$?

Переписывая (9.3) в виде

$$\vec{U}(M,t)=\iiiint\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(M-M',t-t')\vec{u}(M',t')dB' \qquad (9.5)$$

(и аналогично для $\vec{F}(M,t)$), где интегрирование производится фактически по конечной области $\widetilde{B}_0$, (образованной множеством точек $M'=M-M_0$, $t'=t-t_0$, отвечающих множеству точек M_0, t_0 из области B_0) замечаем, что вследствие предположенной гладкости произвольной функции φ дифференцирование функции $\vec{U}$ из (9.5) по M и t производится только лишь дифференцированием φ под знаками интегралов. Вследствие этого на основании (9.2) и (9.5) получаем

$$\vec{A}(\vec{U})=\iiiint\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{j,q=1}^{3}\vec{i}_j u_q A_{jq}\varphi-\rho\vec{u}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right]dB'$$

и

$$\left(\vec{i}_r \cdot \vec{A}(\vec{U})\right) = \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{q=1}^{3} u_q A_{rq}\varphi - \rho u_r \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right] dB' = \\ = \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\vec{u} \cdot \vec{A}(\vec{v}_r)\right) dB', \tag{9.6}$$

где

$$\vec{v}_r = \vec{i}_r \varphi(M - M', t - t').$$

При этом, вследствие (9.2) и соотношений

$$\frac{\partial^2 \vec{v}_r}{\partial x_k \partial x_p} = \frac{\partial^2 \vec{v}_r}{\partial x'_k \partial x'_p} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \vec{v}_r}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{v}_r}{\partial {t'}^2},$$

можно считать, что оператор $\vec{A}$ действует не на M и t, а на переменные M' и t', по которым производится интегрирование.

Из изложенного, а также – из предположения о том, что функции $\vec{U}(M,t)$ и $\vec{F}(M,t)$ из (9.3) и (9.4) представляют классические решения уравнения (9.1) при значениях M и t из области определения исследуемой функции $\vec{U}(M',t')$, вытекают соотношения

$$\iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{u}(M',t')\vec{A}(\vec{v}_r) dB' + \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{v}_r\, \vec{f}(M',t') dB' = \\ = \left(\vec{i}_r \left[\vec{A}(\vec{v}) - \vec{F}\right]\right) = 0, \quad (r = 1,2,3), \tag{9.7}$$

выполняющиеся при любом значке r и векторе $\vec{v}_r$ из (9.6), содержащем (дважды дифференцируемую) финитную произвольную функцию $\varphi(M - M', t - t')$. Такие соотношения должны выполняться при любых значениях M и t из области определения функций $\vec{U}(M,t)$ и $\vec{F}(M,T)$. Поэтому при (выбранных) фиксированных значениях M и t функции из (9.6)

$$\vec{v}_r = \vec{i}_r \varphi(M - M', t - t') \equiv \vec{i}_r \psi_r(M',t')$$

могут рассматриваться как (не зависящие от M и t) произвольные финитные функции, а их сумма

$$\sum_{r=1}^{3} \vec{i}_r \psi_r(M',t') = \vec{u}_0(M',t')$$

– как произвольная векторная финитная функция, непрерывная с первыми и вторыми частными ее производными.

Таким образом, из соотношений (9.7) вытекает условие

$$\begin{aligned}\iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{u}(M',t')\vec{A}\Big(\vec{u}_0(M',t')\Big)dB' = \\ = -\iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{u}_0(M',t')\vec{f}(M',t')dB',\end{aligned} \tag{9.7$'$}$$

которому должна удовлетворять функция $\vec{u}(M',t)$ исследуемого типа для того, чтобы "сглаженная" (при помощи гладкой финитной функции $\varphi(M_0,t_0)$) функция $\vec{U}$ из (9.3) оказалась классическим решением уравнения (9.1) с правой частью $\vec{F}(M,t)$ из (9.4). При этом $\vec{u}(M',t')$ из (9.7$'$) естественно считать решением (в новом обобщенном смысле) уравнения (9.1) при плотности массовых сил $\vec{f}(M,t)$.

К точному определению понятия "обобщенного решения уравнения (2.8)" и к установлению некоторых его свойств мы обратимся в п. 4 и 5 настоящего параграфа. Предварительно же приведем вспомогательные результаты, полезные для последующего.

3. Уравнение движения (2.8) произвольной идеально упругой среды будем записывать в виде

$$\vec{\Lambda}(\vec{u}) \equiv \overrightarrow{\mathrm{Div}}\, t_{ik} - \rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} = -\vec{f}(M,t) \tag{9.8}$$

и будем рассматривать его решения в некоторой ограниченной (замкнутой) области B, которая может содержать и границы раздела. Под областью B будем понимать гиперцилиндр V, $0 \leqslant t \leqslant T$, где V – замкнутая трехмерная область, заполненная упругой средой, ограниченная достаточно гладкой поверхностью S. Кроме B будем иногда рассматривать область B_ε (являющуюся "ε-расширением" области B), реализуемую в виде гиперцилиндра V_ε, $-\varepsilon \leqslant t \leqslant T+\varepsilon$, где V_ε есть объединение точек V и всех сфер $|M-M_1| \leqslant \varepsilon$ с центрами в точках $M_1 \in V$. Границы областей V и V_ε будем обозначать посредством Σ и Σ_ε.

Выбирая фиксированное $\varepsilon > 0$ и целое число $n_0 \geqslant 1$, определим класс произвольных функций $\delta_\varepsilon(M-M_0;n_0)$, непрерывных вместе со всеми частными производными порядков $n \leqslant n_0$, удовлетворяющих условиям

$$\left.\begin{aligned} &1) \quad \delta_\varepsilon(M-M_0;n_0) = \begin{cases} \geqslant 0, & |M-M_0| \leqslant \varepsilon, \\ \;\;0, & |M-M_0| > \varepsilon \end{cases} \\ &2) \quad \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(M-M_0;n_0)\,dM_0 = 1. \end{aligned}\right\} \tag{9.9}$$

Совершенно также под $\delta_\varepsilon(t-t_0;m_0)$ будем понимать произвольную функцию из класса функций, непрерывных вместе с производными порядков $n \leqslant m_0$ и таких, что

$$\left.\begin{aligned} &1) \quad \delta_\varepsilon(t-t_0;m_0) = \begin{cases} \geqslant 0, & |t-t_0| \leqslant \varepsilon, \\ \;\;0, & |t-t_0| > \varepsilon \end{cases} \\ &2) \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t-t_0;m_0)\,dt_0 = 1. \end{aligned}\right\} \tag{9.10}$$

Заметим, во-первых, что из (9.9) и (9.10) следуют очевидные соотношения

$$\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(M-M_0;n_0)\,dM_0 = 1,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t-t_0;m_0)\,dt_0 = 1,$$

во-вторых, что введенные классы функций можно конструировать на базе финитной функции

$$\varphi_\varepsilon(r) = \begin{cases} c\exp\left[\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-r^2}\right], & r \leqslant \varepsilon, \\ \qquad 0, & r > \varepsilon, \end{cases}$$

имеющей непрерывные производные всех порядков. Так, например, если $f(M-M_0) > 0$ – произвольная функция, непрерывная с производными порядков $n \leqslant n_0$, то за $\delta_\varepsilon(M-M_0;n_0)$ можно взять $f(M-M_0)\varphi_\varepsilon(|M-M_0|)$. При этом коэффициент c должен определяться для каждой f так, чтобы выполнялось условие 2) из (9.9).

Пусть $\vec{u}(M,t)$ – какое-либо векторное поле. Под средним полем $\vec{u}$ (или средней функцией от $\vec{u}$) будем понимать выражение, определяемое одной из следующих формул:

$$\vec{U}_{\varepsilon\varepsilon}(M,t) = \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{u}(M_0,t_0)\delta_\varepsilon(M-M_0;n_0)\delta_\varepsilon(t-t_0;m_0)\,dM_0\,dt_0, \tag{9.11}$$

$$\vec{U}_{\varepsilon x} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{u}(M_0,t)\delta_\varepsilon(M-M_0;n_0)\,dM_0, \tag{9.12}$$

$$\vec{U}_{\varepsilon t}(M,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{u}(M,t_0)\delta_\varepsilon(t-t_0;m_0)\,dt_0. \tag{9.13}$$

Заметим, что в соответствии с (9.9) и (9.10) в выписанных формулах интегрирование фактически производится лишь по ε-окрестности точки (M,t).

Для дальнейшего полезно сформулировать некоторые (элементарные) свойства средних функций. При этом, если считать, что $\delta_\varepsilon(M-M_0;n_0)$ и $\delta_\varepsilon(t-t_0;m_0)$ совпадают с соответствующими δ-функциями Дирака при $n_0=0$ и $m_0=0$, то достаточно рассмотреть лишь формулу (9.11), переходящую в (9.12) при $m_0=0$ и в (9.13) – при $n_0=0$. Из упомянутых свойств нам понадобятся следующие.

Свойство 1. *Если $\vec{u}(M,t)$ – ограниченная интегрируемая функция в области B, то в точках $(M,t)\in B$ функция $\vec{U}_{\varepsilon\varepsilon}$ из (9.11) при $n_0 \geqslant 1$ и $m_0 \geqslant 1$ имеет непрерывные по x_k и t все частные производные вида*

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial x_i^\alpha\,\partial x_k^\beta\,\partial x_j^\gamma\,\partial t^q}\vec{U}_{\varepsilon\varepsilon}(M,t),$$

где $p=\alpha+\beta+\gamma \leqslant n_0$ и $q \leqslant m_0$.

(Утверждение следует из свойств гладкости функций (9.9) и (9.10) и возможности дифференцирования функции $\vec{U}_{\varepsilon\varepsilon}$ под знаком интегралов. Последнее, кстати говоря, следует из того факта, что при $(M,t)\in B$ интегрирование в (9.11) производится по конечной области, содержащейся в B_ε.)

Замечание Утверждение сохраняет силу и в случае невыполнения одного из неравенств $n_0 \geqslant 1$, $m_0 \geqslant 1$, если функцию $\vec{u}$ считать непрерывной. Если $n_0 = 0$ $(m_0 = 0)$, то достаточно потребовать непрерывности $\vec{u}(M,t)$ по переменным x_k (по переменной t) при любом t (любой x_k) из области B_ε.

Свойство 2. *Если в области B_ε функция $\vec{u}(M,t)$ непрерывна и имеет интегрируемые первые частные производные по x_k и t, то в точках $(M,t) \in B$ операция усреднения из (9.11) над $\vec{u}$ коммутирует с однократным дифференцированием $\vec{u}$ по x_k и t.*

(В случае $m_0 = 0$ $(n_0 = 0)$ и дифференцирования по t (по x_k) утверждение следует из возможности дифференцирования под знаком интеграла правой части выражений (9.12) или (9.13). В остальных же случаях утверждение доказывается дифференцированием под знаком интеграла одной из функций δ_ε с последующим интегрированием по частям.)

Свойство 3. *Если в области B_{ε_0}, где $\varepsilon_0 > 0$ фиксировано, функция $\vec{u}(M,t)$ непрерывна вместе с частными производными порядков $q \leqslant q_0$, то средние функции (9.11)–(9.13) при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и их частные производные порядков $q \leqslant q_0$ сходятся при $\varepsilon \to 0$ равномерно в области B к функции $\vec{u}(M,t)$ и к соответствующим ее частным производным.*

(Утверждение легко доказывается применением к $\vec{U}_{\varepsilon\varepsilon}$ из (9.11), равно как и к ее частным производным, вычисляемым с учетом свойства 2, первой теоремы о среднем).

Свойство 4. *Если относительно $\vec{u}(M,t)$ известна лишь ее интегрируемость в B_{ε_0}, где $\varepsilon_0 > 0$ фиксировано, то средние функции (9.11)–(9.13) сходятся при $\varepsilon \to 0$ к функции $\vec{u}(M,t)$ по крайней мере в среднем по области B в смысле метрики в L^p $(p = 1, 2)$.*

(Доказательство такого утверждения можно найти в 5-ои томе “Курса высшей математики” В. И. Смирнова.)

Заметим, что из свойства 3 для любой непрерывной функции

$\vec{u}(M,t)$ вытекают соотношения

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{u}(M,t)\delta_\varepsilon(M-M_0;n_0)\,dM_0 \equiv \\
&\quad\equiv \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{u}(M,t)\delta(M-M_0;n_0)\,dM_0 = \vec{u}(M,t), \\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{u}(M,t_0)\delta_\varepsilon(t-t_0;m_0)\,dt_0 \equiv \\
&\quad\equiv \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{u}(M,t_0)\delta(t-t_0;m_0)\,dM_0 = \vec{u}(M,t),
\end{aligned}\right\} \tag{9.14}$$

позволяющие совместно с (9.9) и (9.10) рассматривать (обобщенные) δ-функции Дирака[1] как результат предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ от функций (9.9) и (9.10).

Наконец, нам придется пользоваться интегральной формулой Грина–Вольтерра

$$\begin{aligned}
&\iiiint\limits_{(B)} \left[\vec{u}^{\,0}\vec{A}(\vec{u}) - \vec{u}\vec{A}(\vec{u}^{\,0})\right] dB = \\
&= \iiint\limits_{(\Sigma)} \left[\vec{u}^{\,0}\vec{M}_4(\vec{u}) - \vec{u}\vec{M}_4(\vec{u}^{\,0})\right] d\Sigma - \\
&- \iiint\limits_{(\Sigma_1)} \vec{u}^{\,0}\left[\vec{M}_4^{+}(\vec{u}) - \vec{M}_4^{-}(\vec{u})\right] d\Sigma_1 -
\end{aligned} \tag{9.15}$$

$$-\int\limits_0^T dt \iint\limits_{(S_0)} \Big\{ \big[(\vec{u}^{\,0}\vec{t}_n)^+ - (\vec{u}^{\,0}\vec{t}_n)^- \big] - \big[(\vec{u}\,\vec{t}_n^{\,0})^+ - (\vec{u}\,\vec{t}_n^{\,0})^- \big] \Big\}\, dS_0,$$

[1] Как известно, δ-функцию Дирака определяют формально соотношениями вида $\delta(t-t_0) = 0$ при $t \neq t_0$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t_0)\delta(t-t_0)\,dt_0 = \varphi(t)$ для любой непрерывной $\varphi(t)$. Упомянутый предельный переход всегда следует выполнять под знаками интегралов как в (9.14).

получающейся из дифференциальной формулы (2.21), (в которой $\vec{f}$ и $\vec{f}^{\,0}$ заменены соответственно на $\vec{A}(\vec{u})$ и $\vec{A}(\vec{u}^{\,0})$ согласно введенному в (9.8) обозначению для левой части уравнения движения упругой среды) интегрированием по области B в виде гиперцилиндра из начала п. 3 в следующих предположениях. 1) В трехмерной области V, заполненной упругой средой (на которой построена четырехмерная область B), имеется граница раздела S_0 первого рода, вне которой все параметры упругой среды непрерывны. 2) Поверхность S_0 имеет непрерывную (или кусочно-непрерывную) нормаль $\vec{n}$. 3) По обе стороны от границы раздела поле $\vec{u}^{\,0}$ непрерывно вместе с первыми частными производными вплоть до этой границы, а также до границы Σ области B, и имеет ограниченные вторые частные производные. 4) По обе сторны от границы раздела S_0 поле $\vec{u}$, имеющее в B интегрируемые вторые частные производные, непрерывно и имеет первые частные производные, непрерывные везде, за исключением поверхности Σ_1, с кусочно-непрерывной нормалью $\vec{\nu}$. При приближении к Σ_1 с обеих ее сторон $\vec{M}_4(\vec{u})$ имеет определенные предельные значения $\vec{M}_4{}^{\pm}(\vec{u})$, а при приближении (с обеих сторон) к границе раздела S_0 существуют предельные значения $\vec{u}^{\,\pm}$ и $\vec{t}_n^{\,\pm}$ векторов $\vec{u}$ и $\vec{t}_n$.

Не останавливаясь на элементарном выводе формулы (9.15), лишь отметим, во-первых, что выражения $\vec{t}_n$ и $\vec{M}_4(\vec{u})$, равно как $\vec{t}_n^{\,0}$ и $\vec{M}_4(\vec{u}^{\,0})$, определяются формулами (2.5) и (2.23) соответственно полями $\vec{u}$ и $\vec{u}^{\,0}$, во-вторых, что различие в условиях, которым мы подчинили поля $\vec{u}$ и $\vec{u}^{\,0}$, объясняется лишь кругом вопросов, к которым будет применяться формула (9.15) в настоящем параграфе. В дальнейшем границу S_0, $0 \leqslant t \leqslant T$, раздела 1-го рода упругой среды будем обозначать посредством Σ^0, если речь идет о четырехмерной области B.

4. Понятие об обобщенном решении неоднородного уравнения (9.8) может быть определено по С. Л. Соболеву следующим образом. Пусть B – область переменных (x_1, x_2, x_3, t), ограниченная поверхностью Σ с непрерывной (или кусочно-непрерывной) нормалью $\vec{\nu}$, построенная на участке упругой среды с непрерывной плотностью ρ и упругими параметрами $c_{ik,\nu\mu}$ из (2.6), т.е. не имеющем границ раздела 1-го рода. Пусть, кроме того, $\vec{u}^{\,0}(M,t)$ – произвольное финитное поле в B, непрерывное с первыми частными производными и имеющие ограниченные вторые производные, тождественно равное нулю в окрестности границы Σ. Множество таких функций будем обозначать посредством K_B. (Заметим, что под K_B можно было бы подразумевать и множество непрерывных финитных функций, имеющих непрерывные производные всех порядков, тождественно равных нулю в окрестности Σ.)

Рассмотрим сначала классическое решение $\vec{u}(M,t)$ уравнения (9.8) с непрерывной правой частью, имеющее слабые или сильные разрывы на характеристиках, расположенных в области B. Очевидно, что для $\vec{u}(M,t)$ и произвольной $\vec{u}^{\,0}(M,t) \in K_B$ из интегральной формула Грина–Вольтерра (9.15) следует

$$\iiiint\limits_{(B)} \left[\vec{u}^{\,0}\vec{A}(\vec{u}) - \vec{u}\vec{A}(\vec{u}^{\,0})\right] dB = 0. \tag{9.16}$$

Но так как $\vec{u}(M,t)$ – решение уравнения (9.8), то соотношение (9.16) переписывается в виде

$$\iiiint\limits_{(B)} \vec{u}\vec{A}(\vec{u}^{\,0})dB = -\iiiint\limits_{(B)} \vec{u}^{\,0}\vec{f}\,dB. \tag{9.17}$$

Равенство (9.17), содержащее произвольную функцию $\vec{u}^{\,0} \in K_B$, должно выполняться для любого классического решения (9.8) (см. теоремы 1 и 2 из п. 5). Таким образом, условие (9.17) эквивалентно уравнению (9.8) в случае достаточно гладких $\vec{u}$ и $\vec{f}$. Однако фактически оно оказывается существенно более широким, так как сохраняет смысл и для функций $\vec{u}(M,t)$, не имеющих производных, лишь бы $\vec{u}$ и $\vec{f}$ были бы интегрируемы. Это обстоятельство, равно как и соображения, изложенные в п. 2, дают основания для следующего расширения понятия о решении уравнения (9.8). В случае, когда область B не содержит границ раздела 1-го рода, обобщенным решением уравнения (9.8) с интегрируемой правой частью $\vec{f}$ называется интегрируемая функция $\vec{u}(M,t)$, удовлетворяющая соотношению (9.17) при произвольной $\vec{u}^{\,0} \in K_B$.

Если в области B содержится граница Σ^0 раздела 1-го рода упругой среды, на которой поле смещений должно удовлетворять тому или иному условию контакта из п. 4 §3, называемому далее условием C, то нужно говорить об обобщенном решении уравнения (9.8), удовлетворяющем условию C на Σ^0. При этом вместо K_B в области B следует рассматривать класс K_B^0 произвольных финитных векторов $\vec{u}^{\,0}$, тождественно равных нулю в окрестности Σ, удовлетворяющих на Σ^0 условию C, а вне Σ^0 непрерывных вместе с первыми частными производными и имеющих ограниченные вторые частные производные. Таким образом, в случае интегрируемой в B функции $\vec{f}$ под обобщенным решением уравнения (9.8) при контактном условии C понимается интегрируемая в B функция $\vec{u}(M,t)$, удовлетворяющая (9.17) при произвольной $\vec{u}^{\,0} \in K_B^0$.

5. Сформулируем и докажем некоторые утверждения, устанавливающие важные для дальнейшего свойства обобщенных решений (9.8).

Теорема 1. *Если в области B, не содержащей границ раздела 1-го рода, обобщенное решение $\vec{u}(M,t)$ уравнения (9.8) (с непрерывной правой частью $\vec{f}$) непрерывно с первыми частными производными и имеет интегрируемые в B вторые частные производные, непрерывные везде, за исключением, быть может, конечного числа поверхностей $\widetilde{\Sigma}$, то оно является классическим решением уравнения* (9.8).

Действительно, так как $\vec{u}$ – обобшенное решение, то оно удовлетворяет (9.17) при любой $\vec{u}^{\,0} \in K_B$. Так как $\vec{u}$ непрерывно с первыми производными и имеет интегрируемые вторые частные производные, то для $\vec{u}$ и $\vec{u}^{\,0}$ справедливо (9.16). Поэтому

$$\iiiint\limits_{(B)} \left[\vec{A}(\vec{u}) + \vec{f}\,\right] \vec{u}^{\,0}\, dB = 0 \tag{9.18}$$

при любой $\vec{u}^{\,0} \in K_B$ и функции $\vec{\chi}(M,t) = \vec{A}(\vec{u}) + \vec{f}$, непрерывной вне конечного числа поверхностей $\widetilde{\Sigma}$. Пусть (M_0, t_0) – произвольная точка B, лежащая вне $\widetilde{\Sigma}$, расстояние которой до $\widetilde{\Sigma}$ равно $\varepsilon_0 > 0$. Выбирая, например,

$$\vec{u}^{\,0} = \vec{\mathbf{a}}\, \delta_\varepsilon(M - M_0; n_0)\delta_\varepsilon(t - t_0; m_0),$$

где $n_0 \geqslant 2$, $m_0 \geqslant 2$, $|\vec{\mathbf{a}}| = 1$, причем $\vec{\mathbf{a}}$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ произвольны, и применяя к (9.18) первую теорему о среднем, получаем

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\chi}(M', t') = 0,$$

где $|M'-M_0| < \varepsilon$ и $|t-t'| < \varepsilon$. В силу непрерывности $\vec{f}$ и произвола в выборе $\vec{\mathbf{a}}$ и ε отсюда следует

$$\vec{\chi}(M_0, t_0) \equiv \vec{A}(\vec{u}) + \vec{f} = 0,$$

что и требуется.

Замечание. Если единственное изменение в условиях теоремы состоит в том, что обобщенное решение $\vec{u}(M,t)$ имеет разрывы в первых производных на гладкой поверхности (или поверхностях) Σ_1, причем с обеих ее сторон существуют непрерывные предельные значения таких производных, то $\vec{u}(M,t)$ – классическое решение уравнения (9.8) с правильными сильными разрывами на Σ_1.

Действительно, из (9.17) и (9.15) аналогично предыдущему получается равенство

$$\iiiint\limits_{(B)} \left[\vec{A}(\vec{u}) + \vec{f}\right] \vec{u}^{\,0}\, dB = -\iiint\limits_{(\Sigma_1)} \vec{u}^{\,0} \left[\vec{M}_4^+(\vec{u}) - \vec{M}_4^-(\vec{u})\right] d\Sigma_1, \tag{9.19}$$

справедливое для любой $\vec{u}^{\,0} \in K_B$. Выбирая сначала $\vec{u}^{\,0}$ равным нулю на Σ_1 и замечая, что при этом (9.19) принимает вид (9.18) (так же, как и выше), убеждаемся, что вне поверхностей $\widetilde{\Sigma}$ и Σ_1 удовлетворяется уравнение (9.8). Но вследствие этого (9.19) сводится к равенству

$$\iiint\limits_{(\Sigma_1)} \vec{u}^{\,0} \left[\vec{M}_4^+(\vec{u}) - \vec{M}_4^-(\vec{u})\right] d\Sigma_1 = 0$$

при произвольной $\vec{u}^{\,0} \in K_B$. В силу непрерывности $\left[\vec{M}_4^+(\vec{u}) - \vec{M}_4^-(\vec{u})\right]$ в точках Σ_1 (вытекающей из условий теоремы) отсюда следует $\vec{M}_4^+ = \vec{M}_4^-$ на Σ_1, что и означает выполнение динамических условий совместности (5.6). Из предположения о непрерывности $\vec{u}$ и существования предельных значений первых частных производных от $\vec{u}$ с обеих сторон Σ_1 вытекают кинематические условия совместности (5.5) на Σ_1. Этим и доказывается утверждение.

Теорема 2. *Если в области B, содержащей границу (или границы) Σ^0 раздела первого рода, функция $\vec{f}$ непрерывна, а обобщенное* *решение $\vec{u}(M,t)$ уравнения* (9.8) *при контактном условии C непрерывно вместе с первыми частными производными по обе стороны от Σ^0 (вплоть до точек Σ^0) и имеет интегрируемые вторые частные производные, непрерывные везде, за исключением конечного числа поверхностей $\widetilde{\Sigma}$, то $\vec{u}(M,t)$ является классическим решением уравнения* (9.8) *при условиях контакта C.*

Действительно, если сначала выбирать $\vec{u}^{\,0} \in K_B$ равными тождественно нулю в ε-окрестности поверхности Σ^0 (где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало), то вполне аналогично предыдущему нетрудно убедиться, что вне Σ^0 функция $\vec{u}(M,t)$ удовлетворяет уравнению (9.8). Вследствие этого условие (9.17) и формула (9.15) (в которой лишь третий интеграл из правой части отличен от нуля) приводят к равенству

$$\int\limits_0^T dt \iint\limits_{(S_0)} \Big\{ \big[(\vec{u}^{\,0} \vec{t}_n)^+ - (\vec{u}^{\,0} \vec{t}_n)^- \big] - \big[(\vec{u}\, \vec{t}_n^{\,0})^+ - (\vec{u}\, \vec{t}_n^{\,0})^- \big] \Big\}\, dS_0 =$$

$$= - \iiiint\limits_{(B)} \vec{u}^{\,0} \Big[\vec{A}(\vec{u}) + \vec{f} \Big]\, dB = 0, \tag{9.20}$$

справедливому при любой $\vec{u}^{\,0} \in K_B^0$.

Предположим для определенности, что условие C контакта на Σ^0 сводятся для поля $\vec{u}^{\,0}$ к равенствам

$$(\vec{u}^{\,0})^+ = (\vec{u}^{\,0})^- \equiv \vec{u}^{\,0}, \quad (\vec{t}_n^{\,0})^+ = (\vec{t}_n^{\,0})^- \equiv \vec{T}_0 \tag{9.21}$$

в точках поверхности S_0. (Контакт жесткий!) При этом соотношения (9.20) переписывается в виде

$$\int\limits_0^T dt \iint\limits_{(S_0)} \Big\{ \vec{u}^{\,0} (\vec{t}_n^{\,+} - \vec{t}_n^{\,-}) - \vec{T}_0 (\vec{u}^{\,+} - \vec{u}^{\,-}) \Big\}\, dS = 0, \tag{9.22}$$

где $\vec{u}^{\,0}$ и $\vec{T}_0$ обозначают граничные значения (9.21) векторов $\vec{u}^{\,0}$ и $\vec{t}_n^{\,0}$ на S_0, причем условие (9.22) должно выполняться при любой $\vec{u}^{\,0} \in K_B^0$.

Чтобы получить из (9.22) условия жесткости контакта на S_0 для поля $\vec{u}$, т.е. равенства

$$\vec{u}^{\,+} = \vec{u}^{\,-}, \quad \vec{t}_n^{\,+} = \vec{t}_n^{\,-}, \tag{9.23}$$

достаточно воспользоваться легко доказуемым фактом, а именно: $\vec{u}^{\,0}$ может быть выбрано удовлетворяющим условию $(\vec{u}^{\,0})^+ = (\vec{u}^{\,0})^- \equiv \vec{u}^{\,0} = 0$ на S_0 при произвольных значениях вектора напряжений $\vec{T}_0 \equiv (\vec{t}_n^{\,0})^+ = (\vec{t}_n^{\,0})^-$ в точках этой поверхности. При указанном выборе поля $\vec{u}^{\,0}$ первое слагаемое под знаком интеграла в (9.22) равно нулю тождественно. Поэтому в силу произвола в выборе значений $\vec{T}_0(M,t)$ в точках поверхности S_0, а также непрерывности $\vec{u}^{\,\pm}$ и $\vec{t}_n^{\,\pm}$ на S_0 (вытекающей из условий теоремы) из (9.22) следует первое из равенств (9.23). В силу этого равенства соотношение (9.22) переписывается в виде, не содержащем второго слагаемого под знаком интеграла, причем оно должно выполняться при любом $\vec{u}^{\,0} \in K_B^0$. Отсюда сразу же следует и второе равенство (9.23).

Теорема 3. *Если при $(M,t) \in B$ функция $\vec{u}(M,t-t_0;M_0)$ есть обобщенное решение уравнения (9.8) при $\vec{f} = \vec{f}(M,t-t_0;M_0)$ и при любых значениях (M_0,t_0), принадлежащих области B_0, а $\varphi(M_0,t_0)$ – интегрируемая в B_0 функция, то*

$$\vec{U}(M,t) = \iiiint\limits_{(B_0)} \varphi(M_0,t_0)\vec{u}(M,t-t_0;M_0)dB_0 \tag{9.24}$$

определяет в области B обобщенное решение уравнения

$$\vec{A}(\vec{U}) = -\vec{F}(M,t), \tag{9.25}$$

где

$$\vec{F}(M,t) = \iiiint\limits_{(B_0)} \varphi(M_0,t_0)\vec{f}(M,t-t_0;M_0)dB_0. \tag{9.26}$$

Действительно, для произвольной $\vec{u}^{\,0} \in K_B$ (или K_B^0) имеем

$$\vec{U}\,\vec{A}(\vec{u}^{\,0})\,dB =$$

$$= \iiiint\limits_{(B_0)} \varphi(M_0,t_0)\left[\iiiint\limits_{(B_0)} \vec{u}(M,t-t_0;M_0)\vec{A}(\vec{u}^{\,0})\,dB\right]dB_0 =$$

$$= -\iiiint\limits_{(B_0)} \varphi(M_0,t_0)\left[\iiiint\limits_{(B_0)} \vec{u}^{\,0}(M,t)\vec{f}(M,t-t_0;M_0)\,dB\right]dB_0 =$$

$$= - \iiiint\limits_{(B_0)} \vec{u}^{\,0} \vec{F} \, dB,$$

что и доказывает утверждение.

Замечание. Практическое значение теоремы 3 состоит в том, что в ней рассматривается операция (9.24) усреднения по параметрам M_0 и t_0 решения $\vec{u}(M, t - t_0; M_0)$ уравнения (9.8), весьма часто встречающаяся в приложениях. Естественно ожидать, что такая операция приводит к более гладкому решению $\vec{U}(M,t)$ уравнения (9.8) со сглаженной правой частью $\vec{F}(M,t)$. При этом, если на основании (9.24) удалось доказать достаточную гладкость функции $\vec{U}(M,t)$, то в силу теорем 1 и 2 она является классическим (т.е. "хорошим" с точки зрения практики) решением уравнения (9.25).

В частности, в случае однородной среды $\vec{u}(M, t - t_0; M_0) \equiv \vec{u}(M - M_0, t - t_0)$. Поэтому формула (9.24) для любой финитной функции $\varphi(M,t)$ переписывается в виде

$$\vec{U}(M,t) = \iiiint\limits_{(B_0)} \varphi(M_0,t_0)\vec{u}(M - M_0, t - t_0) \, dB_0 =$$

$$= \iiiint\limits_{(B_0)} \varphi(M - M_0, t - t_0)\vec{u}(M_1, t_1) \, dB_1, \qquad (9.27)$$

где B_1 – настолько широкая область, что при любых (M,t), принадлежащих замкнутой области B, вблизи границы B_1 имеет место $\varphi(M - M_1, t - t_1) \equiv 0$. В этом случае гладкость решения $\vec{U}$ элементарно устанавливается на основании гладкости функции $\varphi(M,t)$.

Теорема 4. *Если $\vec{u}_n(M,t)$ – последовательность классических решений уравнений*

$$\vec{A}(\vec{u}_n) = -\vec{f}_n(M,t) \qquad (9.28)$$

и если в области B существуют интегрируемые функции $\vec{u}(M,t)$ и $\vec{f}(M,t)$ такие, что при $p = (1$ или $2)$

$$\lim_{n\to\infty} \iiiint\limits_{(B)} \left|\vec{u}_n - \vec{u}\right|^p dB = 0, \qquad (9.29)$$

$$\lim_{n\to\infty} \iiiint\limits_{(B)} \left|\vec f_n - \vec f\right|^p dB = 0, \qquad (9.29')$$

то $\vec u(M,t)$ есть обобщенное решение уравнения (9.8) с правой частью $\vec f(M,t)$.

Действительно, для функций $\vec u$, $\vec f$ и любой $\vec u^{\,0} \in K_B$ (или K_B^0) имеем

$$\iiiint\limits_{(B)} \left[\vec u \vec A(\vec u^{\,0}) + \vec u^{\,0} \vec f\right] dB \equiv$$

$$\equiv \iiiint\limits_{(B)} \left\{\left[\vec u_n \vec A(\vec u^{\,0}) + \vec u^{\,0} \vec f_n\right] + (\vec u - \vec u_n)\vec A(\vec u^{\,0}) + (\vec f - \vec f_n)\vec u^{\,0}\right\} dB. \quad (9.30)$$

Но

$$\iiiint\limits_{(B)} \left[\vec u_n \vec A(\vec u^{\,0}) + \vec u^{\,0} \vec f_n\right] dB = 0 \qquad (9.31)$$

в силу (9.28) и (9.16). Вследствие же ограниченности $\vec A(\vec u^{\,0})$ и $\vec u^{\,0}$ справедливы оценки

$$\left|\iiiint\limits_{(B)} (\vec u - \vec u_n)\vec A(\vec u^{\,0})\, dB\right| \leqslant c_p \left[\iiiint\limits_{(B)} \left|\vec u - \vec u_n\right|^p dB\right]^{1/p}, \qquad (9.32)$$

$$\left|\iiiint\limits_{(B)} (\vec f - \vec f_n)\vec u^{\,0}\, dB\right| \leqslant \tilde c_p \left[\iiiint\limits_{(B)} \left|\vec f - \vec f_n\right|^p dB\right]^{1/p}, \qquad (9.32')$$

из которых и (9.29) следует стремление к нулю правой части (9.30) при $n \to \infty$. Так как левая часть (9.30) не зависит от n, то она равна нулю, что и требуется.

Замечание. Очевидно, что утверждение теоремы остается справедливым и при замене (9.29′) более слабым условием, а именно:

$$\lim_{n\to\infty} \iiiint\limits_{(B)} (\vec f - \vec f_n)\vec u^{\,0}\, dB = 0, \qquad (9.33)$$

где $\vec u^{\,0} \in K_B$ (или K_B^0).

Справедлива и обратная теорема.

Теорема 5. *Любое обобщенное решение $\vec{u}(M,t)$ уравнения* (9.8) *может рассматриваться как предел в смысле* (9.29) *последовательности классических решений $\vec{u}_n(M,t)$ уравнений* (9.28) *с такими правыми частями $\vec{f}_n$, что для $\vec{f}$ и $\vec{f}_n$ выполняется* (9.33).

Действительно, из функционального анализа известно, что для любой интегрируемой $\vec{u}(M,t)$ (следовательно, и для любого обобщенного решения уравнения (9.8)) может быть построена последовательность $\vec{u}_n(M,t)$ функций, непрерывных с производными до второго порядка (и даже сколь угодно гладких), такая, что выполняется соотношение (9.29).[2] Выбирая по обобщенному решению $\vec{u}(M,t)$ такую последовательность $\vec{u}_n(M,t)$, определим $\vec{f}_n = -\vec{A}(\vec{u}_n)$. Для классических решений $\vec{u}_n$ и любой $\vec{u}^{\,0} \in K_B$ (или K_B^0) выполняется (9.31). Пользуясь (9.31) и формулой (9.17) для обобщенного решения, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \iiiint\limits_{(B)} \vec{u}^{\,0}(\vec{f}-\vec{f}_n)\,dB = \lim_{n\to\infty} \iiiint\limits_{(B)} (\vec{u}_n-\vec{u})\vec{A}(\vec{u}^{\,0})\,dB = 0$$

в силу (9.32) и (9.29), что и требуется.

6. В заключение краткого обзора наиболее важных для приложений результатов теории обобщенных решений уравнения (9.8) следует сделать ряд замечаний, прежде всего относящихся к случаю, в котором поле смещений в области B возбуждается не массовыми силами с плотностью $\vec{f}(M,t)$, а воздействиями, прикладываемыми к границе S области V, заполненной упругой средой. Ради определенности остановимся на воздействии вида

$$\vec{t}_n\big|_{(S)} = -\vec{T}(M,t), \tag{9.34}$$

где $M \in S$, причем будем предполагать, что внутри V нет границ раздела 1-го рода.[3]

Замечая, что при указанном в п. 3 выборе области B интеграл по Σ в формуле (9.15) имеет значение

$$\iiint\limits_{(\Sigma)} \Big[\vec{u}^{\,0}\vec{M}_4(\vec{u}) - \vec{u}\,\vec{M}_4(\vec{u}^{\,0})\Big]\,d\Sigma = \iiint\limits_{(V)} \rho\left(\vec{u}^{\,0}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - \vec{u}\frac{\partial\vec{u}^{\,0}}{\partial t}\right)\bigg|_{t=0} dV -$$

[2] Заметим, что в качестве $\vec{u}_n$ можно взять среднюю функцию (9.11) при $n_0 \geqslant 2$, $m_0 \geqslant 2$ и $\varepsilon = \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

[3] Вследствие чего в (9.15) отсутствует слагаемое с интегралом по S_0.

$$-\iiint\limits_{(V)} \rho\left(\vec{u}^{\,0}\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \vec{u}\frac{\partial \vec{u}^{\,0}}{\partial t}\right)\Big|_{t=T} dV + \int\limits_0^T dt \iint\limits_{(S)} \left[\vec{u}^{\,0}\vec{t}_n - \vec{u}\vec{t}_n^{\,0}\right] dS,$$

определим в B класс $\widetilde{K}_b$ произвольных финитных функций $\vec{u}^{\,0}$, непрерывных вместе с производными первого и второго порядков (или даже с производными всех порядков), равных тождественно нулю в окрестности поверхностей $t = 0$ и $t = T$ и удовлетворяющих условию $\vec{t}_n^{\,0} = 0$ в точках боковой поверхности области B, т.е. при $M \in S$, $0 < t < T$. Если $\vec{u}(M,t)$ – классическое решение однородного уравнения (9.8) в области B, удовлетворяющее граничному условию (9.34), то при произвольном $\vec{u}^{\,0} \in \widetilde{K}_b$ формула (9.15) запишется в виде

$$\iiiint\limits_{(B)} \vec{u}\vec{A}(\vec{u}^{\,0})\, dB = -\int\limits_0^T dt \iint\limits_{(S)} (\vec{u}^{\,0}\,\vec{T})\, dS. \tag{9.35}$$

Таким образом, указанное классическое решение $\vec{u}$ удовлетворяет соотношению (9.35) при любой $\vec{u}^{\,0} \in K_B$. Нетрудно видеть, что, наоборот, если (9.35) выполняется при любой $\vec{u}^{\,0} \in \widetilde{K}_b$ и при функции $\vec{u}$, непрерывой в B, например, вместе с производными первого и второго порядков, то $\vec{u}$ – классическое решение однородного уравнения (9.8), удовлетворяющее граничному условию (9.34). Приведенные соображения показывают, что соотношение (9.35), подобно соотношению (9.17), может быть положено в основу определения понятия обобщенного решения однородного уравнения (9.8) при граничном условии (9.34). Вследствие очевидной идейной близости соотношений (9.17) и (9.35) представляется возможным не останавливаться здесь на точном определении понятия об обобщенном решении однородного уравнения (9.8) при граничном условии (9.34), а также на установлении необходимых для приложений его свойств. Отметим только, что на основе (9.35) легко могут быть доказаны утверждения, вполне аналогичные утверждениям теорем, приведенных в п. 5.

Остается сделать замечание, связанное с тем обстоятельством, что при изложении основных (простейших) результатов теории обобщенных решений уравнения теории упругости мы не рассматривали динамических задач в их полной постановке, обсуждавшейся в §3. Объясняется это тем, что необходимость перехода к обобщенным решениям в прикладных задачах теории упругости обычно возникает в связи с рассмотрением последовательностей $\vec{u}_n(M,t)$ классических решений полно поставленных (в смысле §3) динамических задач, соответствующих некоторым последовательностям достаточно гладких внешних воздействий, например, массовых $\vec{f}_n(M,t)$ или поверхностных $\vec{T}_n(M,t)$ плотностей сил. При фиксированном значке n каждая из таких задач для уравнения (9.8) решается при всех необходимых дополнительных условиях из §3, обеспечивающих единственность решения. При изменении же значка n (например, при $n \to \infty$) внешние воздействия на среду стремятся к соответствующим предельным значениям, гладкость которых оказывается уже недостаточно высокой для того, чтобы отвечающее им предельное поле упругих смещений $\vec{u}(M,t)$ имело классический смысл. И если выполняются условия теоремы 4 (или вполне аналогичной теоремы в случае граничных воздействий $\vec{T}_n$), то предельное поле $\vec{u}(M,t)$ оказывается обобщенным решением уравнения (9.8), отвечающим предельным значениям внешних воздействий, а также всем прочим (не зависящим от значка n) дополнительным условиям динамической задачи, которым удовлетворяла функция $\vec{u}_n(M,t)$. Из единственности решения классических задач для $\vec{u}_n(M,t)$, а также из единственности предела (9.29′) следует единственность обобщенного решения $\vec{u}(M,t)$ в смысле метрики в L_p.

7. С обобщенными решениями в динамической теории упругости приходится встречаться главным образом при рассмотрении полей сосредоточенных источников колебаний.

С физической точки зрения естественным подходом к проблеме источников колебаний, приложенных в точке (M_0, t_0) упругой среды, является рассмотрение последовательностей распределенных достаточно гладких плотностей массовых или поверхностных сил, область приложения которых стягивается к точке (M_0, t_0) при изменении некоторого параметра. Так, например, в случае внутреннего источника колебаний типа мгновенной силы с единичным импульсом, приложенной в момент $t = t_0$ к точке M_0 области V, за упомянутую последовательность можно взять плотность

$$\vec{f}_n(M - M_0, t - t_0) = \vec{i}_k\, \delta_{\varepsilon_n}(M - M_0; n_0)\delta_{\varepsilon_n}(t - t_0; m_0) \qquad (9.36)$$

с δ-образными функциями из (9.9) и (9.10).

В случае подобного же источника, приложенного в точке (M_0, t_0) границы S упругой среды, следует исходить из последовательности

$$\vec{T}_n = \vec{l}\,\varphi_n(M - M_0)\delta_{\varepsilon_n}(t - t_0; m_0), \tag{9.37}$$

где $\vec{l}$ – единичный вектор нормали или касательной к поверхности S в точке M (или в точке M_0), а задаваемая в точках S достаточно гладкая функция $\varphi_n(M - M_0)$ подчинена условиям

$$1)\quad \varphi_n(M - M_0) = \begin{cases} \geqslant 0, & |M - M_0| \leqslant \varepsilon_n, \\ \ 0, & |M - M_0| > \varepsilon_n; \end{cases}$$

$$2)\quad \iint\limits_{(S)} \varphi_n(M - M_0)\, dS = 1.$$

Не задерживаясь на перечислении других возможностей, заметим, что любые точечные источники могут быть сконструированы из системы источников вида (9.36) и (9.37) на основе соответствующих предельных переходов и что создаваемые ими поля смещений определяются суммарным вектором приложенных в источнике сил, а также векторами их моментов первого и высших порядков.

При выборе последовательностей распределенных массовых сил вида (9.36) естественно иметь дело с настолько гладкими (δ-образными) функциями $\delta_{\varepsilon_n}(M - M_0; n_0)$ и $\delta_{\varepsilon_n}(t - t_0; m_0)$, чтобы при воздействии (9.36) и при всех остальных дополнительных условиях рассматриваемой задачи с нулевыми начальными данными и плотностью массовых сил $\vec{f} = \vec{f}_n$ существовало классическое решение $\vec{u}_n(M, t - t_0, M_0)$, обладающее единственностью в классическом смысле. При этом построение $\vec{u}_n$ целесообразно проводить в два этапа, причем на первом – считать среду, к которой прикладывается воздействие $\vec{f}_n$, безграничной. Если классические решения $\vec{u}_n$ построены, то для получения поля смещений $\vec{u}$, отвечающего точечному источнику, следует рассмотреть предельный переход при $n \to \infty$ (т.е. при $\varepsilon \to 0$). При этом воздействие (9.36) приобретает смысл единичной сосредоточенной силы, характеризуемой символом

$$\vec{f}(M - M_0, t - t_0) = \vec{i}_k\delta(M - M_0)\delta(t - t_0), \tag{9.38}$$

где $\delta(M-M_0)$ и $\delta(t-t_0)$ – соответствующие δ-функции Дирака, а за поле смещений, отвечающее источнику (9.38), нужно взять предел последовательности классических решений $\vec{u}_n(M, t-t_0; M_0)$. Однако может оказаться (и иногда оказывается в действительности), что последовательность $\vec{u}_n$ не имеет предела в обычном смысле, но существует функция $\vec{u}(M, t-t_0; M_0)$ такая, что имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \iiiint\limits_{(B)} \left|\vec{u}_n(M, t-t_0, M_0) - \vec{u}(M, t-t_0, M_0)\right|^p dB = 0, \qquad (9.39)$$

где $p = 1, 2$, а B – четырехмерная область, в которой реализуется решение задачи.

Так как при любой (даже лишь непрерывной) функции $\vec{u}^{\,0}$ для нашей последовательности выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} \iiiint\limits_{(B)} (\vec{f}_n - \vec{f})\vec{u}^{\,0}\, dB = 0$$

вида (9.33), то в соответствии с утверждением теоремы 4 функция $\vec{u}(M, t-t_0; M_0)$ имеет смысл обобщенного решения уравнения (9.8) при значении $\vec{f}$ из (9.38), более того, такого решения, которое "удовлетворяет" нулевым начальным данным (3.1) и однородным условиям (3.4) на границе S области V, если классическое поле $\vec{u}_n(M, t-t_0; M_0)$ источника (9.37) строилось при учете указанных условий.

8. Основное свойство обобщенных решений $\vec{u}(M, t-t_0; M_0)$ задач для точечных источников уравнения (9.8), определяющее ценность таких решений в проблемах практики, состоит в том, что они позволяют легко строить классические поля смещений для аналогичных же задач в случае гладко распределенных воздействий. Проиллюстрируем это на примере поля $\vec{u}(M, t-t_0; M_0)$ источника (9.38).

Пусть $\vec{U}(M, t)$ – классическое решение уравнения (9.8) в области B в случае плотности массовых сил

$$\vec{f} \equiv \vec{F}(M, t) = \vec{i}_k \varphi(M, t), \qquad (9.40)$$

заданных в некоторой подобласти B_0, содержащейся в B, удовлетворяющее нулевым начальным данным и однородным граничным условиям, таким же, что и условия в задаче из п. 7, в которой определялось обобщенное поле $\vec{u}(M, t-t_0; M_0)$, отвечающее источнику (9.38). Функция $\varphi(M,t)$ из (9.40) предполагается настолько гладкой, что классическое решение $\vec{U}(M,t)$ реализуется и, следовательно, единственно и непрерывно в B.

Рассмотрим подобную же задачу в случае плотности массовых сил

$$\vec{F}_n = \vec{i}_k \iiiint\limits_{(B)} \varphi(M_0, t_0)\delta_{\varepsilon_n}(M - M_0; n_0)\delta_{\varepsilon_n}(t - t_0; m_0)\, dB_0,$$

гладкость которой не ниже гладкости функции $\vec{F}$ из (9.40). Нетрудно видеть, что такая задача имеет классическое решение (единственное и непрерывное), представляющееся формулой

$$\vec{U}_n(M,t) = \iiiint\limits_{(B)} \varphi(M_0, t_0)\vec{u}_n(M, t - t_0, M_0)\, dB_0, \tag{9.41}$$

где $\vec{u}_n$ является элементом рассмотренной в п. 7 последовательности классических решений, сходящейся в смысле (9.39) к обобщенному решению $\vec{u}$ задачи об источнике (9.38).

При $n \to \infty$ (когда $\varepsilon \to 0$) плотность $\vec{F}_n$ массовых сил равномерно стремится к гладкой плотности (9.40), а поле $\vec{U}_n(M,t)$ стремится к интересующему нас классическому полю $\vec{U}(M,t)$. Поэтому

$$\vec{U}(M,t) = \lim_{n\to\infty} \iiiint\limits_{(B)} \varphi(M_0, t_0)\vec{u}_n(M, t - t_0, M_0)\, dB_0 =$$

$$= \iiiint\limits_{(B)} \varphi(M_0, t_0)\vec{u}(M, t - t_0, M_0)\, dB_0, \tag{9.42}$$

т.е. классическое решение задачи об источнике (9.40) выражается через обобщенное решение подобной задачи для источника (9.38) формулой, аналогичной формуле

$$\varphi(M,t) = \iiiint\limits_{(B)} \varphi(M_0, t_0)\delta(M - M_0)\delta(t - t_0)\, dB_0,$$

связывающей плотности массовых сил источников (9.40) и (9.38).

Так как $\vec{U}(M,t)$ – классическое решение уравнения (9.8), то интеграл из правой части (9.42) оказывается гладкой функцией при достаточно гладкой $\varphi(M,t)$. Однако в случае неоднородных сред гладкость интеграла по пространственным переменным x_k не может быть установлена только на основании (9.42), если о функции $\vec{u}(M,t-t_0,M_0)$ ничего не известно, кроме ее интегрируемости (см. замечание к теореме 3 из п. 5). Что касается гладкости $\vec{U}(M,t)$ по переменной t, то она не ниже гладкости по t функции $\varphi(M,t)$. В частности, $\vec{U}(M,t)$ и $\vec{U}_t(M,t)$ непрерывны по t, если φ и φ_t зависят от t непрерывно. В таком случае поле $\vec{U}(M,t)$ из (9.42) не может иметь разрывов непрерывности в первых производных на движущихся поверхностях, т.е. на характеристиках уравнения (9.8) или, что то же, уравнения (2.8).

9. Важным для дальнейшего окажется частный случай

$$\vec{f} = \vec{i}_k \varphi(t)\delta_\varepsilon(M - M_0; n_0) \tag{9.43}$$

воздействия вида (9.40), прикладываемого к среде с непрерывной плотностью $\rho(x_1,x_2,x_3)$ и с непрерывными упругими парметрами $c_{ik,\mu\nu}(x_1,x_2,x_3)$, имеющими непрерывные частные производные по всем переменным x_k везде, кроме, быть может, конечного числа поверхностей. При этом под $\delta_\varepsilon(M-M_0;n_0)$ в (9.43) подразумевается функция вида (9.9) (обращающаяся в функцию Дирака $\delta(M-M_0)$ при $\varepsilon \to 0$), а $\varphi(t)$ – обозначает достаточно гладкую функцию в (выбранном) интервале

$$0 \leqslant t \leqslant T, \tag{9.44}$$

подчиненную условию $\varphi(t) \equiv 0$ при $t \leqslant 0$.

Пусть гладкость функции $\varphi(t)$ настолько высока, что решение

$$\vec{u}(M,t,M_0;\varphi,\varepsilon) \tag{9.45}$$

уравнения (9.8) (или, что то же, уравнения (2.8)) при плотности массовых сил (9.43), подчиненное нулевым начальным данным

$$\vec{u} \equiv 0 \quad \text{при} \quad t < 0 \tag{9.45$'$}$$

и соответственным однородным граничным условиям, имеет классический смысл (и, следовательно, единственно и непрерывно). При этом нетрудно убедиться, что в любом промежутке

(9.44) такое решение допускает представление в виде предела

$$\vec{u}(M,t,M_0;\varphi,\varepsilon_1) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^T \varphi(\tau)\vec{u}^{\,0}(M,t-\tau,M_0,\varepsilon_1,\varepsilon)\,d\tau, \qquad (9.46)$$

где функция

$$\vec{u}^{\,0}(M,t-\tau,M_0,\varepsilon_1,\varepsilon) \qquad (9.46')$$

является решением уравнения (9.8) при плотности массовых сил

$$\vec{f}_0 = \vec{i}_k\delta_\varepsilon(t-\tau-\varepsilon;m_0)\delta_{\varepsilon_1}(M-M_0;n_0), \qquad (9.47)$$

подчиненное нулевым начальным данным

$$\vec{u}_0 \equiv 0 \quad \text{при} \quad t<\tau \qquad (9.48)$$

и таким же однородным граничным условиям, что и функция $\vec{u}$ из (9.45).

Здесь остается лишь отметить, что правильность соотношения (9.46) вытекает из упоминавшейся единственности уравнения (9.8) при (упоминавшихся) дополнительных условиях, а также из факта, что функция

$$\Phi_\varepsilon(t) = \int\limits_0^T \varphi(\tau)\delta_\varepsilon(t-\tau-\varepsilon;m_0)d\tau = \int\limits_{t-\varepsilon-T}^{t-\varepsilon} \varphi(t-u-\varepsilon)\delta_\varepsilon(u;m_0)\,du$$

непрерывна в промежутке (9.44) и определяется соотношениями

$$\Phi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t<0,\\ \varphi[\varepsilon\theta(t)], & 0<t<2\varepsilon,\\ \varphi[t-\varepsilon(1+\theta(t)], & t>2\varepsilon, \end{cases}$$

где функция $\theta(t)$ удовлетворяет оценке $|\theta(t)|<1$. Поэтому при $\varepsilon\to 0$ оказывается

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Phi_\varepsilon(t) = \varphi(t)$$

в смысле равномерной сходимости в любом конечном промежутке (9.44).

§10. Принцип взаимности в теории упругости и в сейсмической практике

Принцип взаимности сводится к некоторому точному утверждению, позволяющему по свойству поля $\vec{u}_1(M_2, M_1; f_1)$ в точке M_2, возбужденного некоторым источником f_1, сосредоточенным в точке M_1, судить о свойстве поля $\vec{u}_2(M_1, M_2; f_2)$ в точке M_1 той же среды, возбужденного соответственным источником f_2, сосредоточенным в точке M_2. В сейсмике принципом взаимности часто пользуются, не вдаваясь в детали его утверждений и условий его применимости. Поэтому процент неправильного применения этого принципа в сейсмической практике весьма высок.

1. Принцип взаимности в теории упругости формулируется для произвольной неоднородной анизотропной среды, заполняющей (конечную или бесконечную) трехмерную область V, ограниченную поверхностью S с кусочно-непрерывной внешней нормалью $\vec{n}$, и имеющей внутри V конечное число границ S_0 раздела 1-го рода. На границах S_0 раздела сред задаются те или иные условия контакта из п. 3 §3, а внешняя поверхность S остается свободной от напряжений или смещений везде, кроме, быть может, одной точки, к которой прикладывается воздействие. Вывод принципа базируется на интегральной формуле Грина–Вольтерра для четырехмерной области B, ограниченной поверхностью Σ с внешней нормалью $\vec{\nu}$, построенной на V в виде гиперцилиндра с образующими, параллельными оси времени, и с основаниями $t = -\delta < 0$, $t = T > 0$, где $\delta > 0$ – малое число.

Упомянутая формула применяется к полям смещений $\vec{u}$ и $\vec{u}^{\,0}$ (реализующимся в выбранной упругой среде), непрерывным всюду в B, удовлетворяющим на границах раздела S_0 одним и тем же (выбранным для упругой среды) условиям контакта, имеющим (быть может) разрывы непрерывности в первых производных соответственно на поверхностях Σ_1 и Σ_1^0, на которых выполняются кинематические и динамические условия совместности, и, наконец, удовлетворяющим вне всех упоминавшихся поверхностей уравнениям движения (2.8) соответственно с плотностями массовых сил $\vec{f}$ и $\vec{f}^{\,0}$.

На основании формулы (9.15) (в которой интегралы по S_0 обращаются в нуль в случае $\vec{u}$ и $\vec{u}^{\,0}$, удовлетворяющих одинаковым условиям контакта на каждой из границ S_0) очевидно, что для рассматриваемых полей формула Грина–Вольтерра может быть записана в виде равенства

$$\iiiint\limits_{(B)} \Big[\, \vec f\, \vec u^{\,0} - \vec f^{\,0} \vec u \,\Big]\, dB = \iiint\limits_{(\Sigma)} \Big[\, \vec u\, \vec M_4^0 - \vec u^{\,0}\, \vec M_4 \,\Big]\, d\Sigma, \qquad (10.1)$$

в котором

$$\left.\begin{aligned} \vec M_4 &= \sum_{k=1}^{3} \vec t_k \cos\nu x_k - \rho \frac{\partial \vec u}{\partial t}\cos\nu t,\\ \vec M_4^0 &= \sum_{k=1}^{3} \vec t_k^{\,0} \cos\nu x_k - \rho \frac{\partial \vec u^{\,0}}{\partial t}\cos\nu t, \end{aligned}\right\} \qquad (10.2)$$

причем $\vec t_k$ и $\vec t_k^{\,0}$ обозначают векторы напряжений (2.4), вычисленные по полям $\vec u$ и $\vec u^{\,0}$.

2. Будем сначала рассматривать волновые поля $\vec u$ в упругой среде, заполняющей область V из п. 1 при условии, что на ее внешней границе S (конечной или бесконечной) задается режим, определяемый равенством

$$\vec t_n \Big|_{S_1} = 0; \quad \vec u \Big|_{S_2} = 0, \qquad (10.3)$$

где S_1 и S_2 – непересекающиеся части поверхности S такие, что $S_1 + S_2 = S$.

Пусть

$$\begin{aligned} &\vec u_1\,(M, t, M_1; \varphi, \varepsilon_1),\\ \text{и}\quad&\\ &\vec u_2\,(M, t, M_2; \varphi, \varepsilon_2) \end{aligned} \qquad (10.4)$$

поля, возбуждаемые в среде независимо друг от друга соответственно плотностями массовых сил

$$\begin{aligned} \vec f_1 &= \vec l_1\, \varphi(t)\, \delta_{\varepsilon_1}(M - M_1; n_0),\\ \vec f_2 &= \vec l_2\, \varphi(t)\, \delta_{\varepsilon_2}(M - M_2; n_0), \end{aligned} \qquad (10.5)$$

прикладываемых в окрестностях точек M_1 и M_2 области V (отстоящих от ее границы S соответственно на расстояниях, превосходящих $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$) при условии, что при $t < 0$ среда находилась в покое. Здесь $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$ – произвольные орты, а $\varphi(t)$ предполагается настолько гладкой в промежутке

$$0 \leqslant t \leqslant T \tag{10.6}$$

функцией, удовлетворяющей условию $\varphi(t) \equiv 0$ при $t < 0$, что решения $\vec{u}_k$ из (10.4) имеют классический смысл и потому непрерывны. (Чтобы подчеркнуть зависимость полей из (10.4) от функции $\varphi(t)$, значок φ введен в символ функций $\vec{u}_k$ в качестве аргумента.)

Поля $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ из (10.4) удовлетворяют уравнению (2.8) при плотностях массовых сил $\vec{f} = \vec{f}_1$ и $\vec{f} = \vec{f}_2$ из (10.5), а также – удовлетворяют соответственным (одинаковым) условиям контакта на внутренних границах раздела среды в области V, нулевым начальным данным

$$\left.\begin{aligned} &\vec{u}_1(M,t,M_1;\varphi,\varepsilon_1) \equiv 0,\\ &\vec{u}_2(M,t,M_2;\varphi,\varepsilon_2) \equiv 0, \end{aligned}\right\} \quad (t \leqslant 0) \tag{10.7}$$

во всех точках области V и граничным условиям (10.3).

При этом предельные значения таких полей

$$\vec{u}_k(M,t,M_k;\varphi) = \lim_{\varepsilon_k\to 0} \vec{u}_k(M,t,M_k;\varphi,\varepsilon_k) \tag{10.8}$$

являются (по определению) решениями уравнения (2.8), удовлетворяющими нулевым начальным данным при $t \leqslant 0$ и граничным условиям (10.3), отвечающим сосредоточенным воздействиям с плотностями массовых сил

$$\vec{f}_k = \vec{l}_k\, \varphi\,(t)\, \delta\,(M - M_k), \tag{10.9}$$

где $\delta(M - M_k)$ – пространственная δ-функция Дирака.

Принцип взаимности здесь сводится к формулировке связи между значениями

$$\vec{u}_1(M_2,t,M_1;\varphi) \quad \text{и} \quad \vec{u}_2(M_1,t,M_2;\varphi)$$

функций $\vec{u}_k$ из (10.8).

3. Определим вспомогательное решение

$$\vec{u}_0(M,t-\tau,M_2;\varepsilon_2,\varepsilon) \tag{10.10}$$

уравнения (2.8), отвечающее плотности массовых сил

$$\vec{f}_0 = \vec{l}_2\, \delta_\varepsilon(t-\tau-\varepsilon; m_0)\delta_{\varepsilon_2}(M-M_2; n_0), \tag{10.11}$$

подчиненное граничным условиям (10.3), а также – нулевым начальным данным при $t<\tau$. Тогда, в соответствии с п. 9 §9, интересующее нас поле, например, $\vec{u}_2(M,t,M_2;\varphi,\varepsilon_2)$ из (10.10) может быть выражено через поле из (10.10) в виде

$$\vec{u}_2(M,t,M_2;\varphi,\varepsilon_2) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^T \varphi(\tau)\,\vec{u}_0\,(M,t-\tau,M_2;\varepsilon_2,\varepsilon)d\tau. \tag{10.12}$$

Учитывая наличие такого соотношения, выберем произвольное значение t_0 из промежутка (10.6) и определим по полю $\vec{u}_0$ из (10.10) вспомогательное вольтерровское поле

$$\vec{u}^{\,0}(M,t) = \vec{u}_0(M,t_0-t,M_2;\varepsilon_2,\varepsilon) \tag{10.13}$$

(в котором в выражении $\vec{u}_0$ из (10.10) аргумент $t-\tau$ заменен на $\tau - t$, а затем положено $\tau = t_0$).

Вольтерровское поле $\vec{u}^{\,0}(M,t)$, очевидно, удовлетворяет уравнению (2.8) при плотности массовых сил

$$\vec{f}^{\,0} = \vec{l}_1\,\delta_\varepsilon\,(t_0-t-\varepsilon;m_0)\delta_{\varepsilon_2}(M-M_2;n_0), \tag{10.14}$$

удовлетворяет граничным условиям (10.3) и нулевым условиям при $t>t_0$.

Для установления соотношений взаимности остается применить формулу Грина–Вольтерра из (10.1) и (10.2) к вспомогательным функциям $\vec{u}^{\,0}$ и $\vec{f}^{\,0}$ из (10.13) и (10.14), а также – к функциям

$$\begin{gathered}\vec{u}\,(M,t) \equiv \vec{u}_1(M,t,M_1;\varphi,\varepsilon_1),\\ \text{и}\\ \vec{f}(M,t) \equiv \vec{f}_1 = \vec{l}_1\,\varphi(t)\,\delta_{\varepsilon_1}(M-M_1;n_0)\end{gathered} \tag{10.15}$$

из (10.7) и (10.9).

Областью B в формуле (10.1) служит гиперцилиндр V, $-\delta \leqslant t \leqslant T+\delta$ (где $\delta>0$ произвольно мало), ограниченный поверхностью Σ. Последняя же состоит из оснований: V, $t=-\delta$ и V,

$t = T + \delta$, на которых в (10.2) оказывается

$$\cos\nu x_k = 0, \quad \cos\nu t = -1 \quad \text{и} \quad \cos\nu t = 1,$$
$$\vec{M}_4 = \pm\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}, \quad \vec{M}_4^{\,0} = \pm\rho\frac{\partial\vec{u}^{\,0}}{\partial t}, \tag{10.16}$$

а также – из боковой поверхности S, $-\delta \leqslant t \leqslant T + \delta$, в точках которой справедливо

$$\cos\nu t = 0, \quad \cos\nu x_k = \cos n x_k,$$
$$\vec{M}_4 = \sum_{k=1}^{3}\vec{t}_k\cos n x_k = \vec{t}_n, \quad \vec{M}_4^{\,0} = \vec{t}_n^{\,0}. \tag{10.17}$$

Поэтому выражение

$$\left[\,\vec{u}\cdot\vec{M}_4^{\,0} - \vec{u}^{\,0}\cdot\vec{M}_4\,\right]$$

из (10.1) обращается в нуль в каждой точке поверхности Σ. (В силу условий (10.3) на боковой поверхности и в силу соотношений

$$\begin{aligned} \vec{u}\,(M,t) &\equiv 0 \quad \text{при} \quad t \leqslant 0, \\ \vec{u}^{\,0}(M,t) &\equiv 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant T \end{aligned} \tag{10.18}$$

на основаниях гиперцилиндра).

Таким образом, в правой части равенства (10.1) стоит нуль и остается лишь вычислить интегралы из его левой части.

4. Полагая

$$0 < t_0 < T, \tag{10.19}$$

воспользуемся (10.13), (10.15) и выпишем выражение

$$\vec{f}\cdot\vec{u}^{\,0} = \vec{l}_1\,\varphi(t)\,\vec{u}^{\,0}\,(M, t_0 - t, M_2, \varepsilon_2, \varepsilon)\delta_{\varepsilon_1}(M - M_1; n_0), \tag{10.20}$$

которое следует проинтегрировать по области

$$B = (V; -\delta < t < T + \delta). \tag{10.21}$$

Однако вследствие условия, что $\varphi(t) \equiv 0$ при $t > t_0$ (и, тем более, при $t > T$), интегрирование по промежутку $(-\delta < t < T + \delta)$ фактически сводится к промежутку $(0, T)$. А это приводит, в частности, к интегралу

$$\int\limits_0^T \varphi(t)\,\vec{u}^{\,0}\,(M, t_0 - t, M_2; \varepsilon_2, \varepsilon)\,dt,$$

совпадающему с интегралом из (10.12). Поэтому, при учете (10.12), результат интегрирования выражения из (10.20) по четырехмерной области (B) из (10.21) в пределе при $\varepsilon \to 0$ дает

$$J_1(M_1, t_0, M_2, \varphi) \equiv \\ \equiv \iiint\limits_{(V)} \vec{l}_1\, \vec{u}_2\,(M, t_0, M_2; \varphi, \varepsilon_2)\, \delta_{\varepsilon_1}\,(M - M_1; n_0)\, dM, \tag{10.22}$$

где интегрирование совершается фактически лишь по сфере

$$\left| M - M_1 \right| < \varepsilon_1. \tag{10.23}$$

Подобным же образом, на основании (10.14) и (10.15) получается равенство

$$\vec{f}^{\,0} \cdot \vec{u} = \vec{l}_2\, \vec{u}_1\,(M, t, M_1; \varphi, \varepsilon_1)\, \delta_\varepsilon\,(t_0 - t; m_0)\, \delta_{\varepsilon_2}\,(M - M_2; n_0),$$

интегрирование которого по четырехмерной области (B) из (10.21) также сводится к интегрированию по промежутку $(0, T)$, а затем – по объему V. При этом, в результате интегрирования по $(0, T)$ и перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$, получается очевидное выражение

$$J_2(M_2, t_0, M_1, \varphi) \equiv \\ \equiv \iiint\limits_{(V)} \vec{l}_2\, \vec{u}_1\,(M, t_0, M_1; \varphi, \varepsilon_1)\, \delta_{\varepsilon_2}\,(M - M_2; n_0)\, dM, \tag{10.24}$$

интегрирование в котором также производится лишь по сфере

$$\left| M - M_2 \right| < \varepsilon_2. \tag{10.25}$$

Что же касается формулы Грина–Вольтерра из (10.1) и (10.2), то в результате указанного – она приводится к равенству

$$J_1(M_1, t_0, M_2; \varphi) = J_2(M_2, t_0, M_1; \varphi), \tag{10.26}$$

содержащему усредненные по областям (10.23) и (10.25) наблюдения полей $\vec{u}_2\,(M, t_0, M_2; \varphi, \varepsilon_2)$ и $\vec{u}_1\,(M, t_0, M_1; \varphi, \varepsilon_1)$ из (10.4), возбуждаемых плотностями сил из (10.5), распределенных соответственно по областям (10.25) и (10.23). При этом поля $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ из (10.4) предполагались непрерывными при $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$

(т.е. при воздействиях (10.5), еще распределенных по областям (10.23) и (10.25)).

Если же в среде реализуются более гладкие поля $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ из (10.4), остающиеся непрерывными и при $\varepsilon_1 \geqslant 0$ и $\varepsilon_2 \geqslant 0$ (т.е. и при строго сосредоточенных воздействиях из (10.5), определяемых функциями $\delta(M - M_k)$ Дирака), то из (10.26) (в пределе при $\varepsilon_1 \to 0$ и $\varepsilon_2 \to 0$) получается более простое равенство

$$\vec{l}_1 \cdot \vec{u}_2(M_1, t, M_2; \varphi) = \vec{l}_2 \cdot \vec{u}_1(M_2, t, M_1; \varphi), \tag{10.27}$$

которым, обычно, и выражается содержание принципа взаимности идеально-упругих сред в случае внутренних пространственно-сосредоточенных воздействий типа направленных сил.

Не задерживаясь здесь на физическом толковании (более глубокого, но более сложного) соотношения взаимности в форме (10.26), ограничимся кратким рассмотрением соотношения (10.27), отвечающего случаю упругих сред, в которых сосредоточенные воздействия из (10.9) возбуждают непрерывные волновые поля $\vec{u}_k$.

В таких случаях оказывается, что если в одной и той же находившейся в покое при $t < 0$ упругой среде, на границе которой поддерживается один и тот же однородный режим (10.3), возбуждаются (независимым друг от друга образом) под действием источников $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ из (10.9) соответственно поля смещений $\vec{u}_1(M, t, M_1; \varphi)$ и $\vec{u}_2(M, t, M_2; \varphi)$, то проекция значения поля $\vec{u}_1$ в точке M_2 на направление $\vec{l}_2$ (т.е. на направление силы $\vec{f}_2$, возбуждающей поле $\vec{u}_2$) равна проекции значения поля $\vec{u}_2$ в точке M_1 на направление $\vec{l}_1$ (т.е. на направление силы $\vec{f}_1$, возбуждающей поле $\vec{u}_1$). Этот принцип позволяет, в частности, находить значение составляющей $(\vec{l}_1\, \vec{u}_2)$ поля $\vec{u}_2$ в точке M_1 по известному полю $\vec{u}_1$, не прибегая к вторичному рассмотрению соответствующей граничной задачи для уравнения (2.8).

5. Нетрудно видеть, что принцип взаимности в форме (10.26) и (10.27) справедлив и для безграничных областей, а также в тех случаях, когда точка M_1 или M_2 (или же M_1 и M_2) находится на границе S области V, точнее, на той части S_1 поверхности S, на которой задавалось условие $\vec{t}_n = 0$.

Если область V безгранична или частично ограничена, то все предыдущие рассуждения фактически можно сохранить неизменными. При этом только следует учесть два обстоятельства: во-первых, что формулу (10.26) достаточно доказать лишь для конечных промежутков времени (10.6), и, во-вторых, что поля, возбуждаемые в покоящейся среде точечными источниками, включаемыми в момент времени $t = 0$, имеют передние фронты. Поэтому, интересуясь промежутком (10.6), всегда можно выбрать пространственную область V_T таким образом, чтобы в окрестности всех ее участков границы S_T, на которых не заданы условия вида (10.3), оказалось $\vec{u}_k(M, t, M_k; \varphi) \equiv 0$. Но в таком случае для гиперцилиндра B_T, построенного на области V_T, окажутся справедливыми и все предыдущие результаты.

Что касается расположения точек M_1 и M_2 на поерхности S, то к нему можно было бы прийти от случая внутренних точек M_1 и M_2 предельным переходом. Однако представляется целесообразным указать независимый от предыдущего способ вывода, при котором мы будем считать для определенности, что точка M_1 расположена внутри, а точка $M_2 = N_0 \in S_1$, где S_1 – часть поверхности S, определенная в связи с формулой (10.3).

6. Пусть

$$\vec{u}_1(M, t, M_1; \varphi, \varepsilon_1) \tag{10.28}$$

прежнее поле смещений из (10.4), удовлетворяющее граничным условиям (10.3) и нулевым начальным данным при $t < 0$, возбужденное в среде включением при $t = 0$ массовых сил, определяемых плотностью

$$\vec{f}_1 = \vec{l}_1\, \varphi(t)\, \delta_{\varepsilon_1}(M - M_1; n_0) \tag{10.29}$$

из (10.5). При этом функция $\varphi(t)$, удовлетворяющая условию $\varphi(t) \equiv 0$ при $t < 0$, предполагается настолько гладкой, что решение $\vec{u}_1$ из (10.28) и (10.29) имеет классический смысл.

Под полем смещений

$$\vec{u}_2(M, t, N_0; \varphi, \varepsilon_2) \tag{10.30}$$

будем понимать решение однородного уравнения (2.8) в области V, ограниченной достаточно гладкой поверхностью

$$S = S_1 + S_2$$

из граничного условия (10.3), подчиненное нулевым начальным данным при $t < 0$, и возбуждаемое граничным воздействием

$$\vec{u}_2\Big|_{S_1} = 0, \quad \vec{t}_n\Big|_{S_2} = \vec{l}_2\,\varphi(t)\,\delta_{\varepsilon_2}\,(N - N_0; n_0), \tag{10.31}$$

в котором N и N_0 – точки поверхности S_2, а $\delta_{\varepsilon_2}(N - N_0; n_0)$ – обозначает δ-образную поверхностную функцию типа (9.37) (обращающуюся в функцию Дирака $\delta(N - N_0)$ при $\varepsilon_2 \to 0$). Что же касается функции $\varphi(t)$, то она имеет такое же значение, что и $\varphi(t)$ из (10.23).

Как и обычно, при установлении соотношений взаимности вводится в рассмотрение вспомогательное поле смещений

$$\vec{u}(M, t - \tau, N_0, \varepsilon_2, \varepsilon), \tag{10.32}$$

удовлетворяющее однородному уравнению (2.8), возбуждаемое граничным воздействием

$$\vec{u}\Big|_{S_1} = 0, \quad \vec{t}_n\Big|_{S_2} = \vec{l}_2\,\delta_\varepsilon\,(t - \tau - \varepsilon; m_0)\,\delta_{\varepsilon_2}\,(N - N_0; n_0), \tag{10.33}$$

включаемым при $t = \tau$ (и, следовательно, удовлетворяющее нулевым начальным данным при $t < \tau$). Так же, как и в случае (10.12), учитывается, что на основе такого поля непрерывное поле $\vec{u}_2$ из (10.30), (10.31) допускает представление в форме предела

$$\vec{u}_2(M, t, N_0; \varphi, \varepsilon_2) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^T \varphi(\tau)\,\vec{u}\,(M, t - \tau, N_0; \varepsilon_2, \varepsilon) d\tau. \tag{10.34}$$

типа (10.12). Наконец, по полю $\vec{u}$ из (10.32) и (10.33) определяется вспомогательное вольтерровское поле

$$\vec{u}^{\,0}\,(M, t) = \vec{u}(M, t_0 - t, N_0; \varepsilon_2, \varepsilon), \tag{10.35}$$

удовлетворяющее однородному уравнению (2.8), обращающееся в тождественный нуль при $t > t_0$ и удовлетворяющее граничным условиям

$$\vec{u}^{\,0}\Big|_{S_1} = 0, \quad \vec{t}_n\Big|_{S_2} = \vec{l}_2\,\delta_\varepsilon\,(t_0 - t - \varepsilon; m_0)\,\delta_{\varepsilon_2}\,(N - N_0; n_0). \tag{10.36}$$

7. Принцип взаимности в случае рассматриваемых воздействий из (10.29) и (10.31) получается из формулы Грина–Вольтерра (10.1), (10.2), если в ней положить

$$\begin{aligned} &\vec{u}\,(M,t) = \vec{u}_1\,(M,t,M_1;\varphi,\varepsilon_1), \\ &\vec{f}\,(M,t) = \vec{l}_1\,\varphi(t)\,\delta_{\varepsilon_1}\,(M-M_1;n_0), \end{aligned} \tag{10.37}$$

а за $\vec{u}^{\,0}\,(M,t)$ взять вольтерровское решение из (10.35), отвечающее плотности массовых сил $\vec{f}^{\,0} = 0$ и граничным условиям (10.36). При этом нужно учитывать, что поле $\vec{u}$ из (10.37) удовлетворяет условию $\vec{u} \equiv 0$ при $t < 0$, а поле $\vec{u}^{\,0} \equiv 0$ при $t > t_0$, где t_0 – любое значение из промежутка (10.19).

В качестве области B, по-прежнему, выбирается гиперцилиндр (10.21), причем в левой части из (10.1) отличным от нуля оказывается лишь слагаемое

$$\iiiint\limits_{(B)} \vec{f}\cdot\vec{u}^{\,0}\,dB = \int\limits_0^T dt \iiiint\limits_{(V)} \varphi(t)\delta_{\varepsilon_1}(M-M_1;n_0)\times$$

$$\times\vec{l}_1\,\vec{u}^{\,0}\,(M,t_0-t,N_0;\varepsilon_2,\varepsilon)\,dM, \tag{10.38}$$

в котором целесообразно совершить предельный переход при $\varepsilon \to 0$ и воспользоваться равенством (10.34). В результате, вместо (10.38) будем иметь

$$\begin{aligned} &J_1(M_1,t_0,N_0;\varphi) = \\ &\quad = \iiint\limits_{(V)} \vec{l}_1\cdot\vec{u}_2\,(M,t_0,N_0;\varphi,\varepsilon_2)\,\delta_{\varepsilon_1}\,(M-M_1;n_0)\,dM, \end{aligned} \tag{10.39}$$

где $\vec{u}_2$ – обозначает поле из (10.34).

Что же касается правой части соотношения (10.1), то по таким же соображениям, как и в п. 3, интегрирование по основаниям гиперцилиндра B дает нуль. На боковой его поверхности (S, $0 < t < T$) интегрированию подлежит, очевидно, лишь одно слагаемое

$$\left[\,\vec{u}\cdot\vec{M}_4^{\,0} - \vec{u}^{\,0}\,\vec{M}_4\,\right].$$

Вследствие этого вся правая часть соотношения (10.1) сводится к выражению

$$\iint\limits_{(S)} dN \int\limits_0^T \vec{l}_2 \cdot \vec{u}_1 \,(N, t, M_1; \varphi, \varepsilon) \times$$

$$\times \delta_\varepsilon \,(t - t_0 - \varepsilon; m_0)\, \delta_{\varepsilon_1} (N - N_0; n_0)\, dt. \tag{10.40}$$

Интегрирование по t и предельный переход здесь легко выполняются, что приводит к следующему окончательному представлению

$$J_2(N_0, t_0, M_1; \varphi) = \\ = \iint\limits_{(S)} \vec{l}_2 \cdot \vec{u}_1 \,(N, t_0, M_1; \varphi, \varepsilon_1)\, \delta_{\varepsilon_2} (N - N_0; n_0)\, dN. \tag{10.41}$$

Таким образом, применение формулы Грина–Вольтерра приводит к соотношению

$$J_1(M_1, t_0, N_0; \varphi) = J_2(N_0, t_0, M_1; \varphi), \tag{10.42}$$

в точности такого типа, как и соотношение (10.26).

Если же в среде реализуются более гладкие поля из (10.28) и (10.30), остающиеся непрерывными при $\varepsilon_1 \geqslant 0$ и $\varepsilon_2 \geqslant 0$, когда воздействия из (10.29) и (10.31) становятся строго сосредоточенными, то в равенстве (10.42) можно совершить переход к пределам $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$, что приводит к более простому соотношению

$$\vec{l}_1 \cdot \vec{u}_2(M_1, t, N_0; \varphi) = \vec{l}_2 \cdot \vec{u}_1(N_0, t, M_1; \varphi). \tag{10.42$'$}$$

На физическом толковании результата здесь можно не задерживаться.

8. В связи с изложенным уместно отметить, что если формулу из (2.21) применить к полям

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{u}_1 \,(M, t, M_1; \varphi), \\ \vec{u}^{\,0} &= \vec{u}_2 \,(M, t, M_2; \varphi) \end{aligned} \tag{10.43}$$

из (10.8) (удовлетворяющим уравнению (2.8) при плотностях массовых сил $\vec{f}_k$ из (10.9), граничным условиям (10.3), а также начальным данным вида (10.7)) и проинтегрировать эту формулу по области V, то получится соотношение

$$\iiint\limits_{(V)} \Big[\, \ddot{\vec{u}}_2\, \vec{u}_1 - \ddot{\vec{u}}_1\, \vec{u}_2 \Big] \rho\, dM = -\iint\limits_{(S)} \Big[\, \vec{t}_n^{\,(2)}\, \vec{u}_1 - \vec{t}_n^{\,(1)}\, \vec{u}_2 \Big]\, dS +$$

$$+ \iiint\limits_{(V)} \Big[\, \vec{f}_1\, \vec{u}_2\,(M,t,M_2;\varphi) - \vec{f}_2\, \vec{u}_1\,(M,t,M_1;\varphi) \Big]\, dM. \tag{10.44}$$

Поверхностный интеграл из правой части равен нулю в силу (10.3). Объемный же интеграл вычисляется на основании представлений (10.9) и известного свойства δ-функции Дирака. При этом он приводит к выражению

$$\Phi \equiv \varphi(t) \Big[\, \vec{l}_1\, \vec{u}_2\,(M_1,t,M_2;\varphi) - \vec{l}_2\, \vec{u}_1\,(M_2,t,M_1;\varphi) \Big]. \tag{10.45}$$

Вследствие этого из (10.44) вытекает интересное равенство

$$\iiint\limits_{(V)} \Big[\, \rho\, \ddot{\vec{u}}_2\, \vec{u}_1 - \rho\, \ddot{\vec{u}}_1\, \vec{u}_2 \Big]\, dM = \Phi, \tag{10.46}$$

в котором

$$\vec{u}_k = \vec{u}_k(M,t,M_k;\varphi), \quad (k = 1,2).$$

Обращаясь к формулам (10.45), (10.46) нужно отметить, что из справедливости принципа взаимности в форме (10.27) в ней оказывается $\Phi = 0$. Но тогда из (10.46) вытекает соотношение

$$\iiint\limits_{(V)} \rho\, \ddot{\vec{u}}_2\, \vec{u}_1\, dM = \iiint\limits_{(V)} \rho\, \ddot{\vec{u}}_1\, \vec{u}_2\, dM, \tag{10.46$'$}$$

означающее, что работы сил инерции первого (второго) поля на перемещениях второго (первого) поля равны. Такой результат, по-видимому, нельзя было предвидеть заранее.

Наоборот, если бы было известно равенство (10.46$'$), то принцип взаимности (10.27) вытекал бы из (10.45) и (10.46). Именно так обстоит дело в статических задачах теории упругости, в которых векторы смещений не зависят от времени t (вследствие чего $\ddot{\vec{u}}_1 = \ddot{\vec{u}}_2 = 0$), а также в стационарных задачах, когда решения $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ уравнения (2.8) при плотностях массовых сил

$$\vec{f}_1 = \vec{l}_1\, e^{i\omega t}\delta\,(M - M_1), \quad \vec{f}_2 = \vec{l}_2\, e^{i\omega t}\delta\,(M - M_1)$$

представляются в виде

$$\vec{u}_k = e^{i\omega t}\,\vec{u}^{\,0}_k\,(M, M_k; \omega), \quad (k = 1, 2) \tag{10.47}$$

и подчиняются граничным условиям (10.3) (а в случае бесконечных областей V дополнительно подчиняются некоторым условиям на бесконечности, называемыми условиями излучения).

Кстати, из принципа взаимности для стационарных задач, т.е. для функций вида (10.47), можно было бы вывести принцип взаимности и в общем случае. Для этого следовало бы определить разложение

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} c(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega = \begin{cases} \varphi(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

для выбранной (произвольной) функции $\varphi(t)$ и составить подобную же суперпозицию

$$\vec{u}_k\,(M, t, M_k; \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} c(\omega)\,\vec{u}^{\,0}_k\,(M, M_k; \omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega \tag{10.48}$$

решений (10.47) уравнения (2.8), подчиненных соответствующим дополнительным условиям. В силу линейности операции интегрирования для функций $\vec{u}_1\,(M, t, M_1; \varphi)$ и $\vec{u}_2\,(M, t, M_2; \varphi)$ из (10.48) соотношение (10.27) также будет иметь место. Что касается плотностей массовых сил, которым отвечают поля (10.48), то формально ясно, что они должны определяться выражениями (10.10).

Все изложенное по поводу решений стационарных задач должно рассматриваться лишь как рассуждения, не подкрепленные какими-либо доказательствами. Последние, кстати говоря, оказываются значительно более трудными, чем прямой вывод принципов взаимности, которым посвящены разделы п. 1–7.

9. Чтобы завершить обсуждение принципа взаимности в теории упругости, полезно задержаться на инженерной манере его установления, а также – на обсуждении прикладного его значения в сейсмической практике.

Утверждения принципа взаимности касаются случаев волновых полей, возбуждаемых пространственно-сосредоточенными источниками, прилагаемыми в двух различных точках M_1 и M_2

упругой среды, например, блокового строения. Вследствие сосредоточенности источников при установлении принципа взаимности приходится иметь дело с полями смещений, содержащими различные сингулярности, выводящие их из класса функций, интегрируемых по Риману, как это предполагается практически во всех инженерных исследованиях. Чтобы преодолеть возникающие здесь затруднения, не выходя за рамки обычного интегрирования по Риману, пришлось сосредоточенные источники рассматривать как пределы соответствующих гладкораспределенных сил, возбуждающих достаточно гладкие поля смещений $\vec{u}_1\,(M, t, M_1; \varepsilon_1)$ и $\vec{u}_2\,(M, t, M_2; \varepsilon_2)$. Именно этим и объясняется обилие предельных переходов (при $\varepsilon \to 0$) в предыдущем при реализации доказательств в рамках выбранной схемы рассуждений.

Для практики представляется полезным воспроизвести здесь серию доказательств на чисто инженерном уровне, где δ- функции Дирака толкуются как "обычные" функции (даже "непрерывные"), но обладающие следующими специфическими свойствами

$$\delta\,(M - M_0) = 0, \quad M \neq M_0; \quad \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \delta\,(M - M_0)\, dM_0 = 1$$

и

$$\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} f(M_0)\,\delta\,(M - M_0)\, dM_0 = f(M) \tag{10.49}$$

для любой непрерывной функции $f(M_0)$.

(а) *Источники типа включенной силы.*

Пусть в точках M_1 и M_2 включаются источники

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= \vec{l}_1\,\varphi(t)\delta\,(M - M_1),\\ \vec{f}_2 &= \vec{l}_2\,\varphi(t)\delta\,(M - M_2), \end{aligned} \tag{10.50}$$

где $\vec{l}_\nu$ – произвольные орты, а $\varphi(t)$ – непрерывная функция, возбуждающие соответственно поля смещений

$$\begin{aligned} &\vec{u}_1\,(M, t, M_1; \varphi), \quad (0 < t < T)\\ &\vec{u}_2\,(M, t, M_2; \varphi), \end{aligned} \tag{10.51}$$

удовлетворяющие уравнениям (2.8), граничным условиям (10.3) и нулевым начальным данным (при $t \leqslant 0$)

$$\vec{u}_\nu \left(M, t, M_\nu; \varphi\right)\Big|_{t \leqslant 0} \equiv 0. \tag{10.52}$$

В силу линейности свойств функции $\delta(t-\tau)$, поле $\vec{u}_2\,(M, t, M_2; \varphi)$ из (10.51) можно представить в виде

$$\vec{u}_2\,(M, t, M_2; \varphi) = \int\limits_0^T \varphi(\tau)\, \vec{u}_0\,(M, t-\tau, M_2)\, d\tau, \tag{10.53}$$

где $\vec{u}_0\,(M, t-\tau, M_2)$ удовлетворяет уравнению (2.8) при плотности массовых сил вида

$$\vec{f}_0 = \vec{l}_2\, \delta\,(t-\tau)\, \delta\,(M - M_2), \tag{10.54}$$

удовлетворяет граничным условиям (10.3) и начальным данным

$$\vec{u}_0(M, t-\tau, M_2) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t < \tau. \tag{10.54$'$}$$

Для получения принципа взаимности (как всегда) вводится в рассмотрение вольтерровское поле

$$\vec{u}^{\,0}\,(M, t) = \vec{u}_0(M, t_0 - t, M_2), \tag{10.55}$$

отличающееся от поля (10.54$'$) перестановкой местами переменных t и τ с последующей заменой обозначения τ на t_0 из интервала

$$0 < t_0 < T.$$

Поле (10.55) отвечает, очевидно, плотности массовых сил

$$\vec{f}^{\,0} = \vec{l}_2\, \delta\,(t_0 - t)\, \delta\,(M - M_2) \tag{10.56}$$

в уравнении (2.8), удовлетворяет прежним граничным условиям, а также – соотношению

$$\vec{u}_0\,(M, t_0 - t, M_2) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t_0 < t. \tag{10.57}$$

При подстановке в формулу Грина–Вольтерра (10.1) и (10.2) значений $\vec{u}^{\,0}$ и $\vec{f}^{\,0}$ из (10.55) и (10.56), а также – функций $\vec{u} = \vec{u}_1$ и $\vec{f} = \vec{f}_1$ из (10.51) и (10.50), поверхностный интеграл обращается в нуль как и раньше (в силу граничных условий и начальных данных при $t = 0$ и при $t > t_0$), а объемные интегралы дают равенство

$$\iiiint\limits_{(B)} \left[\vec{u}_1 \vec{f}^{\,0} - \vec{u}_0 \vec{f}_1 \right] dB = 0. \tag{10.58}$$

Но

$$\iiiint\limits_{(B)} \vec{u}_1 \vec{f}^{\,0} \, dB = \iiiint\limits_{(B)} \vec{l}_2 \, \vec{u}_1 \, (M, t, M_1; \varphi) \, \delta\, (t_0 - t) \, \delta\, (M - M_2) \, dB =$$

$$= \vec{l}_2 \, \vec{u}_1 \, (M_2, t_0, M_1; \varphi), \tag{10.59}$$

$$\iiiint\limits_{(B)} \vec{u}_0 \vec{f}_1 \, dB = \iiiint\limits_{(B)} \vec{l}_1 \, \vec{u}_0 \, (M, t_0 - t, M_2) \, \varphi(t) \, \delta\, (M - M_1) \, dB =$$

$$= \int\limits_0^T \vec{l}_1 \, \vec{u}_0 \, (M_1, t_0 - t, M_2) \, \varphi(t) \, dt = \vec{l}_1 \, \vec{u}_2 \, (M_1, t_0, M_2; \varphi) \tag{10.59$'$}$$

в силу (10.53). Подстановка таких выражений в (10.58) как раз и приводит к соотношению (10.27), выражающему принцип взаимности для источников вида (10.10).

(б) *Источники типа центр давления.*

Центр давления – сосредоточенный источник с центральной симметрией относительно его точки приложения M_0. Он может быть охарактеризован функцией плотности вида $\vec{f}(r, M_0, \varepsilon) = p\vec{r}_1$, где $\vec{r} = \overrightarrow{M_0 - M} = r\,\vec{r}_1$, r – расстояние между точкой M поля и центром M_0 источника, а $\vec{r}_1$ – орт вектора $\overrightarrow{M_0 M}$. Если $\delta(r, M_0)$ – центрально-симметричная δ-функция поля, а $\delta(r, M_0, \varepsilon)$ – ее допредельный аналог, то плотность сил, отвечающих центру давлений, может быть задана соотношениями

$$\begin{gathered} \vec{f}_\varepsilon = c \operatorname{grad} \delta\, (r, M_0; \varepsilon), \\ \text{или} \\ \vec{f} = c \operatorname{grad} \delta\, (r, M_0) \equiv |\, \vec{f}\, | \vec{r}_1. \end{gathered} \tag{10.60}$$

Действительно, такие плотности сил ориентированы вдоль орта $\vec{r}_1$ и сосредоточены в окрестности $r < \varepsilon$ точки M_0. В силу их центральной симметрии справедливо

$$\iiint\limits_{(V)} \vec{f}_\varepsilon\, dV = 0 \quad \text{и} \quad \iiint\limits_{(V)} \vec{f}\, dV = 0.$$

Однако для 1-го момента таких плотностей сил получается соотношение

$$\iiint\limits_{(V)} \vec{r}\,\vec{f}_\varepsilon\, dV = c\iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}\Big(\vec{r}\,\delta\,(\,r, M_0;\varepsilon\,)\Big)\, dV -$$

$$-c\iiint\limits_{(V)} \delta\,(r, M_0;\varepsilon) \operatorname{div}\,\vec{r}\, dV = -3c\iiint\limits_{(V)} \delta\,(r, M_0;\varepsilon)\, dV = 1,$$

в котором интеграл от div дает нуль в силу теоремы Гаусса и равенства $\delta\,(r, M_0;\varepsilon) \equiv 0$ при $r > \varepsilon$. Приведенных соотношений достаточно, чтобы оправдать физический смысл плотностей сил из (10.60), где полагается $c = -1/3$.

Перейдем к принципу взаимности, получаемому формальным путем. При этом δ-функцию $\delta(r, M_0)$ будем обозначать прежним символом $\delta(M - M_0)$.

Пусть в произвольной упругой среде из п.1 в точках M_1 и M_2 приложены воздействия (типа центров давления)

$$\begin{aligned} \vec{f_1} &= \varphi(t)\operatorname{grad}\delta(M - M_1) \longrightarrow \vec{u}_1(M, t, M_1;\varphi), \\ \vec{f_2} &= \varphi(t)\operatorname{grad}\delta(M - M_2) \longrightarrow \vec{u}_2(M, t, M_2;\varphi), \end{aligned} \tag{10.61}$$

порождающие поля, выписанные справа. Эти поля удовлетворяют уравнениям движения (2.8), всем граничным условиям (таким же, как и в п. 1) и нулевым начальным данным

$$\vec{u}_\nu(M, t, M_\nu;\varphi) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t \leqslant 0. \tag{10.62}$$

Вместо $\vec{u}_2(M, t, M_2;\varphi)$ из (10.61) в силу линейности задачи можно писать

$$\vec{u}_2(M, t, M_2;\varphi) = \int\limits_0^T \varphi(\tau)\,\vec{u}_0\,(M, t-\tau, M_2)\, d\tau, \tag{10.63}$$

где $\vec{u}_0\,(M, t-\tau, M_2)$ – решение уравнения (2.8), отвечающее плотности массовых сил

$$\vec{f_0} = \delta(t-\tau)\operatorname{grad}\delta\,(M - M_2),$$

удовлетворяющее прежним граничным условиям и начальным данным

$$\vec{u}_0\,(M, t-\tau, M_2) = 0 \quad \text{при} \quad t < \tau. \tag{10.64}$$

По такому полю определяется вольтерровское поле смещений

$$\vec{u}^{\,0}(M, t) = \vec{u}_0\,(M, t_0 - t, M_2). \tag{10.65}$$

При этом учитывается, что в силу (10.64), вольтерровское поле удовлетворяет условию

$$\vec{u}_0\,(M, t_0 - t, M_2) \equiv 0, \quad \text{если} \quad t_0 < t,$$

причем оно отвечает в (2.8) плотности массовых сил вида

$$\vec{f}^{\,0} = \delta(t_0 - t)\,\mathrm{grad}\,\delta(M - M_2). \tag{10.66}$$

Подставляя вольтерровское поле $\vec{u}^{\,0}$ и поле $\vec{u}_1 = \vec{u}_1(M, t, M_2; \varphi)$ из (10.61) в формулу (10.1) и учитывая, что поверхностные интегралы обращаются в нуль в силу граничных условий и нулевых начальных данных (при $t \leqslant 0$ и при $t \geqslant t_0$), получаем соотношение

$$\mathrm{div}\,\vec{u}_1(M_2, t_0, M_1; \varphi) = \mathrm{div}\,\vec{u}_2(M_1, t_0, M_2; \varphi), \tag{10.67}$$

при выводе которого были использовны формулы (10.63) и (10.66).

10. Обращает на себя внимание, что физическая сущность принципа взаимности (10.67), отвечающего случаям воздействия типа центров давлений, качественно отличается от сущности принципа взаимности (10.27) в случае воздействий типа сосредоточенных направлений сил. Это выступает еще более разительно в случае воздействия

$$\vec{f}_1 = \vec{l}_1\,\varphi(t)\,\delta\,(M - M_0)$$

типа направленной силы и воздействия

$$\vec{f}_2 = -\frac{1}{3}\,\varphi(t)\,\mathrm{grad}\,\delta\,(M - M_2)$$

типа центра давления. В таком случае принцип взаимности приводит к равенству

$$\vec{l}_1 \cdot \vec{u}_2(M_1, t_0, M_2; \varphi) = \mathrm{div}\,\vec{u}_1\,(M_2, t_0, M_1; \varphi), \tag{10.68}$$

которое не содержит в различных его частях физически-взаимных (однотипных) величин, подобных проекциям смещений на направления прикладываемых сил.

Естественно, что равенство (10.68) требует своего (особого) физического толкования, не имеющего ничего общего с установившимся повсеместно в сейсмической практике его толкованием на основе равенства (10.27). В действительности же формула (10.27) применима только в случае воздействий, строго укладывающихся в рамки модели сосредоточенных направленных сил. Воздействие типа центра давлений из такой модели выпадает, равно как выпадает и воздействие, порождаемое взрывом в неглубокой скважине, приводящим к некоторой суперпозиции направленной силы и центра давлений.

Поэтому прежде, чем применять на практике формулу (10.27), необходимо проверять, все ли условия, обеспечивающие ее справедливость, выполняются в конкретных условиях производимого эксперимента. При этом прежде всего следует убедиться в сосредоточенности воздействий $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ в точках M_1 и M_2, понимаемой физически. Она требует выполнения двух (очевидных) неравенств

$$|M_1 - M_2| \gg r_0, \quad r_0 < \frac{1}{2} v_s \Delta t_0,$$

где r_0 – радиус эффективной сферы (или полусферы с центром в точке M_ν), к которой прикладывается реальное воздействие, а Δt_0 – минимальный промежуток времени, различаемый в условиях эксперимента. Но помимо этого воздействия $\vec{f}_\nu$, прилагаемые в окрестностях точек $M = M_\nu$, $(\nu = 1, 2)$, должны иметь характер "направленных сил без первых их моментов". Это означает, что если воздействия задаются своими плотностями сил $\vec{f}_\nu(\vec{r})$, прикладываемыми в среде к точкам $M \in \Omega_\nu$, (где $\vec{r} = \overrightarrow{M - M_0}$, $|\vec{r}| < r_0$), то для суммарных векторов сил должны выполняться условия

$$\int\limits_{\Omega_\nu} \vec{f}_\nu(\vec{r})(d\,\vec{r}) = \vec{f}_\nu, \quad |\,\vec{f}_1\,| = |\,\vec{f}_2\,| \neq 0,$$

а все первые моменты плотностей сил

$$\int\limits_{\Omega_\nu} (x_k - \widetilde{x}_k)\, f_\nu\,(\vec{r})(d\,\vec{r}) = 0, \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

(где $\widetilde{x}_k$ – координаты точек M_ν) должны практически равняться нулю.

ГЛАВА 4

Некоторые вопросы математического аппарата теории распространения волновых полей

§11. Сведения из вариационного исчисления и теории поля экстремалей. Уравнения экстремалей в форме Эйлера. Канонические переменные и система уравнений Гамильтона. Поле экстремалей и уравнение Гамильтона–Якоби

Рассмотрение многих вопросов теории распространения волн естественным образом сводится к задачам вариационного исчисления для функционалов вида

$$I = \int\limits_{x^0}^{\widetilde{x}^0} L(x, x_k, \dot{x}_k) dx, \tag{11.1}$$

в которых обозначено $L(x, x_k, \dot{x}_k) \equiv L(x, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$, $x_k = x_k(x)$, $(k = 1, 2, \dots, n)$ и $\dot{x}_k = dx_k/dx$. В теории распространения волн оказывается $n = 2$, если одна из координат x, y, z точки в пространстве взята за переменную интегрирования x в (11.1), а две другие отождествлены с $x_1(x)$, $x_2(x)$, и $n = 3$, если под переменной x в (11.1) подразумевается некоторый параметр, например, время t, а за пространственные координаты взяты функции $x_k(x)$, $(k = 1, 2, 3)$. При этом в последнем случае функция L не зависит от x явно. Что же касается смысла функционала (11.1), то в задачах на распространение волн в изотропных средах он совпадает с функционалом Ферма.

В упомянутых задачах, как известно, важную роль играют понятия лучей и фронтов волн, а также основанные на таких понятиях различные теоретические построения и экстремальные методы. Все они естественным образом увязываются с понятием экстремалей функционалов вида (11.1), а также с некоторыми следствиями из теории поля таких экстремалей. Поэтому соответствующие результаты вариационного исчисления оказываются весьма полезными в теории волн.

I. Общая форма вариации функционала. Уравнения для экстремалей в форме Эйлера

1. Установим общий вид вариации функционала (11.1), в котором функция $L(x, x_k, \dot{x}_k) \equiv L(x, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$, называемая функцией Лагранжа, непрерывна вместе с первыми и вторыми частными производными по всем своим аргументам, а под $x_k(x)$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ подразумеваются некоторые функции от переменной x, изменяющейся в промежутке $x^0 \leqslant x \leqslant \widetilde{x}^0$, а под $\dot{x}_k = dx_k/dx$ подразумеваются их первые производные.

Если задать на промежутке $(x^0, \widetilde{x}^0)$ дифференцируемые функции

$$x_k(x), \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{11.2}$$

то интеграл (11.1) может быть вычислен, причем он определяет некоторое число. Таким образом, функционал устанавливает соответствие между множеством функций (11.2) и множеством чисел – значений функционала I.

В пространстве $(n+1)$ измерения с переменными $(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (или в пространстве n измерений с переменными $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если x рассматривается как параметр, например, время) функции (11.2) определяют некоторую кривую. Поэтому можно говорить, что значение функционала I определяется выбором кривой из некоторого рассматриваемого семейства. При этом функции (11.2), определяющие такие кривые, предполагаются обычно непрерывными в промежутке $(x^0, \widetilde{x}^0)$ вместе с их первыми и вторыми производными по x.

Пусть задано некоторое семейство функций (11.2). Ему отвечает множество M значений функционала I из (11.1). Может оказаться, что среди элементов множества M имеется наибольший или наименьший, т.е. экстремальный элемент I_0. Кривая (11.2), определенная на промежутке $(x^0, \widetilde{x}^0)$ и принадлежащая заданному семейству, доставляющая функционалу I экстремальное значение, называется экстремалью функционала (11.1). Основной задачей вариационного исчисления как раз и является нахождение экстремалей функционала (11.1) при тех или иных дополнительных условиях.

При решении такой задачи обычно предполагают, что в рассматриваемой области пространства экстремаль существует и реализуется в виде некоторой гладкой кривой типа (11.2). Для нахождения такой кривой вводят в рассмотрение “множество произвольных кривых, близких к экстремали”, называемое множеством допустимых кривых или допустимых функций. В общем случае можно считать, что это множество совпадает с семейством произвольных функций (или с семейством произвольных кривых) вида

$$x_k = x_k(x, \alpha_r) \equiv x_k(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad (k = 1, \dots, n), \tag{11.3}$$

заданных на промежутке $x^0 \leqslant x \leqslant \widetilde{x}^0$, зависящих от n произвольных параметров $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \equiv (\alpha_r)$, изменяющихся в малом промежутке $-\alpha_0 \leqslant \alpha_r \leqslant \alpha_0$, и удовлетворяющих двум условиям: а) при значениях $\alpha_r = 0$, $(r = 1, 2, \dots, n)$ кривая (11.2) совпадает с экстремалью функционала I (существование которой предполагается) и б) функции $x_k(x, \alpha_r)$ из (11.3) непрерывны вместе со всеми первыми и вторыми их частными производными по переменным $x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Заметим, что условие гладкости б), наложенное на функции из (11.3), может быть ослаблено.

2. Исходным для вариационного исчисления является понятие о вариации функций. Пусть речь идет о какой-либо функции $\varphi(x, \dots)$. Для установления понятия вариации $\delta\varphi$ этой функции вводят в рассмотрение то или иное (в зависимости от решаемой задачи) семейство $\widetilde{\varphi}(x, \dots)$ функций, близких к функции $\varphi(x, \dots)$, и определяют вариацию в соответствии с формулой

$$\delta\varphi = \widetilde{\varphi}(x, \dots) - \varphi(x, \dots), \tag{11.4}$$

где $\widetilde{\varphi}(x, \dots)$ – произвольная функция из семейства $\widetilde{\varphi}$, а $\varphi(x, \dots)$ – функция, вариация которой определяется. При этом близость функций φ и $\widetilde{\varphi}$ в случае функционалов вида (11.1) понимается в смысле неравенства

$$|\widetilde{\varphi}(x, \dots) - \varphi(x, \dots)| < \varepsilon, \quad (x^0 \leqslant x \leqslant \widetilde{x}^0), \tag{11.5}$$

где $\varepsilon > 0$ малое число. Под семейством же $\widetilde{\varphi}$ функций, близких к $\varphi(x, \dots)$, понимают бесконечное множество произвольных функций некоторого класса, содержащее функции $\widetilde{\varphi}$, удовлетворяющие неравенствам (11.5) при сколь угодно малых значениях $\varepsilon > 0$.

Вследствие очевидных соотношений

$$|x_k(x, \alpha_r) - x_k(x, 0)| \approx \left| \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_r} \alpha_r \right|, \quad (k = 1, \dots, n), \tag{11.6}$$

получающихся для функций (11.3), например, применением формулы Тейлора, а также вследствие предположенной непрерывности на промежутках $x^0 \leqslant x \leqslant \widetilde{x}^0$, $-\alpha_0 \leqslant \alpha_r \leqslant \alpha_0$ (а значит и ограниченности их модуля) всех производных $\partial x_k/\partial\alpha_r$ от функций $x_k = x_k(x,\alpha_r)$ из (11.3) ясно, что семейство допустимых кривых или функций из (11.3) оказывается в то же время семейством произвольных функций, близких к экстремали $x_k = x_k(x,0)$, $(k = 1,2,\ldots,n)$. Поэтому вариацию функций $x_k = x_k(x,0)$, представляющих экстремаль функционала (11.1), можно определять на основе семейства допустимых функций (11.3).

В соответствии с изложенным под вариациями функций $x_k(x)$ и $\dot{x}_k(x)$ из (11.1) понимают следующие выражения:

$$\delta x_k = \sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial x_k}{\partial\alpha_r}\right)_0 \alpha_r, \tag{11.7}$$

$$\delta\dot{x}_k = \frac{\partial x_k(x,\alpha_r)}{\partial x} - \frac{\partial x_k(x,0)}{\partial x} = \frac{d}{dx}\,\delta x_k, \quad (k = 1,\ldots,n). \tag{11.8}$$

Величины α_r $(r = 1,\ldots,n)$ считаются здесь бесконечно малыми (что и позволяет пренебрегать в правых частях (11.7), (11.8) поправочными членами), а под $(\partial x_k/\partial\alpha_r)_0$ подразумеваются предельные значения при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots\alpha_n = 0$ от производных по α_r функций $x_k = x_k(x,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ из (11.3). При этом в согласии с определением семейства (11.3) все параметры следует считать независимыми друг от друга, а все функции $x_k(x,\alpha_r)$, следовательно и все выражения

$$\psi_{kr} = \left(\frac{\partial x_k}{\partial\alpha_r}\right)_0, \tag{11.9}$$

можно считать функциями от x в промежутке $(x^0,\widetilde{x}^0)$, независимыми друг от друга и выбираемыми по произволу при любых значениях индексов k и r. Остается лишь отметить, что если переменная $x \in (x^0,\widetilde{x}^0)$ приближается к тому или иному концу промежутка, то вариации δx_k из (11.7) стремятся к предельным значениям в соответствии с равенствами

$$(\delta x_k)^0 = \lim_{x\to x^0+0}\delta x_k, \quad (\delta\widetilde{x}_k)^0 = \lim_{x\to\widetilde{x}^0-0}\delta x_k. \tag{11.10}$$

3. В некоторых задачах вариационного исчисления для функционала (11.1) кроме экстремальной кривой $x_k = x_k(x,0)$, $(k = 1,2,\ldots,n)$ приходится искать и значения пределов интегрирования x^0 и $\widetilde{x}^0$, при которых I достигает экстремума. Такой поиск осуществляется также на основе вариации функций, входящих в выражение функционала, но теперь варьируются и пределы интегрирования x^0 и $\widetilde{x}^0$ из (11.1).

Считая, что истинные пределы интегрирования в (11.1), отвечающие экстремуму I, равны $x^0(0)$ и $\widetilde{x}^0(0)$, вводят в рассмотрение семейства $\{x^0(\alpha)\}$ и $\{\widetilde{x}^0(\alpha)\}$ произвольных непрерывно дифференцируемых функций от параметра α, изменяющихся в малом промежутке $(-\alpha_0, \alpha_0)$, и таких, что при $\alpha = 0$ эти функции принимают упоминавшиеся значения $x^0(0)$ и $\widetilde{x}^0(0)$. Вариации концов промежутка определяются формулами

$$\begin{aligned} \delta x^0 &= x^0(\alpha) - x^0(0) = \left(\frac{dx^0}{d\alpha}\right)_0 \alpha, \\ \delta\widetilde{x}^0 &= \widetilde{x}^0(\alpha) - \widetilde{x}^0(0) = \left(\frac{d\widetilde{x}^0}{d\alpha}\right)_0 \alpha, \end{aligned} \tag{11.11}$$

В которых $(dx^0/d\alpha)_0$ и $(d\widetilde{x}^0/d\alpha)_0$ обозначают значения производных функций $x^0(\alpha)$ и $\widetilde{x}^0(\alpha)$ наших семейств в точке $\alpha = 0$. При этом параметр α в (11.11) считается произвольным, не зависящим от параметров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ из (11.7) и бесконечно малым.

4. Рассмотренное в п. 3 варьирование пределов интегрирования в (11.1) влияет и на положения концов допустимых кривых из (11.2), которые оказываются функциями $x_k = x_k[x^0(\alpha), \alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ и $\widetilde{x}_k = x_k[\widetilde{x}^0(\alpha), \alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ от $n+1$ независимого параметра $\alpha, \alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Вследствие такой зависимости от варьируемых параметров (истинные) изменения положений концов кривых (11.3) уже не характеризуются вариациями (11.10), а должны определяться так называемыми полными вариациями концов допустимых кривых. В соответствии с приведенным выше определением для полных вариаций концов кривых из (11.3) получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned} \delta x_k^0 &= \left[\frac{\partial x_k(x, \alpha_r)}{\partial x}\bigg|_{x=x^0(\alpha)} \frac{dx^0}{d\alpha}\right]_0 \alpha + \sum_{r=1}^{n} \left[\frac{\partial x_k(x, \alpha_r)}{\partial \alpha_r}\right]_0 \alpha_r \equiv \\ &\equiv (\dot{x}_k)^0 \delta x^0 + (\delta x_k)^0, \\ \delta\widetilde{x}_k^0 &= \left[\frac{\partial x_k(x, \alpha_r)}{\partial x}\bigg|_{x=\widetilde{x}^0(\alpha)} \frac{d\widetilde{x}^0}{d\alpha}\right]_0 \alpha + \sum_{r=1}^{n} \left[\frac{\partial x_k(x, \alpha_r)}{\partial \alpha_r}\right]_0 \alpha_r \equiv \\ &\equiv (\dot{\widetilde{x}}_k)^0 \delta\widetilde{x}^0 + (\delta\widetilde{x}_k)^0. \end{aligned} \tag{11.12}$$

Нуль справа и снизу у квадратных скобок здесь означает, что после вычисления выражения, стоящего в скобках, в нем полагается $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Выражения $(\dot{x}_k)^0$ и $(\widetilde{\dot{x}}_k)^0$ обозначают предельные значения производных $\partial x_k(x, \alpha_r)/\partial x$, в которых положено $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ соответственно при $x \to x^0 + 0$ и $x \to \widetilde{x}^0 - 0$. Что же касается величин δx^0, $\delta\widetilde{x}^0$, $(\delta x_k)^0$ и $(\delta\widetilde{x}_k)^0$, то они имеют значения из (11.11) и (11.10).

5. Если вместо $x^0, \widetilde{x}^0$ и $x_k(x)$ в (11.1) подставить соответственно функции $x^0(\alpha)$, $\widetilde{x}^0(\alpha)$ и $x_k(x, \alpha_r)$ из (11.11) и (11.3), то функционал I окажется функцией

$$I(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \int\limits_{x^0(\alpha)}^{\widetilde{x}^0(\alpha)} L[x, x_k(x, \alpha_r), \dot{x}_k(x, \alpha_r)]dx \qquad (11.13)$$

от параметров $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Все эти параметры, изменяющиеся в малых промежутках $(-\alpha_0, \alpha_0)$, попарно независимы, произвольны и выбраны так, что функция $I(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ достигает экстремума при $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_n = 0$. В случае же $\alpha \neq 0$, $\alpha_r \neq 0$ выражения $I(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ представляют собой множество величин, близких к $I(0, 0, \ldots, 0)$. Поэтому в согласии с общим определением под вариацией δI (как говорят, под полной вариацией функционала) следует понимать выражение

$$\delta I = I(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) - I(0, \ldots, 0) = \\ = \left(\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right)_0 \alpha + \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial I}{\partial \alpha_r}\right)_0 \alpha_r, \qquad (11.14)$$

производные из правой части которого, легко вычисляемые на основании (11.13), выписываются при значениях $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. В явном виде формула (11.14) переписывается, очевидно, следующим образом:

$$\delta I = L\delta x\Big|_{x=x^0}^{x=\widetilde{x}^0} + \int\limits_{x^0}^{\widetilde{x}^0} \sum_{r=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial x_r}\partial x_r + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_r}\,\delta \dot{x}_r\right] dx = \left[L\delta\widetilde{x}^0 + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_r}(\delta\widetilde{x}_r)^0\right] - \\ - \left[L\delta x^0 + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_r}\,(\delta x_r)^0\right] + \int\limits_{x^0}^{\widetilde{x}^0} \sum_{r=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial x_r} - \frac{d}{dx}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_r}\right] \delta x_r\, dx. \quad (11.15)$$

Заметим, во-первых, что здесь было учтено соотношение $\delta\dot{x}_k = d\delta x_k/dx$ из (11.11), позволившее выполнить интегрирование по частям. Во-вторых же, что первое слагаемое, заключенное в квадратные скобки, относится к верхнему пределу интегрирования $x = \widetilde{x}^0(0) = \widetilde{x}^0$, а второе слагаемое – к нижнему пределу $x = x^0(0) = x^0$.

Если воспользоваться выражениями (11.12) для полных вариаций δx_k^0 и $\delta \widetilde{x}_k^0$ концов допустимых кривых из (11.3), то вместо (11.15) окончательно будем иметь:

$$\delta I = \left\{ \left[L - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k \right]_{x=\widetilde{x}^0} \delta \widetilde{x}^0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\bigg|_{x=\widetilde{x}^0} \delta \widetilde{x}_k^0 \right\} -$$

$$- \left\{ \left[L - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k \right]_{x=x^0} \delta x^0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\bigg|_{x=x^0} \delta x_k^0 \right\} +$$

$$+ \int_{x^0}^{\widetilde{x}^0} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial x_k} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \right] \delta x_k dx. \qquad (11.16)$$

Заметим, что везде здесь под L понимается выражение $L(x, x_k, \dot{x}_k)$ из (11.1), содержащее функции $x_k = x_k(x, 0)$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, отвечающие экстремали, от которых в (11.6) исчислялись вариации δx_k. Что же касается вариаций δx^0, $\delta \widetilde{x}^0$ и δx_k^0, $\delta \widetilde{x}_k^0$, то они имеют смысл и значения соответственно из (11.11) и (11.12).

6. Так как, по предположению, функция $I(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из (11.13) достигает экстремума при $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, то на искомой экстремали вариация δI из (11.16) должна обращаться в нуль.

Пусть в вариационной задаче для функционала (11.1) сначала считается, что концы допустимых кривых (11.3) закреплены, т.е. проходят через некоторые фиксированные точки $(x^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ и $(\widetilde{x}^0, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n)$. В этом случае $\delta x^0, \delta \widetilde{x}^0, \delta x_k^0$ и $\delta \widetilde{x}_k^0$ из (11.16) равны нулю и потому условие экстремума функционала записывается в виде

$$\delta I = \int_{x^0}^{\widetilde{x}^0} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial x_k} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \right] \delta x_k \, dx = 0. \qquad (11.17)$$

Но в силу (11.7) имеет место

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial x_k}-\frac{d}{dx}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right]\delta x_k=\sum_{r=1}^{n}\alpha_r\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial x_k}-\frac{d}{dx}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right]\psi_{kr}(x),$$

где α_r – произвольно выбираемые независимые друг от друга числа, а $\psi_{kr}(x)$, определяемые по формулам (11.9), – произвольные и не зависящие друг от друга непрерывные функции.

Фиксируя последовательно все значения $k=k_0$, $r=r_0$, произведем выбор произвольных величин так, чтобы оказывалось

$$\alpha_r=\left\{\begin{array}{ll}0, & r\neq r_0\\ \neq 0, & r=r_0\end{array}\right\},\quad \psi_{kr_0}=\left\{\begin{array}{ll}0, & k\neq k_0\\ \psi(x), & k=k_0\end{array}\right\}.$$

Тогда равенство (11.17), очевидно, сведется к n независимым равенствам

$$\int\limits_{x^0}^{\widetilde{x}^0}\left[\frac{\partial L}{\partial x_k}-\frac{d}{dx}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right]\psi(x)dx=0,\quad (k=1,\ldots,n), \tag{11.18}$$

содержащим под знаком интеграла произвольную непрерывную функцию $\psi(x)$. Но в силу предположений о свойствах гладкости функции $L(x,x_k,\dot{x}_k)$ и функций $x_k(x,0)$ из (11.3) (сформулированных в начале п. 1 и сразу же за формулой (11.3)) выражения, стоящие под знаком интеграла из (11.17) в квадратных скобках, непрерывны при $x^0\leqslant x\leqslant \widetilde{x}^0$. Поэтому интегралы (11.18) могут равняться нулю при произвольной непрерывной $\psi(x)$ тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\frac{\partial L}{\partial x_k}-\frac{d}{dx}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}=0,\quad (k=1,2,\ldots,n), \tag{11.19}$$

называемые уравнениями Эйлера для экстремальной кривой.

Итак, функции (11.2), определяющие экстремаль функционала (11.1), должны удовлетворять системе n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (11.19). При рассматриваемых условиях закрепления концов экстремаль должна удовлетворять, кроме того, $2n$ концевым условиям вида

$$x_k(x^0)=x_k^0,\quad x_k(\widetilde{x}^0)=\widetilde{x}_k,\quad (k=1,2,\ldots,n). \tag{11.20}$$

Общий интеграл $x_k = x_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_{2n})$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ системы уравнений (11.19) содержит, как известно, $2n$ произвольных постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$, которые всегда могут быть выбраны так, чтобы удовлетворялись начальные данные Коши вида

$$x_k\Big|_{x=x^0} = a_k, \quad \frac{dx_k}{dx}\Big|_{x=x^0} = b_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{11.21}$$

задаваемые в одной точке $x = x_0$ переменной x. Относительно же возможности выбора постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$ в общем интеграле так, чтобы выполнялись граничные условия (11.20), заранее нельзя сказать что-либо определенное. В этом состоит, как известно, одно из затруднений практической реализации методов вариационного исчисления. Однако в интересующих нас задачах на распространение волн приходится иметь дело с решениями уравнений (11.19) только лишь при дополнительных условиях типа (11.21).

7. Пусть теперь, например, нижний конец допустимых кривых (11.3) закреплен, а верхний может свободно перемещаться вдоль заданной поверхности

$$\theta(x, x_1, \ldots, x_n) = 0. \tag{11.22}$$

Предполагая, что существует кривая (11.3), удовлетворяющая указанным условиям закрепления и доставляющая функционалу (11.1) экстремальное значение, поставим целью ее найти.

Как известно, если какое-либо экстремальное свойство достигается на объекте A_0 из широкого бесконечного множества G конкурирующих объектов, то оно достигается на A_0 и при допущении к конкуренции лишь объектов из подмножества $\widetilde{G}$, являющегося частью G, если только в $\widetilde{G}$ содержатся как A_0, так и объекты, сколь угодно близкие к A_0.

На основании такого общего утверждения очевидно, что экстремаль поставленной задачи должна быть в то же время и экстремалью задачи, в которой верхний конец допустимых кривых закреплен (именно в той точке, в которой находится конец искомой экстремали). Но раз так, то искомая экстремаль должна удовлетворять уравнениям Эйлера (11.19). Таким образом, дальнейший поиск экстремальной кривой следует осуществлять среди множества кривых, удовлетворяющих системе уравнений

(11.19). Но при этом выражение (11.16) для полной вариации упрощается, и условие экстремума принимает вид

$$\delta I = \left[L - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\, \dot{x}_k \right] \delta \widetilde{x}^0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\, \delta \widetilde{x}\,_k^0 = 0. \tag{11.23}$$

Здесь $k = 1, 2, \ldots, n$, а значения $L, \partial L/\partial \dot{x}_k$ и $\dot{x}_k$ вычисляются для концевой точки экстремали $x_k = x_k(x, 0)$ из (11.3). Величины же $\delta x \equiv \delta \widetilde{x}^0$ и $\delta x_k \equiv \delta \widetilde{x}\,_k^0$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ обозначают произвольные изменения координат точки $(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, расположенной на поверхности (11.22), т.е. такие изменения координат, что справедливо соотношение

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}\, \delta \widetilde{x}^0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \theta}{\partial x_k}\, \delta \widetilde{x}\,_k^0 = 0. \tag{11.24}$$

Заметим, что условие (11.24) называется условием трансверсальности пересечения поверхности (11.22) с искомой экстремалью, т.е. с кривой вида (11.2), определяемой функциями $x_k = x_k(x)$, являющимися соответствующим интегралом системы уравнений (11.19). Очевидно, что это условие фактически сводится к пропорциональности коэффициентов форм (11.23) и (11.24), т.е. к равенствам вида

$$\frac{1}{\theta_x} \left(L - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\, \dot{x}_k \right) = \frac{1}{\theta_{x_1}}\, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \ldots = \frac{1}{\theta_{x_n}}\, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n}, \tag{11.25}$$

в которых величины $\theta_x = \partial \theta/\partial x$, $\theta_{x_1} = \partial \theta/\partial x_1, \ldots, \theta_{x_n} = \partial \theta/\partial x_n$ пропорциональны направляющим косинусам нормали к поверхности (11.22).

II. Канонические переменные и система уравнений Гамильтона

8. Уравнения Эйлера (11.19), которым должна удовлетворять любая экстремаль функционала (11.1) (называемые в механике материальных точек уравнениями Лагранжа), представляют собой систему n дифференциальных уравнений второго порядка для n функций $x_k = x_k(x)$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Часто удобнее иметь дело с эквивалентной системой $2n$ дифференциальных уравнений, но не второго, а первого порядка, переход к которой осуществляется присоединением к прежним искомым функциям некоторых новых неизвестных функций $y_k = y_k(x)$, $(k = 1, 2, \dots, n)$ (например, тривиальным образом, полагая $y_k = \dot{x}_k$).

Во многих случаях при переходе к уравнениям первого порядка систему уравнений (11.19) удается привести к каноническому виду системы уравнений Гамильтона, обладающей существенными преимуществами при рассмотрении ряда принципиальных вопросов теории.

Понимая под L в (11.19) функцию

$$L(x, x_k, \dot{x}_k) \equiv L(x, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$$

из п. 1, положим

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \equiv L_{\dot{x}_k}(x, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n), \quad (k = 1, 2, \dots, n) \tag{11.26}$$

и допустим, что равенства (11.26), рассматриваемые как система n функциональных уравнений для n величин $\dot{x}_k$, могут быть разрешены относительно всех $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_k$. Необходимое и достаточное условие разрешимости системы (11.26) сводится, как известно, к отличию от нуля функционального определителя

$$|L_{\dot{x}_k\dot{x}_r}| \equiv \frac{\partial(L_{\dot{x}_1}, L_{\dot{x}_2}, \dots, L_{\dot{x}_n})}{\partial(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)} \equiv \frac{\partial(p_1, \dots, p_n)}{\partial \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)} \neq 0, \tag{11.27}$$

что здесь и предполагается.

При условии (11.27) из соотношений (11.26) однозначно определяются n функций

$$\dot{x}_k = \dot{x}_k(x, x_r, p_r) \equiv \dot{x}_k(x, x_1, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n), \quad (k = 1, \dots, n). \tag{11.28}$$

В этом случае (и, строго говоря, только в этом) возможен переход от уравнений (11.19) к канонической системе уравнений Гамильтона. При этом “переменные” x_k и p_k, $(k = 1, 2, \dots, n)$, являющиеся на самом деле функциями от x, называются каноническими переменными (x_k – обобщенными координатами, а p_k – обобщенными импульсами, по терминологии механики).

Определим функцию

$$H(x, x_k, p_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k \dot{x}_k(x, x_k, p_k) - L[x, x_k, \dot{x}_k(x, x_k, p_k)] \tag{11.29}$$

от переменных $x, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, называемую функцией Гамильтона. По правилам дифференцирования сложных функций, при $r = 1, 2, \ldots, n$ находим:

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = \dot{x}_r + \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial p_r} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial p_r} = \dot{x}_r(x, x_k, p_k), \qquad (11.30)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_r} = \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial x_r} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial x_r} - \frac{\partial L}{\partial x_r} = -\frac{\partial L}{\partial x_r}. \qquad (11.31)$$

Здесь мы воспользовались следующим: определением (11.26) для величин p_k; предположением о разрешимости соотношений (11.26) относительно величин $\dot{x}_k$, приводящим к функциям $\dot{x}_k(x, x_r, p_r)$ из (11.28); и определением (11.29) функции H. Уравнения (11.19) пока не использовались.

Пусть теперь $x_k = x_k(x)$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ – какой-либо интеграл системы уравнений (11.19). При подстановке в правые части (11.26) вместо x_k и $\dot{x}_k$ значений функций $x_k = x_k(x)$ и $\dot{x}_k = \frac{dx_k}{dx}$ определяются n функций $p_k = p_k(x)$. В результате же (однозначной!) разрешимости относительно величин $\dot{x}_k$ системы уравнений (11.26) (в правые части которой, как указывалось, подставлены значения $x_k = x_k(x)$ и $\dot{x}_k = \frac{dx_k}{dx}$) получаются функции $\dot{x}_k(x, x_r, p_r)$ из (11.28), удовлетворяющие, очевидно, равенствам

$$\dot{x}_k[x, x_r(x), p_r(x)] = \frac{dx_k(x)}{dx} \equiv \dot{x}_k(x), \qquad (11.32)$$

где $x_k = x_k(x)$ – рассматриваемый интеграл системы уравнений (11.19), а $p_k(x)$ – определяемые по нему при помощи (11.26) функции. На основании таких равенств ясно, что в результате подстановки значений упомянутых функций $x_k = x_k(x)$ и $p_k = p_k(x)$ в соотношения (11.30) последние принимают вид

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{dx_r}{dx}, \quad (r = 1, 2, \ldots, n). \qquad (11.33)$$

Что же касается функций $p_k = p_k(x)$, определенных через посредство интеграла $x_k = x_k(x)$, при помощи равенств (11.26), то в силу (11.19) и (11.31) для них получается

$$\frac{dp_k}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = \frac{\partial L}{\partial x_k} = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (11.34)$$

Итак, мы видим, что любой интеграл $x_k = x_k(x)$ системы уравнений Эйлера (11.19) после присоединения к нему n функций $p_k = p_k(x)$ (получающихся в результате подстановки в правые части (11.26) значений $x_k = x_k(x)$ и $\dot{x}_k = \frac{dx_k(x)}{dx}$) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx_k}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{11.35}$$

называемой системой уравнений Гамильтона.

Справедливо и обратное утверждение, а именно: если $x_k = x_k(x)$, $p_k = p_k(x)$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ – любой интеграл системы уравнений (11.35), то функции $x_k = x_k(x)$ удовлетворяют системе уравнений (11.19), а подстановка значений $x_k = x_k(x)$, $\dot{x}_k = \dot{x}_k(x)$ и $p_k = p_k(x)$ в соотношения (11.26) приводит к тождествам.

Действительно, по интегралам $x_k = x_k(x)$, $p_k = p_k(x)$ системы уравнений (11.35) можно определить функции $\dot{x}_k = \dot{x}_k(x), x_r(x), p_r(x)$ из (11.28) как результат решения (относительно $\dot{x}_k$) системы уравнений (11.26), в которую подставляются вместо x_k и p_k упомянутые значения $x_k(x)$ и $p_k(x)$. Эти функции должны удовлетворять соотношениям (11.30) и (11.31), сопоставление которых с первой группой уравнений (11.35) приводит к равенствам

$$\dot{x}_k(x, x_r(x), p_r(x)) = \frac{dx_k(x)}{dx} \equiv \dot{x}_k(x), \tag{11.36}$$

означающим, что подстановка в (11.26) значений $x_k = x_k(x)$, $\dot{x}_k = \dot{x}_k(x)$ и $p_k = p_k(x)$ действительно приводит к тождествам. Но так как подстановка значений $x_k = x_k(x)$ и $\dot{x}_k = \dot{x}_k(x)$ в левую часть (11.26) дает значения функций $p_k = p_k(x)$, удовлетворяющие второй группе уравнений из (11.35), то в силу (11.35) и (11.31), очевидно, имеем:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L(x, x_r, \dot{x}_r)}{\partial \dot{x}_k} = \frac{dp_k(x)}{dx} = -\frac{\partial H(x, x_r, p_r)}{\partial x_k} = \frac{\partial L(x, x_r, \dot{x}_r)}{\partial x_k}. \tag{11.37}$$

Но это как раз и означает, что функции $x_k = x_k(x)$ (из интеграла $x_k = x_k(x)$, $p_k = p_k(x)$ системы уравнений (11.35)) удовлетворяют системе уравнений (11.19), что и требовалось.

9. Уравнения Гамильтона (11.35) представляют собой систему $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для $2n$ функций $x_k(x)$ и $p_k(x)$. Основной для таких систем является задача Коши, в которой требуется построить решение $x_k = x_k(x)$, $p_k = p_k(x)$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ системы (11.35), удовлетворяющее начальным данным

$$x_k\big|_{x=x_0} = x_k^0, \quad p_k\big|_{x=x_0} = p_k^0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{11.38}$$

где (при фиксированном значении x_0) правые части могут задаваться по произволу.

В случае достаточной гладкости функций из правых частей уравнений (11.35) (например, такой, что эти функции непрерывны в рассматриваемой области переменных $x, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ и имеют ограниченные частные производные по всем x_k и p_k) задача Коши имеет решение и притом единственное. Это решение

$$x_k = x_k(x, x_k^0, p_k^0), \quad p_k = p_k(x, x_k^0, p_k^0) \tag{11.39}$$

непрерывно зависит от $2n$ параметров x_k^0 и p_k^0. В случае же более высокой гладкости правых частей уравнений (11.35) гладкость функций (11.39) также возрастает и они уже имеют частные производные по x_k^0 и p_k^0.

Как известно, общим интегралом системы уравнений (11.35) называются $2n$ функций

$$x_k = x_k(x, c_1, \ldots, c_{2n}), \quad p_k = p_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_{2n}), \tag{11.40}$$

зависящих от $2n$ произвольных постоянных, и притом так, что путем их исключения функции (11.40) могут быть подчинены условиям (11.38) с произвольными значениями x_k^0 и p_k^0. Из указанного факта существования решения задачи Коши вытекает, очевидно, и существование общего интеграла системы (11.35).

III. Поле экстремалей и уравнение Гамильтона–Якоби

10. В случаях существования канонических переменных из п. 8, позволяющих перейти от уравнений Эйлера (11.19) для экстремалей к каноническим уравнениям Гамильтона (11.35), имеется дальнейшая возможность перехода от системы обыкновенных уравнений (11.35) к уравнению в частных производных для некоторой функции $\Theta(x, x_1, \ldots, x_n)$. Такое уравнение, называемое уравнением Гамильтона–Якоби, оказывается в известном смысле эквивалентным системе обыкновенных уравнений Гамильтона. Это обстоятельство, как известно, лежит в основе аналогии между математическим описанием явлений механики систем материальных точек и геометрической оптики, сыгравшей важную роль в развитии физики XX в. В теории же распространения волн упомянутая эквивалентность является следствием возможности описания движения поверхностей разрыва поля как с точки зрения множества лучей (т.е. экстремалей функционала Ферма, удовлетворяющих уравнениям Гамильтона), так и с точки зрения распространяющихся фронтов, описываемых уравнением Гамильтона–Якоби.

Вывод уравнения Гамильтона–Якоби, равно как и доказательство его эквивалентности системе уравнений Гамильтона, мы приведем здесь лишь для случая трехмерного пространства, имеющего непосредственное отношение к основному для нас вопросу о распространении фронтов волн (несмотря на то, что подобные же результаты имеют место и в случае пространства любого числа измерений). При этом будем учитывать факт (разъясняемый далее), что в случае функционалов Ферма канонические переменные из п. 8 существуют только, если за переменную интегрирования в (11.1) берется одна из пространственных координат, например, x. Вследствие этого будем рассматривать функционал (11.1) в предположении, что $x = x$, $x_1 = y$, $x_2 = z$, соответственно чему в применяемых далее формулах (11.26)–(11.35) будем полагать $n = 2$. Наконец, будем учитывать факт, что в случае существования канонических переменных наряду с условием (11.27) выполняется также и неравенство

$$\frac{\partial(H_{p_1}, H_{p_2}, \ldots, H_{p_n})}{\partial(p_1, p_2, \ldots, p_n)} \equiv \frac{\partial(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)}{\partial(p_1, p_2, \ldots, p_n)} \neq 0, \tag{11.41}$$

которым удобно будет воспользоваться уже в начале п. 11.

11. Говорят, что семейство экстремалей (т.е. семейство решений системы уравнений (11.19) или (11.35) при $n = 2$), зависящих от двух параметров α_1 и α_2, образует поле в трехмерной области B, если через каждую точку $M = (x, x_1, x_2)$ области B проходит одна и только одна экстремаль семейства.

Различают два случая полей: 1) центральное поле экстремалей, отвечающее полю лучей, выходящих из точечного источника волн, и 2) общее поле экстремалей, соответствующее лучам, выходящим из точек фронта волны, заданного в момент времени $t = t_0$, к точкам волнового фронта в момент $t > t_0$. Мы здесь рассмотрим ради определенности случай центрального поля экстремалей.

Фиксируя точку $M = (x^0, x_1^0, x_2^0)$ – центр поля, построим решение системы уравнений (11.35) при $n = 2$, подчиненное данным Коши

$$x_k\big|_{x=x^0} = x_k^0, \quad p_k\big|_{x=x^0} = \alpha_k, \quad (k = 1, 2), \tag{11.42}$$

где α_1 и α_2 – независимые параметры, изменяющиеся в некоторых заданных промежутках.

Если функция $H(x, x_1, x_2, p_1, p_2)$ из правых частей уравнений (11.35) непрерывна вместе со всеми ее частными производными первого и второго порядка в некоторой окрестности точки $x = x_k^0$, $x_k = x_k^0$ при любых рассматриваемых значениях $p_k = \alpha_k$, то система (11.35) имеет единственное решение

$$x_k = x_k(x, \alpha_1, \alpha_2), \quad p_k = p_k(x, \alpha_1, \alpha_2), \quad (k = 1, 2), \tag{11.43}$$

удовлетворяющее условиям (11.42) и непрерывное со всеми его частными производными (по x, α_1 и α_2) первого порядка. При этом в случае достаточно малых значений $|x - x_0| > 0$ оказывается (в силу первой группы уравнения (11.35))

$$x_k = x_k^0 + H_{p_k}^0 \cdot (x - x_k) + O[(x - x_0)^2],$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_r} = (x - x_0)\left[\frac{\partial H_{p_k}^0}{\partial \alpha_r} + O(x - x_0)\right] \approx (x - x_0)\frac{\partial H_{p_k}^0}{\partial \alpha_r},$$

где обозначено $H_{p_k}^0 = H_{p_k}(x^0, x_1^0, x_2^0, \alpha_1, \alpha_2)$ и $(k = 1, 2)$. Но тогда $(k = 1, 2)$ для функциональных определителей выполняется соотношение

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\alpha_1, \alpha_2)} \approx (x - x_0)^2 \frac{\partial(H_{p1}^0, H_{p2}^0)}{\partial(\alpha_1, \alpha_2)} \neq 0, \tag{11.44}$$

справедливое уж во всяком случае при достаточно малых $|x - x_0| > 0$ в силу (11.41).

Вследствие соотношения (11.44) из первых двух функций

$$x_1 = x_1(x, \alpha_1, \alpha_2), \quad x_2 = x_2(x, \alpha_1, \alpha_2) \tag{11.45}$$

(взятых из (11.43)) можно выразить значения параметров

$$\alpha_1 = \alpha_1(x, x_1, x_2), \quad \alpha_2 = \alpha_2(x, x_1, x_2), \tag{11.46}$$

причем связь между α_1, α_2 и точкой $M = (x, x_1, x_2)$ из некоторой окрестности точки $M_0 = M_0(x^0, x_1^0, x_2^0)$ оказывается однозначной. При таких условиях через каждую точку M упомянутой окрестности проходит одна, и только одна, экстремаль из (11.43) и, следовательно, экстремали из (11.43) или (11.45) образуют поле. Подставляя значение α_k из (11.46) во вторую группу функций $p_k = p_k(x, \alpha_1, \alpha_2)$ из (11.43), получаем для каждой точки $M \in B$ значения функций

$$p_1 = p_1(x, x_1, x_2), \quad p_2 = p_2(x, x_1, x_2), \tag{11.47}$$

называемых функциями наклона поля экстремалей (11.45). Путем дифференцирования по x вдоль экстремалей (11.45) сложных функций

$$p_k(x, \alpha_1, \alpha_2) = p_k[x, x_1(x, \alpha_1, \alpha_2), x_2(x, \alpha_1, \alpha_2)],$$

получающихся из функций (11.47) подстановкой в них значений x_1 и x_2 из (11.45), находим

$$\frac{dp_k}{dx} = \frac{\partial p_k}{\partial x} + \sum_{r=1}^{2} \frac{\partial p_k}{\partial x_r}\,\frac{dx_r}{dx},$$

что на основании (11.35) переписывается в виде

$$\frac{dp_k}{dx} + \sum_{r=1}^{2} \frac{\partial p_k}{\partial x_r}\,\frac{\partial H}{\partial p_k} = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad (k = 1, 2). \tag{11.48}$$

Итак, мы видим, что построенные функции наклона поля из (11.47) удовлетворяют системе уравнений (11.48) в частных производных.

Легко доказывается и обратное утверждение, а именно, что любому решению (11.47) системы уравнений (11.48) соответствует некоторое поле экстремалей. Действительно, пусть функции (11.47) удовлетворяют системе уравнений (11.48). Подставляя их значения в правую часть первой группы уравнений (11.35) (при $n = 2$), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \equiv F_k(x, x_1, x_2), \quad (k = 1, 2)$$

первого порядка относительно двух функций $x_k(x)$. Ее общий интеграл $x_k = x_k(x, a_1, a_2)$ зависит от двух параметров, которые (в соответсвии с определением понятия "общий интеграл") всегда можно выбрать так, чтобы при $x = x^0$ оказалось

$$x_1(x_0, a_1, a_2) = x_1^0, \quad x_2(x_0, a_1, a_2) = x_2^0$$

при любых значениях x_k^0. Отсюда следует, что в рассматриваемой точке (x^0, x_1^0, x_2^0), равно как и в некоторой ее окрестности, должно быть

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(a_1, a_2)} \neq 0.$$

Но при этом очевидно, что функции $x_k = x_k(x, a_1, a_2)$, $(k = 1, 2)$ образуют поле. Чтобы получить полное поле экстремалей как решений системы уравнений (11.35) при $n = 2$, определим при помощи исходных функций из (11.47) функции от x

$$p_k = p_k(x, a_1, a_2) = p_k[x, x_1(x, a_1, a_2), x_2(x, a_1, a_2)],$$

удовлетворяющие (как легко проверяется на основании (11.48)) второй группе уравнений (11.35) при $n = 2$. А это как раз и означает, что построенные функции $x_k = x_k(x, a_1, a_2)$ и $p_k = p_k(x, a_1, a_2)$ образуют поле экстремалей.

12. Чтобы продвинуться далее, следует вспомнить результаты п. 7, касающиеся условия трансверсальности пересечения экстремалей с некоторой поверхностью

$$\Theta(x, x_1, x_2) = 0. \tag{11.49}$$

Если учесть определение функции Гамильтона формулой (11.29), то условие трансверсальности (11.23) запишется в рассматриваемом случае ($n = 2$) в виде

$$-H(x, x_1, x_2, p_1, p_2)\delta x + p_1 \delta x_1 + p_2 \delta x_2 = 0, \tag{11.50}$$

где δx, δx_1 и δx_2 – произвольные вариации координат точки (x, x_1, x_2), расположенной на поверхности (11.49), связанные друг с другом равенством

$$\Theta_x \delta x + \Theta_{x_1} \delta x_1 + \Theta_{x_2} \delta x_2 = 0, \quad \left(\Theta_x \equiv \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \ \Theta_{x_k} \equiv \frac{\partial \Theta}{\partial x_k}\right). \tag{11.51}$$

Но значения Θ_x, Θ_{x_1} и Θ_{x_2}, как известно, пропорциональны направляющим косинусам n_x, n_{x_1} и n_{x_2} орта нормали $\vec{n}$ к поверхности (11.49). Поэтому соотношение вида (11.25), вытекающее из (11.50) и (11.51), можно записать так

$$-\frac{H(x, x_k, p_k)}{n_x} = \frac{p_1}{n_{x_1}} = \frac{p_2}{n_{x_2}} = h$$

или

$$p_1 = n_{x_1} h, \quad p_2 = n_{x_2} h, \quad H(x, x_k, p_k) + n_x h = 0, \tag{11.52}$$

где h – некоторая функция точки (x, x_1, x_2) поверхности (11.49). Очевидно, что эта функция может быть определена (в принципе) из уравнения

$$H(x, x_1, x_2, n_{x_1} h, n_{x_2} h) + n_x h = 0, \tag{11.53}$$

получающегося из (11.52). Таким образом, оказывается, что условие трансверсальности определяет в точках поверхности (11.49) значения функций наклона $p_k = p_k(x, x_1, x_2)$, $(k = 1, 2)$, подстановка которых в правые части первой группы уравнений (11.35) (т.е. в уравнения $dx_k/dx = H_{p_k}$) приводит к значениям $\dot{x}_k(x, x_1, x_2)$, определяющим направления подхода (или отхода) экстремалей к точке (x, x_1, x_2) поверхности (11.49).

13. Если l – любая гладкая кривая в пространстве (x, x_1, x_2), определяемая уравнениями $x_k = x_k(x)$, $(k = 1, 2)$, то величина

$$I = \int\limits_{(l)} L(x, x_k(x), \dot{x}_k(x)) dx \tag{11.54}$$

называется квазидлиной кривой l, или ее I-длиной.

Рассмотрим центральное поле экстремалей из п. 11 с центром в точке $M_0 = (x^0, x_1^0, x_2^0)$. Вдоль каждой экстремали (11.45), выходящей из точки M_0 (по направлению, определяемому параметрами α_1 и α_2) и идущей к точке $M = (x, x_1, x_2)$, можно вычислить интеграл $I = I(M)$ из (11.54). Если точка M принадлежит области B, в которой экстремали образуют поле, то выражение $I(M)$ определит некоторую функцию $\Theta(x, x_1, x_2)$, называемую основной функцией центрального поля экстремалей. Поверхность же $\Theta(x, x_1, x_2) = \rho = \text{const}$ называется квазисферой, так как она получается как геометрическое место точек M, для которых I – расстояние от точки M_0 равно $\rho = \text{const}$.

При переходе от точки $M = (x, x_1, x_2)$ поля к близкой точке $M' = (x + \delta x, x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2)$ варьируется линия, вдоль которой вычисляется интеграл (11.54), который теперь естественнее записывать в виде

$$I \equiv \Theta(x, x_1, x_2) = \int\limits_{M_0}^{M} L[x, x_1(x, \alpha_1, \alpha_2), x_2(x, \alpha_1, \alpha_2)]dx. \qquad (11.55)$$

Поэтому вариацию интеграла I из (11.55) следует вычислять по формуле (11.16) (при $n = 2$) для полной вариации функционала вида (11.1). При этом интегральный член в правой части (11.16) нужно положить равным нулю, так как интегрирование по x в (11.55) совершается вдоль экстремали. Также нулю следует положить и внеинтегральный член правой части (11.16), отвечающий закрепленной точке M_0.

Таким образом, на основании (11.55) и первого члена из правой части (11.16) (переписанного в канонических переменных из п. 8) получается равенство

$$\delta\Theta = \frac{\partial\Theta}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial\Theta}{\partial x_1}\,\delta x_1 + \frac{\partial\Theta}{\partial x_2}\,\delta x_2 = -H\delta x + p_1\delta x_1 + p_2\delta x_2, \quad (11.56)$$

в котором $H = H(x, x_1, x_2, p_1, p_2)$ обозначает функцию Гамильтона из (11.29), а p_k – функции наклона поля экстремалей.

Если точка M находится на квазисфере $\Theta(x, x_1, x_2) = \mathrm{const}$, то $\delta\Theta = 0$ и, следовательно,

$$-H\delta x + p_1\delta x_1 + p_2\delta x_2 = 0. \qquad (11.57)$$

Это означает, что экстремали пересекаются с квазисферами поля трансверсально.

Если же точка M выбирается произвольно (т.е. δx, δx_1 и δx_2 в (11.56) произвольны), то из (11.56) следуют равенства

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x} = -H(x, x_k, p_k), \quad \frac{\partial\Theta}{\partial x_1} = p_1, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial x_2} = p_2, \qquad (11.58)$$

связывающие частные производные основной функции поля $\Theta(x, x_1, x_2)$ с функцией Гамильтона (11.29) и с функциями $p_k(x,x_1, x_2)$ наклона поля из (11.47).

Подстановка значений $p_k = \partial\Theta/\partial x_k$ из второго и третьего равенств (11.58) в первое равенство приводит для основной функции $\Theta(x, x_1, x_2)$ к уравнению в частных производных

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x} + H\left(x, x_1, x_2, \frac{\partial\Theta}{\partial x_1}, \frac{\partial\Theta}{\partial x_2}\right) = 0, \tag{11.59}$$

называемому уравнением Гамильтона–Якоби.

14. Итак, отправляясь от вариационных задач для функционала вида (11.1), мы пришли к понятию об его экстремалях как интегралах системы уравнений Эйлера (11.19). Эта система образована n обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка относительно n функций $x_k = x_k(x, \ldots)$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, определяющих экстремали.

Если определить величины p_k соотношениями (11.26) и рассматривать эти соотношения как уравнения для величин $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\ldots$, $\dot{x}_n$, то при выполнении условия (11.27) система уравнений Эйлера приводится к эквивалентной системе $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (11.35), называемой системой уравнений Гамильтона.

Далее мы обратились к рассмотрению элементов теории поля экстремалей в частном случае трехмерного пространства (с координатами $x = x$, $x_1 = y$, $x_2 = z$) и установили, что при достаточной гладкости правых частей уравнений (11.35) в случае $n = 2$ любому решению вида (11.43) системы (11.35), зависящему от двух параметров и образующему поле экстремалей (центральное или общее), отвечает основная функция $\Theta(x, x_1, x_2)$ поля, удовлетворяющая уравнению (11.59) в частных производных первого порядка, вид которого однозначно определяется видом функции Гамильтона из (11.29). И наоборот, любому достаточно гладкому решению $\Theta(x, x_1, x_2)$ уравнения (11.59) отвечает некоторое поле экстремалей, т.е. решение системы уравнений Гамильтона (11.35) при $n = 2$. Действительно, по функции $\Theta(x, x_1, x_2)$ определяются функции наклона поля $p_k = p_k(x, x_1, x_2) = \partial\Theta/\partial x_k$, удовлетворяющие уравнениям (11.48) (которые получаются непосредственно из (11.59) дифференцированием по x_1 и x_2). Отсюда же, как и в п. 11, легко доказывается высказанное утверждение.

В заключение остается лишь отметить, что переход от системы обыкновенных дифференциальных уравнений Гамильтона

(11.35) к уравнению Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} + H(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \tag{11.60}$$

где $p_k = \partial\Theta/\partial x_k$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ осуществим не только в случае $n = 2$, но и при любом значении целого числа $n \geqslant 1$ из (11.35). При этом между уравнениями (11.35) и (11.60) сохраняется эквивалентность такого же типа, как и в случае $n = 2$, рассмотренном в п. 11–13.

§12. Сведения из теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

Во многих приложениях встречаются задачи для уравнений в частных производных типа Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + H(x_k, p_k) = 0 \tag{12.1}$$

относительно функции $\theta = \theta(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от $(n+1)$-й переменной (где t обозначает обычно время, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координаты точки в пространстве, воспринимаемом наглядно при $n \leqslant 3$), в которых $p_k = \partial\theta/\partial x_k$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, а под $H(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) \equiv H(x_k, p_k)$ подразумевается достаточно гладкая функция от выписанных аргументов, не зависящая явным образом от θ. Как следует из п. 13 и 14 предыдущего параграфа (где вместо t применялось обозначение x, а функция Гамильтона H зависела явно не только от x_k и p_k, но и от x), к таким уравнениям приводятся задачи для полей экстремалей функционалов вида (11.1) в случае существования канонических переменных. К таким же уравнениям при значениях $n \leqslant 3$ сводятся и задачи на распространение волновых фронтов, рассматриваемых как поверхности слабых или сильных разрывов поля смещений $\vec{u}$, представляющие для нас основной интерес. При этом в последнем случае функции $H(x_k, p_k) \equiv H(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$ из (12.1) в рассматриваемых далее задачах всегда обладают еще важным дополнительным свойством, а именно: они оказываются положительно определенными однородными первой степени функциями от аргументов p_1, p_2, p_3. С фрагментами теории таких уравнений нам и предстоит сейчас познакомиться.

Как известно, теория уравнений в частных производных первого порядка органически связана с теорией систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для “характеристических полос” этого уравнения. Связь оказывается настолько глубокой, что можно говорить об эквивалентности основных задач, поставленных для уравнений вида (12.1) и упомянутых систем обыкновенных уравнений. Поэтому естественно прежде всего обсудить вопросы, касающиеся такой эквивалентности. При этом нам придется ограничиться изложением лишь схем рассуждений и не останавливаться на полных доказательствах высказываемых утверждений, равно как и на точной формулировке всех (необходимых) условий, касающихся гладкости функций, входящих в уравнения, при которых тот или иной формулируемый результат строго оправдан. При известном старании такие условия (в достаточной их форме) могли бы быть получены без особого труда. Однако их получение требовало бы места и отвлекло бы нас от понимания основных идей теории.

1. При обсуждении общих вопросов, связанных с системами дифференциальных уравнений для характеристических полос, отвечающих уравнению в частных производных первого порядка, целесообразно вместо (12.1) рассматривать уравнение более общего вида

$$\widetilde{H}(x_1, x_2, \dots, x_n, u, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \tag{12.2}$$

где $p_k = \partial u/\partial x_k$, $(k = 1, 2, \dots, n)$, а $n \geqslant 2$ – произвольное целое число. При этом в области изменения аргументов $(x_k, u, p_k) \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n, u, p_1, p_2, \dots, p_n)$, где реализуется искомое решение рассматриваемых далее задач, функцию $\widetilde{H}(x_k, u, p_k)$ из (12.2) мы будем считать непрерывной со всеми ее частными производными первого и второго порядка.

Не задерживаясь на выводе системы уравнений для характеристических полос уравнения (12.2), который производится обычно на уровне интуитивно очевидных соображений, мы выпишем эту систему, а затем обсудим существующие связи между нею и уравнением (12.2).

2. Характеристическая система уравнений, отвечающая дифференциальному уравнению (12.2), записывается следующим образом:

$$\frac{dx_k}{ds} = \widetilde{H}_{p_k} \equiv \widetilde{H}_{p_k}(x_r, u, p_r), \quad (k = 1, 2, \dots, n), \tag{12.3}$$

$$\frac{dp_k}{ds} = -(\widetilde{H}_{x_k} + \widetilde{H}_u p_k), \quad \frac{du}{ds} = \sum_{r=1}^{n} \widetilde{H}_{p_r} p_r. \tag{12.4}$$

Здесь применены обычные обозначения

$$\widetilde{H}_{p_k} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p_k}, \quad \widetilde{H}_{x_k} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x_k}, \quad \widetilde{H}_u = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial u}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

для частных производных функции $\widetilde{H}(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ по соответствующим ее аргументам, а под s подразумевается некоторых параметр, (физический) смысл которого заранее не фиксируется. Соотношения (12.3), (12.4) представляют собой систему $2n+1$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно такого же числа искомых функций от s. При этом в соответствии с предположенной гладкостью функции $\widetilde{H}$ из (12.2) правые части системы (12.3), (12.4) непрерывны и имеют непрерывные первые частные производные по всем переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n, u, p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Что же касается взаимоотношения системы (12.3), (12.4) с уравнением (12.2), то оно фактически вытекает из формулируемых ниже трех утверждений.

Утверждение 1. *Система уравнений* (12.3), (12.4) *имеет решение*

$$x_k = x_k(s, x_r^0, u^0, p_r^0), \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{12.5}$$

$$p_k = p_k(s, x_r^0, u^0, p_r^0), \quad u = u(s, x_r^0, u^0, p_r^0), \tag{12.6}$$

удовлетворяющее начальным данным Коши

$$x_k\big|_{s=0} = x_k^0, \quad p_k\big|_{s=0} = p_k^0, \quad u\big|_{s=0} = u^0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{12.7}$$

при произвольных значениях параметров x_k^0, u^0 и p_k^0. Такое решение единственно и оно имеет непрерывные производные по всем параметрам из правых частей (12.7).

Утверждение 2. *Система уравнений* (12.3), (12.4)*имеет первый интеграл $\widetilde{H}(x_k, u, p_k) = \mathrm{const}$. (Это означает, что при подстановке в выражение $\widetilde{H}(x_k, u, p_k) \equiv \widetilde{H}(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n)$ вместо аргументов x_k, u, p_k функций $x_k(s)$, $u(s)$, $p_k(s)$, отвечающих произвольному решению системы* (12.3), (12.4)*, получается функция от s, для которой $d/ds\ \widetilde{H}[x_k(s), u(s), p_k(s)] \equiv 0$). Поэтому если начальные данные* (12.7) *удовлетворяют условию*

$$\widetilde{H}(x_k^0, u^0, p_k^0) = 0, \tag{12.8}$$

то при любом значении $s > 0$ решение (12.5), (12.6) *характеристической системы уравнений* (12.3), (12.4), *подчиненное начальным данным* (12.7), *удовлетворяет соотношению*

$$\widetilde{H}[x_k(s,\dots), u(s,\dots), p_k(s,\dots)] = 0. \qquad (12.9)$$

Решение (12.5), (12.6) системы дифференциальных уравнений (12.3), (12.4), удовлетворяющее условию (12.9), называется характеристической полосой, отвечающей уравнению (12.2). Из утверждения 2 следует, что для того, чтобы решение (12.5), (12.6) оказалось характеристической полосой, достаточно лишь подчинить условию (12.8) значения из правых частей начальных данных (12.7).

Пусть $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv u(x_k)$ – произвольное решение (интеграл) уравнения (12.2), непрерывное вместе с первыми и вторыми частными производными по всем x_k, и пусть

$$u^0 = u(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0), \quad p_k^0 = p_k^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0), \quad (k = 1, 2, \dots, n) \qquad (12.10)$$

– соответственно значения функции $u = u(x_k)$ и ее частных производных $p_k = \partial u / \partial x_k$ в точке $(x_k^0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Так как, по условию, функция $u = u(x_k)$ удовлетворяет уравнению (12.2), то ясно, что величины u^0 и p_k^0 из (12.10) совместно со значениями координат x_k^0 рассматриваемой точки удовлетворяют условию (12.8).

Если подставить значение функции $u = u(x_k)$ и значения ее частных производных $p_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}$ в правые части $\widetilde{H}_{p_k}(x_k, u, p_r)$ уравнений (12.3), то получится система n (обыкновенных) уравнений вида

$$\frac{dx_k}{ds} = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (k = 1, 2, \dots, n) \qquad (12.11)$$

правые части

$$f_k(x_1, \dots) \equiv \widetilde{H}_{p_k}[x_r, u(x_r), p_r(x_r)]$$

которой зависят только от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Такая система, очевидно, может рассматриваться независимо от уравнений из (12.4). И вот оказывается справедливым следующее утверждение.

Утверждение 3. *Пусть*

$$x_k = x_k(s, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \equiv x_k(s, x_r^0), \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{12.12}$$

– решение системы дифференциальных уравнений (12.11), *удовлетворяющее начальным данным*

$$x_k\Big|_{s=0} = x_k^0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{12.13}$$

где x_k^0 *– координаты точки, в которой определялись (по интегралу* $u = u(x_k) \equiv u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *уравнения* (12.2)*) числа из* (12.10), *и пусть по решениям* (12.12), *а также по указанной функции* $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *определены функции от* s

$$u = u[x_1(s, x_1^0, \ldots), x_2(s, x_1^0, \ldots), \ldots] = u(s, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0), \tag{12.14}$$

$$p_k = \frac{\partial u[x_1, x_2, \ldots, x_n]}{\partial x_k}\Bigg|_{x_r = x_r(s, x_r^0)} = p_k(s, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0), \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{12.15}$$

удовлетворяющие, очевидно, условию (12.9)*. Тогда, путем вычисления производных от функций* (12.15), *например*

$$\frac{dp_k}{ds} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial p_k}{\partial x_r} \frac{dx_r}{ds} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_k} \widetilde{H}_{p_r},$$

с учетом выражений

$$\widetilde{H}_{x_k} + \widetilde{H}_u p_k + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p_r} \frac{\partial p_r}{\partial x_k} = \widetilde{H}_{x_k} + \widetilde{H}_u p_k + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_k} \widetilde{H}_{p_r} = 0$$

для производных по x_k *от уравнения* (12.2), *легко доказывается, что функции из* (12.12) *и* (12.15) *удовлетворяют системе уравнений* (12.3), (12.4)*. А так как они удовлетворяют, кроме того, и условию* (12.9), *то, следовательно, они определяют характеристическую полосу уравнения* (12.2)*.*

Заметим, что функции $x_k = x_k(s, x_r^0)$ из (12.12) и функция $u = u(s, x_r^0)$ из (12.14) определяют в пространстве $(n+1)$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$ линию (как говорят, характеристическую кривую) на интегральной поверхности $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ уравнения (12.2). Остальные же функции $p_k = p_k(s, x_r^0)$ из (12.15) определяют вдоль этой линии направление нормали к упомянутой интегральной поверхности.

3. Следует подчеркнуть, что характеристическую полосу (12.12), (12.14), (12.15) мы получили при помощи построения, основанного на использовании интегральной поверхности $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ уравнения (12.2). При этом естественно оказывается, что функции $x_k = x_k(s, x_r^0)$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и $u = u(s, x_r^0)$, $p_k = p_k(s, x_r^0)$ из (12.12) и (12.14), отвечающие такой полосе, удовлетворяют начальным данным (12.7), в правые части которых входят числа u^0 и p_k^0 из (12.10).

Но решение системы дифференциальных уравнений (12.3), (12.4) однозначно определяется по начальным данным (12.7). Поэтому в точности такую же характеристическую полосу (12.12), (12.14), (12.15) мы получили бы и без использования интеграла $u = u(x_k)$ уравнения (12.2), а лишь на основе построения решения системы уравнений (12.3), (12.4), подчиненного начальным данным (12.7), (12.10). Заметим, что такие данные определяют точку $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, u^0)$ на интегральной поверхности, а также значения величин p_k^0, пропорциональных направляющим косинусам нормали к поверхности $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в этой точке. Поэтому можно считать, что начальные данные (12.7), (12.10) определяют элемент интегральной поверхности уравнения (12.2) или же элемент его характеристической полосы.

Итак, мы видим, что: 1) если характеристическая полоса уравнения (12.2) имеет некоторый элемент, общий с интегральной поверхностью уравнения (12.2), то она целиком лежит на этой (интегральной) поверхности и 2) если две интегральные поверхности уравнения (12.2) касаются друг друга в некоторой точке $M_0 \equiv (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ (т.е. имеют в точке M_0 общие значения величин из (12.10)), то они касаются друг друга вдоль всей характеристической полосы, имеющей начальный элемент (12.7), (12.10) в точке M_0 касания упомянутых поверхностей. Из приведенных соображений вытекает, что любое решение уравнения (12.2), толкуемое (для образности) как поверхность $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в пространстве $n+1$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$ может быть покрыто характеристическими полосами. Поэтому характеристические полосы естественно рассматривать как основные блоки, из которых строятся любые решения уравнения (12.2). При этом теория уравнения (12.2) в частных производных сводится к теории системы обыкновенных дифференциальных уравнений из (12.3), (12.4).

4. Основной корректно поставленной задачей для системы уравнений (12.3), (12.4) является задача Коши, в которой решение системы (12.3), (12.4) определяется по начальным данным. По-видимому, только такую задачу и можно рассчитывать с успехом положить в основу теории уравнений вида (12.2).

Если начальные данные задаются формулами (12.7) (с произвольными значениями x_k^0 и p_k^0 из правых частей), то решение системы (12.3), (12.4) (правые части которой обладают гладкостью, указанной в начале п. 2) представляется функциями вида (12.5), (12.6), непрерывными и имеющими частные производные не только по s, но и по всем параметрам x_k^0 и p_k^0 из (12.7). При этом упомянутые решения системы (12.3), (12.4) мы определяли до сих пор по начальным данным, относящимся лишь к некоторой фиксированной точке (x_k^0) пространства n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Предположим теперь, что начальные условия (12.7) задаются не в одной лишь точке (x_k^0), а во всех точках некоторой поверхности $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ (в упомянутом пространстве n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$), задаваемых, например, в виде n функций

$$x_k^0 = x_k^0(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{12.16}$$

от $n-1$ независимых параметров $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, изменяющихся в некоторой области B_{n-1}. При этом недостающие значения u^0 и p_k^0 из (12.7) в точках (12.16) упоминавшейся поверхности также должны задаваться некоторыми функциями

$$\begin{gathered} u^0 = u^0(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), \\ p_k^0 = p_k^0(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \end{gathered} \tag{12.17}$$

от тех же параметров t_r.

В результате решения системы уравнений (12.3), (12.4) при начальных данных (12.7), (12.16), (12.17) получается система функций

$$\begin{gathered} x_k = x_k(s, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), \quad p_k = p_k(s, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), \\ u = u(s, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \end{gathered} \tag{12.18}$$

от переменной s и $n-1$ параметров t_r.

Если бы из соотношений

$$x_k = x_k(s, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{12.19}$$

рассматриваемых как n уравнений относительно n параметров $s, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, можно было (одно-однозначно) выразить эти параметры в виде достаточно гладких функций

$$s = s(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad t_r = t_r(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad (r = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{12.20}$$

то подстановка значений s и t_r из (12.20) в выражение $u = u(s, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$ из (12.18) привела бы к функции

$$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{12.21}$$

причем имелись бы основания ожидать, что эта функция удовлетворяет уравнению (12.2).

Однако в соответствии с результатами п. 2 ясно, что такое ожидание может оказаться оправданным только в случае, если функции из (12.16) и (12.17) (подставляемые в правые части начальных данных (12.7)) удовлетворяют некоторым необходимым (и, как оказывается, достаточным) условиям согласованности. Такие условия, очевидно, сводятся прежде всего к требованию, чтобы значения x_k^0, u^0, p_k^0 из (12.16) и (12.17) удовлетворяли соотношению (12.8), т.е. чтобы в результате подстановки в (12.8) вместо x_k^0, u^0, p_k^0 функций из (12.16) и (12.17) получалось тождество

$$\widetilde{H}[x_k^0(t_1, \ldots, t_{n-1}), \quad u^0(t_1, \ldots, t_{n-1}), \quad p_k^0(t_1, \ldots, t_{n-1})] \equiv 0$$

относительно всех параметров t_r. Ведь только такое соотношение позволяет считать значения x_k^0, u^0, p_k^0 из (12.16) и (12.17) элементами интегральной поверхности (12.21) уравнения (12.2), равно как и элементами характеристических полос (12.18). Но кроме указанного функции из (12.16) и (12.17) должны согласовываться друг с другом в отношении дифференцирования вдоль касательных направлений в поверхности $\psi = 0$, или, что то же, в отношении дифференцирования по параметрам t_r, $(r = 1, 2, \ldots, n-1)$. Действительно, если интегральная поверхность (12.21) уравнения (12.2) существует, то наряду с (12.18) и (12.21) должны иметь место равенства

$$\begin{aligned} u(s, t_1, \ldots, t_{n-1}) &= \\ &= u[x_1(s, t_1, \ldots, t_{n-1}), \ldots, x_n(s, t_1, \ldots, t_{n-1})], \end{aligned} \tag{12.22}$$

$$p_k(s, t_1, \dots, t_{n-1}) = \frac{\partial u[x_1, \dots, x_n]}{\partial x_k}\bigg|_{x_r = x_r(s, t_1, \dots, t_{n-1})}, \qquad (12.23)$$
$$(k = 1, 2, \dots, n).$$

Вследствие этого дифференцирование по t_r первого равенства должно приводить к соотношениям

$$\frac{\partial u}{\partial t_r} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial t_r} \equiv \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial x_k}{\partial t_r}, \quad (r = 1, 2, \dots, n-1), \qquad (12.24)$$

в которых под x_k, u, p_k подразумеваются соответствующие функции из (12.18). Но, как уже упоминалось, функции (12.18), равно как и все их частные производные первого порядка, непрерывны, в частности по s. Поэтому при $s \to 0$ из соотношений (12.24) получаются равенства

$$\frac{\partial u^0}{\partial t_r} = \sum_{k=1}^{n} p_k^0 \frac{\partial x_k^0}{\partial t_r}, \quad (r = 1, 2, \dots, n-1), \qquad (12.25)$$

которые как раз и следует рассматривать как необходимые условия внутренней согласованности функций из (12.16) и (12.17), задаваемых в точках поверхности $\psi = 0$.

И вот оказывается, что перечисленные условия согласованности не только необходимы, но и достаточны для существования интеграла (12.21) уравнения (12.2), так как справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. *Если при выбранных функциях из* (12.16) *и* (12.17), *используемых в качестве правых частей в начальных данных* (12.7), *соотношения* (12.8) *и* (12.24) *выполняются тождественно относительно всех параметров* $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$, *если функции из* (12.16) *и* (12.17) *достаточно гладкие (например, непрерывны со всеми частными производными первого и второго порядка) и, наконец, если система равенств* (12.19), *рассматриваемая как система функциональных уравнений относительно параметров* $s, t_1, \dots, t_{n-1}$, *однозначно разрешима и приводит для* s *и* t_r *к выражениям вида* (12.20), *то подстановка значений* (12.20) *в выражение* $u = u(s, t_1, \dots, t_{n-1})$ *из* (12.18) *определяет функцию* $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *из* (12.21), *удовлетворяющую как уравнению* (12.2), *так и дополнительным условиям*

$$u\big|_{x_k = x_k^0(t_1, \dots, t_{n-1})} = u^0(t_1, \dots, t_{n-1}), \qquad (12.26)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \equiv p_k\right)\Bigg|_{x_k = x_k(t_1,\dots,t_{n-1})} = p_k^0(t_1,\dots,t_{n-1}), \quad (k = 1,2,\dots,n), \tag{12.27}$$

заданным в точках (12.16) *поверхности* $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, *определенной в пространстве* n *переменных* $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Следует отметить, что в указанном пространстве дополнительные условия (12.26), (12.27) фактически сводятся к заданию в точках поверхности $\psi = 0$ значений только одной искомой функции $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Действительно, подобное задание у нас осуществлялось в параметрической форме (12.26), (12.27), где значение функции $u^0(t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$ можно было выбирать практически по произволу. Что же касается функций $p_k^0(t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$ из (12.27), то после выбора значений $u^0(t_1, \dots, t_{n-1})$ из (12.26) их нет нужды (да и нельзя) как-то задавать, так как они определяются и, вообще говоря, однозначно из системы функциональных уравнений

$$\widetilde{H}(x_1^0, \dots, x_n^0, u^0, p_1^0, \dots, p_n^0) = 0, \tag{12.28}$$

$$\frac{\partial u^0}{\partial t_r} = \sum_{k=1}^{n} p_k^0 \frac{\partial x_k^0}{\partial t_r}, \quad (r = 1, 2, \dots, n-1), \tag{12.29}$$

вытекающей из (12.8) и (12.25), при помощи которых производилось согласование функций из (12.16) и (12.17).

Таким образом, в обсуждаемой постановке задача для уравнения (12.2) может быть сформулирована следующим образом. В пространстве переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ задана достаточно гладкая поверхность $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, расположенная в некоторой области B. Требуется построить в этой области решение $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ уравнения (12.2) при дополнительном условии, что в точках поверхности $\psi = 0$ это решение совпадает с заданной достаточно гладкой функцией $\widetilde{u}^0(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Если поверхность $\psi = 0$ задавать в виде (12.16), а значение искомой функции в ее точках задавать (первым) равенством $u^0 = u^0(t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$ из (12.17), причем функции $x_k^0(t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$ и $u^0(t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$ выбирать непрерывными со всеми их первыми и вторыми частными производными, то при указанной в п. 1 гладкости функции $\widetilde{H}$ из (12.2) сформулированная задача имеет, вообще говоря, решение и притом единственное. Заметим, что для справедливости такого утверждения можно заметно ослабить предположения о свойствах гладкости функций x_k^0, u^0 и $\widetilde{H}$.

Однако, на этом нет необходимости здесь задерживаться. Единственность решения вытекает из единственности решения задачи Коши для системы уравнений (12.3), (12.4) при учете результатов п. 2, устанавливающих взаимоотношение между системой (12.3), (12.4) и уравнением (12.2).

5. В изложенном процессе построения решения (12.21) уравнения (12.2) на основе решения (12.18) задачи Коши для системы (12.3), (12.4) в случае согласованных надлежащим образом начальных данных (12.7), (12.16) и (12.17) весьма важную роль играло допущение, что система функциональных уравнений (12.19) может быть однозначно разрешена относительно параметров $s, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$. Последнее же, как известно, имеет место, если отличен от нуля функциональный определитель

$$\Delta = \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(s, t_1, \ldots, t_{n-1})} \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{dx_1}{ds}, & \dfrac{dx_2}{ds}, & \ldots, & \dfrac{dx_n}{ds} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial t_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial t_{n-1}}, & \ldots, & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \widetilde{H}_{p_1}, & \widetilde{H}_{p_2}, & \ldots, & \widetilde{H}_{p_n} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial t_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial t_{n-1}}, & \ldots, & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (12.30)$$

при получении выражения из правой части (12.30) которого мы воспользовались уравнениями (12.3).

В рамках предположений о свойствах гладкости функций $x_k^0(t_1, \ldots, t_{n-1})$ и $u^0(t_1, \ldots, t_{n-1})$ из (12.16) и (12.17), сформулированных в самом конце п. 4, ясно, что при подстановке в выражение Δ из (12.30) значений функций x_k, u, p_k из (12.18) получается функция $\Delta(s, t_1, \ldots, t_{n-1})$ непрерывная по всем параметрам $s, t_1, \ldots, t_{n-1}$. Поэтому неравенство (12.30) выполняется в некотором промежутке $0 < s < s_0$, если оказывается $\Delta \equiv \Delta\big|_{s=0} \neq 0$. Таким образом, вопрос о разрешимости системы уравнений (12.19) относительно s и t_r сводится к нахождению величины Δ_0 определителя из (12.30) при подстановке в его выражение вместо x_k,

u и p_k "начальных" функций (12.16) и (12.17). Если эти функции таковы, что $\Delta_0 \neq 0$, то решение задачи из конца п. 4 существует и единственно. Если же оказывается $\Delta = 0$, то решение задачи или не существует, или же не обладает единственностью. Такой случай задания функций (12.16) и (12.17), называемый особым, мы не будем здесь обсуждать.

6. В п. 3 мы использовали систему обыкновенных дифференциальных уравнений (12.3), (12.4) с целью построения решений уравнения (12.2) в частных производных. Но, как оказывается, родство между уравнениями (12.2) и (12.3), (12.4) настолько глубоко, что во многих случаях оно позволяет также строить решения системы уравнений (12.3), (12.4), если известен некоторый класс решений уравнения (12.2) в частных производных. При этом, правда, необходимо, чтобы искомая функция u не входила в левую часть равенства (12.2).

Что же касается упомянутого класса решений, то под ним подразумевается так называемый полный интеграл уравнения (12.2), определяемый следующим образом. Полным интегралом уравнения в частных производных первого порядка вида (12.2) называется такое решение

$$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n), \tag{12.31}$$

содержащее n независимых произвольных постоянных a_k, что исключение постоянных a_k из (12.31), а также из n уравнений

$$p_k \equiv \frac{\partial u}{\partial x_k} \equiv u_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

приводит к связи между x_k и p_k, в точности совпадающей с уравнением (12.2).

И вот оказывается, что знание полного интеграла (12.31) уравнения (12.2) (не содержащего функции u явно) позволяет легко строить решение задачи Коши для системы уравнений (12.3), (12.4) при произвольных правых частях в начальных данных (12.7). Этот результат, составляющий содержание метода Якоби, здесь нам не понадобится.

7. В задачах на распространение волновых фронтов основной интерес представляют уравнения в частных производных первого порядка вида (12.1), т.е.

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} + H(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0,$$

где $p_k = \partial\Theta/\partial x_k$, $(k = 1, 2, \dots, n)$, не содержащее явно искомой функции Θ и такие, что $H(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) \equiv H(x_k, p_k)$ оказываются положительно определенными однородными первой степени функциями от переменных $p_1, p_2, \dots, p_n$ и, следовательно, удовлетворяющими соотношениям

$$H(x_1, \dots, x_n, \lambda p_1, \lambda p_2, \dots, \lambda p_n) = \lambda H(x_1, \dots, p_1, p_2, \dots, p_n),$$

$$H(x_k, p_k) = \sum_{r=1}^{n} p_r H_{p_r}(x_k, p_k), \tag{12.32}$$

$$H(x_1, \dots, x_n, \widetilde{p}_1, \dots, \widetilde{p}_n) > 0,$$

где λ – произвольный параметр, а $\widetilde{p}_k$ – любые вещественные числа. При этом распространение волновых фронтов в обсуждаемых задачах всегда определяется соотношениями вида

$$\Theta(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathrm{const}, \tag{12.33}$$

соответствующими движению во времини t поверхности, рассматриваемой в пространстве переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Таким образом, нам необходимо обсудить вопрос о построении решений уравнений вида (12.1), подчиненных соотношению (12.33), а также некоторым дополнительным условиям, вытекающим из физической сущности интересующих нас задач. При этом под параметром t мы везде далее будем подразумевать время.

Прежде чем сформулировать соответствующие задачи, заметим, что из уравнения (12.1) и условия $H(x_k, p_k) > 0$ следует неравенство $\partial\Theta/\partial t \neq 0$, показывающее, что соотношение (12.33) всегда может быть разрешено относительно t и переписано, например, в виде

$$\Theta \equiv \tau(x_1, x_2, \dots, x_n) - t = 0. \tag{12.34}$$

Это обстоятельство сводит проблему к отысканию функции $\tau(x_1, x_2, \dots, x_n)$, для которой из (12.1) получается уравнение

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 1, \tag{12.35}$$

где обозначено

$$p_k = \frac{\partial \tau}{\partial x_k}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{12.36}$$

Полагая в (12.34) $t = 0$, получаем

$$\tau(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \tag{12.37}$$

что определяет в пространстве переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ некоторую поверхность, отвечающую положению волнового фронта в начальный момент времени.

Итак, одной из основных задач на распространение волновых фронтов (12.34) является отыскание решения $\tau(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ уравнения (12.35) при условии, что уравнение (12.37) определяет заданную поверхность.

8. Предполагая, что задание исходного положения поверхности волнового фронта производится в параметрической форме (12.16), рассмотрим решение поставленной задачи методом характеристик из п. 4.

Характеристическая система (12.3), (12.4) обыкновенных дифференциальных уравнений, отвечающих уравнению (12.35), имеет вид

$$\frac{dx_k}{ds} = H_{p_k}(x_r, p_r), \quad \frac{dp_k}{ds} = -H_{x_k}(x_r, p_r), \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{12.38}$$

$$\frac{d\tau}{ds} = \sum_{k=1}^{n} p_k H_{p_k}(x_r, p_r). \tag{12.39}$$

Начальные данные для решения такой системы с целью нахождения характеристических полос уравнения (12.35) сводятся теперь прежде всего к соотношениям (12.16), т.е. к функциональным зависимостям от независимых параметров t_r всех координат

$$x_k^0 = x_k^0(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{12.40}$$

точек поверхности, на которой в соответствии с (12.37) задается значение $\tau = \tau^0 = 0$ искомой функции. При этом указанную поверхность следует считать достаточно гладкой и “невырожденной”, т.е. являющейся многообразием $n - 1$ измерения в пространстве n измерений.

Заметим, что последнее условие равносильно требованию линейной независимости всех $n-1$ координатных векторов

$$\vec{\rho}_r = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k^0}{\partial t_r}\, \vec{i}_k, \quad (r = 1, 2, \ldots, n-1),$$

отвечающих элементам поверхности, т.е. требованию, чтобы векторное уравнение $\sum_{r=1}^{n-1} c_r \vec{\rho}_r = 0$, или эквивалентная ему система скалярных уравнений

$$\sum_{r=1}^{n-1} c_r \frac{\partial x_k^0}{\partial t_r} = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

имели лишь тривиальное решение $c_r = 0$. Последнее же реализуется тогда и только тогда, когда отличен от нуля по крайней мере один из главных миноров (порядка $n-1$) прямоугольной матрицы $\|\partial x_k^0/\partial t_r\|$, имеющей n столбцов $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и $n-1$ строку $(r = 1, 2, \ldots, n-1)$. Без ограничения общности можно считать, что таким отличным от нуля оказывается минор

$$\left| \frac{\partial x_k^0}{\partial t_r} \right| \neq 0, \quad (k, r = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{12.41}$$

равный определителю квадратной матрицы $\|\partial x_k^0/\partial t_r\|$, $(k, r = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Что же касается второй группы начальных данных для системы уравнений (12.38), то она сводится к условиям согласования

$$H(x_1^0, \ldots, x_n^0, p_1^0, p_2^0, \ldots, p_n^0) = 1, \tag{12.42}$$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k^0 \frac{\partial x_k^0}{\partial t_r} = 0, \quad (r = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{12.43}$$

вытекающим из (12.28), (12.29) в соответствии с предположением, что $\tau^0 = 0$ в точках (12.40) указанной поверхности.

И вот весьма существенным для всего последующего оказывается то обстоятельство, что такие условия всегда однозначно разрешимы относительно величин p_k^0 и определяют функции

$$\tau^0 = 0, \quad p_k^0 = p_k^0(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{12.44}$$

вида (12.17), подстановка которых (совместно с функциями из (12.40)) вместо аргументов p_k и x_k в выражения $H_{p_r}(x_k, p_k)$ приводит к отличному от нуля определителю

$$\Delta_0 \equiv \begin{vmatrix} H_{p_1}, & H_{p_2}, & \dots, & H_{p_n} \\ \dfrac{\partial x_1^0}{\partial t_1}, & \dfrac{\partial x_2^0}{\partial t_1}, & \dots, & \dfrac{\partial x_n^0}{\partial t_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_1^0}{\partial t_{n-1}}, & \dfrac{\partial x_2^0}{\partial t_{n-1}}, & \dots, & \dfrac{\partial x_n^0}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (12.45)$$

типа определителя из (12.30).

Действительно, вследствие (12.41) из системы линейных алгебраических уравнений (12.43), т.е. из системы

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial x_k^0}{\partial t_r}\, p_k^0 = -p_n^0\, \frac{\partial x_n^0}{\partial t_r}, \quad (r = 1, 2, \dots, n-1),$$

однозначно получаются выражения

$$p_k^0 = \pi_k(t_1, \dots, t_{n-1}) p_n^0, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

содержащие лишь неизвестный множитель p_n^0. Подстановка же таких выражений в уравнение (12.42) при учете первого из соотношений (12.32) дает равенство

$$p_n^0 \cdot H(x_1^0, \dots, x_n^0, \pi_1^0, \pi_2^0, \dots, \pi_{n-1}^0, 1) = 1,$$

в котором $H(x_1^0, \dots, x_n^0, \pi_1^0, \dots, \pi_{n-1}^0, 1) > 0$ в силу третьего соотношения из (12.32). Из такого равенства величина $p_n^0 = p_n^0(t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$ определяется однозначно, что и доказывает первую часть высказанного утверждения. Для доказательства же второй части утверждения следует воспользоваться вторым соотношением из (12.32) и переписать уравнения (12.42), (12.43) в виде

$$\sum_{k=1}^{n} H_{p_k} p_k^0 = 1, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k^0}{\partial t_r}\, p_k^0 = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, n-1). \qquad (12.46)$$

Определитель такой алгебраической системы совпадает с выражением Δ_0 из (12.45), причем эта система неоднородна и, по доказанному выше, имеет однозначное решение (12.44). Но это возможно только в том случае, когда $\Delta_0 \neq 0$.

9. Присоединяя к системе дифференциальных уравнений (12.38), (12.39) начальные данные вида (12.7), т.е.

$$x_k\big|_{s=0} = x_k^0, \quad p_k\big|_{s=0} = p_k^0, \quad \tau\big|_{s=0} = \tau^0 \equiv 0, \tag{12.47}$$

под правыми частями которых подразумеваются функции из (12.40) и (12.44), мы получаем возможность построения однозначного решения упомянутой системы. При этом вследствие того обстоятельства, что правые части уравнений (12.38), (12.39) не содержат τ, уравнения (12.38), т.е. уравнения для x_k и p_k, следует рассматривать независимо от уравнения (12.39) для функции τ.

В результате решения уравнений (12.38) при начальных данных для x_k и p_k из (12.47), (12.40) и (12.44) однозначно определяются функции

$$x_k = x_k(s, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{12.48}$$

$$p_k = p_k(s, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}). \tag{12.49}$$

При этом вследствие неравенства (12.45) и соображений, изложенных в п. 5, можно утверждать, что n функциональных соотношений (12.48) (рассматриваемых как уравнения относительно параметров $(s, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$) однозначно разрешимы и приводят к выражениям параметров $s, t_1, \ldots, t_{n-1}$ в виде функций

$$s = s(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad t_r = t_r(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad (r = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{12.50}$$

от координат x_k. При этом отображение точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightarrows (s, t_1, \ldots, t_{n-1})$, осуществляемое функциями (12.48) и (12.50), оказывается одно-однозначным и таким, что произвольно выбираемым точкам $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ окрестности поверхности (12.40), расположенным вне этой поверхности, соответствуют значения $s > 0$.

Что касается уравнения (12.39), правая часть которого всегда положительна вследствие второго и третьего соотношений из (12.32), то после подстановки значений функций x_k и p_k из (12.48) и (12.49) оно становится обыкновенным дифференциальным уравнением для функции $\tau(s)$, содержащим параметры $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$. Интегрирование такого уравнения при начальном условии для τ из (12.47) приводит к функции

$$\tau = \widetilde{\tau}(s, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), \tag{12.51}$$

удовлетворяющей при $s > 0$ неравенству

$$\widetilde{\tau}(s, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) > 0. \tag{12.52}$$

Подстановка же в правую часть выражения (12.51) значений s и t_r из (12.50) как раз и дает (как это утверждалось в п. 4) решение

$$\tau = \widetilde{\tau}[s(x_1, \ldots, x_n), t_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots] = \tau(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{12.53}$$

задачи для уравнения (12.35), поставленной в конце п. 7. Не задерживаясь на доказательстве факта удовлетворения функцией $\tau(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из (12.53) уравнению (12.35), мы лишь докажем, что эта функция действительно удовлетворяет дополнительному условию задачи из п. 7.

В соответствии с концом п. 7, а также с соотношениями (12.40) нам надлежит показать, что уравнение

$$\tau(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \tag{12.54}$$

с функцией τ из (12.53) определяет именно ту поверхность, точки которой задавались в параметрической форме (12.40).

Из построения (12.51), (12.53) функции τ следует, что уравнение (12.54) имеет смысл при любых значениях точек (x_k), расположенных как на поверхности (12.40), так и в такой ее окрестности, где еще сохраняется однозначность отображения (12.48), (12.50). Но в указанной области значений (x_k) точкам, не расположенным на поверхности (12.40), соответствуют значения $s > 0$, при которых справедливо (12.52) и, следовательно, $\tau(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$. Таким образом, уравнение (12.54) может определять лишь точки поверхности (12.40). Тот же факт, что в любой точке из (12.40) уравнение (12.54) действительно удовлетворяется, вытекает из (12.53) (где $s(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ при $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (12.40)$), а также из начального условия $\tau = 0$ при $s = 0$ из (12.47) для функции τ из (12.52).

10. Обсудим теперь случай “точечного источника”, в котором решение уравнения (12.35) ищется при том дополнительном условии, что уравнение (12.37) определяет лишь одну фиксированную точку $(\widetilde{x}_k)$. Такой случай естественно рассматривать как предельный при $\varepsilon \to 0$ при дополнительном предположении, что значение $\tau = \tau^0 = 0$ задается на гиперсфере радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке $(\widetilde{x}_k)$. В соответствие с этим вместо (12.40) теперь нужно взять выражения

$$x_k^0 = \widetilde{x}_k + \varepsilon t_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{12.55}$$

$$x_n^0 = \widetilde{x}_n + \varepsilon \left[1 - \sum_{k=1}^{n-1} t_k^2\right]^{1/2}, \tag{12.56}$$

где t_k – произвольные не зависимые друг от друга числа, удовлетворяющие неравенству

$$\sum_{k=1}^{n-1} t_k^2 \leqslant 1. \tag{12.57}$$

Учет условий согласования (12.42), (12.43) приводит, как нетрудно убедиться, например, к соотношениям

$$p_k^0 = h\alpha_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{12.58}$$

в которых предполагается, что

$$\alpha_k = t_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1); \quad \alpha_n = \left[1 - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k^2\right]^{1/2}, \tag{12.59}$$

$$hH(x_1^0, \ldots, x_n^0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1, \tag{12.60}$$

сохраняющим смысл и при $\varepsilon = 0$. (При $\varepsilon = 0$ лишь необходимо в формуле (12.60) заменить x_k^0 на $\widetilde{x}_k$ из (12.55)). Таким образом, условия согласования (12.42), (12.43), допускающие перезапись в форме (12.46), однозначно приводят к определенным значениям (12.58), (12.59), (12.60) для p_k^0, справедливым при любых значениях $\varepsilon \geqslant 0$. Вследствие этого можно утверждать, что определитель (12.45) отличен от нуля при $\varepsilon \geqslant 0$ и, следовательно, все построения из п. 9 буквально реализуются и в обсуждаемом случае. При этом вследствие непрерывной зависимости решений задачи Коши для системы уравнений (12.38) от параметров, непрерывно входящих в начальные данные (12.47), (12.55), (12.58), нет необходимости строить решение системы (12.38) при указанных начальных условиях, отвечающих случаю $\varepsilon > 0$, с тем, чтобы потом переходить к пределу $\varepsilon \to 0$. Достаточно сразу же положить $\varepsilon = 0$ и решать систему (12.38) при начальных условиях

$$x_k\big|_{s=0} = \widetilde{x}_k = \mathrm{const}, \quad p_k\big|_{s=0} = h\alpha_k, \quad \tau\big|_{s=0} = \tau^0 = 0, \tag{12.61}$$

в которых α_k и h имеют значения из (12.59), (12.60) при условии, что координаты x_k^0 заменены там на координаты $\widetilde{x}_k$ из (12.61).

11. В заключение полезно сделать небольшое замечание по поводу уравнения вида (12.2)

$$\widetilde{H}(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0, \tag{12.62}$$

где $p_k = \partial u/\partial x_k$, $(k = 1, 2, \dots, n)$, не содержащего явно искомой функции u.

Правые части характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений (12.3), (12.4) не содержат в этом случае переменной u, что позволяет основную группу $2n$ уравнений

$$\frac{dx_k}{ds} = \widetilde{H}_{p_k}(x_r, p_r), \quad \frac{dp_k}{ds} = -\widetilde{H}_{x_k}(x_r, p_r), \quad (k = 1, 2, \dots, n) \tag{12.63}$$

рассматривать независимо от последнего уравнения из (12.4).

По внешнему виду уравнения (12.63) в точности совпадают с упавнениями Гамильтона (11.35), если только отождествить наш теперешний параметр s с переменной x из (11.35). Поэтому возникает естественная мысль о возможности перехода от уравнений (12.63) к соответствующим уравнениям Эйлера, отвечающим вариационной задаче для функционала вида (11.1).

Обращая ход рассуждений из п. 8 §11, используем первые n уравнений

$$\frac{dx_k}{ds} \equiv \dot{x}_k = \widetilde{H}_{p_k}(x_r, p_r), \quad (k = 1, 2, \dots, n) \tag{12.64}$$

из (12.63) и будем их рассматривать как функциональные уравнения для n величин p_k. Если отличен от нуля функциональный определитель

$$\frac{\partial(\widetilde{H}_{p_1}, \widetilde{H}_{p_2}, \dots, \widetilde{H}_{p_n})}{\partial(p_1, p_2, \dots, p_n)} = \frac{\partial(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)}{\partial(p_1, p_2, \dots, p_n)} \neq 0, \tag{12.65}$$

то система (12.64) однозначно приводит к функциям

$$p_k = p_k(x_r, \dot{x}_r), \quad (k = 1, 2, \dots, n), \tag{12.66}$$

при помощи которых определяется функция Лагранжа

$$L(x_k, \dot{x}_k) = \sum_{r=1}^{n} p_r \dot{x}_r - \widetilde{H}(x_k, p_k), \tag{12.67}$$

где считается $p_r = p_r(x_k, \dot{x}_k)$.

По правилам дифференцирования сложных функций на основании (12.67), (12.66) и (12.63) легко находим

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = \sum_{r=1}^{n} \dot{x}_r \frac{\partial p_r}{\partial x_k} - \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x_k} - \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p_r} \frac{\partial p_r}{\partial x_k} = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x_k} \equiv -\widetilde{H}_{x_k},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = p_k + \sum_{r=1}^{n} \dot{x}_r \frac{\partial p_r}{\partial \dot{x}_k} - \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p_r} \frac{\partial p_r}{\partial \dot{x}_k} = p_k.$$

Поэтому в силу (12.63) имеем

$$\frac{dp_k}{ds} + \widetilde{H}_{x_k} \equiv \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} - \frac{\partial L}{\partial x_k} = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{12.68}$$

что как раз и представляет собой систему дифференциальных уравнений второго порядка Эйлера, тождественную системе уравнений (11.19). Само собой разумеется, что системе уравнений (12.68) соответствует вариационная задача для функционала типа (11.1) с функцией Лагранжа из (12.67).

§13. Дополнения и примеры (случаи однородных первой степени функций Лагранжа $L(x_k, \dot{x}_k)$ или Гамильтона $H(x_k, p_k)$)

1. Один из результатов §11 состоял в следующем: отправляясь от вариационных задач для функционала (11.1), мы пришли к уравнению Эйлера (11.19) для его экстремалей. Вводя новые функции p_k по формулам

$$p_k = \frac{\partial L(x, x_r, \dot{x}_r)}{\partial \dot{x}_k}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{13.1}$$

и рассматривая соотношения (13.1) как систему функциональных уравнений относительно $\dot{x}_k$, мы предполагали, что такая система однозначно разрешима и что она приводит к выражениям

$$\dot{x}_k = \dot{x}_k(x, x_r, p_r), \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда можно было ввести в рассмотрение функцию Гамильтона

$$H(x, x_r, p_r) = \sum_{k=1}^{n} p_k \dot{x}_k - L(x, x_r, \dot{x}_r), \tag{13.2}$$

где полагается $\dot{x}_k = \dot{x}_k(x, x_r, p_r)$ и перейти от системы n дифференциальных уравнений (11.19) второго порядка к системе $2n$ дифференциальных уравнений Гамильтона (11.35) первого порядка. Наконец, от системы (11.35) можно было перейти к уравнению Гамильтона–Якоби (11.60) в частных производных первого порядка, эквивалентному в известном смысле уравнениям Гамильтона. Таким образом в §11 обсуждался, в частности, переход от вариационной задачи для функционала (11.1) к эквивалентному этой задаче уравнению (11.60) в частных производных первого порядка. При этом промежуточными этапами такого перехода оказывались уравнения Эйлера (11.19) и уравнения Гамильтона (11.35).

2. Что же касается §12, то основной обсуждавшийся там вопрос сводился к решению методом характеристик некоторых естественных задач для уравнения (12.2) в частных производных первого порядка. Общие же результаты, сформулированные по отношению к уравнению (12.2), применялись к построению решений уравнения Гамильтона–Якоби (12.1).

В случае функций $H(x_k, p_k)$ из (12.1), не содержащих явно искомой функции Θ и являющихся однородными первой степени функциями от переменных $p_1, p_2, \dots, p_n$, решения задач можно было искать в форме (12.34) что сводило обсуждавшиеся вопросы к задаче из п. 7 §12 для уравнения (12.35), т.е. уравнения

$$H(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 1, \qquad \left(p_k = \frac{\partial \tau}{\partial x_k}\right), \tag{13.3}$$

не содержащего явно искомой функции. При этом основная группа уравнений из характеристической системы (12.38), (12.39) имела вид

$$\frac{dx_k}{ds} = H_{p_k}(x_r, p_r), \quad \frac{dp_k}{ds} = -H_{x_k}(x_r, p_r), \quad (k = 1, 2, \dots, n) \tag{13.4}$$

системы уравнений Гамильтона. Применительно к такому случаю в п. 11 §12 указывалось, что если при помощи первых n уравнений

$$\dot{x}_k = H_{m_k}(x_r, p_r), (k = 1, 2, \dots, n) \tag{13.5}$$

из (12.63), рассматриваемых как функциональные уравнения относительно величин p_k, удается однозначно выразить все p_k в виде функций

$$p_k = p_k(x_r, \dot{x}_r), (k = 1, 2, \dots, n),$$

то можно определить функцию Лагранжа

$$L(x_r, \dot{x}_r) = \sum_{k=1}^{n} p_k \dot{x}_k - H(x_r, p_r), \tag{13.6}$$

где полагается $p_k = p_k(x_r, \dot{x}_r)$, и совершить переход от системы уравнений Гамильтона (13.4) к системе уравнений Эйлера вида (12.68), отвечающей вариационной задаче для функционала (11.1) с функцией Лагранжа из (13.6). Подобный результат можно считать обратным результату из §11, изложенному в п. 1. Правда, для буквального сопоставления таких результатов нужно исключить в п. 1 параметр $x = s$ из числа аргументов, от которых функция Лагранжа из (13.1) зависит явно. Это приводит к необходимости вычеркнуть параметр x из формул (13.1) и (13.2), что и предполагается в последующем.

3. В обсуждаемых переходах от вариационной задачи к уравнению в частных производных первого порядка или, в обратном порядке, – от уравнения к вариационной задаче решающее значение имела возможность замены системы уравнений Эйлера (Гамильтона) эквивалентной системой уравнений Гамильтона (Эйлера), связанная с существованием канонических переменных, т.е. с однозначной разрешимостью системы уравнений (13.1). Необходимое и достаточное условие такой разрешимости имеет вид неравенства (11.27), левая часть которого (из-за предположенных свойств гладкости функции $L(x_k, \dot{x}_k)$) является непрерывной функцией своих аргументов. Но так как функциональные определители

$$\frac{\partial(p_1, p_2, \dots, p_n)}{\partial(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)}, \quad \frac{\partial(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)}{\partial(p_1, p_2, \dots, p_n)} \tag{13.7}$$

из (11.27) и (12.65) имеют взаимно обратные значения, то это же условие оказывается необходимым и достаточным для однозначной разрешимости относительно всех p_k системы функциональных уравнений (13.5), обеспечивающей возможность (обратного) перехода от уравнений Гамильтона к уравнениям Эйлера.

Итак, прямой и обратный обсуждаемые переходы возможны или невозможны одновременно. При этом возможность их связана с существованием канонических переменных, т.е. с однозначной разрешимостью относительно $\dot{x}_k$ (относительно p_k), ($k = 1, 2, \ldots, n$) систем функциональных уравнений (13.1) (уравнений (13.5)). Следует отметить, что подобная (однозначная) разрешимость может иметь место и тогда, когда один из определителей (13.7) обращается в нуль в некоторых дискретных точках переменных $\dot{x}_k$ или p_k. Именно так обстоит дело в задачах, в которых функция Лагранжа $L(x_k, \dot{x}_k)$ или функция Гамильтона $H(x_k, p_k)$ оказываются регулярной функцией от своих аргументов.

4. В приложениях весьма часто встречаются задачи со знакопостоянными функциями Лагранжа $L(x_k, \dot{x}_k)$ или Гамильтона $H(x_k, p_k)$, и притом такими, что $L(x_k, \dot{x}_k)$ (что $H(x_k, p_k)$) является однородной первой степени функцией от переменных $\dot{x}_k$ (от переменных p_k) при $k = 1, 2, \ldots, n$. Напомним, что функция $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называется однородной степени $p \geqslant 0$ функцией, если при любом значении параметра λ выполняется равенство

$$f(\lambda y_1, \lambda y_2, \ldots, \lambda y_n) = \lambda^p f(y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{13.8}$$

Дифференцирование такого равенства по λ с последующим приравниванием $\lambda = 1$ приводит к формуле Эйлера

$$p \cdot f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{k=1}^{n} y_k f_{y_k}(y_1, y_2, \ldots, y_n), \tag{13.9}$$

где $f_{y_k} = \partial f / \partial y_k$, которой удобно пользоваться во многих приложениях.

Так вот, если, например, функция Лагранжа $L(x_k, \dot{x}_k)$ оказывается однородной первой степени функцией от $\dot{x}_k$, то выполняется равенство

$$L(x_k, \dot{x}_k) = \sum_{r=1}^{n} \dot{x}_r L_{\dot{x}_r}(x_k, \dot{x}_k) \tag{13.10}$$

типа (13.9), дифференцирование которого по $\dot{x}_k$ приводит к очевидным соотношениям

$$\sum_{r=1}^{n} L_{\dot{x}_r \dot{x}_k} \dot{x}_r \equiv 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{13.11}$$

Такие соотношения можно толковать как однородную систему алгебраических уравнений, имеющую нетривиальное решение $\dot{x}_r \neq 0$ при любых значениях аргументов x_k и $\dot{x}_k$. Но это возможно только, если (тождественно) равен нулю определитель

$$|L_{\dot{x}_r \dot{x}_k}| \equiv 0 \tag{13.12}$$

системы (13.11), совпадающий с определителем (11.27). Таким образом, в случае однородных первой степени относительно $\dot{x}_k$ и p_k функций $L(x_k, \dot{x}_k)$ и $H(x_k, p_k)$ не существует канонических переменных и, следовательно, на такие случаи не распространяются непосредственно результаты п. 1–3. Однако к подобным результатам всегда можно прийти путем замены функции L или функции H на эквивалентную ей в известном смысле новую функцию. При этом такая замена в случае однородных $L(x_k, \dot{x}_k)$ и $H(x_k, p_k)$ всегда зиждется на возможности выбора параметров для определения экстремалей (т.е. решений, например, уравнений Эйлера) так, что во всех точках выбранной экстремали оказывается $L(x_k, \dot{x}_k) = \text{const}$.

5. Обозначая переменную интегрирования посредством s, рассмотрим функционал

$$I = \int\limits_{s_0}^{s_1} L(x_k, \dot{x}_k) ds \tag{13.13}$$

типа (11.1), в котором $L(x_k, \dot{x}_k) \equiv L(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ не зависит от s и является однородной степени $p \geqslant 1$ функцией от переменных $\dot{x}_k$. В соответствии с этим $L(x_k, \dot{x}_k)$ удовлетворяет соотношениям однородности

$$L(x_k, \lambda \dot{x}_k) = \lambda^p L(x_k, \dot{x}_k), \tag{13.14}$$

$$p \cdot L(x_k, \dot{x}_k) = \sum_{r=1}^{n} L_{\dot{x}_r}(x_k, \dot{x}_k) \dot{x}_r \tag{13.15}$$

вида (13.8) и (13.9), в которых, равно как и в (13.13), теперь полагается $\dot{x}_k = dx_k/ds$. Кроме перечисленного мы будем предполагать, что L имеет непрерывные частные производные первого и второго порядка по всем аргументам и удовлетворяет, например, неравенству $L(x_k, \dot{x}_k) > 0$ в рассматриваемой области изменения ее аргументов.

На основании решения системы уравнений Эйлера

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} - \frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{13.16}$$

можно определить любую экстремаль

$$x_k = x_k(s), \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{13.17}$$

функционала (13.13). И вот оказывается, что параметр s в (13.13) всегда можно выбрать так, что вдоль экстремали (13.17) выполняется равенство

$$L(x_k, \dot{x}_k) = \mathrm{const}\,. \tag{13.18}$$

Доказательство утверждения проведем сначала в случае $p = 1$, а затем при $p \geqslant 2$.

Полагая $p = 1$, допустим, что на выбранной экстремали (13.17) оказалось $L[x_k(s), \dot{x}_k(s)] = f(s) \neq \mathrm{const}$, где $f(s) > 0$. Тогда в функционале (13.13) можно произвести замену переменной интегрирования $s = s(\tau)$, что дает

$$I = \int\limits_{s_0}^{s_1} L(x_k, \dot{x}_k)ds = \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} L(x_k, \dot{x}_k)\frac{ds}{d\tau}d\tau = \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} L\left(x_k, \frac{dx_k}{d\tau}\right)d\tau,$$

если воспользоваться формулой (13.14) и учесть равенство $dx_k/d\tau = \dot{x}_k ds/d\tau$. Таким образом, функционал I сохранил свой вид при замене переменной $s = s(\tau)$ интегрирования, т.е. оказался инвариантным относительно такой замены. Таким же свойством обладает и система уравнений Эйлера (13.16).

Но при указанной замене переменной интегрирования (т.е. при замене в (13.16) параметра s на τ) в точках экстремали (13.17) оказывается

$$L\left[x_k, \frac{dx_k}{d\tau}\right] = L(x_k, \dot{x}_k)\big|_{s=s(\tau)}\frac{ds}{d\tau} = f[s(\tau)]\frac{ds}{d\tau}, \tag{13.19}$$

так как в соответствии с исходным допущением $L(x_k, \dot{x}_k) = f(s)$, где $f(s) > 0$. Поэтому если переменную τ выбрать из условия $\frac{d\tau}{ds} = f(s)$, то левая часть (13.19) будет постоянной вдоль экстремали, что и требовалось.

Заметим, во-первых, что для приведенного доказательства существенно, чтобы функция $s = s(\tau)$ имела обратную функцию

$\tau = \tau(s)$ и чтобы соответствие $s \leftrightarrow \tau$ было одно-однозначным. Это обеспечивается знакопостоянностью $f(s)$. Во-вторых же, подчеркнем, что возможность выбора параметра s в (13.16) так, чтобы вдоль экстремали (13.17) выполнялось условие (13.18), является следствием в случае $p = 1$ существования между уравнениями (13.16) линейной зависимости вида

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{x}_k \left[L_{x_k} - \frac{d}{ds} L_{\dot{x}_k} \right] = \sum_{k=1}^{n} [\dot{x}_k L_{x_k} + \ddot{x}_k L_{x_k}] -$$

$$- \frac{d}{ds} \sum_{k=1}^{n} \dot{x}_k L_{\dot{x}_k} = \frac{dL}{ds} - \frac{d}{ds} \sum_{k=1}^{n} \dot{x}_k L_{\dot{x}_k} = 0,$$

вытекающей из формулы (13.15) при $p = 1$. Вследствие этого обстоятельства одна из функций $x_k(s)$ интеграла системы уравнений (13.16) оказывается произвольной.

Что же касается случая $p \geqslant 2$, то в нем равенство (13.18) выполняется вдоль любой экстремали при произвольном выборе параметра s в (13.16). Действительно, вдоль любой экстремали имеем

$$\frac{d}{ds} L(x_k, \dot{x}_k) = \sum_{k=1}^{n} [L_{x_k} \dot{x}_k + L_{\dot{x}_k} \ddot{x}_k].$$

С другой стороны дифференцирование равенства (13.15) при учете (13.16) дает

$$p \frac{dL}{ds} = \sum_{k=1}^{n} \left[L_{\dot{x}_k} \ddot{x}_k + \dot{x}_k \frac{dL_{\dot{x}_k}}{ds} \right] = \sum_{k=1}^{n} [L_{\dot{x}_k} \ddot{x}_k + \dot{x}_k L_{x_k}],$$

где $p \geqslant 2$. Сопоставление такого равенства с предыдущим приводит к соотношению $dL/ds = 0$, означающему, что в случае $p \geqslant 2$ система уравнений (13.16) имеет первый интеграл (13.18). В этом факте и состоит существенное отличие случаев $p \geqslant 2$ от случая $p = 1$.

6. Как следствие из возможности выбора параметра s в (13.13) и (13.16) так, чтобы на любой (фиксированной) экстремали выполнялось равенство (13.18), вытекает следующее утверждение.

Утверждение. *Пусть $L(x_k, \dot{x}_k) > 0$ не зависит от s и является однородной первой степени функцией от переменных $\dot{x}_k$,*

($k = 1, 2, \ldots, n$). *Тогда параметр s при определении экстремалей (т.е. решений системы* (13.16) *уравнений Эйлера) всегда может быть выбран так, что рассматриваемая экстремаль функционала* (13.13) *оказывается в то же время экстремалью функционала*

$$I_p = \int\limits_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} L^p(x_k, \dot{x}_k)ds, \quad (p \geqslant 2), \tag{13.20}$$

и наоборот.

Действительно, полагая

$$\widetilde{L}(x_k, \dot{x}_k) = L^p(x_k, \dot{x}_k),$$

для определения экстремалей функционала (13.13) получаем систему уравнений (13.16), или, что то же, систему

$$\frac{1}{p}\,\widetilde{L}^{1/p-1}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial x_k} - \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{p}\,\widetilde{L}^{1/p-1}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{x}_k}\right] = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{13.21}$$

а для экстремалей функционала (13.20) получаем систему уравнений

$$\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial x_k} - \frac{d}{ds}\,\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{x}_k} = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{13.22}$$

или, что то же, систему

$$pL^{p-1}\,\frac{\partial L}{\partial x_k} - \frac{d}{ds}\left[pL^{p-1}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right] = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{13.23}$$

Будем рассматривать сначала экстремали функционала (13.13), т.е. функции $x_k(s)$ из (13.17), удовлетворяющие системе уравнений (13.16) или (13.23). Если параметр s на выбранной экстремали таков, что вдоль экстремали оказывается $L = \mathrm{const} > 0$, то вдоль нее также $\widetilde{L} = \mathrm{const} > 0$. Но тогда слагаемые левой части (13.21) можно сократить на $p^{-1}\widetilde{L}^{1/p-1} = \mathrm{const} > 0$, что приводит к системе уравнений (13.22). Итак, выбранная (по произволу) экстремаль функционала (13.13) оказалась также и экстремалью функционала (13.20), что и требовалось. Обратное утверждение доказывается аналогично.

7. Возвращаясь к случаю из п. 4 функций Лагранжа $L(x_k, \dot{x}_k)$, однородных первой степени относительно всех переменных $\dot{x}_k$, видим, что при соответствующем выборе параметра s любую экстремаль функционала (13.13) (или системы уравнений (13.16)) можно искать как интеграл системы уравнений Эйлера (13.22), в которой положено $\widetilde{L} = L^p(x_k, \dot{x}_k)$ при некотором целом значении $p \geqslant 2$. Функция $\widetilde{L}$ оказывается уже однородной относительно $\dot{x}_k$ функцией степени $p \geqslant 2$, вследствие чего система (13.22) имеет первый интеграл $\widetilde{L} = \mathrm{const}$. Поэтому на любой экстремали системы уравнений (13.22) выполняется соотношение (13.18), обеспечивающее эквивалентность системы уравнений (13.22) системе уравнений Эйлера (13.16) для исходной функции L.

Но в соответствии с равенством (13.15) для $\widetilde{L} = L^p$ справедливо

$$p\widetilde{L} = \sum_{k=1}^{n} \dot{x}_k \widetilde{L}_{\dot{x}_k}, \quad (p \geqslant 2),$$

откуда следует

$$(p-1)\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{x}_r} = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{L}_{\dot{x}_k \dot{x}_r} \dot{x}_k, \quad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Такие соотношения возможны только, если (вообще говоря) $|\widetilde{L}_{\dot{x}_k \dot{x}_r}| \neq 0$. Поэтому переход к каноническим переменным в случае функции Лагранжа $\widetilde{L}$ возможен на основе стандартных рассуждений.

8. Рассмотрим фукционал Ферма

$$I = \int \frac{d\sigma}{v}, \tag{13.24}$$

экстремали которого при $v = v_p$ и $v = v_s$ определяют лучи продольных и поперечных волн, распространяющихся в изотропных сейсмических средах. Предположим сначала, что за независимую переменную выбрана координата $x \equiv x_1$, вследствие чего для элемента дуги кривой получается выражение $d\sigma = \sqrt{1 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}\, dx$, где $\dot{x}_r = dx_r/dx$, $(r = 2, 3)$. При этом функционал (13.24) приводится к виду (11.1) с функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{v(x, x_2, x_3)} \sqrt{1 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}, \quad (x \equiv x_1). \tag{13.25}$$

Обобщенные импульсы должны определяться из уравнений

$$p_r = L_{\dot{x}_r} \equiv \frac{\dot{x}_r}{v\sqrt{1+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2}}, \quad (r=2,3), \tag{13.26}$$

из которых следует соотношение

$$\sqrt{v^{-2}-p_2^2-p_3^2} = \left[v\sqrt{1+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2}\right]^{-1},$$

легко приводящее к равенствам

$$\dot{x}_r = \frac{p_r}{\sqrt{v^{-2}-p_2^2-p_3^2}}, \quad (r=2,3).$$

Таким образом, при непараметрическом описании экстремалей-лучей (когда за независимую переменную берется одна из пространственных координат, например, $x_1 \equiv x$) канонические переменные удается ввести стандартным путем. При этом для функции Гамильтона получается выражение

$$H(x_r, p_r) = \sum_{k=2}^{3} p_k \dot{x}_k - L(x_k, \dot{x}_k) = -\sqrt{v^{-2}-p_2^2-p_3^2},$$

а система уравнений Гамильтона

$$\frac{dx_r}{dx} = H_{p_r}, \quad \frac{dp_r}{dx} = -H_{x_r}, \quad (r=2,3)$$

записывается в виде

$$\frac{dx}{\sqrt{v^{-2}-p_2^2-p_3^2}} = \frac{dx_r}{p_r} = \frac{-dp_r}{v^{-3}v_{x_r}}. \tag{13.27}$$

Если ввести в рассмотрение новую функцию

$$p_1 = \sqrt{v^{-2}-p_2^2-p_3^2} \tag{13.28}$$

и вместо x писать x_1, то систему уравнений (13.28) можно привести к форме

$$\frac{dx_k}{2v^2 p_k} = \frac{-dp_i}{2v^{-1}v_{x_i}} = ds, \quad (i,k=1,2,3), \tag{13.29}$$

где под s подразумевается некоторый параметр. Нетрудно видеть, что такую систему уравнений можно рассматривать как систему уравнений Гамильтона, отвечающую функции Гамильтона

$$\widetilde{H} = v^2 \sum_{r=1}^{3} p_k^2 = 1, \tag{13.30}$$

сохраняющей постоянное значение вдоль лучей.

9. Если экстремали функционала Ферма определять в параметрической форме $x_k = x_k(s)$, $(k = 1, 2, 3)$, то для элемента дуги получается выражение $d\sigma = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}$. Поэтому (13.24) принимает вид функционала (11.1) с функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{v(x_1, x_2, x_3)} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}, \tag{13.31}$$

которая оказывается однородной первой степени функцией от $\dot{x}_k$. Канонические переменные в случае такой функции L, как известно, не существуют.

Однако, если (в соответствии с п. 6) параметр s выбрать так, чтобы на экстремалях оказывалось $L = \mathrm{const}$, то определение экстремалей можно производить на базе функционала (11.1) с функцией Лагранжа, например, в виде

$$\widetilde{L} = \frac{1}{4} L^2 = \frac{1}{4v^2} \sum_{k=1}^{3} \dot{x}_k^2 = 1. \tag{13.32}$$

Для обобщенных импульсов получаются уравнения

$$p_k = \widetilde{L}_{\dot{x}_k} \equiv \frac{\dot{x}_k}{2v^2}, \quad (k = 1, 2, 3),$$

из которых следует $\dot{x}_k = 2v^2 p_k$ и

$$\widetilde{H} = \sum_{k=1}^{3} p_k \dot{x}_k = \widetilde{L} = v^2 \sum_{k=1}^{3} p_k^2 = 1. \tag{13.33}$$

Уравнения Гамильтона принимают вид

$$\frac{dx_k}{ds} = 2v^2 p_k, \quad \frac{dp_k}{ds} = -2\frac{v_{x_k}}{v}, \quad (k = 1, 2, 3), \tag{13.34}$$

что в точности совпадает с (13.29).

10. Уравнение Гамильтона–Якоби вида (11.60) для волновых фронтов акустических полей, отвечающих функции Гамильтона (13.33), может быть записано в форме

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + v^2 \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right)^2 = 0$$

или в форме

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + v\sqrt{\sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right)^2} = 0,$$

если предполагается, что уравнения фронтов даются формулами

$$\psi \equiv \tau(x_1, x_2, x_3) - t = 0, \tag{13.35}$$

где t играет роль времени. При этом для функции τ получается уравнение в частных производных

$$\widetilde{H} \equiv v^2 \sum_{k=1}^{3} p_k^2 \equiv v^2 \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial\tau}{\partial x_k}\right)^2 = 1, \tag{13.36}$$

называемое уравнением эйконала. Характеристическая система (12.3)–(12.4) для такого уравнения сводится к системе (13.34), а также к обособленному уравнению

$$\frac{d\tau}{ds} = \sum_{k=1}^{3} p_k \widetilde{H}_{m_k} = 2, \tag{13.37}$$

устанавливающему физический смысл параметра s из (13.34).

В соответствии с п. 7–10 §12 для нахождения фронта (13.35) волны необходимо систему уравнений (13.34), (13.37) дополнить начальными условиями, определяющими положение фронта в момент, начиная с которого строится решение задачи. Например, в случае точечного источника волн (см. п. 10 §12) такие данные можно задавать в виде

$$\tau\big|_{s=0} = 0, \quad x_k\big|_{s=0} = x_k^0, \quad p_k = \frac{n_k^0}{v_0}, \quad (k = 1, 2, 3), \tag{13.38}$$

где $v = v(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, а n_k – произвольные числа (составляющие орта $\vec{n}_0$), связанные условием

$$\sum_{k=1}^{3} (n_k^0)^2 = 1.$$

Решение системы дифференциальных уравнений (13.34), (13.37) при соответствующих начальных условиях, например, (13.38) определяет две группы функций:

$$x_k = x_k(s, n_1^0, n_2^0), \quad (k = 1, 2, 3), \tag{13.39}$$

$$\tau = \tau(s, n_1^0, n_2^0) \equiv 2s, \quad p_k = p_k(s, n_1^0, n_2^0). \tag{13.40}$$

При этом (как указано в п. 4 и 9 §12) для нахождения искомой функции $\tau = \tau(x_1, x_2, x_3)$ из (13.35) необходимо разрешить систему функциональных уравнений (13.39) относительно s, n_1^0, n_2^0 и подставить полученные выражения в правую часть первой функции из (13.40). Это приводит к функции $\tau = \tau(x_1, x_2, x_3)$, удовлетворяющей уравнению (13.36) и такой, что выражения

$$p_k = \frac{\partial \tau}{\partial x_k} = \frac{n_k}{v}, \tag{13.41}$$

где n_k – составляющие орта нормали $\vec{n}$ к фронту (13.35) в любой точке луча, совпадают с функциями $p_k = p_k(s, n_1^0, n_2^0)$ из (13.40) (см. п. 4 §12). Отсюда, равно как и из первой группы уравнений (13.34), вытекает факт ортогональности пересечения лучей с волновыми фронтами. Такое свойство, характерное для изотропных упругих сред, уже не имеет места в случае анизотропии.

Заметим, что в тривиальном случае однородной (изотропной) среды, когда $v = \mathrm{const}$ (и, следовательно, $v_{x_k} \equiv \partial v / \partial x_k$ в (13.34)) из (13.34) и (13.38) для лучей получаются уравнения прямых

$$x_k - x_k^0 = 2vsn_k^0.$$

Исключение же (при помощи (13.38) и (13.40)) параметров s и n_k^0 дает

$$\tau = \frac{1}{v}\sqrt{\sum_{k=1}^{3}(x_k - x_k^0)^2},$$

что соответствует сферическим фронтам волн, испущенных точечным источником.

11. В §8 было показано, что функции ψ, определяющие по (7.1) уравнения фронтов волн, распространяющихся в анизотропных упругих средах, удовлетворяют тому или иному уравнению в частных производных первого порядка из (8.9) в зависимости от типа r рассматриваемой волны. Если ввести новую функцию $\tau = \tau(x_1, x_2, x_3)$ и определять поверхность фронта уравнением (8.13) или (13.35), то уравнение (в частных производных) для τ запишется в виде

$$H \equiv \sum_{i,k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = 1, \tag{13.42}$$

где $p_k = \partial\tau/\partial x_k$, а под $A_i^{(r)}$ подразумевается подчиненное условию нормировки (8.10) решение системы (алгебраических) уравнений (8.12), в которых положено $p_0 = 1$.

Характеристическая система обыкновенных дифференциальных уравнений, отвечающая уравнению (13.42), имеет, очевидно, вид

$$\frac{dx_m}{ds} = H_{p_m}, \quad \frac{dp_m}{ds} = -H_{x_m}, \quad \frac{d\tau}{ds} = \sum_{m=1}^{3} p_m H_{p_m} = 2.$$

Если воспользоваться результатами п. 6 §8, где производилось вычисление частных производных по x_m и p_m от функции H вида (13.42), и перейти от параметра s к параметру $\tau = 2s$ (на основании последнего из выписанных уравнений), то такая система сведется к двум группам (связанных друг с другом) уравнений

$$\begin{gathered} \frac{dx_m}{d\tau} = \xi_m \equiv \sum_{i,p,q=1}^{3} \lambda_{im,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \quad (m = 1, 2, 3), \\ \frac{dp_m}{d\tau} = \eta_m \equiv -\frac{1}{2} \sum_{i,k,p,q=1}^{3} \frac{\partial \lambda_{ik,pq}}{\partial x_m} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{r}, \end{gathered} \tag{13.43}$$

которые полезно сопоставлять с уравнениями

$$\frac{dx_m}{d\tau} = v^2 p_m, \quad \frac{dp_m}{d\tau} = -\frac{v_{x_m}}{v}, \quad (m = 1, 2, 3) \tag{13.44}$$

для лучей в случае неоднородных изотропных сред. (Такая система получается из (13.34) при учете формулы (13.41) и при замене параметра s на τ).

Остановимся на простейшем случае точечного источника волн в однородной анизотропной среде, в которой $\lambda_{ik,pq} = \mathrm{const}$, вследствие чего система (13.43) принимает крайне простой вид

$$\frac{dx_k}{d\tau} = \xi_k, \quad \frac{dp_k}{d\tau} = 0, \quad (k = 1, 2, 3). \tag{13.45}$$

12. Для нахождения функции $\tau(x_1, x_2, x_3)$, входящей в уравнение (13.35) фронта волны, систему уравнений (13.43) необходимо дополнять начальными условиями. В случае точечного источника такие условия следует записывать в виде (13.38), т.е.

$$\tau\Big|_{\tau=0} = 0, \quad x_k\Big|_{\tau=0} = x_k^0, \quad p_k\Big|_{\tau=0} = \frac{n_k}{v_r}, \quad (k = 1, 2, 3), \tag{13.46}$$

где под n_k и $v_r \equiv v_r(\vec{n}) \equiv v_r(n_1, n_2)$ подразумеваются соответственно составляющие произвольно задаваемого в точке (x_k^0) орта $\vec{n}$ нормалей и значение фазовой скорости волны рассматриваемого типа r, отвечающие точке (x_k^0) и значению $\vec{n}$. Однако в случае однородной среды, которую мы условились сейчас рассматривать, фазовые скорости v_r не зависит от рассматриваемых точек среды. Поэтому в (13.46) мы отбросили нулик сверху у величин n_k и v_r. Решение задачи о фронте волны типа r, возбужденной точечным источником, производится в следующем порядке.

a. Сначала определяются начальные значения $v_r = v_r(\vec{n})$ и $A_i^{(r)} = A_i^{(r)}(\vec{n})$ фазовой скорости и составляющих вектора поляризации волны типа r (однозначно) отвечающие задаваемым в точке (x_k^0) значениям нормалей $\vec{n}$. Это производится на основе решения алгебраической системы уравнений (8.12$'$). Заметим, что так как вид указанных уравнений не изменяется при замене $\vec{n}$ на $(-\vec{n})$, то их решения удовлетворяют условиям (центральной) симметрии

$$v_r(\vec{n}) = v_r(-\vec{n}), \quad A_i^{(r)}(\vec{n}) = A_i^{(r)}(-\vec{n}). \tag{13.47}$$

b. По найденным значениям величин (13.47) определяются начальные значения (в точке (x_k^0)) правых частей уравнений (13.43). В рассматриваемом случае однородной среды оказывается $\eta_m = 0$, а получающиеся значения для $p_m(\vec{n}) = \vec{n}/v_r(\vec{n})$ и $\xi_m(\vec{n}) \equiv \xi_m^{(r)}(\vec{n})$ из (13.43) удовлетворяют соотношениям симметрии

$$p_m(\vec{n}) = -p_m(-\vec{n}), \quad \xi_m(\vec{n}) = -\xi_m(-\vec{n}). \tag{13.48}$$

c. Затем переходят к интегрированию системы уравнений (13.43) при начальных данных (13.38). При этом в случае однородной среды вместо (13.43) рассматривают уравнения (13.45). Из

(13.45) прежде всего вытекают равенства $p_k = p_k^0 = \mathrm{const}$, выполняющиеся во всех точках вдоль луча, из которых следует, что вдоль луча остаются постоянными значения орта нормали $\vec{n}$ и фазовой скорости v_i, заданные в начальной точке (x_k^0) луча. Но из этого вытекает также постоянство вдоль луча составляющих $A_i^{(r)}(\vec{n})$ и $\xi_k(\vec{n}) \equiv \xi_k^{(r)}(\vec{n})$ вектора поляризации и лучевой скорости. Итак, вдоль каждого луча (определяемого начальным значением орта $\vec{n}$) постоянны следующие величины

$$n_k, \quad v_r(\vec{n}), \quad A_i^{(r)}(\vec{n}), \quad \xi_k^{(r)}(\vec{n}), \quad (k = 1, 2, 3). \tag{13.49}$$

Эти величины можно считать зависящими лишь от двух составляющих n_1 и n_2 орта $\vec{n}$ (удовлетворяющего нормировке $|\vec{n}| = 1$).

Вследствие $\xi_k^{(r)} = \mathrm{const}$ из первой группы уравнений (13.45) для лучей получаются уравнения прямых

$$x_k - x_k^0 = \xi_k^{(r)}(n_1, n_2)\tau, \quad (k = 1, 2, 3,). \tag{13.50}$$

d. Для нахождения функции $\tau(x_1, x_2, x_3)$ (из уравнения (13.35) фронта волны) следовало бы разрешить систему функциональных уравнений (13.50) относительно τ, n_1 и n_2. Решение такой задачи в аналитической форме едва ли возможно (и оно едва ли оказалось бы полезным на практике). Поэтому поверхность фронта $\tau(x_1, x_2, x_3) = t = \mathrm{const}$ следует строить как геометрическое место точек (x_k) из (13.50) при $\tau = t = \mathrm{const}$ и при значениях

$$n_3 = \sqrt{1 - n_1^2 - n_2^2}, \quad n_1^2 + n_2^2 \leqslant 1, \tag{13.51}$$

где n_1 и n_2 выбираются по произволу. В частности, такую поверхность (фронта) в случае $t = 1$ мы будем называть поверхностью лучевых скоростей. Вследствие соотношений (13.47) и (13.48) очевидно, что точки таких поверхностей (фронтов) обладают свойством симметрии относительно “центральной точки” $O' \equiv (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$.

Что же касается (внешней) нормали $\vec{n}_N$ в любой фиксированной точке $N \equiv (x_1, x_2, x_3)$ поверхности фронта, то, как показано ниже, она совпадает с (постоянным) значением орта нормалей $\vec{n}$ в точках луча (13.50), соединяющего точки O' и N. А так как луч (т.е. вектор $\vec{\xi}^{(r)}(\vec{n})$) однозначно определяется по значению вектора нормалей $\vec{n}$, фактически задаваемого по (13.46) в точке

O', то из высказанного утверждения следует одно-однозначность соответствия между задаваемыми в точке O' ортами $\vec{n}$ и точками $N(\vec{n})$ поверхности фронта.

Остается лишь привести доказательство утверждения о внешней нормали $\vec{n}_N$ в точке N поверхности фронта волны, которое базируется на соотношении

$$(\vec{p}\cdot d\vec{\xi}^{(r)}) = 0, \quad \vec{p} \equiv \frac{\vec{n}}{v_r(\vec{n})}, \tag{13.52}$$

справедливом в случае любых однородных анизотропных сред, вытекающем из тождества (13.42), записываемого в виде

$$(\vec{p}\cdot\vec{\xi}^{(r)}) \equiv \sum_{i,k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = 1. \tag{13.53}$$

Действительно, дифференцирование такого тождества дает равенства, во-первых,

$$(\vec{p}\cdot d\vec{\xi}^{\,(r)}) + (\vec{\xi}^{(r)}\cdot d\vec{p}) = 0 \tag{13.54}$$

и, во-вторых,

$$\begin{gathered} 2\sum_{i,k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} dp_k + 2\sum_{i,k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = \\ 2(\vec{\xi}^{(r)}\cdot d\vec{p}) = 0, \end{gathered} \tag{13.55}$$

так как второе слагаемое из левой части равно нулю в силу равенства (8.12) и условия нормировки (8.11). Отсюда как раз и вытекает (13.52).

Для доказательства же высказанного утверждения остается лишь предположить, что приращения (дифференциалы) $d\vec{\xi}^{(r)}$ и $d\vec{p}$ в предыдущих формулах появлялись как результат изменения орта нормалей $\vec{n}$, вследствие чего вектор $d\vec{\xi}^{(r)}$ (вектор $d\vec{p}$) оказывается расположенным в касательной плоскости к поверхности S, которая является геометрическим местом (при изменении $\vec{n}$) концов векторов $\vec{\xi}^{(r)}(\vec{n})$ (концов векторов $\vec{p}(\vec{n})$), построенных из общего начала. Таким образом, $d\vec{\xi}^{(r)}$ в (13.52) является произвольным бесконечно малым вектором, лежащим в касательной к фронту плоскости, построенной в некоторой его точке $N(\vec{n})$. Но так как в точке $N(\vec{n})$ фронта оказывается $\vec{n}_N \equiv \vec{n}$ и $\vec{p} = \vec{n}/v_r(\vec{n})$, то из (13.52) следует $(\vec{n} \cdot d\vec{\xi}^{(r)}) = 0$, что совместно с положительностью левой части (13.53) и доказывает утверждение.

Заметим кстати, что если бы при произвольном изменении орта нормалей $\vec{n}$ была построена поверхность S как геометрическое место концов векторов (рефракции) $\vec{p} = \vec{p}(\vec{n})$ из (13.52), имеющих общее начало в точке O[1], то в силу (13.55) можно было бы утверждать, что (при произвольно выбранном значении $\vec{n}$) в точке $N(\vec{n})$ поверхности S внешняя нормаль $\vec{m}(\vec{n})$ к этой поверхности совпадает по направлению с вектором $\vec{\xi}^{(r)}(\vec{n})$ лучевой скорости, вычисленным для выбранного значения $\vec{n}$. Действительно, из равенства (13.55) и равенства $(\vec{m} \cdot d\vec{p}) = 0$, справедливых при произвольных $d\vec{p}$, лежащих в касательной к S плоскости, следует параллельность или антипараллельность $\vec{\xi}^{(r)}$ и $\vec{m}$. Но если учесть неравенство $(\vec{p} \cdot \vec{m}) > 0$, справедливое во всех точках N поверхности S по построению, а также равенство (13.53), то приходим к высказанному утверждению.

13. В заключение полезно привести некоторые результаты, связанные с поверхностью лучевых скоростей, введенной в п. 12. Совместим точку $O' = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ из (13.38) с началом координат, т.е. фактически положим $x_k^0 = 0$, и будем задавать в этой точке значения нормали $\vec{n}$ так, чтобы они располагались в плоскости $x_3 = 0$, которую будем называть плоскостью падения. Тогда составляющие нормали можно определять формулами

$$n_1 = \sin\theta, \quad n_2 = \cos\theta, \quad n_3 = 0 \tag{13.56}$$

через угол падения θ между ортами $\vec{n}$ и $\vec{i}_2$, отсчитываемый от оси Ox_2. Соответственно таким значениям n_k функциями от θ оказываются также значения фазовой скорости $v_r = v_r(\theta)$, составляющие

$$\varkappa_1^{(r)} = \frac{\sin\theta}{v_r(\theta)}, \quad \varkappa_2^{(r)} = \frac{\cos\theta}{v_r(\theta)}, \quad \varkappa_3^{(r)} = 0 \tag{13.57}$$

вектора $\vec{p} \equiv \vec{\varkappa}^{(r)}$ (который называется вектором рефракции) и, наконец, составляющие

$$\xi_k^{(r)}(\theta) = \sum_{i,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} \varkappa_p^{(r)}(\theta) A_q^{(r)}(\theta) A_2^{(r)}(\theta) \tag{13.58}$$

[1] Такая поверхность называется поверхностью вектора рефракции волны типа r.

вектора $\vec{\xi}^{(r)}$ лучевой скорости. При этом, как правило, все три составляющие вектора лучевой скорости из (13.58) отличны от тождественного нуля.

Таким образом, если при изменении угла θ конец вектора рефракции $\vec{\varkappa}^{(r)}$ (с составляющими из (13.57)) описывает плоскую кривую (кривую рефракции), расположенную в плоскости падения, то конец вектора лучевой скорости $\vec{\xi}^{(r)}$ (с началом в точке O') описывает, вообще говоря. пространственную кривую l_r. Такая кривая располагается на поверхности S лучевых скоростей и обладает тем важным свойством, что в каждой ее точке $N(\theta)$, отвечающей значению θ, нормаль $\vec{n}(\theta)$ к поверхности S имеет составляющие из (13.56) и, следовательно, располагается в плоскости падения $x_3 = 0$ (точнее, в плоскости, параллельной плоскости падения). При этом (вследствие одно-однозначности соответствия между точками $N(\vec{n}) \in S$ и значениями $\vec{n}$) можно утверждать, что в точках $N \in S$, не лежащих на кривой l_r, нормаль к поверхности S уже не располагается в плоскости падения. Если спроектировать такую кривую на плоскость падения $x_3 = 0$, то получится плоская кривая λ_r, определяемая (в параметрической форме) уравнениями

$$x_1 = \xi_1^{(r)}(\theta), \quad x_2 = \xi_2^{(r)}(\theta), \quad x_3 = 0 \tag{13.59}$$

и имеющая в каждой своей точке $N(\theta)$ нормаль $\vec{n}(\theta)$, составляющие которой определяются формулами (13.56). Такую кривую мы назовем вспомогательной кривой лучевых скоростей. Ею удобно будет воспользоваться для иллюстрации протекания процессов отражения-преломления волн на плоской границе раздела двух однородных анизотропных сред.

ГЛАВА 5

Источники волновых полей в случае изотропной однородной безграничной упругой среды

В настоящей главе рассматриваются простейшие задачи динамической теории упругости, связанные с возбуждением и распространением волн в безграничной однородной и изотропной упругой среде. Показывается, что в случае такой среды поле смещений целесообразно представлять через продольный и поперечный потенциалы, удовлетворяющие раздельным волновым уравнениям. Обсуждаются вопросы, касающиеся полей смещений, возбуждаемых простейшими точечными источниками типа центра давления и центров вращения, реализующихся в виде продольных и поперечных расходящихся сферических волн. Путем обращения (знака) времени из этих полей конструируются фундаментальные решения Вольтерра для уравнения теории упругости в случае однородной изотропной среды, представляющие собой некоторые сходящиеся сферические волны. Наконец, на основе фундаментальных решений Вольтерра и интегральной формулы Грина–Вольтерра рассматривается общая задача Коши для поля смещений в однородной безграничной упругой среде и дается ее решение в виде формулы Стокса. В заключение обсуждаются некоторые физические следствия из упомянутой формулы.

В практическом отношении результаты главы полезны, во-первых, как подготовительный этап к рассмотрению процессов распространения волн в слоисто-однородных изотропных средах и, во-вторых, с точки зрения формулировки некоторых свойств "первичных" полей, возбуждаемых точечными источниками.

§14. Продольный и поперечный потенциалы

Уравнение движения однородной и изотропной упругой среды, характеризуемой плотностью $\rho = \mathrm{const}$ и параметрами Ламе $\lambda = \mathrm{const}$ и $\mu = \mathrm{const}$ имеет вид (2.10), т.е.

$$\overrightarrow{\mathrm{Div}}\, t_{ik} - \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \equiv$$

$$\equiv (\lambda+\mu)\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\, \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} - \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = -\vec{f}(M,t), \tag{14.1}$$

где $\vec{f}$ – вектор плотности массовых сил.

Ниже доказывается существование функций φ и $\vec{\psi}$, а также Φ и $\vec{\Psi}$, таких, что

$$\vec{u} = \mathrm{grad}\, \varphi + \mathrm{rot}\, \vec{\psi}, \tag{14.2}$$

$$\vec{f} = \mathrm{grad}\, \Phi + \mathrm{rot}\, \vec{\Psi}, \tag{14.3}$$

а уравнение (14.1) оказывается эквивалентным следующим двум "раздельным" волновым уравнениям

$$(\lambda + 2\mu)\Delta\varphi - \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\Phi, \tag{14.4}$$

$$\mu\Delta\vec{\psi} - \rho\frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2} = -\vec{\Psi}. \tag{14.5}$$

Функции φ и $\vec{\psi}$ называются соответственно продольными и поперечными потенциалами поля упругих смещений. Заметим, что в случае неоднородных изотропных упругих сред переход к потенциалам также возможен, но не рационален, так как для потенциалов получается система "неразделяющихся" уравнений, и притом не менее сложная, чем исходное уравнение (2.8) для вектора упругих смещений.

1. Так как любое решение уравнения (14.1) может рассматриваться как предел последовательности сколь угодно гладких решений того же уравнения с гладкими плотностями массовых сил[1], доказательство эквивалентности уравнения (14.1) уравнениям (14.4) и (14.5) достаточно провести в предположении, что поле $\vec{u}$ имеет, например, частные производные до третьего порядка включительно. Из такого предположения мы и будем исходить.

Как известно, любое дифференцируемое векторное поле можно представлять суммой потенциального и соленоидального вектора. Допустим, что такое разбиение выполнено для векторов $\vec{u}$ и $\vec{f}$ из (14.1), т.е.

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \quad \vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2, \tag{14.6}$$

где

$$\operatorname{rot}\vec{u}_1 = 0, \quad \operatorname{div}\vec{u}_2 = 0, \tag{14.7}$$

$$\operatorname{rot}\vec{f}_1 = 0, \quad \operatorname{div}\vec{f}_2 = 0. \tag{14.8}$$

Разбиение (14.6) неоднозначно, так как слагаемые $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ (равно как $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$) можно заменить на $\vec{u}_1 + \vec{u}_0$ и $\vec{u}_2 - \vec{u}_0$ без изменения соотношений (14.6)–(14.8), если

$$\operatorname{rot}\vec{u}_0 = 0, \quad \operatorname{div}\vec{u}_0 = 0,$$

т.е.

$$\vec{u}_0 = \operatorname{grad}\chi_0, \tag{14.9}$$

[1] См. §9, п. 5, теорема 5.

где $\Delta\chi_0 = 0$. Заметим, что векторы типа $\vec{u}_0$ называются лапласовыми. Итак, разбиение (14.6) векторных полей на соленоидальную и потенциальную части производится с точностью до аддитивного лапласового вектора.

При разбиении (14.6) векторов $\vec{u}$ и $\vec{f}$ на слагаемые уравнение (14.1) переписывается в виде

$$\begin{aligned}(\lambda+2\mu)\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,\vec{u}_1 - \rho\frac{\partial^2\vec{u}_1}{\partial t^2} + \vec{f}_1 =\\ = \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{u}_2 + \rho\frac{\partial\vec{u}_2}{\partial t_2} - \vec{f}_2 \equiv \vec{V}(M,t).\end{aligned} \tag{14.10}$$

где $\vec{V}$ – лапласов вектор, так как в силу (14.7) и (14.8) применение операции rot к левой и операции div к средней частям равенства (14.10) дает нуль. Если бы при выбранных значениях $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ в равенстве (14.10) оказалось $\vec{V}\not\equiv 0$, то можно было бы перейти к новым $\vec{u}_1{}'$ и $\vec{u}_2{}'$ по формулам

$$\vec{u}_1{}' = \vec{u}_1 + \vec{u}_0 \quad \text{и} \quad \vec{u}_2{}' = \vec{u}_2 - \vec{u}_0,$$

где в качестве лапласова вектора $\vec{u}_0$ взято

$$\vec{u}_0 = \frac{1}{\rho}\int\limits_0^t (t-\tau)\vec{V}(M,\tau)d\tau. \tag{14.11}$$

При этом для $\vec{u}_1{}'$ и $\vec{u}_2{}'$ получилось бы соотношение (14.10), в котором $\vec{V}\equiv 0$. Поэтому можно с самого начала считать $\vec{V}\equiv 0$, что позволяет переписать (14.10) в виде

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+2\mu)\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,\vec{u}_1 - \rho\frac{\partial^2\vec{u}_1}{\partial t^2} + \vec{f}_1 = 0,\\ \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{u}_2 + \rho\frac{\partial^2\vec{u}_2}{\partial t^2} - \vec{f}_2 = 0.\end{aligned}\right\} \tag{14.12}$$

Из условия (14.7) следует существование функций $\varphi(M,t)$ и $\vec{\psi}(M,t)$ (скалярного и векторного потенциалов), таких, что

$$\vec{u}_1 = \mathrm{grad}\,\varphi, \quad \vec{u}_2 = \mathrm{rot}\,\vec{\psi}. \tag{14.13}$$

При этом одна из компонент $\vec{\psi}$ оказывается произвольной, так как величина $\vec{u}_2$ не изменяется при замене $\vec{\psi}$ на $\vec{\psi}+\mathrm{grad}\,\chi_0$. Этим можно воспользоваться, в частности, для того, чтобы оказалось

$$\mathrm{div}\,\vec{\psi} = 0. \tag{14.14}$$

Совершенно также из (14.8) следует существование функций Φ и $\vec{\Psi}$, таких, что

$$\vec{f_1} = \operatorname{grad}\Phi, \quad \vec{f_2} = \operatorname{rot}\vec{\Psi}, \tag{14.15}$$

причем

$$\operatorname{div}\vec{\Psi} = 0. \tag{14.16}$$

На основании (14.13) и (14.15) формулы (14.12) переписываются в виде

$$\operatorname{grad}\left\{(\lambda+2\mu)\Delta\varphi - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \Phi\right\} = 0,$$

$$\operatorname{rot}\left\{\mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\psi} + \rho\frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2} - \vec{\Psi}\right\} = 0,$$

откуда при учете (14.14) и формулы $\Delta\vec{\psi} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\psi} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\psi}$ следует

$$\left.\begin{aligned} (\lambda+2\mu)\Delta\varphi - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \Phi = c(t),\\ -\mu\Delta\vec{\psi} + \rho\frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2} - \Psi = \operatorname{grad} h(M,t),\end{aligned}\right\} \tag{14.17}$$

где $\Delta h = 0$ в силу (14.14) и (14.16).

Если бы в (14.17) оказалось $c(t) \not\equiv 0$, вместо φ в (14.13) можно было бы взять

$$\widetilde{\varphi} = \varphi + \int\limits_0^t (t-\tau)c(\tau)d\tau.$$

В результате для $\widetilde{\varphi}$ получилось бы первое уравнение из (14.17) при $c(t) \equiv 0$. Поэтому в (14.17) можно полагать $c(t) \equiv 0$. Совершенно также, если бы в (14.17) оказалось $h \not\equiv 0$, то от вектора $\vec{\psi}$ из (14.13) можно было бы перейти к вектору

$$\vec{\psi}\,' = \vec{\psi} - \frac{1}{\rho}\int\limits_0^t (t-\tau)\operatorname{grad} h(M,\tau)d\tau,$$

не изменяя значения $\vec{u}_2$ и соотношения (14.13). В результате получилось бы второе уравнение (14.17) с $h \equiv 0$.

Итак, исходя из предположения, что вектор $\vec{f}$ плотности массовых сил имеет частные производные по пространственным переменным x_1, x_2, x_3 и представляется формулой (14.3), где $\vec{\Psi}$ подчинено условию (14.16), доказано, что любое решение $\vec{u}$ уравнения (14.1), имеющее частные производные по пространственным переменным до третьего порядка включительно представляется в виде (14.2) через потенциалы φ и $\vec{\psi}$, удовлетворяющие уравнениям (14.4) и (14.5). При этом в процессе доказательства предполагалось, что $\vec{\psi}$ из (14.2) подчинено условию (14.14). Однако нетрудно видеть, что последнее условие несущественно, так как если найдено $\vec{\psi}$, удовлетворяющее (14.14) и уравнению (14.5), такое, что выполняется (14.2), то при замене $\vec{\psi}$ на

$$\vec{\psi}_1 = \vec{\psi} + \operatorname{grad}\chi, \tag{14.18}$$

где χ – любое решение уравнения

$$\mu\Delta\chi - \rho\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0, \tag{14.19}$$

формулы (14.2) и (14.5) остаются неизменными. При этом для нового $\vec{\psi}_1$ уже имеет место

$$\operatorname{div}\vec{\psi}_1 = \Delta\chi = \frac{\rho}{\mu}\ddot{\chi} \not\equiv 0.$$

Существенным же оказывается то обстоятельство, что при выборе значения $\vec{\psi}$ в (14.2), удовлетворяющего уравнению (14.5), всегда остается произвол, определяемый соотношениями (14.18) и (14.19).

2. В п. 1 был рассмотрен переход от уравнения Ламе (14.1) к волновым уравнениям (14.4) и (14.5) для потенциалов. Еще более простым оказывается обратный переход, показывающий, что если φ и $\vec{\psi}$ – любые решения уравнений (14.4) и (14.5), имеющие производные до третьего порядка, то вектор $\vec{u}$ из (14.2) удовлетворяет уравнению (14.1) при значениях $\vec{f}$ из (14.3). Для реализации такого перехода достаточно подставить в (14.1) значения $\vec{u}$ и $\vec{f}$ из (14.2) и (14.3), что дает

$$(\lambda + 2\mu)\operatorname{grad}\,\operatorname{div}\vec{u} + \mu\Delta\vec{u} - \rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} + \vec{f} =$$

$$= \operatorname{grad}\left\{(\lambda+2\mu)\Delta\varphi - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \Phi\right\} +$$

$$+\operatorname{rot}\left\{-\mu \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\psi} - \frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2} + \vec{\Psi}\right\} = \operatorname{grad}\left\{(\lambda+2\mu)\Delta\varphi - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \Phi\right\} +$$

$$+\operatorname{rot}\left\{\mu(-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\psi} + \operatorname{grad}\,\operatorname{div}\vec{\psi}) - \rho\frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2} + \vec{\Psi}\right\} = 0$$

в силу (14.4) и (14.5). Заметим, что добавка $\mu\operatorname{grad}\,\operatorname{div}\vec{\psi}$ под знаком оператора rot законна, так как rot grad любой функции тождественен нулю. В результате же такой добавки под знаком операции rot появляется выражение

$$\mu[\operatorname{grad}\,\operatorname{div}\vec{\psi} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\psi}] - \rho\frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2} + \vec{\Psi} = \mu\Delta\vec{\psi} - \rho\frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2} + \vec{\Psi},$$

равное нулю на основании (14.5).

3. Резюмируем полученные результаты. Доказано, что любое решение $\vec{u}$ уравнения (14.1), дифференцируемое по пространственным переменным до третьего порядка включительно (и, следовательно, содержащее функцию $\vec{f}$, имеющую первые частные производные по пространственным переменным), может быть представлено в виде (14.2) с функциями φ и $\vec{\psi}$, удовлетворяющими уравнениям (14.4) и (14.5). И наоборот, если $\vec{u}$ имеет вид (14.2), где φ и $\vec{\psi}$ – любые решения уравнений (14.4) и (14.5), имеющие пространственные производные до третьего порядка включительно, то $\vec{u}$ удовлетворяет уравнению (14.1) при $\vec{f}$ из (14.3). В этом смысле как раз и можно говорить об эквивалентности уравнения (14.1) уравнениям (14.4) и (14.5) с классической точки зрения.

Однако фактически указанная эквивалентность имеет место при любой гладкости рассматриваемых решений, в том числе и для любых обобщенных решений уравнения (14.1) и уравнений (14.4) и (14.5). Она вытекает из полученных в п. 1 и 2 результатов, а также из того факта, что любое решение рассматриваемых уравнений может быть представлено в виде предела последовательности классических решений

$$\vec{u}_n = \operatorname{grad}\varphi_n + \operatorname{rot}\vec{\psi}_n$$

наших уравнений, отвечающих последовательностям $\vec{f}_n$, $\vec{\Phi}_n$ и $\vec{\Psi}_n$ сколь угодно гладких "массовых функций". При этом для последних функций должно выполняться равенство

$$\vec{f}_n = \operatorname{grad}\Phi_n + \operatorname{rot}\vec{\Psi}_n .$$

Что касается гладкости поля $\vec{u}_n$, то она оказывается сколь угодно высокой при подходящем выборе функций $\vec{f}_n$ и, следовательно, может удовлетворять требованиям из п. 1. Из эквивалентности обсуждаемых уравнений для $\vec{u}_n$ и φ_n, $\vec{\psi}_n$ при любых значениях n следует их эквивалентность и для предельных функций $\vec{u}$ и $\varphi, \vec{\psi}$, независимо от того, имеют ли последние классический или обобщенный смысл.

§15. Поле источника типа центра давлений

1. В настоящем параграфе начинается рассмотрение конкретных физических задач на распространение волн, вследствие чего представляется полезным сделать краткое замечание общего характера, имеющее отношение ко всему последующему.

При математическом изучении задач физики или техники всегда целесообразно сразу же после постановки задачи осуществлять переход к безразмерным переменным. Это достигается путем введения некоторых характерных для рассматриваемой задачи масштабов l_0 и τ_0 для расстояний и времени и переходом к новым переменным x'_k и t', а также к новым функциям, описывающим течение изучаемого процесса. В математической теории упругости переход к безразмерным переменным совершается на основе формул

$$x'_k = \frac{x_k}{l_0}, \quad (k = 1, 2, 3), \quad t' = \frac{t}{\tau_0}, \quad \vec{u}\,' = \frac{\vec{u}}{l_0} \tag{15.1}$$

с одновременным введением новых величин для описания напряжений, массовых сил, модулей упругости, массовой плотности и т.п. Если вместо прежних $\lambda, \mu, \vec{f}$ и ρ рассматривать величины со штрихами

$$\lambda' = \lambda l_0^2, \quad \mu' = \mu l_0^2, \quad \vec{f'} = \vec{f} l_0^3, \quad \rho' = \rho\frac{l_0^4}{\tau_0^2}, \tag{15.2}$$

то при использовании переменных x'_k, t' и функции $\vec{u}\,'$ из (15.1) все соотношения математического формализма теории упругости останутся неизменными, а уравнение Ламе запишется в прежнем виде

$$(\lambda' + \mu')\mathrm{grad\ div}\,\vec{u}\,' + \mu'\Delta\vec{u}\,' - \rho'\frac{\partial^2\vec{u}\,'}{\partial t'^2} = -\vec{f}\,'. \qquad (15.3)$$

В таком уравнении размерными оказываются лишь величины $\lambda', \mu', \vec{f}'$ и ρ', имеющие размерность “сила”. Дифференциальные же операторы (по x_k' и t'), равно как и вектор смещений $\vec{u}\,'$, безразмерны. Поэтому если разделить все члены уравнения (15.3) на какую-либо постоянную величину $\varkappa$ с размерностью “сила”, то получится безразмерное уравнение в точном смысле этого понятия. Упомянутое деление мы будем предполагать выполненным и будем употреблять для безразмерных переменных и всех прочих величин, входящих в формализм теории, прежние обозначения, без штрихов сверху.

2. При рассмотрении полей простейших точечных источников колебаний будем пользоваться как декартовой, $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, так и сферической r, θ, φ, системами координат; начало последней расположено в некоторой фиксированной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ среды, а радиус-вектор $\vec{M_0M}$ определяет положение переменной точки $M = (x, y, z)$ поля относительно точки M_0. При этом

$$r = |M - M_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}. \qquad (15.4)$$

Если $\vec{u} = \vec{u}(r, \theta, \varphi)$ – поле смещений в упругой среде, то вектор напряжения $\vec{t}_n$ на площадке с нормалью $\vec{n}$ определяется общей формулой (2.5). Нам понадобится выражение для $\vec{t}_n$ на площадках с нормалью $\vec{n} = \vec{r}_1$, где $\vec{r}_1$ – орт радиус-вектора в сферической системе координат. Пользуясь формулами

$$x - x_0 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y - y_0 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z - z_0 = r\cos\theta$$

перехода от сферических к декартовым координатам, а также выражениями (2.7) для составляющих t_{ik} тензора напряжений, нетрудно получить необходимое выражение

$$\vec{t}_r = \lambda\vec{r}_1\,\mathrm{div}\,\vec{u} + 2\mu\left\{\frac{\partial\vec{u}}{\partial r} + \frac{1}{2}[\vec{r}_1 \times \mathrm{rot}\,\vec{u}]\right\}. \qquad (15.5)$$

При этом напомним, что если

$$\vec{u} = u_1\vec{r}_1 + u_\theta\vec{\theta}_1 + u_\varphi\vec{\varphi}_1,$$

где $\vec{u}_1$, $\vec{\theta}_1$, $\vec{\varphi}_1$ – орты сферической координатной системы, то

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{u} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta u_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi},\\ \operatorname{rot}\vec{u} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta u_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right]\vec{r} + \\ +\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(r u_\varphi)}{\partial r}\right]\vec{\theta}_1 + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right]\vec{\varphi}_1.\end{aligned}\right\} \qquad (15.6)$$

3. Пусть в упругой среде, характеризуемой постоянными λ, μ, ρ, находящейся в покое при $t < t_0$, образована полость $r \leqslant \delta$, к поверхности которой в момент $t = t_0$ прикладывается равномерное (гидростатическое) давление

$$p = p_0 q(t - t_0), \qquad (15.7)$$

где $q(\tau) \equiv 0$ при $\tau < 0$. Требуется определить поле $\vec{u}$ упругих смещений при $t > t_0$ в области $r > \delta$.

Из постановки задачи ясно, что поле $\vec{u}$ сферически-симметрично, т.е.

$$\vec{u} = u(r, t - t_0)\vec{r}_1 = \operatorname{grad}\varphi(r, t - t_0) \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{r}_1. \qquad (15.8)$$

Определение же потенциала φ, очевидно, сводится к следующей математической задаче: найти $\varphi = \varphi(r, t - t_0)$ в области $r > \delta$, $t > t_0$ из решения уравнения

$$\Delta\varphi - \frac{1}{v_p^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \qquad \left(v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}\right) \qquad (15.9)$$

при нулевых начальных данных

$$\varphi\big|_{t=t_0} = \dot{\varphi}\big|_{t=t_0} = 0 \qquad (15.10)$$

и граничном условии

$$\vec{t}_r\big|_{r=\delta} \equiv \left\{(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2\lambda}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right\}_{r=\delta}\vec{r}_1 = -p_0 q(t - t_0)\vec{r}_1, \qquad (15.11)$$

значение для $\vec{t}_r$ в котором получено из (15.5) при использовании (15.8) и (15.6).

В случае $\varphi = \varphi(r, t - t_0)$ уравнение (15.9) переписывается в виде

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{1}{v_p^2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

и имеет классическое решение

$$\varphi = \frac{1}{r}\,\Phi\left(t - t_0 - \frac{r-\delta}{v_p}\right), \tag{15.12}$$

содержащее произвольную дважды дифференцируемую функцию Φ. Если при $\tau < 0$ оказывается $\Phi(\tau) \equiv 0$, то нулевые начальные данные из (15.10) выполнены. Остается учесть граничное условие из (15.11), которое, как нетрудно видеть, приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\Phi''(t) + \frac{4\mu}{\rho\delta v_p}\,\Phi'(t) + \frac{4\mu}{\rho\delta^2}\,\Phi(t) = -\frac{p_0\delta}{\rho}\,q(t). \tag{15.13}$$

В предположении представления функции $q(t)$ из (15.7) в форме интеграла Меллина

$$q(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Q(s)e^{st}ds, \quad (\sigma > 0), \tag{15.14}$$

в котором

$$Q(s) = \int\limits_0^\infty q(t)e^{-st}dt, \quad (s = \sigma + i\infty),$$

решение уравнения (15.13), подчиненное условию

$$\Phi(0) = \Phi'(0) = 0,$$

удобно искать в форме аналогичного же интеграла

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X(s)e^{st}ds. \tag{15.15}$$

Подстановка (15.15) в (15.13) приводит для функции $X(s)$ к алгебраическому уравнению, из которого следует

$$X(s) = \frac{-p_0\delta}{\rho}\,\frac{Q(s)}{(s+\alpha-i\beta)(s+\alpha+i\beta)}, \tag{15.16}$$

где

$$\alpha = \frac{2\mu}{\rho v_p \delta}, \quad \beta = \alpha\sqrt{\frac{\lambda+\mu}{\mu}}.$$

Подстановка значения $X(s)$ под знак интеграла (15.15) приводит (при учете теоремы о свертке) к представлению функции $\Phi(t)$ в следующем окончательном виде

$$\Phi(t) = -\frac{p_0}{\delta}\int\limits_0^t q(t-\tau)e^{-\alpha\tau}\frac{\sin\beta\tau}{\beta}\,d\tau. \tag{15.17}$$

Таким образом, при фиксированном радиусе $\delta > 0$ полости $r \leqslant \delta$, к границе которой прикладывается давление из (15.7), потенциал $\varphi(r,t)$ поля вне полости $(r \geqslant \delta)$ определяется формулой (15.12) при достаточно сложной функции $\Phi(t)$ из (15.17).

Для перехода же к полю, отвечающему сосредоточенному источнику типа центра давления, нужно рассмотреть процесс $\delta \to 0$, $p_0 \to \infty$, например, такой, что остается нормированной на единицу величина

$$\frac{p_0\delta^3}{4\mu} = 1, \quad (\delta \to 0,\, p_0 \to \infty). \tag{15.18}$$

При этом оказывается

$$\frac{p_0\delta}{\rho} = \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\,\alpha^2, \quad \beta = \alpha\sqrt{\frac{\lambda+\mu}{\mu}}, \quad \alpha \to \infty,$$

и выполняется следующее (легко доказуемое) предельное соотношение

$$\lim_{\alpha\to\infty}\alpha^2\int\limits_0^t q(t-\tau)e^{-\alpha\tau}\frac{\sin\beta\tau}{\beta}\,d\tau = \lim_{\alpha\to\infty} q(t)\alpha^2\int\limits_0^\infty e^{-\alpha\tau}\frac{\sin\beta\tau}{\beta}\,d\tau =$$

$$= q(t)\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\,q(t),$$

(содержащее в правой части известный табличный интеграл) справедливое при любой непрерывной функции $q(t)$.

{*Пояснение.* В силу непрерывности $q(t)$ при любом малом $\varepsilon > 0$ существует такое $\Delta > 0$, что при $0 < \tau < \Delta$ оказывается

$$|q(t-\tau) - q(t)| < \varepsilon.$$

При указанном выборе ε и Δ, при $t > \Delta$ справедливо равенство

$$\alpha^2 \int\limits_0^t q(t-\tau) e^{-\alpha\tau} \frac{\sin\beta\tau}{\beta}\, d\tau = q(t)\alpha^2 \int\limits_0^\Delta e^{-\alpha\tau} \frac{\sin\beta\tau}{\beta}\, d\tau +$$

$$+\alpha^2 \int\limits_0^\Delta [q(t-\tau) - q(t)] e^{-\alpha\tau} \frac{\sin\beta\tau}{\beta}\, d\tau + \alpha^2 \int\limits_\Delta^t q(t-\tau) e^{-\alpha\tau} \frac{\sin\beta\tau}{\beta}\, d\tau. \quad \text{(I)}$$

Второе и третье слагаемые правой части здесь оцениваются по модулю соответственно выражениями

$$\varepsilon\frac{\alpha^2}{\beta} \int\limits_0^\Delta e^{-\alpha\tau} d\tau < 2\varepsilon\frac{\alpha}{\beta} = 2\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}\,\varepsilon \quad \text{и} \quad 2M\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}\, e^{-\alpha\Delta},$$

где $|q(t)| < M$. Первое же слагаемое представляется разностью интегралов

$$q(t)\alpha^2 \int\limits_0^\infty e^{-\alpha\tau} \frac{\sin\beta\tau}{\beta}\, d\tau - q(t)\alpha^2 \int\limits_\Delta^\infty e^{-\alpha\tau} \frac{\sin\beta\tau}{\beta}\, d\tau, \qquad \text{(II)}$$

в которой второй член (вычитаемое) оценивается величиной

$$M\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}\, e^{-\alpha\Delta}.$$

Дальнейшие рассуждения стандартны. При выборе сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ фиксируется величина Δ. Затем к бесконечности устремляется $\alpha \to \infty$ и замечается, что (на основании приведенных оценок) второе и третье слагаемые из (I), равно как и второе слагаемое из (II), стремится к нулю.}

Таким образом, из (15.17) и (15.18) в указанном пределе (при $\delta \to 0$ и $p_0 \to \infty$) получается равенство

$$\Phi(t) = -q(t), \qquad (15.19)$$

причем изучаемые (далее) поля $\varphi(r,t-t_0)$ и $\vec{u}(r,t-t_0)$ уже можно рассматривать при любых значениях $r>0$ и $t>t_0$.

На основании изложенного ясно, что потенциал φ и отвечающее ему поле смещений $\vec{u}$ рассматриваемой задачи могут быть представлены формулами

$$\varphi(r,t-t_0)=-\frac{1}{r}\,q\left(t-t_0-\frac{r}{v_p}\right)\varepsilon\left(t-t_0-\frac{r}{v_p}\right),$$
$$\vec{u}(r,t-t_0)=\left[\frac{q'(t-t_0-r/v_p)}{v_p r}+\frac{q(t-t_0-r/v_p)}{r^2}\right]\varepsilon\left(t-t_0-\frac{r}{v_p}\right)\vec{r}_1, \tag{15.20}$$

в которых

$$v_p=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \tag{15.21}$$

– скорость распространения продольных волн, а $\varepsilon(\tau)$ – функция Хевисайда (9.6), введенная для того, чтобы более отчетливо учесть факт включения воздействия (15.7) в момент времени $t=t_0$. Ее можно было бы не выписывать (заменив единицей), если помнить, что в (15.7) предполагалось $q(\tau)\equiv 0$ при $t<0$.

Поле смещений (15.20) с потенциалом φ называется полем, отвечающим точечному источнику типа центра давлений, с моментом m, определяемым формулой (15.40).

Значения φ и $\vec{u}$ отличны от тождественного нуля и даются выражениями из (15.20) при $\varepsilon=1$, если $t-t_0-r/v_p>0$. Если же $t-t_0-r/v_p\leqslant 0$, то $\varphi\equiv 0$ и $\vec{u}\equiv 0$. Таким образом, поле (15.20) имеет передний фронт

$$r=v_p(t-t_0), \tag{15.22}$$

распространяющийся со скоростью (15.21) и удовлетворяющий уравнению (5.6′) для характеристик продольного типа. Это согласуется с предположением о том, что при $t<t_0$ среда находилась в покое, а воздействие (15.7) было включено в точке $M=M_0$ (для которой $r=0$) лишь в момент $t=t_0$. Если при $\tau>0$ функция $q(\tau)$ и ее производные всех порядков не имеют разрывов, то фронт (15.22) единственен.

Нетрудно видеть, что при функциях $q(\tau)$, непрерывных вместе с первой производной и имеющих разрывы во второй производной, поле смещений $\vec{u}$ из (15.20) принадлежит к классу решений уравнения (15.3) с правильными сильными разрывами. Прямая проверка такого утверждения легко производится на основе $(7.2)^2$ и (7.3) и формул (15.11) и (15.20).

Однако проще убедиться: 1) что (15.22) является характеристикой продольного типа, 2) что на (15.22) выполняются кинематические условия совместности и 3) что при переходе через (15.22) испытывают разрыв лишь производные по нормали (т.е. по τ) и времени t от нормальной составляющей поля. Выполнимость таких условий очевидна.

Остается лишь отметить, что в случае произвольной функции $q(\tau)$ поле $\vec{u}(r, t - t_0)$ можно рассматривать как обобщенное решение обсуждаемой задачи.

4. Покажем теперь, что функцию $\varphi(\tau)$ из (15.20) можно толковать как решение неоднородного волнового уравнения

$$\Delta\varphi - \frac{1}{v_p^2}\ddot{\varphi} = 4\pi q(t - t_0)\varepsilon(t - t_0)\delta(M - M_0), \tag{15.23}$$

в котором $\delta(M - M_0)$ – трехмерная δ-функция Дирака, а $\varepsilon(\tau)$ – функция Хевисайда, подчиненное при $r = |M - M_0| > 0$ нулевым начальным данным

$$\varphi\big|_{t=t_0} = \dot{\varphi}\big|_{t=t_0} = 0. \tag{15.24}$$

При этом, как и в любых других задачах математической физики, формулировка которых содержит δ-функцию Дирака, под решением уравнения (15.23) будем понимать результат предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ от решения $\varphi_\varepsilon(r, t - t_0)$ такого же уравнения, в правой части которого $\delta(M - M_0)$ заменена на достаточно гладкую функцию $\delta_\varepsilon(M - M_0; n_0)$ из (9.9), обладающую, очевидно, свойствами: 1) $\delta_\varepsilon(M - M_0; n_0) \to 0$ равномерно в любой замкнутой области V_0, не содержащей точки M_0, и

$$2) \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(M)\delta_\varepsilon(M - M_0; n_0)dM = \psi(M_0) \tag{15.25}$$

для любой непрерывной функции $\psi(M)$.

---

[2] Или (5.6).

Будем исходить из известного классического результата, утверждающего, что решение уравнения

$$\Delta\varphi_\varepsilon - \frac{1}{v_p^2}\ddot{\varphi}_\varepsilon = 4\pi F_\varepsilon(x,y,z,t-t_0)\varepsilon(t-t_0), \tag{15.26}$$

подчиненное нулевым начальным данным при $t = t_0$, дается формулой[3]

$$\varphi_\varepsilon(x,y,z,t-t_0) = -\iiint\limits_{r'<v_p(t-t_0)} \frac{F_\varepsilon(\xi,\eta,\zeta,t-t_0-r'/v_p)}{r'}\,dV', \tag{15.27}$$

где

$$r' = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}. \tag{15.28}$$

При этом решение (15.27) имеет классический смысл, если, например, производные от F_ε по x, y, z и t непрерывны. Положим

$$F_\varepsilon(x,y,z,t-t_0) = \delta_\varepsilon(M-M_0;n_0)q(t-t_0), \tag{15.29}$$

где $\delta_\varepsilon(M-M_0;n_0)$ при $n_0 \geqslant 1$ – функция из (9.9), удовлетворяющая соотношению (15.25), а функция $q(\tau)$ непрерывна с первой и второй производными. Если считать, что $q(\tau)\equiv 0$ при $\tau < 0$, то при условии (15.29) формулу (15.27) можно переписать в виде

$$\varphi_\varepsilon(x,y,z,t-t_0) = -\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(M-M_0;n_0)\frac{q(t-t_0-r'/v_p)}{r'}\,dM', \tag{15.30}$$

где $M(\xi,\eta,\zeta)$ – переменная точка интегрирования. Решение (15.30) имеет классический смысл, а для любой точки $M \neq M_0$ при $\varepsilon \to 0$, очевидно, оказывается

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon(x,y,z,t-t_0) = \varphi(r,t-t_0), \tag{15.31}$$

где $\varphi(r,t-t_0)$ обозначает функцию из (15.20). Нетрудно проверить, во-первых, что предел (15.31) не зависит от частного вида функции $\delta_\varepsilon(M-M_0;n_0)$, удовлетворяющей соотношению (15.25), и, во-вторых, что в области $r \equiv |M-M_0| \geqslant \delta > 0$ стремление $\varphi_\varepsilon \to \varphi$, равно как и их первых частных производных, оказывается равномерным. Итак, высказанное в начале п. 4 утверждение доказано.

[3] См., например, т. 2 "Курс высшей математики" В. И. Смирнова.

В заключение п. 4 заметим, что исходя из выражения (15.29), содержащего функцию $q(t-t_0)$ с указанной выше гладкостью, мы рассмотрели предельный переход при $\varepsilon \to 0$ в формуле (15.27) и пришли к решению φ из (15.20) уравнения (15.23), подчиненному нулевым начальным данным и имеющему классический смысл в области $r > 0$. Полагая теперь $q(\tau) = \delta_\varepsilon(\tau; m_0)$, где $\delta_\varepsilon(\tau; m_0)$ – функция из (9.10) при $m_0 \geqslant 2$, и рассматривая предельный переход при $\varepsilon \to 0$, убеждаемся, что подчиненное нулевым начальным данным при $t = \tau$ решение уравнения

$$\Delta\varphi - \frac{1}{v_p^2}\ddot{\varphi} = 4\pi\delta(t-\tau)\delta(M - M_0)$$

в области $r > 0$ определяется формулой

$$\varphi(r, t-\tau) = -\frac{1}{r}\,\delta\left(t - \tau - \frac{r}{v_p}\right). \qquad (15.32)$$

Такое решение имеет явно выраженный обобщенный смысл. Однако в соответствии с изложенным в п. 8 §9 оно позволяет получать классические решения путем умножения (15.32) на достаточно гладкую функцию плотности с последующим интегрированием по M_0 и τ. Действительно, пусть $F_\varepsilon(x, y, z; \tau - t_0) \equiv F_\varepsilon(M, \tau - t_0)$ непрерывна и удовлетворяет условию $F_\varepsilon(M, \tau - t_0) \equiv 0$, если $\tau < t_0$. Тогда в соответствии с формулой

$$\iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} F_\varepsilon(M_0; \tau - t_0)\delta(t-\tau)\delta(M - M_0)dM_0 d\tau = F_\varepsilon(M; t - t_0)\varepsilon(t - t_0),$$

где множитель $\varepsilon(t - t_0)$ можно было бы заменить единицей, функция

$$\varphi_\varepsilon(x, y, z; t - t_0) = -\iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} F_\varepsilon(M_0; \tau - t_0)\varphi(r, t-\tau)dM_0 d\tau =$$

$$= -\iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} F_\varepsilon(M_0; \tau - t_0)\frac{\delta(t - \tau - r/v_p)}{r}\,dM_0 d\tau =$$

$$= -\iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r}\,F_\varepsilon(M_0; t - t_0 - r/v_p)dM_0 =$$

$$= \iiint\limits_{r<v_p(t-t_0)} \frac{1}{r} F_\varepsilon(M_0; t-t_0-r/v_p)dM_0,$$

совпадающая с (15.27), оказывается решением уравнения (15.26), удовлетворяющим нулевым начальным условиям при $t = t_0$. Такое решение имеет классический смысл, если F_ε – достаточно гладкая функция.

5. Совершенно так же, как и в п. 4, можно утверждать, что поле $\vec{u}(r, t-t_0)$ из (15.20) является решением неоднородного уравнения Ламе

$$\overrightarrow{\mathrm{Div}}\, t_{ik} - \rho\ddot{\vec{u}} \equiv (\lambda + 2\mu)\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\, \vec{u} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, \vec{u} - \rho\ddot{\vec{u}} =$$

$$= -\vec{f}(M, t) \equiv 4\pi(\lambda + 2\mu)q(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)\mathrm{grad}\, \delta(M - M_0), \quad (15.33)$$

подчиненным в области $r = |M - M_0| > 0$ нулевым начальным условиям

$$\vec{u}\big|_{t=t_0} = \dot{\vec{u}}\big|_{t=t_0} = 0. \quad (15.34)$$

В правую часть (15.33) входит обобщенная функция $\mathrm{grad}\, \delta(M - M_0)$, вследствие чего решение уравнения (15.33) следует понимать как предел от последовательности $\vec{u}_\varepsilon(r, t-t_0)$ классических решений такого же уравнения (15.33) при условии, что в нем $\delta(M - M_0)$ заменена на достаточно гладкую функцию $\delta_\varepsilon(M - M_0; n_0)$ из (9.9) и что эти решения подчинены начальным условиям (15.34).

Очевидно, что векторные функции $\vec{u}_\varepsilon$ представляются в виде

$$\vec{u}_\varepsilon(M, M_0, t-t_0) = \mathrm{grad}\, \varphi_\varepsilon(x, y, z, t-t_0), \quad (15.35)$$

где значение φ_ε дается формулой (15.30). Для искомого же решения задачи (15.33), (15.34) будем иметь

$$\vec{u}(r, t-t_0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \vec{u}_\varepsilon(M, M_0, t-t_0). \quad (15.36)$$

В предположении непрерывности функции $q(\tau)$ и ее первой производной на основании формул (15.35) и (15.30) совершенно элементарно (путем введения операции grad под знак интеграла в (15.30)) доказывается, во-первых, что при $r = |M - M_0| > 0$ предел (15.36) существует и совпадает с выражением (15.20), и, во-вторых, что этот предел не зависит от частного выбора вида функций $\delta_\varepsilon(M - M_0; n_0)$ из (9.9), обладающих свойством (15.25). Итак, утверждение доказано.

6. В последующем нам понадобится соотношение[4]

$$\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{v}(M)\mathrm{grad}\,\delta(M-M_0)dM = \mathrm{div}\,\vec{v}\,\big|_{M=M_0}, \qquad (15.37)$$

справедливое для произвольного дифференцируемого поля $\vec{v}(M)$, у которого $\mathrm{div}\,\vec{v}$ оказывается непрерывной функцией.

Для вывода формулы (15.37) выберем функцию $\delta_\varepsilon(M-M_0;n_0)$ из (9.9) при $n_0 \geqslant 1$ (т.е. δ_ε предполагается непрерывной с первыми частными производными во всем безграничном пространстве) и воспользуемся очевидным тождеством

$$\mathrm{div}[\vec{v}(M)\delta_\varepsilon(\Delta M;n_0)] = \vec{v}(M)\mathrm{grad}\,\delta_\varepsilon(\Delta M;n_0) + \mathrm{div}\,\vec{v}(M)\delta_\varepsilon(\Delta M;n_0),$$

где $\Delta M = M - M_0$.

Интегрируя это тождество по трехмерному пространству переменной M и учитывая, что согласно (9.9), функция $\delta_\varepsilon(M - M_0;n_0)$ отлична от тождественного нуля лишь при $|M-M_0|<\varepsilon$ (причем, если $|M-M_0| = \varepsilon$, то $\delta_\varepsilon(M-M_0;n_0) = 0$ вследствие непрерывности), получаем

$$\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{v}(M)\cdot\mathrm{grad}\,\delta_\varepsilon(M-M_0;n_0)dM + \\ + \iiint\limits_{|M-M_0|<\varepsilon} \mathrm{div}\,\vec{v}(M)\cdot\delta_\varepsilon(M-M_0;n_0)dM = 0.$$

Поэтому

$$\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{v}(M)\cdot\mathrm{grad}\,\delta(M-M_0)dM \equiv \\ \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{v}(M)\mathrm{grad}\,\delta_\varepsilon(M-M_0;n_0)dM = \\ = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-\iiint\limits_{|M-M_0|<\varepsilon} \mathrm{div}\,\vec{v}(M)\delta_\varepsilon(M-M_0;n_0)dM\right\} = -\,\mathrm{div}\,\vec{v}\big|_{M=M_0}$$

[4]Соотношение (15.37) справедливо, если интегрирование выполняется по любой области V, содержащей точку M_0 строго внутри себя. Это ясно из вывода формулы.

в силу предполагаемой непрерывности $\operatorname{div}\vec{v}(M)$ и свойства (15.22) функции $\delta_\varepsilon(M-M_0;n_0)$.

7. В заключение полезно остановиться на наглядном механическом толковании воздействий, определяемых векторами плотности массовых сил, содержащими обобщенную функцию $\operatorname{grad}\delta(M-M_0)$. При выяснении этого вопроса естественно воспользоваться отмеченным в п. 5 произволом в выборе вида гладких функций $\delta_\varepsilon(M-M_0;n_0)$ из (9.9), которыми заменяется функция $\delta(M-M_0)$ в правой части уравнения (15.33) при построении последовательности классических решений $\vec{u}_\varepsilon(M,M_0t-t_0)$. В нашем случае целесообразно считать, что выбираемые функции δ_ε обладают сферической симметрией, вследствие чего

$$\delta_\varepsilon(M-M_0;n_0)\equiv\delta_\varepsilon(r) \quad \text{и} \quad \operatorname{grad}\delta_\varepsilon(M-M_0;n_0)=\frac{\partial\delta_\varepsilon(r)}{\partial r}\,\vec{r}_1, \quad (15.38)$$

где $\vec{r}_1$ – орт радиуса-вектора $\overrightarrow{M_0M}$. Для "момента сил", распределенных с непрерывной плотностью (15.38), имеем

$$\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\vec{r}\operatorname{grad}\delta_\varepsilon(r)dV=\iiint\limits_{r\leqslant\varepsilon}\operatorname{div}(\vec{r}\delta_\varepsilon)dV-$$
$$-\iiint\limits_{r\leqslant\varepsilon}\delta_\varepsilon(r)\operatorname{div}\vec{r}dV=-3\iiint\limits_{r\leqslant\varepsilon}\delta_\varepsilon(r)dV=-3. \quad (15.39)$$

Для момента же сил, распределенных с плотностью $\vec{f}$, входящей в правую часть уравнения (15.33), получается выражение

$$m=12\pi(\lambda+2\mu)q(t-t_0). \quad (15.40)$$

Таким образом, точечный источник колебаний, при котором определяется поле $\vec{u}(r,t-t_0)$ из задачи (15.33), (15.34), можно называть центром давлений с моментом m из (15.40).

Следует отметить, что в задаче (15.33), (15.34) поле $\vec{u}$, имеющее вид (15.20), определяется в результате приложения массовых сил с плотностью из правой части (15.33). При этом, естественно, предполагается, что сплошность упругой среды не нарушается ни в одной точке пространства. При получении того же самого поля смещений (15.20) из задачи для внешности полости

$r \leqslant \delta$ (после предельного перехода (15.18)) в точке $r = 0$ сплошность упругой среды оказывается нарушенной[5]. Это, в частности является причиной того, что момент сил (15.7), прикладываемых к границе плости, после предельного перехода (15.16) оказывается равным $16\pi\mu q(t - t_0)$ и не совпадает с (15.40).

Помимо этого полезно упомянуть и о терминах "ближняя" и "дальняя" зоны источника, происхождение которых восходит к полям стационарных сосредоточенных волновых источников, у которых $q(t) = A \exp i\omega t$.

Если воспользоваться формулой

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega}\, v \tag{15.41}$$

связывающей частоту ω колебаний волны с ее длиной (волны) λ, то представление поля смещений $\vec{u}(r, t-t_0)$ из (15.20) может быть переписано в виде

$$\vec{u} = \left[\frac{2\pi}{r\lambda_p}\, i + \frac{1}{r^2}\right] A \exp i\omega(t - t_0 - r/v_p)\vec{r}_1. \tag{15.42}$$

При этом выясняется, что в области выполнения неравенства

$$r \ll \lambda_p \tag{15.43}$$

(ближняя зона), преобладающими оказываются вторые слагаемые квадратных скобок из (15.20) и (15.42), причем поле имеет порядок $O(r^{-2})$. Если же оказывается

$$r \gg \lambda \tag{15.44}$$

(дальняя зона), то "главным" оказывается первое слагаемое упомянутых формул, и структура поля определяется выражениями вида

$$\vec{u} \sim \frac{c}{r}\, q'[t - t_0 r/v]\vec{r}_1.$$

§16. Поля источников типа центров вращения. Фундаментальные решения Вольтерра и их применение

В настоящем параграфе сначала строятся элементарные поперечные волновые поля, возбуждаемые точечными источниками

---

[5] И притом именно в той точке M_0, в которой к среде прикладывается мощное сосредоточенное воздействие.

вращательного типа, начинающими действовать в точке M_0 при $t = t_0$. Эти поля также имеют характер расходящихся волн, но распространяющихся со скоростью v_s из (16.3) и заполняющих область сферы $r \leqslant v_s(t - t_0)$. Затем конкретизируется вид функции $q(t)$, определяющей зависимость интенсивности источников от времени, и вводятся в рассмотрение так называемые фундаментальные (сингулярные) решения Вольтерра уравнения (14.1), которые описывают некоторые сходящиеся к точке M_0 волновые поля.

1. Рассматривая безграничное пространство точек $M = (x, y, z)$, построим при $t > t_0$ и $r \equiv |M - M_0| > 0$ решение уравнения

$$\Delta\psi - \frac{1}{v_s^2}\ddot{\psi} = 4\pi q(t - t_0)\varepsilon(t - t_0)\delta(M - M_0), \tag{16.1}$$

подчиненное нулевым начальным данным

$$\psi\big|_{t=t_0} = \dot{\psi}\big|_{t=t_0} = 0. \tag{16.2}$$

Здесь $\varepsilon(t - t_0)$ и $\delta(M - M_0)$ функции Хевисайда и Дирака, $r = |M - M_0|$ определяется формулой (15.4), а

$$u_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \mathrm{const} \tag{16.3}$$

обозначает скорость распространения поперечных волн в однородной и изотропной упругой среде.

Поставленная задача эквивалентна задаче из п. 4 §15, вследствие чего можно утверждать, что ее решение представляется формулой

$$\psi(r, t - t_0) = \frac{1}{r}\, q\left(t - t_0 - \frac{r}{v_s}\right) \varepsilon\left(t - t_0 - \frac{r}{v_s}\right), \tag{16.4}$$

аналогичной формуле (15.20) для φ.

Подразумевая под $\vec{i}_1$, $\vec{i}_2$, $\vec{i}_3$ орты $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ декартовой системы координат, определим три вектора смещений

$$\vec{u}_k(r, t - t_0) = \mathrm{rot}(\psi\vec{i}_k) = \frac{\partial\psi}{\partial r}[\vec{r}_1 \times \vec{i}_i] \tag{16.5}$$

соответственно значениям $k = 1, 2$ и 3, где $\vec{r}_1$ обозначает орт радиус-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{M_0 M}$ точки M относительно точки M_0, в которой расположен источник.

Совершенно так же, как и в п. 5 §15, не представляет труда убедиться, что векторы (16.5) являются решениями неоднородного уравнения Ламе

$$\overrightarrow{\mathrm{Div}}\, t_{ik} - \rho \frac{\partial^2 \vec{u}_k}{\partial t^2} \equiv (\lambda + 2\mu)\mathrm{grad\ div}\, \vec{u}_k - \mu\, \mathrm{rot\,rot}\, \vec{u}_k - \rho \ddot{\vec{u}}_k = -\vec{f}_k \equiv$$

$$\equiv 4\pi\mu q(t - t_0)\varepsilon(t - t_0)\, \mathrm{rot}[\vec{i}_k \delta(M - M_0)], \qquad (16.6)$$

подчиненными нулевым данным

$$\vec{u}_k\big|_{t=t_0} = \dot{\vec{u}}_k\big|_{t=t_0} = 0 \qquad (16.7)$$

при $r > 0$. При этом, как и в §15, решение задачи (16.6), (16.7) следует рассматривать в смысле предела от последовательности решений такой же задачи, в которой $\delta(M - M_0)$ заменена на гладкую функцию $\delta_\varepsilon(M - M_0; n_0)$ из (9.9). Как и в п. 5 §15, легко доказывается, что указанный предел не зависит от частного вида выбираемых функций $\delta_\varepsilon(M - M_0; n_0)$, удовлетворяющих соотношению (15.25). Явное же выражение $\vec{u}_k$ из (16.5) имеет вид

$$\vec{u}_k(r, t - t_0) = \left[\frac{q'(\tau)}{v_s r} + \frac{q(\tau)}{r^2}\right]\varepsilon(\tau)[\vec{r}_1 \times \vec{i}_k], \qquad (16.8)$$

где ради краткости обозначено

$$\tau = t - t_0 - \frac{r}{v_s}. \qquad (16.9)$$

Передним фронтом волнового поля (16.8) оказывается расширяющаяся со временем трехмерная сфера

$$\tau = 0 \quad \text{или} \quad r = v_s(t - t_0), \qquad (16.10)$$

впереди которой, т.е. при $r > v_s(t - t_0)$, царит покой. Если $q(\tau)$ и ее производные имеют разрывы лишь при $\tau = 0$, то фронт (16.10) единственен.

Нетрудно видеть, что в случае функций $q(\tau)$, непрерывных с первой производной и имеющих разрывы во второй производной, поля (16.8), как и (15.20), удовлетворяют условиям совместности и относятся к классу решений уравнения Ламе с правильными сильными разрывами.

2. Для установления физического смысла полей (16.8) выпишем плотность

$$\vec{f}_k = -4\pi\mu q(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)\,\mathrm{rot}[\vec{i}_k\delta(M-M_0)] \tag{16.11}$$

массовых сил, входящую в уравнение (16.6), и воспользуемся тем обстоятельством, что (16.11) следует рассматривать как результат предельного перехода от гладкой плотности массовых сил вида

$$-4\pi\mu q(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)\,\mathrm{rot}[\vec{i}_k\delta_\varepsilon(M-M_0;n_0)], \tag{16.12}$$

где $\delta_\varepsilon(M-M_0;n_0)$ – функция из (9.9). При этом из-за упоминавшегося в п. 1 произвола в выборе частного вида функций $\delta_\varepsilon(M-M_0;n_0)$ мы вправе сейчас считать, что δ_ε обладает сферической симметрией, т.е. $\delta_\varepsilon(M-M_0;n_0)=\delta_\varepsilon(r)$, где r имеет значение из (15.4).

Рассмотрим плотность (16.12), например при индексе $k=3$, когда $\vec{i}_3=\vec{k}$ обозначает орт оси Oz нашей декартовой системы координат.

Вследствие равенства

$$\mathrm{rot}[\vec{k}\delta_\varepsilon(r)] = [\mathrm{grad}\,\delta_\varepsilon(r)\times\vec{k}] = -\frac{\partial\delta_\varepsilon(r)}{\partial r}\,\sin\theta\vec{\varphi}_1,$$

(в котором θ – полярный угол, $\vec{\varphi}_1$ – орт переменной φ сферической системы координат из п. 2 §15) ясно, что (16.12) (при $k=3$) оказывается плотностью сил, приложенных по касательным к окружностям (с центрами в точках на оси Oz), расположенным в плоскости $z=\mathrm{const}$ сечения сферы $r\leqslant\varepsilon$.

Суммарный момент вращения этих сил определяется вектором

$$\vec{m}_3 = -4\pi\mu q(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}[\vec{r}\times[\mathrm{grad}\,\delta_\varepsilon(r)\times\vec{k}]]dV = m\vec{k}, \tag{16.13}$$

направленным по оси Oz. Если воспользоваться формулой

$$\begin{aligned}[\vec{r}\times[\mathrm{grad}\,\delta_\varepsilon\times\vec{k}]] &= (\vec{r}\vec{k})\mathrm{grad}\,\delta_\varepsilon - \vec{k}(\vec{r}\mathrm{grad}\,\delta_\varepsilon) = \\ &= z\mathrm{grad}\,\delta_\varepsilon(r) - \vec{k}(\vec{r}\mathrm{grad}\,\delta_\varepsilon(r))\end{aligned}$$

и произвести выкладки, аналогичные выкладкам в формуле (15.39), то для m из (16.13) получится следующее выражение:

$$m = 8\pi\mu q(t-t_0)\varepsilon(t-t_0). \tag{16.14}$$

Таким образом, воздействие с плотностью массовой силы (16.11) можно назвать точечным вращательным воздействием с моментом вращения

$$\vec{m}_k = m\vec{i}_k,$$

где $k = 1, 2, 3$, а m определяется формулой (16.14).

3. В последующем нам понадобится формула

$$\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{v}(M)\operatorname{rot}[\vec{i}_k\delta(M - M_0)]dM = (\vec{i}_k \operatorname{rot}\vec{v})\big|_{M=M_0} \qquad (16.15)$$

при $k = 1, 2, 3$, справедливая в случае произвольного дифференцируемого векторного поля $\vec{v}$, у которого $\operatorname{rot}\vec{v}$ оказывается непрерывной функцией[6].

Для вывода (16.15) нужно выбрать функцию $\delta_\varepsilon(M - M_0; n_0)$ из (9.9) при $n_0 \geqslant 1$ в форме (15.38) и воспользоваться известным равенством

$$\operatorname{div}[\vec{A} \times \vec{B}] = \vec{B}\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\operatorname{rot}\vec{B},$$

в котором следует положить $\vec{A} = \vec{v}(M)$ и $\vec{B} = \vec{i}_k\delta_\varepsilon(M - M_0; n_0)$. Вследствие того обстоятельства, что $\delta_\varepsilon(M - M_0; n_0) \equiv 0$ при $r \equiv |M - M_0| \geqslant \varepsilon$, очевидно

$$\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{v}(M)\operatorname{rot}[\vec{i}_k\delta_\varepsilon(M - M_0; n_0)]dM =$$

$$= \iiint\limits_{r\leqslant\varepsilon} \vec{v}(M)\operatorname{rot}[\vec{i}_k\delta_\varepsilon(M - M_0; n_0)]dM =$$

$$\iiint\limits_{r\leqslant\varepsilon} (\vec{i}_k \operatorname{rot}\vec{v})\delta_\varepsilon(M - M_0; n_0)]dM - \iint\limits_{r=\varepsilon} [\vec{v} \times \vec{i}_k]\delta_\varepsilon(M - M_0; n_0)dS =$$

$$\iiint\limits_{r\leqslant\varepsilon} (\vec{i}_k \operatorname{rot}\vec{v})\delta_\varepsilon(M - M_0; n_0)]dM.$$

[6] Формула справедлива при интегрировании по любой области V, содержащей точку M_0 внутри себя. Это ясно из вывода.

Отсюда, при учете (15.25) и предположенной непрерывности $\operatorname{rot}\vec{v}$, в пределе при $\varepsilon \to 0$ получается формула

$$\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{v}(M)\operatorname{rot}[\vec{i}_k\delta_\varepsilon(M-M_0;n_0)]dM \equiv$$

$$\equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{v}(M)\operatorname{rot}[\vec{i}_k\delta_\varepsilon(M-M_0;n_0)]dM = (\vec{i}_k\operatorname{rot}\vec{v})\big|_{M=M_0},$$

совпадающая с (16.15).

4. Резюмируем результаты, полученные при рассмотрении двух простейших типов источников колебаний, причем будем далее считать, что зависимость интенсивности источников от времени характеризуется функцией

$$q(\tau) = \tau^2.$$

Поля точечных источников мы определяли как решения неоднородного уравнения Ламе

$$\overrightarrow{\operatorname{Div}}\, t_{ik} - \rho\ddot{\vec{u}} = -\vec{f}(r, t-t_0) \tag{16.16}$$

в безграничной среде при $t > t_0$, подчиненные при $r \equiv |M - M_0| > 0$ нулевым начальным данным

$$\vec{u}\big|_{t=t_0} = \dot{\vec{u}}\big|_{t=t_0} = 0. \tag{16.17}$$

При этом применялись обозначения

$$\overrightarrow{M_0M} = r\vec{r}_1, \quad |M-M_0| = r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

где $M = (x,y,z)$ и $M_0 = (x_0,y_0,z_0)$ – соответственно переменная точка поля и точка расположения источника. Величина $\vec{r}_1$ определяла единичный вектор направления из точки M_0 в точку M.

Было показано следующее.

а. В случае источника типа центра давления поле смещений $\vec{u} = \vec{u}_p(r, t-t_0)$ определяется из задачи (16.16), (16.17) при плотности массовых сил

$$\vec{f} = \vec{f}_p \equiv -4\pi(\lambda+2\mu)(t-t_0)^2\varepsilon(t-t_0)\operatorname{grad}\delta(M-M_0), \tag{16.18}$$

где $\varepsilon(\tau)$ – функция Хевисайда, а $\delta(M-M_0)$ – трехмерная функция Дирака. Возбуждаемое источником (16.18) поле смещений дается формулой

$$\vec{u}_p(r,t-t_0)=\left[\frac{(t-t_0)^2}{r^2}-\frac{1}{v_p^2}\right]\varepsilon\left(t-t_0-\frac{r}{v_p}\right)\vec{r}_1 \tag{16.19}$$

и описывает расходящуюся сферическую волну со сферическим фронтом $r=v_p(t-t_0)$, впереди которого царит покой, т.е.

$$\vec{u}_p(r,t-t_0)\equiv 0, \quad \text{если} \quad r>v_p(t-t_0). \tag{16.20}$$

Векторное поле (16.19) удовлетворяет кинематическим и динамическим условиям совместности (см. §5).

b. В случае источников типа центров вращения рассматриваются три различных вектора плотности массовых сил, а именно:

$$\vec{f}=\vec{f}_k\equiv -4\pi\mu(t-t_0)^2\varepsilon(t-t_0)\,\mathrm{rot}[\vec{i}_k\delta(M-M_0)] \tag{16.21}$$

при $k=1,2,3$. Возбуждаемое каждым из таких источников волновое поле характеризуется вектором смещений

$$\vec{u}_k(r,t-t_0)=\left[\frac{(t-t_0)^2}{r^2}-\frac{1}{v_s^2}\right]\varepsilon\left(t-t_0-\frac{r}{v_s}\right)[\vec{r}_1\times\vec{i}_k], \tag{16.22}$$

описывающим расходящуюся поперечную волну со сферическим фронтом $r=v_s(t-t_0)$, впереди которого царит покой, т.е.

$$\vec{u}_k(r,t-t_0)\equiv 0, \quad \text{если} \quad r>v_s(t-t_0). \tag{16.23}$$

Векторные поля (16.22) также удовлетворяют кинематическим и динамическим условиям совместности.

5. Поля смещений (16.19) и (16.22) являются исходными для определения так называемых фундаментальных решений Вольтерра в теории упругости. Из вида уравнений Ламе (16.16) или (14.1) следует, что если найдено какое-либо решение $\vec{u}(M,t-t_0)$ этого уравнения, отвечающее плотности массовых сил $\vec{f}(M,t-t_0)$, то поле смещений $\vec{u}(M,t_0-t)$ будет удовлетворять уравнению (16.16) при $\vec{f}(M,t_0-t)$. (Это свойство есть следствие симметрии уравнения относительно знака времени!) Указанное обстоятельство позволяет получать из решений задачи (16.16), (16.17), выписанных в п. 4, новые решения уравнений Ламе, имеющие характер сходящихся к точке M_0 (т.е. к точке $r=0$) волн. Напомним, что такое свойство уравнений движения уже учитывалось в §10 при рассмотрении принципа взаимности, причем там среда предполагалась неоднородной и анизотропной.

Фундаментальное решение продольного типа получается из (16.19) заменой $t - t_0$ на $t_0 - t$. При этом полагается $t_0 > 0$, а решение рассматривается при значениях времени $t \geqslant 0$.

Вектор смещений такого решения определяется формулой

$$\vec{u}_p^{\,0}(M, M_0, t - t_0) = \vec{u}_p(r, t_0 - t) \equiv \left[\frac{(t-t_0)^2}{r^2} - \frac{1}{v_p^2}\right] \varepsilon\left(t_0 - t - \frac{r}{v_p}\right)\vec{r}_1, \tag{16.24}$$

правая часть которой отлична от нуля лишь при

$$t_0 - t - \frac{r}{v_p} > 0, \quad \text{т.е.} \quad r < v_p(t_0 - t).$$

Поле смещений $\vec{u}_p^{\,0}$ оказывается полем сходящейся волны, задним фронтом которой является четырехмерный конус или трехмерная сфера

$$r = v_p(t_0 - t), \tag{16.25}$$

сжимающаяся при возрастании t в промежутке $0 \leqslant t \leqslant t_0$ и стягивающаяся в точку M_0 при $t = t_0$. Позади фронта (16.25) царит покой, т.е.

$$\vec{u}_p^{\,0}(M, M_0, t - t_0) \equiv 0, \quad \text{если} \quad r > v_p(t_0 - t). \tag{16.26}$$

Поле $\vec{u}_p^{\,0}$ имеет правильные сильные разрывы (т.е. удовлетворяет условиям совместности) и удовлетворяет уравнению (16.16) при плотности массовой силы

$$\vec{f} = \vec{f}_p^{\,0} \equiv -4\pi(\lambda + 2\mu)(t - t_0)^2\varepsilon(t_0 - t)\operatorname{grad}\delta(M - M_0), \tag{16.27}$$

прилагаемой фактически к точке M_0 и отличной от нуля лишь при $t < t_0$. Эта плотность силы гасит (поглощает) энергию приходящих к точке M_0 “элементов” волны (16.24).

Появление волнового поля (16.24) при значениях $t > 0$ можно считать следствием ненулевых начальных условий

$$\vec{u}_p^{\,0}\big|_{t=0} = \left[\frac{t_0^2}{r^2} - \frac{1}{v_p^2}\right]\varepsilon\left(t_0 - \frac{r}{v_p}\right)\vec{r}_1; \quad \dot{\vec{u}}_p^{\,0}\big|_{t=0} = -\frac{2t_0}{r^2}\varepsilon\left(t_0 - \frac{r}{v_p}\right)\vec{r}_1,$$

заданных при $t=0$. Возбуждаемые такими условиями волны приходят в точку M_0 в течение времени $0 \leqslant t \leqslant t_0$ и все время поглощаются[7] (гасятся) источником (16.27). В момент $t = t_0$ поглощающая сила (16.27) выключается и в среде устанавливается покой.

Фундаментальные решения поперечного типа получаются из (16.22) заменой $t-t_0$ на t_0-t и рассматриваются при значениях времени $t \geqslant 0$. Поля смещений таких решений, имеющие вид

$$\vec{u}_k^{\,0}(M, M_0, t-t_0) = \vec{u}_k(r, t_0-t) \equiv \left[\frac{t_0^2}{r^2} - \frac{1}{v_s^2}\right] \varepsilon\left(t_0 - \frac{r}{v_s}\right)[\vec{r}_1 \times \vec{i}_k], \tag{16.28}$$

отличны от нуля только при

$$t_0 - t - \frac{r}{v_s} > 0, \quad \text{т.е. при} \quad r < v_s(t_0-t),$$

и представляют собой сходящиеся поперечные волны. Задним фронтом волн (16.28) является четырехмерный конус или трехмерная сфера

$$r = v_s(t_0 - t), \tag{16.29}$$

сжимающаяся к точке M_0 при возрастании времени t в промежутке $0 \leqslant t \leqslant t_0$. Позади фронта (16.29) царит покой, т.е.

$$\vec{u}_k^{\,0}(M, M_0, t-t_0) \equiv 0, \quad \text{если} \quad r > v_s(t_0-t).$$

Поля (16.28) имеют правильные сильные разрывы на фронте (16.29) и удовлетворяют уравнению (16.16) при условии, что плотность массовых сил $\vec{f}$ имеет значение

$$\vec{f} = \vec{f}_k^{\,0} \equiv -4\pi\mu(t-t_0)^2\varepsilon(t_0-t)\,\mathrm{rot}[\vec{i}_k\delta(M-M_0)]. \tag{16.30}$$

Появление полей (16.28) можно считать следствием ненулевых начальных условий

$$\vec{u}_k^{\,0}\big|_{t=0} = \left(\frac{t_0^2}{r^2} - \frac{1}{v_s^2}\right)\varepsilon\left(t_0 - \frac{r}{v_s}\right)[\vec{r}_1 \times \vec{i}_k];$$

$$\dot{\vec{u}}_k^{\,0}\big|_{t=0} = -\frac{2t_0}{r^2}\left(t_0 - \frac{r}{v_s}\right)[\vec{r}_1 \times \vec{i}_k], \tag{16.31}$$

[7] Именно из-за этого поглощения и не возникает отраженной (сферически-расходящейся) волны от точки M_0, в которой фукусируются сферически-сходящиеся волны (16.24).

заданных при $t = 0$. Возбуждаемые такими условиями волны подходят к точке M_0 в течение времени $0 \leqslant t \leqslant t_0$ и поглощаются "источником" (16.30). В момент времени $t = t_0$ источник выключается и в среде устанавливается покой.

В связи с изложенным полезно на конкретном примере поля

$$\vec{u} = \vec{u}\left[r, t - \frac{r}{v}\right] \varepsilon\left(t - \frac{r}{v}\right), \quad (t > 0) \tag{16.32}$$

(рассматриваемого типа расходящейся волны) обратить внимание на роль в определении решения *однородного* уравнения (16.16) (в котором $\vec{f} = 0$) начальных данных вида

$$\vec{u}\big|_{t=t_0} = \vec{u}_0(r)\varepsilon\left(t_0 - \frac{r}{v}\right); \quad \dot{\vec{u}}\big|_{t=t_0} = \vec{v}_0(r)\varepsilon\left(t_0 - \frac{r}{v}\right). \tag{16.33}$$

Если правые части таких условий определены по значениям поля из (16.32), то ясно, что решение однородных уравнений (16.16), подчиненное условиям (16.33), принимает вид (16.32) при

$$t = t_0 + t', \quad (t' > 0)$$

(причем такое решение единственно).

Начальным же условиям (16.33), в которых изменен на обратный знак при $\vec{v}_0(r)$, отвечает (единственное) решение однородных уравнений (16.16) вида

$$\vec{u} = \vec{u}\left[r, t_0 - t' - \frac{r}{v}\right] \varepsilon\left(t_0 - t' - \frac{r}{v}\right),$$

представляющее собой уже сходящуюся волну к точке $r = 0$.

В рамках таких соображений как раз и построены введенные выше фундаментальные решения вольтерровского типа.

6. При помощи введенных фундаментальных решений Вольтерра удается построить решение задачи Коши для однородной и изотропной безграничной упругой среды в форме, допускающей наглядное физическое толкование. Что касается постановки такой задачи, то она сводится к нахождению (в безграничной среде в моменты времени $t > 0$) решения $\vec{u}(M, t)$ уравнения (14.1) с заданной плотностью массовых сил $\vec{f}(M, t)$, подчиненного начальным условиям

$$\vec{u}\big|_{t=0} = \vec{u}_0(M), \quad \dot{\vec{u}}\big|_{t=0} = \vec{v}_0(M) \tag{16.34}$$

общего вида.

Полное решение задачи Коши дается в следующем параграфе. Сейчас же для иллюстрации применения фундаментальных решений Вольтерра рассмотрим частные (вспомогательные) задачи, в которых требуется определить по уравнению (14.1) и начальным условиям (16.34) не само поле $\vec{u}$ в произвольно выбираемой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ среды в момент времени $t - t_0 > 0$, а лишь значения $\operatorname{div}\vec{u}$ и $\operatorname{rot}\vec{u}$ от этого поля. Решение таких задач легко получается в результате применения интегральной формулы Грина–Вольтерра (10.1) и (10.2) к полю $\vec{u}(M,t)$, удовлетворяющему условиям задачи Коши, а также к полю $\vec{u}^{\,0}$, совпадающему с продольными или поперечными фундаментальными решениями Вольтерра. Такие поля относятся к классу решений уравнения (14.1) (или, что то же, уравнения (16.16)) с правильными сильными разрывами и, следовательно, удовлетворяют условиям, при которых формула (10.1) справедлива. Для того, чтобы и поле $\vec{u}(M,t)$ удовлетворяло таким условиям, следует сначала предполагать, что входные данные $\vec{f}(M,t)$, $\vec{u}_0(M)$ и $\vec{v}_0(M)$ задачи Коши задаются настолько гладкими функциями, что ее решение $\vec{u}$ оказывается непрерывным вместе с первыми частными производными. К случаю произвольных входных данных $\vec{f}$, $\vec{u}_0$ и $\vec{v}_0$ нетрудно будет перейти в окончательном решении задачи путем рассмотрения последовательностей достаточно гладких функций $\vec{f}, \vec{u}_0$ и $\vec{v}_0$.

7. Для определения значения $\operatorname{div}\vec{u}$ в точке (x_0, y_0, z_0) воспользуемся формулой (10.1) в случае замкнутой области B, ограниченной (снизу) плоскостью $t = 0$ и (с боков и сверху) – произвольной гладкой поверхностью Σ_1, такой, что четырехмерный конус

$$r \leqslant v_p(t_0 - t), \tag{16.35}$$

имеющий вершину в точке (x_0, y_0, z_0, t_0), оказывается расположенным внутри B. Под полем $\vec{u}$ в (10.1) будем подразумевать решение уравнения (14.1), удовлетворяющее начальным данным (16.34), а в качестве $\vec{u}^{\,0}$ возьмем фундаментальное решение $\vec{u}^{\,0}(M, M_0, t - t_0)$ из (16.24).

Граничная поверхность Σ области B состоит из двух частей: 1) из гладкой поверхности Σ_1, в точках которой $\vec{u}^{\,0} \equiv 0$ вследствие свойства (16.26), и 2) из основания $t = 0$, в точках которого

$$\cos\nu t = -1, \quad \cos\nu x_k = 0, \quad (k = 1, 2, 3),$$

$$\vec{u}(M,t) = \vec{u}_0(M), \quad \dot{\vec{u}}(M,t) = \vec{v}_0(M,t),$$

$$\vec{u}_p^{\,0} = \left[\frac{t_0^2}{r^2} - \frac{1}{v_p^2}\right] \varepsilon \left(t_0 - \frac{r}{v_p}\right), \quad \dot{\vec{u}}_p^{\,0} = -\frac{2t_0}{r^2}\left(t_0 - \frac{r}{v_p}\right)\vec{r}_1.$$

Поэтому в силу (10.2) оказывается

$$\iiint\limits_{(\Sigma)} [\vec{M}_4^{\,0}\vec{u} - \vec{M}_4\vec{u}^{\,0}]d\Sigma = -\rho \iiint\limits_{r<v_p t} \left[\frac{2t_0}{r^2}(\vec{u}_0\vec{r}_1) + \left(\frac{t_0^2}{r^2} - \frac{1}{v_p^2}\right)(\vec{v}_0\vec{r}_1)\right] dV, \tag{16.36}$$

где $r = |M - M_0|$ определяется формулой (15.4), $\vec{r}_1$ обозначает орт радиус-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{M_0 M}$, а интегрирование в правой части производится по точке $M = (x, y, z)$.

Для вычисления объемного интеграла из левой части (10.1) следует учесть, что полям смещений $\vec{u} = \vec{u}(M,t)$ и $\vec{u}^{\,0} = \vec{u}_p^{\,0}(M, M_0, t-t_0)$ отвечают соответственно векторы плотности массовых сил $\vec{f} = \vec{f}(M,t)$ и $\vec{f}^{\,0} = \vec{f}^{\,0}(M,t)$, где $\vec{f}(M,t)$ определяется правой частью уравнения (14.1) в задаче Коши, а $\vec{f}_p^{\,0}$ имеет значение из (16.27). Поэтому

$$\iiiint\limits_{(B)} \vec{f}\vec{u}^{\,0} dB = \int\limits_0^{t_0} dt \iiint\limits_{r\leqslant v_p(t_0-t)} \left[\frac{(t-t_0)^2}{r^2} - \frac{1}{v_p^2}\right](\vec{f}\vec{r}_1)dV, \tag{16.37}$$

$$\iiiint\limits_{(B)} \vec{f}^{\,0}\vec{u}dB = 4\pi(\lambda + 2\mu)\int\limits_0^{t_0}(t_0 - t)^2 dt \iiint\limits_{V(t)} \vec{u}\operatorname{grad}\delta(M - M_0)dV =$$

$$= -4\pi(\lambda + 2\mu)\int\limits_0^{t_0}(t_0 - t)^2[\operatorname{div}\vec{u}(M,t)]\big|_{M=M_0} dt. \tag{16.38}$$

Заметим, что в (16.38) под $V(t)$ подразумевается сечение области B плоскостью $t = t_0$. Точка M_0, расположенная на оси конуса (16.35), всегда лежит внутри этого сечения. Следовательно, можно было воспользоваться формулой (16.37).

Подставляя значения вычисленных интегралов (16.36)–(16.38) в формулу (10.1), окончательно будем иметь:

$$4\pi(\lambda + 2\mu)\int\limits_0^{t_0}(t_0 - t)^2[\operatorname{div}\vec{u}(M,t)]\big|_{M=M_0} dt =$$

$$
= \int\limits_0^{t_0} dt \iiint\limits_{r\leqslant v_p(t_0-t)} \left[\frac{(t-t_0)^2}{r^2} - \frac{1}{v_p^2}\right] (\vec f \vec r_1) dV +
$$

$$
+\rho \iiint\limits_{r<v_p t_0} \left[\frac{2t_0}{r^2}(\vec u_0 \vec r_1) + \left(\frac{t_0^2}{r^2} - \frac{1}{v_p^2}\right)(\vec v_0 \vec r_1)\right] dV. \tag{16.39}
$$

Остается лишь отметить, что путем трехкратного дифференцирования формулы (16.39) по t_0 может быть получено выражение для значения $\operatorname{div} \vec u$ в точке (M_0, t_0). Однако к этому прибегать далее не потребуется.

8. Для определения значения $\vec u$ в точке (x_0, y_0, z_0, t_0) воспользуемся формулой (10.1) в случае замкнутой области B такого же типа, что и в п. 7, но содержащей внутри себя “поперечный” четырехмерный конус

$$
r \leqslant v_s(t_0 - t) \tag{16.40}
$$

с вершиной в точке (x_0, y_0, z_0, t_0). Под полем $\vec u$ в (10.1) будем подразумевать решение задачи (14.1), (16.34), а в качестве $\vec u^{\,0}$ возьмем фундаментальное решение $\vec u^{\,0}_k(M, M_0, t - t_0)$ из (16.28).

Граничная поверхность Σ состоит из двух частей: 1) гладкой поверхности Σ_1, точки которой располагаются вне конуса (16.40), вследствие чего (в соответствии с (16.30)) $\vec u^{\,0}_k \equiv 0$ на Σ_1, и 2) основания $t = 0$, в точках которого справедливо

$$
\cos \nu t = -1, \quad \cos \nu x_k = 0, \quad (k = 1, 2, 3),
$$

$$
\vec u = \vec u_0(M), \quad \vec u^{\,0}_k = \left(\frac{t_0^2}{r^2} - \frac{1}{v_s^2}\right) \varepsilon \left(t_0 - \frac{r}{v_s^2}\right) [\vec r_1 \times \vec i_k],
$$

$$
\dot{\vec u} = \vec v_0(M), \quad \dot{\vec u}^{\,0}_k = -\frac{2t_0}{r^2} \varepsilon \left(t_0 - \frac{r}{v_s}\right) [\vec r_1 \times \vec i_k].
$$

Поэтому в силу (10.2) для поверхностного интеграла из (10.1) получается выражение

$$
\iiint\limits_{(\Sigma)} [\vec M^{\,0}_4 \vec u - \vec M_4 \vec u^{\,0}] d\Sigma =
$$

$$
= -\rho \iiint\limits_{r\leqslant v_s t_0} \left\{\frac{2t_0}{r^2}[\vec u_0 \times \vec r_1]\vec i_k + \left(\frac{t_0^2}{r^2} - \frac{1}{v_s^2}\right)[\vec v_0 \times \vec r_1]\vec i_k\right\} dV, \tag{16.41}
$$

подинтегральная функция в правой части которого несколько преобразована с использованием формулы $\vec{a}[\vec{b}\times\vec{c}] = [\vec{a}\times\vec{b}]\vec{c}$ для скалярно-векторного произведения.

Чтобы вычислить объемный интеграл из (10.1), следует учесть, что полям смещений $\vec{u} = \vec{u}(M,t)$ и $\vec{u}^{\,0} = \vec{u}^{\,0}_{k}(M,M_0,t-t_0)$ отвечают соответственно плотности массовых сил $\vec{f} = \vec{f}(M,t)$ и $\vec{f}^{\,0} = \vec{f}^{\,0}_{k}(M,t)$ из уравнения (14.1) для рассматриваемой задачи Коши и из формулы (16.30). Поэтому

$$\iiiint\limits_{(B)} \vec{f}\vec{u}^{\,0}dB = \int\limits_0^{t_0} dt \iiint\limits_{r\leqslant v_s(t_0-t)} \left[\frac{(t-t_0)^2}{r^2} - \frac{1}{v_s^2}\right][\vec{f}\times\vec{r}_1]\vec{i}_k\,dV, \qquad (16.42)$$

$$-\iiiint\limits_{(B)} \vec{f}^{\,0}\vec{u}dB = 4\pi\mu\int\limits_0^{t_0}(t_0-t)^2\,dt\iint\limits_{V(t)}\vec{u}\,\mathrm{rot}[\vec{i}_k\delta(M-M_0)]dV =$$

$$= 4\pi\mu\int\limits_0^{t_0}(t_0-t)^2\,[\mathrm{rot}\,\vec{u}(M,t)\big|_{M=M_0}\vec{i}_k dt. \qquad (16.43)$$

(Заметим, что здесь также использовалась упоминавшаяся формула для скалярно-векторного произведения. При этом в формуле (16.43) через $V(t)$ обозначалось сечение области B плоскостью $t=t_0$. Так как B содержит внутри себя конус (16.40) с вершиной в точке (M_0,t_0), то все области $V(t)$ содержат точку M_0 строго внутри себя. Поэтому можно было воспользоваться формулой (16.15).)

Подставляя значения интегралов (16.41)–(16.43) в формулу (10.1), приходим к трем равенствам, которые получаются в результате скалярного умножения на орты $\vec{i}_k$ (при $k=1,2,3$) следующего, пока формального, соотношения:

$$4\pi\mu\int\limits_0^{t_0}(t_0-t)^2[\mathrm{rot}\,\vec{u}(M,t)]\big|_{M=M_0}dt =$$

$$= -\int\limits_0^{t_0} dt \iiint\limits_{r\leqslant v_s(t_0-t)} \left[\frac{(t-t_0)^2}{r^2} - \frac{1}{v_s^2}\right][\vec{f}\times\vec{r}_1]dV-$$

$$-\rho \iiint\limits_{r\leqslant v_s t_0} \left\{ \frac{2t_0}{r^2}[\vec{u}_0 \times \vec{r}_1] + \left(\frac{t_0^2}{r^2} - \frac{1}{v_s^2}\right)[\vec{v}_0 \times \vec{r}_1] \right\} dV. \qquad (16.44)$$

Упомянутые равенства означают, что проекции векторов из правой и левой частей (16.44) на (все три) координатные оси нашего пространства x, y, z равны друг другу. Отсюда, очевидно, следует и равенство самих векторов из правой и левой частей (16.44). Итак, равенство (16.44) истинно.

Остатеся лишь отметить, что значение $\operatorname{rot}\vec{u}$ в точке (M_0, t_0) могло бы быть получено из (16.44) в результате трехкратного дифференцирования по t_0.

§17. Решение задачи Коши для однородной и изотропной безграничной упругой среды. Формула Стокса

1. Пусть в безграничной упругой среде, характеризуемой параметрами $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ и $\rho = \text{const}$, заданы вектор $\vec{f}(M,t)$ плотности массовых сил и начальные значения $\vec{u}_0(M)$ и $\vec{v}_0(M)$ при $t = 0$ поля смещений и поля скоростей смещений. Задача Коши для безграничной однородной и изотропной среды заключается в нахождении вектора упругих смещений $\vec{u}(M,t)$ в любой точке $M = (x,y,z)$ пространства при значениях времени $t > 0$ по заданным значениям векторов $\vec{f}(M,t)$, $\vec{u}_0(M)$ и $\vec{v}_0(M)$. В математическом отношении она сводится к нахождению $\vec{u}(M,t)$ из уравнения Ламе (14.1)

$$(\lambda + 2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} - \mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u} - \rho\ddot{\vec{u}} = -\vec{f}(M,t)$$

при начальных условиях (16.34)

$$\vec{u}\big|_{t=0} = \vec{u}_0(M), \quad \dot{\vec{u}}\big|_{t=0} = \vec{v}_0(M).$$

Решение поставленной задачи строится в предположении, что искомое поле смещений $\vec{u}(M,t)$ непрерывно со своими первыми частными производными. На основании окончательной формы решения не представит труда, во-первых, сформулировать условия, которым должны удовлетворять функции $\vec{f}$, $\vec{u}_0$ и $\vec{v}_0$, чтобы выполнялось указанное предположение, и, во-вторых, совершить переход к решению задачи при "произвольных" $\vec{f}, \vec{u}_0$ и $\vec{v}_0$.

2. Изменив в уравнении (14.1) обозначение переменной времени t на τ, умножим все члены этого уравнения на $t-\tau$ и проинтегрируем по τ в промежутке $0<\tau<t$. Первые два слагаемых из левой части (14.1) приводятся к выражению

$$\int\limits_0^t (t-\tau)[(\lambda+2\mu)\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,\vec{u}-\mu\,\mathrm{rot}\,\vec{u}]d\tau=\frac{1}{2}[\mathrm{grad}\,\dot{p}+\mathrm{rot}\,\dot{\vec{q}}], \quad (17.1)$$

где

$$\left.\begin{aligned} p&=(\lambda+2\mu)\int\limits_0^t (t-\tau)^2[\mathrm{div}\,\vec{u}(M,t)]d\tau\\ \vec{q}&=-\mu\int\limits_0^t (t-\tau)^2[\mathrm{rot}\,\vec{u}(M,t)]d\tau \end{aligned}\right\} \quad (17.2)$$

Третье же слагаемое дает

$$\rho\int\limits_0^t (t-\tau)\ddot{\vec{u}}d\tau=\rho[\vec{u}(M,t)-\vec{u}(M,0)-t\dot{\vec{u}}(M,0)], \quad (17.3)$$

причем в правую часть (17.3) входят значения $\vec{u}(M,t)$ и $\dot{\vec{u}}(M,t)$ при $t=0$, известные в силу условий (16.34).

Учитывая формулы (17.1) и (17.3), в результате указанного преобразования уравнения (14.1) получаем для искомого вектора смещений представление

$$\vec{u}(M,t)=\vec{u}_0(M)+t\vec{v}_0(M)+\frac{1}{\rho}\int\limits_0^t (t-\tau)\vec{f}(M,t)d\tau+\frac{1}{2\rho}[\mathrm{grad}\,\dot{\rho}+\mathrm{rot}\,\dot{\vec{q}}], \quad (17.4)$$

первые три слагаемых правой части которого выразились явно через известные функции. Для окончательного решения нашей задачи достаточно найти значения функций $p=p(M,t)$ и $\vec{q}(M,t)$. Но задачи по нахождению таких функций фактически уже рассмотрены в п. 6–8 §16, где получены формулы (16.39) и (16.44), левые части которых совпадают соответственно со значениями $4\pi p(M_0,t_0)$ и $4\pi\vec{q}(M_0,t_0)$. Появление аргументов M_0 и t_0 объясняется только тем, что в задачах из п. 7 и 8 §16 ставилось целью найти $\mathrm{div}\,\vec{u}$ и $\mathrm{rot}\,\vec{u}$ в точке “наблюдения” (M_0,t_0). Таким образом, чтобы определить значения функций p и $\vec{q}$ из (17.2) в точке (M,t) необходимо лишь несколько изменить обозначения в (16.39) и (16.44).

3. При выводе формул (16.39) и (16.44) мы обозначили через посредство (M_0,t_0) и (M,t) соответственно точку наблюдения и переменную точку интегрирования. При этом в формулы входили величины $r=|M-M_0|$ и $\vec{r}_1=\overrightarrow{M_0M}/r$, причем $\vec{r}_1$ – орт радиус-вектора, направленного из точки M_0 в точку M. Теперь же будем понимать под (M,t) точку наблюдения, где $M=(x,y,z)$. Переменную точку интегрирования будем обозначать посредством (M',τ), где $M'=(x',y',z')$. Наконец, под r будем подразумевать выражение

$$r=|M-M'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}, \tag{17.5}$$

а радиус-вектор $\vec{r}=\overrightarrow{MM'}$ будем направлять от точки M к точке M'. При этом $\vec{r}_1=\vec{r}/r$ – орт, определяющий направление от точки M к точке M'.

В соответствии с такими обозначениями в формулах (16.39) и (16.44) следует заменить символы M_0,t_0,t,M и V соответственно на M,t,τ,M' и V'. Производя указанные замены, можно представить величины p и $\vec{q}$ из (17.2) в виде

$$p(M,t)=p_0(M,t)+p_1(M,t), \tag{17.6}$$

$$\vec{q}(M,t)=\vec{q}_0(M,t)+\vec{q}_1(M,t), \tag{17.7}$$

где

$$p_0=\frac{\rho}{4\pi}\iiint\limits_{r<v_pt}\left[\frac{2t}{r^2}(\vec{u}_0\vec{r}_1)+\left(\frac{t^2}{r^2}-\frac{1}{v_p^2}\right)(\vec{v}_0\vec{r}_1)\right]dV', \tag{17.8}$$

$$p_1=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t d\tau\iiint\limits_{r<v_p(t-\tau)}\left[\frac{(t-\tau)^2}{r^2}-\frac{1}{v_p^2}\right](\vec{f}\vec{r}_1)dV', \tag{17.9}$$

$$\vec{q}_0=\frac{\rho}{4\pi}\iiint\limits_{r<v_pt}\left\{\frac{2t}{r^2}[\vec{u}_0\times\vec{r}_1]+\left(\frac{t^2}{r^2}-\frac{1}{v_s^2}\right)[\vec{v}_0\times\vec{r}_1]\right\}dV', \tag{17.10}$$

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t d\tau \iiint\limits_{r<v_s(t-\tau)} \left[\frac{(t-\tau)^2}{r^2} - \frac{1}{v_s^2}\right][\vec{f}\times\vec{r}_1]dV', \tag{17.11}$$

причем $\vec{u}_0 = \vec{u}_0(M')$, $\vec{v}_0 = \vec{v}_0(M')$ и $\vec{f} = \vec{f}(M',\tau)$ – известные функции из (14.1) и (16.34).

Подстановка значений $p(M,t)$ и $\vec{q}(M,t)$ из (17.6)–(17.11) в правую часть (17.4) приводит к формуле Стокса, которая как раз и дает решение нашей задачи. Поэтому все дальнейшее фактически должно сводиться к упрощению указанного выражения для $\vec{u}(M,t)$, приведению его к окончательному (наиболее рациональному) виду и к обсуждению вытекающих из него физических следствий. Однако прежде чем обращаться к такому завершающему этапу в решении задачи, полезно выяснить некоторые общие вопросы, касающиеся внутренней структуры полученного выражения для $\vec{u}(M,t)$. Этому посвящены п. 4–5 настоящего параграфа.

4. Если исходить лишь из внешнего вида правой части формулы (17.4), то следует прийти к выводу, что первые три ее слагаемых, а именно

$$\vec{u}_0(M,t) = \vec{u}_0(M) + t\vec{v}_0(M) + \frac{1}{\rho}\int\limits_0^t (t-\tau)\vec{f}(M,\tau)d\tau,$$

не представляют особого интереса. Они не имеют волнового характера и лишь несут ответственность за удовлетворение начальным данным (16.34), а также учитывают влияние массовых сил, приложенных к точке M, на движение этой точки. При последующем преобразовании формулы (17.4) они сократятся с некоторыми членами, выделяющимися из слагаемого, содержащего $\vec{q}$ и $\dot{p}$.

Четвертый член правой части (17.4), т.е. слагаемое

$$\vec{u}^{(p)}(M,t) = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2\rho}\dot{p}\right), \tag{17.12}$$

можно назвать безвихревой (продольной) частью поля смещений в смысле результатов §14. Поверхностями разрыва поля $\vec{u}^{(p)}(M,t)$ могут быть лишь характеристики продольного типа.

На основании формул (17.8), (17.9) или, лучше, выписанных далее формул (17.22), (17.23) нетрудно заключить, что $\vec{u}^{(p)}(M,t)$ удовлетворяет нулевым начальным данным при $t=0$.

Особо следует подчеркнуть весьма важное обстоятельство, элементарно вытекающее из общего вида формул (17.6), (17.8) и (17.9), заключающееся в том, что на значения поля $\vec{u}^{(p)}$ в точке (M,t) оказывают влияние массовые силы $\vec{f}$ и начальные данные $\vec{u}_0$ и $\vec{v}_0$, заданные лишь внутри сферы

$$|M-M'|\equiv r<v_pt. \tag{17.13}$$

Это согласуется с фактом, что поле (17.12) распространяется со скоростью v_p продольных волн. Сферу (17.13) или конус, если (17.13) рассматривать в четырехмерном пространстве, называют сферой или конусом влияния значений $\vec{f}$, $\vec{u}_0$ и $\vec{v}_0$ на потенциальную часть поля смещений в точке M.

Наконец, последнее слагаемое

$$\vec{u}^{(s)}(M,t)=\operatorname{rot}\left(\frac{1}{2\rho}\vec{q}\right) \tag{17.14}$$

правой части (17.4) можно назвать вихревой, или соленоидальной (поперечной) частью поля смещений. Поверхностями разрывов такого поля могут быть лишь характеристики поперечного типа. Поле (17.14) также удовлетворяет нулевым начальным данным при $t=0$, причем на значение этого поля в точке (M,t) оказывают влияние входные данные $\vec{f}$, $\vec{u}_0$ и $\vec{v}_0$ задачи Коши, заданные лишь внутри сферы

$$|M-M'|\equiv r<v_st. \tag{17.15}$$

Сфера (или конус) (17.15) называется сферой (или конусом) влияния значений $\vec{f}$, $\vec{u}_0$ и $\vec{v}_0$ на соленоидальную часть поля смещений в точке M.

5. Допустим, что функции $\vec{f}(M,t)$, $\vec{u}_0(M,t)$ и $\vec{v}_0(M,t)$ определяющие входные данные задачи Коши из п. 1, представляются выражениями

$$\vec{f}=\operatorname{grad}\Phi(M,t),\qquad \vec{u}_0=\operatorname{grad}\chi_0(M,t),\qquad \vec{v}_0=\operatorname{grad}\chi_1(M) \tag{17.16}$$

через потенциалы Φ, χ_0 и χ_1, которые (в соответствии с условием, сформулированным в конце п. 1) следует считать непрерывными вместе с первыми и вторыми частными производными.

Если бы мы искали вектор смещений в виде

$$\vec{u} = \operatorname{grad}\varphi(M,t), \tag{17.17}$$

то в соответствии с §14 нахождение поля $\vec{u}$ свелось бы к определению "продольного" потенциала $\varphi(M,t)$ из задачи Коши для волнового уравнения (14.1) в случае безграничного пространства при начальных условиях

$$\varphi\big|_{t=0} = \chi_0(M), \quad \dot{\varphi}\big|_{t=0} = \chi_1(M).$$

Решение такой задачи, как известно, дается формулой Пуассона[8]

$$\varphi(M,t) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\iint_{r=v_pt}\chi_0(M')dS'\right] + \frac{1}{4\pi\rho v_p^2 t}\iint\limits_{r=v_pt}\chi_1(M')dS' +$$

$$+\frac{1}{4\pi\rho v_p^2 t}\iiint\limits_{r<v_pt}\frac{\Phi(M',t-r/v_p)}{r}\,dV', \tag{17.18}$$

подробно обсуждаемой, например, в т. 2 "Курс высшей математики" В. И. Смирнова.

Нетрудно убедиться, что получающиеся при указанном подходе результаты содержатся в формуле (17.4). Для этого прежде всего заметим, что при условии (17.16) величины $\vec{q}_0$ и vq_1 из (17.10) и (17.11) тождественно равны нулю. Действительно, каждый член правых частей указанных формул содержит пространственный интеграл по шару радиуса $a = v_s t$ или $a = v_s(t-\tau)$ под знаком которого стоит произведение типа $F(r,t)[\operatorname{grad}\chi \times \vec{r}_1]$, где $F(r,t)$ – та или иная функция от радиуса r шара, а χ совпадает с одной из функций Φ, χ_0 или χ_1 из (17.16). Интеграл такого рода, очевидно, представляется в виде

$$\iiint\limits_{r<a} F(r,t)[\operatorname{grad}\chi \times \vec{r}_1]dV' = \int\limits_0^a F(r',t)dr' \iint\limits_{r=r'}[\operatorname{grad}\chi \times \vec{r}_1]dS',$$

причем для внутреннего интеграла, распространенного по поверхности сферы $r = r'$, получается

$$\left(\vec{i}_k \iint_{r=r'}[\operatorname{grad}\chi \times \vec{r}_1]dS'\right) =$$

[8] Заметим, что под формулой Пуассона обычно понимают лишь первые два слагаемых выписанной формулы.

$$= -\iint\limits_{r=r'} [\mathrm{rot}(\chi\vec{i}_k)]_n dS' = -\iiint\limits_{r<r'} \mathrm{div}\,\mathrm{rot}(\chi\vec{i}_k)dV' = 0$$

в силу очевидного равенства $(\vec{i}_k[\mathrm{grad}\,\chi\times\vec{r}_1]) = (\vec{r}_1[\vec{i}_k\times\mathrm{grad}\,\chi]) = -(\vec{r}_1\,\mathrm{rot}(\chi\vec{i}_k))$ и применения теоремы Гаусса. Таким образом, все три проекции на оси координат от вектора, определяемого внутренним интегралом (по сфере $r = r'$), равны нулю. Значит равен нулю сам интеграл и, следовательно, равны нулю все интегралы, входящие в выражения $\vec{q}_0$ и $\vec{q}_1$ из (17.10) и (17.11).

Что касается слагаемого (17.12), то оно преобразуется к виду, соответствующему применению формулы Пуассона. Предполагая ради краткости, что $\vec{f}\equiv 0$ (следовательно, и $\Phi\equiv 0$) и учитывая очевидное соотношение

$$\iiint\limits_{r<v_pt} \frac{1}{r^2}(\mathrm{grad}\,\chi\cdot\vec{r}_1)dV' = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta \int\limits_0^{v_pt}\frac{\partial\chi}{\partial r}\,dr =$$

$$= \frac{1}{v_p^2t}\iint\limits_{r=v_pt}\chi(M')dS' - 4\pi\chi(M),$$

на основании (17.6) и (17.7) находим

$$\frac{1}{2\rho}\,\dot{p} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{v_p^2t}\iint_{r=v_pt}\chi_0(M')dS' - 4\pi\chi_0(M)\right] +$$

$$+\frac{1}{4\pi v_p^2 t}\iint\limits_{r=v_pt}\chi_1(M')dS' - t\chi_1(M) \equiv \varphi(M,t) - \chi_0(M) - t\chi_1(M). \quad (17.19)$$

Заметим, что указанное выше соотношение применялось к первому слагаемому из (17.8) до дифференцирования по t, а ко второму слагаемому – после такого дифференцирования.

Если, наконец, подставить в формулу (17.4) (при $\vec{f}\equiv 0$) значения $\vec{u}_0(M)$ и $\vec{v}_0(M)$ из (17.16) и значение $\dot{p}$ из (17.19), то поле смещений $\vec{u}(M,t)$ примет вид (17.17) с функцией $\varphi(M,t)$ из (17.18), где положено $\Phi\equiv 0$.

Аналогично обстоит дело и в случае $\Phi(M,t)\neq 0$, равно как и в случае, когда входные данные задачи Коши представляются формулами

$$\vec{f} = \mathrm{rot}\,\vec{\Psi}(M,t), \quad \vec{u}_0 = \mathrm{rot}\,\vec{\chi}_0(M), \quad \vec{v}_0(M) = \mathrm{rot}\,\vec{\chi}_1(M) \qquad (17.20)$$

через поперечные потенциалы $\vec{\Psi}$, $\vec{\chi}_0$ и $\vec{\chi}_1$, которые, как следует из §14 всегда можно считать удовлетворяющими условиям

$$\operatorname{div}\vec{\Psi} = 0, \quad \operatorname{div}\vec{\chi}_0 = 0, \quad \operatorname{div}\vec{\chi}_1 = 0. \tag{17.21}$$

Несложные (в принципе) преобразования позволяют привести (14.4) к виду $\vec{u} = \operatorname{rot}\vec{\psi}(M,t)$, где $\vec{\psi}$ определяется выражением (17.18), в котором φ, χ_0, χ_1 и Φ заменены соответственно на $\vec{\psi}$, $\vec{\chi}_0$, $\vec{\chi}_1$ и $\vec{\Psi}$.

Таким образом, к формуле Стокса (17.4), (17.6)–(17.11) можно было бы прийти, отправляясь от формул Пуассона вида (17.18). Однако этот путь оказывается значительно более громоздким, так как из-за отсутствия непосредственного физического смысла у потенциалов (17.16) или (17.20) (которые могут оказаться отличными от нуля там, где $\vec{f}$, $\vec{u}_0$ или $\vec{v}_0$ равны нулю тождественно) необходимо было бы затратить много усилий для того, чтобы окончательный результат содержал только входные данные $\vec{f}$, $\vec{u}_0$ и $\vec{v}_0$ задачи (14.1), (16.34), имеющие четкий физический смысл.

6. Чтобы привести формулу (17.4), (17.6)–(17.11) к более удобному виду, целесообразно прежде всего вычислить производные по t от выражений (17.8)–(17.11). При этом дифференцирование следует производить как по пределам интегрирования, так и под знаком интегралов.

В результате достаточно очевидных выкладок получаются следующие выражения:

$$\dot{p} = \frac{\rho}{2\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[t\iiint\limits_{r<v_pt}\frac{(\vec{u}_0\vec{r}_1)}{r^2}\,dV'\right] + t\iiint\limits_{r<v_pt}\frac{(\vec{v}_0\vec{r}_1}{r^2}\,dV'\right\}, \tag{17.22}$$

$$\dot{p}_1 = \frac{1}{2\pi\int_0^t}(t-\tau)d\tau\iiint\limits_{r<v_p(t-\tau)}\frac{\vec{f}\vec{r}_1)}{r^2}\,dV', \tag{17.23}$$

$$\vec{q}_0 = \frac{\rho}{2\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[t\iiint\limits_{r<v_pt}\frac{[\vec{u}_0\times\vec{r}_1]}{r^2}\,dV'\right] + t\iiint\limits_{r<v_pt}\frac{[\vec{v}_0\times\vec{r}_1]}{r^2}\,dV'\right\}, \tag{17.24}$$

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t (t-\tau)d\tau \iiint\limits_{r<v_p} (t-\tau)\frac{[\vec{f}\times\vec{r}_1]}{r^2}\,dV'. \qquad (17.25)$$

Здесь $\vec{u}_0(M')$, $\vec{v}_0(M')$ и $\vec{f}(M',\tau)$ являются функциями переменной интегрирования M', а смысл r и $\vec{r}$ разъяснялся в связи с (17.5). Заметим, что в первых слагаемых правых частей (17.22) и (17.24) мы не выполнили дифференцирование по t из-за желания иметь однотипные выражения для объемных интегралов в обоих слагаемых.

Обозрение правых частей формул (17.22)–(17.25) приводит к заключению, что вычисление четвертого слагаемого правой части равенства (17.4) может быть сведено к рассмотрению однотипных выражений

$$\vec{G}(M;\psi,a_0,a_1) \equiv \operatorname{grad} J_0(M) + \operatorname{rot}\vec{J}_1(M) =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}[\operatorname{grad} J_{0\varepsilon}(M) + \operatorname{rot}\vec{J}_{1\varepsilon}(M)], \qquad (17.26)$$

в которых $\varepsilon > 0$, а $J_{0\varepsilon}$ и $J_{1\varepsilon}$ определяются интегралами вида

$$J_{0\varepsilon}(M) = \iiint\limits_{\varepsilon<|M-M'|<a_0} \vec{\varphi}(M-M')\vec{\psi}(M')dV', \qquad (17.27)$$

$$J_{1\varepsilon}(M) = \iiint\limits_{\varepsilon<|M-M'|<a_1} \left[\vec{\psi}(M')\times\vec{\varphi}(M-M')\right]dV' \qquad (17.28)$$

при постоянных a_0 и a_1, удовлетворяющих неравенству $0 < a_1 < a_0$ и при функции

$$\vec{\varphi}(M-M') = \frac{\vec{r}}{r} = \operatorname{grad}\frac{1}{r} \qquad (17.29)$$

(где grad вычисляется по точке M, $\vec{r}_1$ направлен от M к M', r имеет значение из (17.5)) и при $\vec{\psi}(M')$, совпадающей с одной из функций $\vec{f}$, $\vec{u}_0$ или $\vec{v}_0$.

Следует отметить, что параметр $\varepsilon > 0$ в (17.26) введен для того, чтобы при вычислении $\operatorname{grad} J_{0\varepsilon}$ и $\operatorname{rot}\vec{J}_{1\varepsilon}$ можно было выполнять дифференцирование под знаком интегралов, как сделано, например, при переходе от (17.30) к (17.30′).

7. Для вычисления $\operatorname{grad} J_{0\varepsilon}(M)$ и $\operatorname{rot} \vec{J}_{1\varepsilon}(M)$ найдем сначала значения производных по x_k от $J_{0\varepsilon}$ и $\vec{J}_{1\varepsilon}$, причем ограничимся случаем лишь $J_{0\varepsilon}$, так как выкладки в случае $\vec{J}_{1\varepsilon}$ выполняются аналогично. Фиксируя значения k, будем понимать под M точку (x_1, x_2, x_3), а под $M + \Delta x_k$ – точку, получающуюся из M заменой (одной) ее координаты x_k (с фиксированным ранее значком k) на $x_k + \Delta x_k$.

Тогда окажется, что

$$J_{0\varepsilon}(M + \Delta x_k) = \iiint\limits_{\varepsilon < |M + \Delta x_k - M'| < a_0} \vec{\varphi}(M + \Delta x_k - M')\vec{\psi}(M')dM' =$$

$$\iiint\limits_{\varepsilon < |M - M'| < a_0} \vec{\varphi}(M - M')\vec{\psi}(M' + \Delta x_k)dV',$$

причем выражение правой части получается в результате замены переменной интегрирования M' на $\tilde{M} = M' - \Delta x_k$ с последующим изменением обозначения $\tilde{M}$ снова на M'.

Из приведенной формулы для $J_{0\varepsilon}(M + \Delta x_k)$ следует, что если частные производные от $\vec{\psi}(M')$ существуют (и, например, непрерывны), то

$$\frac{\partial J_{0\varepsilon}}{\partial x_k} = \iiint\limits_{\varepsilon < |M - M'| < a_0} \vec{\varphi}(M - M')\frac{\partial \vec{\psi}(M')}{\partial x'_k}\,dV', \tag{17.30}$$

причем интеграл из правой части (17.30) может быть преобразован на основе интегрирования по частям (что фактически равносильно соответствующему применению теоремы Гаусса) к сумме (двух) поверхностных и (одного) объемного интегралов. В результате таких преобразований получается окончательная формула для производной:

$$\frac{\partial J_{0\varepsilon}}{\partial x_k} = \iint\limits_{|M - M'| = a_0} \vec{\varphi}(M - M')\vec{\psi}(M') \cos rx_k\,dS' -$$

$$- \iint\limits_{|M - M'| = \varepsilon} \vec{\varphi}(M - M')\vec{\psi}(M') \cos rx_k\,dS' +$$

$$\iiint\limits_{\varepsilon<|M-M'|=a_0} \frac{\partial}{\partial x_k}\vec{\varphi}(M-M')\vec{\psi}(M')dV'. \qquad (17.30')$$

Заметим, во-первых, что в объемном интеграле из $(17.30')$ дифференцирование производится по точке M, содержащейся только в аргументе функции $\vec{\varphi}(M-M')$, и, во-вторых, что вследствие равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\vec{\varphi}(M-M') = -\frac{3\vec{r}_1}{r^3}\cos rx_k - \frac{1}{r^3}\,\vec{i}_k, \qquad (17.31)$$

вытекающего из (17.29), объемный интеграл в $(17.30')$ не существует при $\varepsilon = 0$. Таким образом, если бы мы не ввели в (17.26) числа $\varepsilon > 0$, то нельзя было бы преобразовывать интеграл (17.30) к виду $(17.30')$.

Пользуясь формулами $(17.30')$ при $k = 1, 2, 3$ и учитывая (17.29), а также очевидное соотношение

$$\vec{r}_1 = \cos rx_1\vec{i}_1 + \cos rx_2\vec{i}_2 + \cos rx_3\vec{i}_3, \qquad (17.32)$$

приходим к равенству

$$\operatorname{grad} J_{0\varepsilon}(M) = -\iint\limits_{r=\varepsilon} \vec{r}_1\frac{(\vec{r}_1\vec{\psi}(M'))}{r^2}\,dS' + \iint\limits_{r=a_0} \vec{r}_1\frac{(\vec{r}_1\vec{\psi}(M'))}{r^2}\,dS'$$

$$+\iiint\limits_{\varepsilon<r<a_0} \operatorname{grad}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\vec{\psi}(M')\right)dV', \qquad (17.33)$$

в котором операции grad под знаком объемного интеграла относятся к точке M (т.е. к переменным x, y, z в выражении r из (17.15)), а не к переменной интегрирования M'.

Подобным же образом вычисляется и rot от интеграла (17.28). При этом сначала вычисляем производную $\vec{J}_{1\varepsilon}(M)$ по x_k, представляющуюся в форме, вполне аналогичной $(17.30')$, а затем, исходя из символической формулы

$$\operatorname{rot}\vec{J}_{1\varepsilon}(M) = [\operatorname{grad}\,\times\,\vec{J}_{1\varepsilon}(M)]$$

и учитывая (17.29) и (17.32), легко приходим к необходимому выражению

$$\operatorname{rot}\vec{J}_{1\varepsilon}(M) = -\iint\limits_{r=\varepsilon}\frac{[\vec{r}_1\times[\vec{\psi}(M')\times\vec{r}_1]]}{r^2}\,dS' + \iint\limits_{r=a_1}\frac{[\vec{r}_1\times[\vec{\psi}(M')\times\vec{r}_1]]}{r^2}\,dS' +$$

$$+\iiint\limits_{\varepsilon<r<a_0} \operatorname{rot}\left[\vec{\psi}(M') \times \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right] dV', \tag{17.33$'$}$$

в котором операции rot и grad под знаком объемного интеграла относятся к точке $M = (x, y, z)$, а не к переменной интегрирования M'.

Остается лишь сложить выражения (17.33) и (17.33$'$), подставить значение их суммы в (17.26) и совершить предельный переход при $\varepsilon \to 0$. При этом следует учитывать формулу

$$\operatorname{rot}\left[\vec{\psi}(M') \times \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right] = \left[\nabla \times \left[\vec{\psi}(M') \times \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right]\right] =$$

$$= \vec{\psi}(M')\Delta\frac{1}{r} - (\vec{\psi}(M')\operatorname{grad})\operatorname{grad}\frac{1}{r} =$$

$$= -(\vec{\psi}(M')\operatorname{grad})\operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\operatorname{grad}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\vec{\psi}(M')\right), \tag{17.34}$$

справедливую при $r > 0$, в которой $\vec{\psi}(M')$ рассматривается как постоянная, и позволяющая объединить объемные интегралы при сложении (17.33) и (17.33$'$), а также следующие предельные соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{r=\varepsilon} \vec{r}_1\frac{(\vec{r}_1\vec{\psi}(M'))}{r^2}\,dS' &= \frac{4\pi}{3}\,\vec{\psi}(M),\\ \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{r=\varepsilon} \frac{[\vec{r}_1 \times (\vec{\psi}(M') \times \vec{r}_1]}{r^2} &= \frac{8\pi}{3}\,\psi(M). \end{aligned}\right\} \tag{17.35}$$

Заметим, что при выводе первого соотношения удобно положить

$$(\vec{r}_1\vec{\psi}) = |\vec{\psi}|\cos\theta \quad \text{и} \quad \vec{r}_1 = \sin\theta\cos\varphi\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\vec{j} + \cos\theta\vec{k}.$$

Второе же соотношение сводится к первому из-за равенства

$$[\vec{r}_1 \times [\vec{\psi} \times \vec{r}_1]] = \vec{\psi} - \vec{r}_1(\vec{r}_1\vec{\psi}). \tag{17.36}$$

Учитывая изложенное и производя несложные выкладки, для величины $\vec{G}(M; \vec{\psi}, a_0, a_1)$ из (17.26)–(17.29) получаем следующее окончательное выражение

$$\vec{G}(M; \vec{\psi}, a_0, a_1) \equiv \operatorname{grad} J_0(M) + \operatorname{rot}\vec{J}_1(M) =$$

$$= -4\pi\vec{\psi}(M) + \iint\limits_{r=a_0} \frac{(\vec{r}_1\vec{\psi}(M'))\vec{r}_1}{r^2}\, dS' + \iint\limits_{r=a_1} \frac{\vec{r}_1 \times [\vec{\psi}(M') \times \vec{r}_1]}{r^2}\, dS' +$$

$$+ \iiint\limits_{a_1<r<a_0} \operatorname{grad}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\vec{\psi}(M')\right) dV'. \qquad (17.37)$$

Остается лишь привести формулу

$$\frac{1}{2\rho}[\operatorname{grad}\dot{p} + \operatorname{rot}\dot{\vec{q}}] = \frac{1}{2\rho}[\operatorname{grad}\dot{p}_0 + \operatorname{rot}\dot{\vec{q}}_0] + \frac{1}{2\rho}[\operatorname{grad}\dot{p}_1 + \operatorname{rot}\dot{\vec{q}}_1] =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial}{\partial t}[t\vec{G}(M;\vec{u}_0, v_p t, v_s t)] + \frac{1}{4\pi}\vec{G}(M;\vec{v}_0, v_p t, v_s t) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\rho}\int\limits_0^t (t-\tau)\vec{G}[M;\vec{f}, v_p(t-\tau), v_s(t-\tau)]d\tau, \qquad (17.38)$$

дающую выражение четвертого слагаемого из (17.4) через функцию $\vec{G}$ из (17.37).

8. Изучаемое поле смещений из (17.4) целесообразно представить в виде двух слагаемых

$$\vec{u}(M,t) = \vec{u}_1(M,t) + \vec{u}_2(M,t) \qquad (17.39)$$

зависящих соответственно от функций $\vec{u}_0$ и $\vec{v}_0$ из условий (16.34) и от функции $\vec{f}$ из правой части уравнений (14.1). При этом ясно, что $\vec{u} \equiv \vec{u}_1$ дает решение рассматриваемой задачи Коши в случае $\vec{f} \equiv 0$, а $\vec{u} = \vec{u}_2$ – в случае $\vec{u}_0 = \vec{v}_0 \equiv 0$.

На основании (17.4), (17.37) и членов формулы (17.38), зависящих от $\vec{u}_0$ и $\vec{v}_0$, для первого слагаемого из (17.39) сразу же получается выражение

$$\vec{u}_1(M,t) \equiv \vec{u}_0(M) + t\vec{v}_0(M) + \frac{1}{2\rho}(\operatorname{grad}\dot{p} + \operatorname{rot}\dot{\vec{q}}) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{v_p^2 t}\iint\limits_{r=v_p t}(\vec{r}_1\vec{u}_0)\vec{r}_1\, dS' + \frac{1}{v_s^2 t}\iint\limits_{r=v_s t}[\vec{u}_0 - (\vec{r}_1\vec{u}_0)\vec{r}_1]dS' +\right.$$

$$\left. + t\iiint\limits_{v_s t<r<v_t t}\operatorname{grad}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\,\vec{u}_0\right)dV'\right\} + \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{v_p^2 t}\iint\limits_{r=v_p t}(\vec{r}_1\vec{v}_0)\vec{r}_1 dS' +\right.$$

$$+\frac{1}{v_s^2 t}\iint\limits_{r=v_s t}[\vec{r}_0-(\vec{r}_1\vec{r}_0)\vec{r}_1]dS'+t\iiint\limits_{v_s t<r<v_t t}\operatorname{grad}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\vec{v}_0\right)dV'\biggr\}, \quad (17.40)$$

в котором подинтегральная функция в интегралах по сфере $r = v_s t$ преобразована на основе формулы (17.36), примененной при $\vec{\psi} = \vec{u}_0$ и $\vec{\psi} = \vec{v}_0$. Формулу (17.40) для $\vec{u}_1(M,t)$ из (17.39) можно считать окончательной и не подвергать дальнейшим преобразованиям.

Что касается второго слагаемого из (17.39), определяющего поле смещений только за счет приложения плотности массовых сил $\vec{f}(M,t)$ при нулевых начальных данных, то на основании (17.4), (17.37) и членов формулы (17.38), зависящих от $\vec{f}$, для него сначала получается следующее выражение

$$\vec{u}_2(M,t)\equiv\frac{1}{\rho}\int\limits_0^t(t-\tau)\vec{f}(M,\tau)d\tau+\frac{1}{2\rho}(\operatorname{grad}\dot{p}_1+\operatorname{rot}\dot{\vec{q}}_1)=$$

$$=\frac{1}{\rho}\int\limits_0^t(t-\tau)\vec{f}(M,\tau)d\tau+\frac{1}{4\pi\rho}\int\limits_0^t(t-\tau)d\tau\biggl\{-4\pi\vec{f}(M,\tau)+$$

$$+\iint\limits_{r=v_p(t-\tau)}\frac{(\vec{r}_1\vec{f}(M',\tau))\vec{r}_1}{r^2}\,dS'+\iint\limits_{r=v_s(t-\tau)}\frac{\vec{f}(M',\tau)-(\vec{r}_1\vec{f}(M',\tau))\vec{r}_1}{r^2}\,dS'+$$

$$+\iiint\limits_{v_s(t-\tau)<r<v_p(t-\tau)}\operatorname{grad}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\vec{f}(M',\tau)\right)dV'\biggr\}.$$

Первый член правой части сокращается с первым слагаемым в фигурных скобках. Выражения же, содержащие второе и третье слагаемые в фигурных скобках, преобразуются к объемным интегралам заменой переменной интегрирования τ на r соответственно по формулам $r = v_p(t-\tau)$ и $r = v_s(t-\tau)$. Проделывая указанное и оставляя неизменным последнее слагаемое в фигурных скобках, окончательно получаем:

$$\vec{u}_2(M,t)=\frac{1}{4\pi(\lambda+2\mu)}\iiint\limits_{r<v_p t}\frac{(\vec{r}_1\vec{f}(M't-r/v_p))\vec{r}_1}{r}\,dV'+$$

$$+\frac{1}{4\pi\mu}\iiint\limits_{r<v_s t}\frac{\vec{f}(M',t-r/v_s)-(\vec{r}_1\vec{f}(M',t-r/v_s))\vec{r}_1}{r}dV'+$$

$$+\frac{1}{4\pi\rho}\int\limits_0^t (t-\tau)d\tau\iiint\limits_{v_s(t-\tau)<r<v_p(t-\tau)}\operatorname{grad}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\,\vec{f}(M',\tau)\right)dV'. \quad (17.41)$$

9. Представление поля смещений задачи Коши (14.1), (16.34) в виде (17.39), (17.40) и (17.41) мы будем называть формулой Стокса. Запись этой формулы в указанном виде достаточно удобна для выяснения всех особенностей распространения упругих волн в однородной и изотропной безграничной среде. Однако, вероятно, можно было бы записать эту формулу и в несколько ином (эквивалентном) виде.

Все дальнейшее сводится к анализу формулы Стокса и к получению из нее наиболее важных физических следствий. К такого рода вопросам целесообразно обратиться в §18. В заключение же настоящего параграфа следует оправдать предположение из п. 1 (равно как из п. 6 §16) о непрерывности поля $\vec{u}(M,t)$, решающего задачу Коши (14.1), (16.34), вместе со всеми его первыми частными производными. (Такое предположение было необходимо, в частности, для применения формулы Грина–Вольтерра п. 7 и 8 §16 к нахождению значений величин (17.2) от искомого поля).

Пользуясь формулами (17.39)–(17.41), можно убедиться, что упомянутое предположение выполняется во всяком случае, если $\vec{u}_0(M)$, а также $\vec{v}_0(M)$ и $\vec{f}(M,t)$ имеют непрерывные частные производные соответственно до второго и первого порядка включительно. Таким образом, для входных данных $\vec{f}$, $\vec{u}_0$ и $\vec{v}_0$ задачи Коши, обладающих указанной гладкостью, все предыдущие результаты полностью оправданы. Что же касается окончательной формы решения задачи, то ее можно считать оправданной и при любых интегрируемых функциях $\vec{f}$, $\vec{u}_0$ и $\vec{v}_0$, если решение $\vec{u}(M,t)$ задачи рассматривать с обобщенной точки зрения (см. §9).

§18. Физические следствия из формулы Стокса. Поля смещений основных точечных источников колебаний

При выводе формулы Стокса, записанной в окончательной форме в виде равенств (17.39)–(17.41), мы исходили из очевидной возможности представления поля смещений (решающего задачу Коши для уравнения (14.1) при начальных условиях (16.34) в случае однородной изотропной безграничной упругой среды) формулой (17.4). Входящие в эту формулу функции p и q из (17.2) могут рассматриваться как решения неоднородных волновых уравнений[9]

$$\Delta p - \frac{1}{v_p^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\int\limits_0^t (t-\tau)^2 \operatorname{div}\vec{f}(M,\tau)d\tau, \tag{18.1}$$

$$\Delta\vec{q} - \frac{1}{v_s^2}\frac{\partial\vec{q}}{\partial t^2} = -\int\limits_0^t (t-\tau)^2 \operatorname{rot}\vec{f}(M,\tau)d\tau. \tag{18.2}$$

Подобным же уравнениям (получающимся дифференцированием по t всех членов уравнений (18.1) и (18.2)) удовлетворяют и функции $\dot{p}$ и $\dot{\vec{q}}$, непосредственно входящие в формулу (17.4). Вследствие этого обстоятельства, равно как и отмеченного в п. 4 §17 отсутствия связи первых трех слагаемых правой части (17.4) с распространением волн, можно утверждать, что слагаемые

$$\frac{1}{2\rho}\operatorname{grad}\dot{p} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\rho}\operatorname{rot}\dot{\vec{q}} \tag{18.3}$$

из правой части (17.4) полностью описывают распространение соответственно продольных и поперечных волн, содержащихся в поле $\vec{u}(M,t)$. Это означает, что все разрывы поля $\vec{u}(M,t)$ или его частных производных любых порядков, реализующихся на характеристиках (7.9) продольного типа (на характеристиках (7.9′) поперечного типа), полностью описываются первым (вторым) выражением из (18.3). Но так как входные данные задачи Коши $\vec{u}_0(M)$, $\vec{v}_0(M)$ и $\vec{f}(M,t)$ задаются независимыми друг от друга образом, то в точности такие же утверждения справедливы и применительно к функциям

$$\frac{1}{2\rho}\operatorname{grad}\dot{p}_\nu \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\rho}\operatorname{rot}\dot{\vec{q}}_\nu \tag{18.3′}$$

[9] Получающихся из (14.1) при $t=\tau$ применением ко всем слагаемым операций div и rot с последующим умножением на $(t-\tau)^2$ и интегрированием по τ.

(при $\nu = 0,1$) со значениями $\dot{p}_0$, $\dot{p}_1$, $\vec{\dot{q}}_0$ и $\vec{\dot{q}}_1$ из (17.22)–(17.25), через посредство которых формула (17.4) фактически переписывается в виде

$$\vec{u}(M,t) = \vec{u}_0(M) + t\vec{v}_0(M) + \frac{1}{\rho}\int\limits_0^t (t-\tau)\vec{f}(M,\tau)d\tau +$$

$$+\frac{1}{2\rho}[\operatorname{grad}\dot{p}_0 + \operatorname{rot}\vec{\dot{q}}_0] + \frac{1}{2\rho}[\operatorname{grad}\dot{p}_1 + \operatorname{rot}\vec{\dot{q}}_1]. \qquad (18.4)$$

Дальнейшие преобразования этой формулы, выполненные в п. 6–8 §17, фактически сводились к представлению каждой из функций (18.3′) в виде двух слагаемых (при $\nu = 0$ и $\nu = 1$)

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2\rho}\operatorname{grad}\dot{p}_\nu &= \vec{P}_\nu(M,t) + \vec{A}_\nu(M,t),\\ \frac{1}{2\rho}\operatorname{rot}\vec{\dot{q}}_\nu &= \vec{Q}_\nu(M,t) + \vec{B}_\nu(M,t) \end{aligned}\right\} \qquad (18.4')$$

и к объединению суммы вторых слагаемых из (18.4′)

$$\frac{1}{2\rho}[\vec{A}_0(M,t) + \vec{B}_0(M,t) + \vec{A}_1(M,T) + \vec{B}_1(M,t)]$$

с первыми тремя слагаемыми правой части (18.4). При таком объединении первые три слагаемых правой части (18.4) “сократились”, а в окончательных формулах (17.40)–(17.41) появились слагаемые, содержащие под знаками объемных интегралов выражения вида

$$\operatorname{grad}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\vec{\chi}\right), \quad (\vec{\chi} = \vec{u}_0, \vec{v}_0, \vec{f}). \qquad (18.5)$$

Таким образом, следует утверждать, что слагаемые формул (17.40) и (17.41), содержащие под знаками интегралов выражения (18.5), соответствуют частям поля смещений $\vec{u}(M,t)$, содержащим в себе как продольные так и поперечные волны. Что касается остальных слагаемых указанных формул, то на основании преобразований п. 6–8 §17 не представляет труда убедиться в том, что интегралы по поверхности сферы $r = v_p t$ и по всей сфере $r < v_p t$ относятся к выражениям $\vec{P}_\nu(M,t)$ из (18.4′) и, следовательно, описывают чисто продольную часть[10] поля смещений

[10] Но не всю такую часть поля.

$\vec{u}(M,t)$. Интегралы же по поверхности сферы $r = v_s t$ и по сфере $r < v_s t$ относятся к выражениям $\vec{Q}_\nu(M,t)$ из $(18.4')$ и описывают чисто поперечную (но не всю) часть поля $\vec{u}(M,t)$.

Тот факт, что в правые части формул (17.40) и (17.41) входят слагаемые (содержащие под знаками интегралов выражения (18.5)), относящиеся и к продольной, и к поперечной частям поля смещений, мог бы рассматриваться как некоторый недостаток указанных формул по сравнению с исходной формулой (18.4), в которой четко разделены слагаемые, описывающие продольные и поперечные волны (а неволновые первые три слагаемых равны нулю во всех точках M, где $\vec{u}_0 \equiv 0$, $\vec{v}_0 \equiv 0$, $\vec{f}(M,t) \equiv 0$). Однако этот недостаток искупается прежде всего тем обстоятельством, что в формулах (17.40) и (17.41) уже выполнены (вообще говоря нетривиальные) операции grad и rot от интегралов (17.22)–(17.25). Кроме того, сам упомянутый недостаток формул (17.40) и (17.41) не так уж существенен, так как, во-первых, при увеличении расстояния r точки наблюдения M от области V_0, в которой заданы функции $\vec{u}_0$, $\vec{v}_0$ и $\vec{f}$, упомянутые слагаемые (во всех задачах динамики) убывают на порядок быстрее, чем остальные слагаемые формул (17.40) и (17.41), представленные в виде сравнительно простых интегралов по сферическим поверхностям $r = v_p t$, $r = v_s t$ и сферам $r < v_p t$ и $r < v_s t$. Во-вторых, из-за дополнительного интегрирования эти слагаемые могут иметь разрывы непрерывности лишь в производных более высокого порядка, чем прочие слагаемые обсуждаемых формул.

1. Обращаясь к исследованию формулы Стокса (17.39)–(17.41), мы остановимся сначала на кратком качественном рассмотрении поля смещений, возбуждающегося в безграничной упругой среде вследствие начальных условий (16.34), функции $\vec{u}_0$ и $\vec{v}_0$, в которых отличны от нуля лишь в некоторой ограниченной области V_0. Точку наблюдения $M = (x_1, x_2, x_3)$ выберем для определенности вне V_0 и обозначим

$$\left.\begin{aligned} r_0 = \inf_{M' \in V_0} |M - M'|, \quad R = \sup_{M' \in V_0} |M - M'|,\\ \bar{t}_p = \frac{r_0}{v_p}, \quad T_p = \frac{R}{v_p}, \quad \bar{t}_s = \frac{r_0}{v_s}, \quad T_s = \frac{R}{v_s}, \end{aligned}\right\} \tag{18.6}$$

где r_0 и R – соответственно минимальное и максимальное расстояния точек M до точек M' области V_0, а v_p и v_s – скорости распространения продольных и поперечных волн. Так как $r_0 < R$ и $v_s < v_p$, то очевидно

$$\bar{t}_p < T_p, \quad \bar{t}_s < T_s, \quad \bar{t}_p < \bar{t}_s, \quad T_p < T_s.$$

Вследствие предположения, что $\vec{f}(M,t) \equiv 0$, поле смещений

$$\vec{u}(M,t) = \vec{u}_1(M,t) \tag{18.7}$$

в точке (M,t) определяется формулой (17.40), которую и нужно исследовать. Напомним, что в (17.40), равно как и в (17.41),

$$r = \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + (x_3' - x_3)^2}$$

обозначает расстояние точки $M = (x_1, x_2, x_3)$ от переменной точки $M' = (x_1', x_2', x_3')$ интегрирования, $\vec{r}_1$ определяет орт направления от M к M', а операция grad относится к точке M.

Из (17.40) следует что $\vec{u}_1(M,t) \equiv 0$, если область V_0 располагается вне сферы $r < v_p t$ или внутри сферы $r < v_s t$ (так как в обоих указанных случаях подинтегральные функции всех интегралов из правой части (17.40) оказываются равными нулю тождественно). Поэтому при $t < \bar{t}_p$ в точке M царит покой, так как волны, распространяющиеся со скоростями v_p и v_s, еще не успели дойти до точки M. При значениях же $t > T_s$ точка M находится в покое из-за того, что все возбужденные в области V_0 волны уже успели пройти через эту точку. Таким образом, точка M совершает "колебательное" движение лишь при значениях времени из промежутка $\bar{t}_p < t < T_s$, пределы которого соответствуют моментам прохождения через точку M переднего и заднего фронтов поля (18.7).

Движение в точке M начинается в моменты $t \geqslant \bar{t}_p$, когда в правой части (17.40) становятся отличными от нуля слагаемые, содержащие интегралы

$$\vec{I}_p(\vec{\psi}) = \frac{1}{4\pi v_p^2 t} \iint\limits_{r = v_p t} (\vec{r}_1 \vec{\psi}(M')) \vec{r}_1 \, dS', \tag{18.8}$$

$$\vec{I}_0(\vec{\psi}) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{v_s t < r < v_p t} \operatorname{grad} \left(\operatorname{grad} \frac{1}{r} \, \vec{\psi}(M') \right) dV' \tag{18.9}$$

при $\vec{\psi}(M) = \vec{u}_0(M)$ или $\vec{\psi}(M) = \vec{v}_0(M)$. Подразумевая под $\vec{\psi}(M)$ указанные функции, можно не рассматривать впоследствии случаи функций $\vec{u}_0(M)$ и $\vec{v}_0(M)$ по отдельности.

Слагаемые поля (18.7), совпадающего с (17.40), содержащие интегралы $\vec{I}_p(\vec{\psi})$, отличны от нуля лишь в промежутке времени $\bar{t} < t < T_p$ (пока сфера $r = v_p t$ пересекает область V_0) и описывают чисто продольную волну. Если расстояние r_0 из (18.6) настоялько велико, что выполняется неравенство

$$r_o \gg l_0, \tag{18.10}$$

где l_0 – максимальный линейный размер области V_0[11], то направление векторов $\vec{I}_p(\vec{\psi})$ в точке M, равно как и направление распространения отвечающих им волн, практически совпадает (или противоположно) с направлением вектора $\overrightarrow{M_0 M}$, где M_0 – любая фиксированная точка области V_0. Это, естественно, согласуется с природой слагаемых из (17.40), содержащих интегралы $\vec{I}_p(\vec{\psi})$. С увеличением расстояния r_0 (при фиксированной области V_0) часть волнового поля (18.7), представляющаяся интегралами вида (18.8), затухает (убывает) как $(v_p t)^{-1} \approx 1/r_0$.

Вполне аналогичные утверждения могут быть высказаны и относительно слагаемых правой части (17.40), содержащих интегралы

$$\vec{I}_s(\vec{\psi}) = \frac{1}{4\pi v_s^2 t} \iint\limits_{r=v_p t} [\vec{\psi}(M') - (\vec{r}_1 \vec{\psi}(M'))\vec{r}_1] dS' \tag{18.11}$$

при $\vec{\psi} = \vec{u}_0$ и $\vec{\psi} = \vec{v}_0$, описывающих распространение поперечных волн, возбужденных в области V_0. Не останавливаясь на их перечислении, лишь отметим, во-первых, что в отличие от (18.8), содержащего под знаком интеграла "продольную" компоненту вектора $\vec{\psi}(M')$, под знак интеграла (18.11) входит компонента $\vec{\psi}(M')$, перпендикулярная вектору $\overrightarrow{MM'}$; во-вторых, что при увеличении расстояния r_0 точки M от фиксированной области V_0 слагаемые в (17.40), содержащие интегралы вида (18.11), убывают как $(v_s t)^{-1}/r_0$.

[11] При таком условии область V_0 по отношению к выбранной точке M является как бы точечным источником колебаний.

Наконец, слагаемые из (17.40), содержащие объемные интегралы вида (18.9), описывают возмущение, состоящее как из продольных, так и из поперечных волн. Разрывы непрерывности в таких слагаемых могут иметь лишь производные более высокого порядка, чем в слагаемых, содержащих интегралы вида (18.8) и (18.11). Эти слагаемые отличны от нуля в точке M в течение всего промежутка $\bar{t} < t < T_s$ времени существования (в этой точке) поля. При этом вследствие очевидной формулы

$$\operatorname{grad}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\vec{\psi}(M')\right) = \frac{3(\vec{r}_1\vec{\psi}(M'))\vec{r}_1 - \vec{\psi}(M')}{r^3} \tag{18.12}$$

(в которой $\vec{r}_1 = \overrightarrow{MM'}/r$, а $\vec{\psi}(M')$ считается постоянной, так как дифференцирование производится по точке M) ясно, что при увеличении расстояния r_0 они убывают не медленнее, чем $1/r_0^2$. Таким образом, на больших расстояниях точки M от области V_0 объемными интегралами в правой части (17.40) можно пренебрегать.

Не задерживаясь на обсуждении свойств поля $\vec{u}_1(M,t)$, возбуждаемого начальными возмущениями из (16.34) (так как такое поле не представляет особого практического интереса), перейдем к рассмотрению поля

$$\vec{u}(M,t) = \vec{u}_2(M,t) \tag{18.13}$$

(где $\vec{u}_2(M,t)$ определяется формулой (17.41)), возбуждаемого массовыми силами с плотностью $\vec{f}(M,t)$, прикладываемыми в момент времени $t = 0$ к упругой среде, находившейся в покое при $t < 0$. При этом начнем с качественного рассмотрения процессов установления статического и стационарного полей.

2. Пусть к находившейся в покое однородной и изотропной упругой безграничной среде в момент времени $t = 0$ прикладывается статическое воздействие

$$\vec{f}(M't) = \begin{cases} \vec{f}(M')\varepsilon(t), & M' \in V_0, \\ 0, & M' \notin V_0, \end{cases} \tag{18.14}$$

где $\varepsilon(t)$ – функция Хевисайда, а V_0 – конечная область, введенная в рассмотрение в п. 1 в связи с (18.6).

При обозначениях (18.6) на основании (17.41) можно утверждать, что при $t < \bar{t}_p$ в точке M царит покой, так как области интегрирования в (17.41) (лежащие внутри сферы $r \equiv |M - M'| \leqslant v_p t$) еще не имеют общих точек с областью V_0 из (18.14). В такие моменты времени передний фронт возбужденного поля еще не успел распространиться до точки M. При $t > \bar{t}_p$ к точке M начинает подходить продольная волна, содержащаяся в первом и третьем слагаемых из правой части (17.41).

Первое слагаемое

$$\vec{u}_p(M,t) = \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \iiint\limits_{r<v_p t} \frac{(\vec{r}_1 \vec{f}(M'))\vec{r}_1}{r}\, dV' \qquad (18.15)$$

зависит от времени, лишь пока сфера $r = v_s t$ пересекает область V_0. Если же V_0 оказывается расположенной внутри сферы (что наступает при $t_p > T_p$), то в силу (18.14) поле $\vec{u}_p(M,t)$ представляется выражением

$$\vec{u}_p(M,t) = \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \iiint\limits_{V_0} \frac{\vec{r}_1 \vec{f}(M'))\vec{r}_1}{r}\, dV' \qquad (18.15')$$

не зависящим от времени.

Аналогично обстоит дело и со вторым слагаемым

$$\vec{u}_s(M,t) = \frac{1}{4\pi\mu} \iiint\limits_{r<v_s t} \frac{\vec{f}(M') - (\vec{r}_1 \vec{f}(M'))\vec{r}_1}{r}\, dV' \qquad (18.16)$$

из правой части (17.41). Оно равно нулю при $t < \bar{t}_s$, изменяется при возрастании времени в промежутке $\bar{t}_s < t < T_s$, а при $t > T_s$ принимает значение

$$\vec{u}_s(M,t) = \frac{1}{4\pi\mu} \iiint\limits_{(V_0)} \frac{\vec{f}(M') - (\vec{r}_1 \vec{f}(M'))\vec{r}_1}{r}\, dV' \qquad (18.16')$$

уже не зависящее от времени (так как область V_0 располагается внутри сферы $r \leqslant v_s t$).

Что касается последнего слагаемого правой части (17.41), представляющегося выражением

$$\vec{u}_0(M,t) = \frac{1}{4\pi\rho} \int\limits_0^t \tau\, d\tau \iiint\limits_{v_s\tau<r<v_p\tau} \operatorname{grad}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\vec{f}(M')\right) dV' \qquad (18.17)$$

(в котором учтено (18.14) и сделана замена переменной интегрирования τ на $t-\tau$), то его следует несколько преобразовать. Для этого целесообразно представить объемный интеграл в виде

$$\iiint\limits_{v_s\tau<r<v_p\tau} \operatorname{grad}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\vec{f}(M')\right)dV' = \int\limits_{v_s\tau}^{v_p\tau}\vec{F}(r)dr,$$

где

$$\vec{F}(r) = \iint\limits_{r=\text{const}} \operatorname{grad}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\vec{f}(M')\right)dS' \tag{18.18}$$

обозначает интеграл по сфере $r \equiv |M-M'| = \text{const}$, и применить формулу

$$\int\limits_0^t \tau\,d\tau \int\limits_{v_s\tau}^{v_p\tau}\vec{F}(\rho)d\rho = \int\limits_{\rho/v_p}^{\rho/v_s}\tau\vec{F}(\rho)d\tau + \int\limits_{v_s t}^{v_p t}d\rho\int\limits_{\rho/v_p}^{t}\tau\vec{F}(\rho)d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{v_s t}\left(\frac{1}{v_s^2}-\frac{1}{v_p^2}\right)\rho^2\vec{F}(\rho)d\rho + \frac{1}{2}\int\limits_{v_s t}^{v_p t}\left(t^2-\frac{\rho^2}{v_p^2}\right)\vec{F}(\rho)d\rho, \tag{18.19}$$

получающуюся в результате перестановки порядка интегрирования в двойном интеграле по треугольной области в переменных ρ, τ, ограниченной прямыми $\rho = v_s\tau$, $\rho = v_p\tau$ и $\tau = t$. В результате для $\vec{u}_0(M,t)$ из (18.17) получается следующее удобное выражение

$$\vec{u}_0(M,t) = \frac{1}{8\pi\rho}\iiint\limits_{v_s t<r<v_p t}\left(t^2-\frac{r^2}{v_p^2}\right)\operatorname{grad}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\vec{f}(M')\right)dv' +$$

$$\frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\iiint\limits_{r<v_s t} r^2\operatorname{grad}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\vec{f}(M')\right)dV'. \tag{18.20}$$

На основании (18.20) ясно, что $\vec{u}_0(M,t) \equiv 0$ при $t < \bar{t}_p$, в промежутке $\bar{t}_p < t < T_s$ эта функция зависит от времени, а при $t > T_s$ (когда область V_0 из (18.14) уже располагается внутри сферы $r \leqslant v_s t$, вследствие чего под знаком интеграла первого слагаемого из (18.20) оказывается $\vec{f}(M') \equiv 0$ в силу (18.14)) она принимает значение

$$\vec{u}_0(M,t) = \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\iiint\limits_{(V_0)} r^2\operatorname{grad}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\vec{f}(M')\right)dV' \tag{18.20$'$}$$

и перестает зависеть от времени. Таким образом, процесс установления статического поля в точке M, начинающийся в момент $t = \bar{t}_p$, заканчивается в момент времени $t = T_s$.

Установившееся статическое поле в точке M определяется суммой полей (18.5′), (18.16′), (18.20′) и оказывается равным

$$\vec{u}_0(M,t) = \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \iiint\limits_{(V_0)} \frac{(\lambda+3\mu)\vec{f}(M') + (\lambda+\mu)(\vec{r}_1\vec{f}(M'))\vec{r}_1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)r}\, dV', \tag{18.21}$$

что, естественно, совпадает с известным из теории упругости статическим решением задачи для безграничной среды при воздействии (18.14). Заметим, во-первых, что при получении (18.21) мы воспользовались формулой (18.12) при $\vec{\psi} = \vec{f}$, и, во-вторых, что в случае сосредоточенных воздействий (18.14) с плотностью массовых сил

$$\vec{f}_k(M) = \vec{i}_k\delta(M - M_1), \tag{18.22}$$

где $\vec{i}_k$ при $k = (1,2,3)$ – орты декартовой системы координат, из (18.21) получается статическое поле

$$\vec{u}_k(M, M_1) = \frac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \left\{ \frac{\lambda+3\mu}{r}\,\vec{i}_k + \frac{\lambda+\mu}{r^3}\,(\vec{r}\vec{i}_k)\vec{r} \right\}, \tag{18.22′}$$

известное как решение Буссинеска 1-го рода. (Здесь $r = |M - M_1|$ и $\vec{r} = \overrightarrow{MM_1}$).

Подобным же образом может быть описан процесс "снятия" в точке $M \notin V_0$ в момент $t = t_0 > T_s$ статического поля (18.21), возникшего в результате выключения при $t = 0$ воздействия (18.14). Для этого достаточно лишь на изученное выше поле

$$\vec{u}(M,t) = \vec{u}_p(M,t) + \vec{u}_s(M,t) + \vec{u}_0(M,t)$$

из (17.41) (приводящее к полю $\vec{u}(M)$ из (18.21) при $t > T_s$) наложить дополнительное поле $\vec{u}^{\,0}(M,t)$, возбуждаемое в безграничной упругой среде (находившейся в покое при $t < t_0 - T_s$) в результате включения в момент $t = t_0 - T_s$ ("обратного") статического воздействия

$$\vec{f}^{\,0}(M',t) = \begin{cases} -\vec{f}(M')\varepsilon(t - t_0 + T_s), & M' \in V_0 \\ 0, & M' \notin V_0. \end{cases}$$

Такое воздействие начинает влиять на поле $\vec{u}(M,t)$ из (18.21) в точке M в момент $t = t_0 - T_s + \bar{t}_p$. А в момент $t = t_0$ оно создает в точке M дополнительное поле $\vec{u}^{\,0}(M,t_0) = -\vec{u}(M)$ из (18.21), которое компенсирует (снимает) в точке M статическое поле (18.21).

3. Рассмотрим теперь процесс установления стационарного колебательного режима в безграничной однородной и изотропной упругой среде.

Пусть при $t < 0$ среда находилась в покое, а в момент $t = 0$ к ее фиксированной области V_0 прикладывается воздействие с плотностью массовых сил

$$\vec{f}(M',t) = \begin{cases} \vec{f}(M')e^{i\omega t}\varepsilon(t), & M' \in V_0, \\ 0, & M' \notin V_0, \end{cases} \tag{18.23}$$

где $\varepsilon(t)$ и V_0 имеют такой же смысл, как и в (18.14).

Возбуждаемое воздействием (18.23) поле (18.13) описывается формулой (17.41). Если подставить значение (18.23) в (17.41), то нетрудно убедиться в том, что исследуемое поле может быть представлено формулой

$$\vec{u}(M,t) = e^{i\omega t}[\vec{u}^{\,1}_p(M,t) + \vec{u}^{\,1}_s(M,t) + \vec{u}^{\,1}_0(M,t)], \tag{18.24}$$

где

$$\vec{u}^{\,1}_p = \frac{1}{4\pi(\lambda+2\mu)} \iiint\limits_{r<v_pt} \frac{\vec{r}_1\vec{f}(M'))\vec{r}_1}{r}\, e^{-i\omega r/v_p} dV', \tag{18.25}$$

$$\vec{u}^{\,1}_s = \frac{1}{4\pi\mu} \iiint\limits_{r<v_st} \frac{\vec{f}(M') - (\vec{r}_1\vec{f}(M'))\vec{r}_1}{r}\, e^{-i\omega r/v_s} dV', \tag{18.26}$$

$$\vec{u}^{\,1}_0 = \frac{1}{4\pi\rho} \int\limits_0^t \tau e^{-i\omega\tau} d\tau \iiint\limits_{v_s\tau<r<v_p\tau} \operatorname{grad}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\,\vec{f}(M')\right) dV'. \tag{18.27}$$

Интегралы (18.25) и (18.26) имеют структуру, аналогичную структуре интегралов (18.15) и (18.16), вследствие чего качественное описание полей $\vec{u}^{\,1}_p(M,t)$ и $\vec{u}^{\,1}_s(M,t)$ не отличается от изложенного в п. 2 описания полей (18.15) и (18.16). Что касается поля $\vec{u}^{\,1}_0(M,t)$ из (18.27), то его следует предварительно преобразовать, подобно тому, как преобразовывался интеграл из правой части (18.17). При этом вместо (18.19) теперь следует пользоваться вспомогательной формулой

$$\int_0^t \tau\, d\tau \int_{v_s\tau}^{v_p\tau} e^{-i\omega\tau}\vec{F}(\rho)d\rho =$$

$$= \int_0^{v_st} \vec{F}(\rho)d\rho \int_{\rho/v_p}^{\rho/v_s} \tau e^{-i\omega\tau}d\tau + \int_{v_st}^{v_pt} \vec{F}(\rho)d\rho \int_{\rho/v_p}^{t} \tau e^{-i\omega\tau}d\tau =$$

$$= \int_0^{v_st} \left\{ \left(\frac{i\rho}{\omega v_s} + \frac{1}{\omega^2}\right) e^{-i\omega\rho/v_s} - \left(\frac{i\rho}{\omega v_p} + \frac{1}{\omega^2}\right) e^{-i\omega\rho/v_p} \right\} \vec{F}(\rho)d\rho +$$

$$+ \int_{v_st}^{v_pt} \left\{ \frac{i\omega t + 1}{\omega^2}\, e^{-i\omega t} - \frac{i\omega\rho + v_p}{v_p\omega^2}\, e^{-i\omega\rho/v_p} \right\} \vec{F}(\rho)d\rho \qquad (18.19')$$

с функцией $\vec{F}(\rho)$ из (18.18).

Выполняя выкладки, аналогичные преобразованию (18.18) в (18.19), приходим для $\vec{u}\,^1_0(M,t)$ к следующему окончательному представлению:

$$\vec{u}\,^1_0(M,t) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{v_st<r<v_pt} \operatorname{grad}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\vec{f}(M')\right) \times$$

$$\times \left[\frac{i\omega t + 1}{\omega^2}\, e^{-i\omega t} - \frac{i\omega r + v_p}{v_p\omega^2}\, e^{-i\omega r/v_p}\right] dV' +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\rho} \iiint\limits_{r<v_st} \operatorname{grad}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\vec{f}(M')\right) \times$$

$$\times \left[\left(\frac{ir}{\omega v_s} + \frac{1}{\omega^2}\right) e^{-i\omega r/v_s} - \left(\frac{ir}{\omega v_p} + \frac{1}{\omega^2}\right) e^{-i\omega r/v_p}\right] dV', \qquad (18.27')$$

которое (как нетрудно проверить) переходит в (16.20) при $\omega \to 0$.

Используя обозначения (18.6), на основании (18.24)–(18.26) и (18.27′) нетрудно убедиться, что при $t < \bar{t}_p$ точка M находится еще в покое. Процесс установления стационарного режима колебаний в этой точке начинается в момент времени $t = t_p$ и заканчивается в момент $t = T_s$. При этом стационарный колебательный процесс в точке M при значениях времени $t > T_s$ определяется формулой

$$\vec{u}(M,t) = e^{i\omega t}\left\{\frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)}\iiint\limits_{V_0}\frac{\vec{\Phi}_p(M,M')}{r}\,e^{-i\omega r/v_p}dV' + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\pi\mu}\iiint\limits_{(V_0)}\frac{\vec{\Phi}_s(M,M')}{r}\,e^{-i\omega r/v_s}dV'\right\}, \qquad (18.28)$$

в которой

$$\left.\begin{aligned}
&\vec{\Phi}_p(M,M') = \vec{r}_1\vec{f}(M''))\vec{r}_1 + \left(i\frac{v_p}{\omega}\,r + \frac{v_p^2}{\omega^2}\right)\frac{\vec{f}(M') - 3(\vec{r}_1\vec{f}(M'))\vec{r}_1}{r^2},\\
&\vec{\Phi}_s(M,M') =\\
&\vec{f}(M') - (\vec{r}_1\vec{f}(M''))\vec{r}_1 - \left(i\frac{v_s}{\omega}\,r + \frac{v_s^2}{\omega^2}\right)\frac{\vec{f}(M') - 3(\vec{r}_1\vec{f}(M'))\vec{r}_1}{r^2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (18.29)$$

Заметим, во-первых, что здесь, так же как и в (18.20), мы воспользовались соотношением (18.12) при $\vec{\psi} = \vec{f}$, и, во-вторых, что если ввести обозначения

$$\varphi(M) = \iiint\limits_{(V_0)}\left(\frac{iv_p r}{\omega} + \frac{v_p^2}{\omega^2}\right)\frac{(\vec{f}(M')\vec{r})}{r^3}\,e^{-i\omega r/v_p}dV',$$

$$\vec{\psi}(M) = \iiint\limits_{(V_0)}\left(\frac{iv_s r}{\omega} + \frac{v_s^2}{\omega^2}\right)\frac{[\vec{r}\times\vec{f}(M')]}{r^3}\,e^{-i\omega r/v_s}dV',$$

то формула (18.28) может быть переписана в виде

$$\vec{u}(M,t) = e^{i\omega t}\left[\frac{1}{4\pi\mu}\,\mathrm{rot}\,\vec{\psi}(M) - \frac{1}{4\pi(\lambda+2\mu)}\mathrm{grad}\,\varphi(M)\right],$$

где дифференцирование производится по точке M. Такое представление поля $\vec{u}$ легко могло бы быть получено и из "непреобразованной" формулы Стокса (17.4), (17.23), (17.24), если выражения для $\dot{p}_1$ и $\vec{q}_1$ преобразовать по формулам, аналогичным

(18.19′). При этом нетрудно было бы убедиться и в том, что связь между $\dot{p}_1$, $\vec{\dot{q}}_1$ и $\vec{\psi}$ дается выражениями вида

$$\dot{p}_1 = \frac{-1}{4\pi(\lambda+2\mu)}\, e^{i\omega t}\varphi - \varphi_0, \quad \vec{\dot{q}}_1 = \frac{1}{4\pi(\lambda+2\mu)}\, e^{i\omega t}\psi - \psi_0,$$

где φ_0 и $\vec{\psi}_0$ – некоторые функции, линейно зависящие от t и такие, что $\operatorname{grad}\varphi_0 = \operatorname{rot}\vec{\psi}_0$ является лапласовым вектором.

Если положить

$$\vec{f}(M) = \vec{i}_k\delta(M - M_1), \tag{18.23′}$$

где M_1 произвольно выбираемая точка области V_0, то из (18.28), (18.29) получаются (фундаментальные) поля основных стационарных точечных источников, определяемые формулами

$$\vec{u}_k(M, M_1, t) = \frac{1}{4\pi(\lambda+2\mu)}\,\frac{\vec{\Phi}_p(M, M_1; k)}{r}\, e^{i\omega(y - r/v_p)} +$$

$$+\frac{1}{4\pi\mu}\,\frac{\vec{\Phi}_s(M, M_1; k)}{r}\, e^{i\omega - r/v_s}, \quad (k = 1, 2, 3), \tag{18.30}$$

в которых

$$\left.\begin{aligned} \vec{\Phi}_p &= (\vec{r}_1\vec{i}_k)\vec{r}_1 + \left(i\frac{v_p}{\omega} + \frac{v_p^2}{\omega^2}\right)\frac{\vec{i}_k - 3(\vec{r}_1\vec{i}_k)\vec{r}_1}{r^2},\\ \vec{\Phi}_s &= \vec{i}_k - (\vec{r}_1\vec{i}_k)\vec{r}_1 - \left(i\frac{v_s}{\omega} + \frac{v_s^2}{\omega^2}\right)\frac{\vec{i}_k - 3(\vec{r}_1\vec{i}_k)\vec{r}_1}{r^2},\end{aligned}\right\} \tag{18.30′}$$

где $\vec{r} = \overrightarrow{MM_1}$, $r = |M - M_1|$ и $\vec{r}_1 = \vec{r}/r$. Поля $\vec{u}_k(M, M_1, t)$ представляются волнами, уходящими на бесконечность, как и должно быть в соответствии с условиями излучения.

Остается отметить, что исходное поле $\vec{u}(M,t)$ из (18.28), (18.29), отвечающее произвольной непрерывной плотности массовых сил (18.23), является очевидным наложением

$$\vec{u}(M, t) = \iiint\limits_{V_0}\sum_{k=1}^{3}\vec{u}_k(M, M_1, t)(\vec{f}(M_1)\vec{i}_k)dM_1 \tag{18.28′}$$

полей (18.30), (18.30′), взятых с весовыми множителями $(\vec{f}(M_1)\vec{i}_k)$.

4. В качестве следующих примеров применения формулы Стокса обсудим вопросы, связанные с полями основных нестационарных точечных источников в однородной изотропной упругой среде, при помощи которых легко конструируются поля любых точечных источников упругих волн.

Пусть к безграничной упругой среде, находившейся в покое при $t<0$, прикладывается воздействие, определяемое одной из следующих плотностей массовых сил

$$\vec{f}_p(M,t) = -4\pi(\lambda+2\mu)q(t)\operatorname{grad}\delta(M-M_0), \tag{18.31}$$

$$\vec{f}_k(M,t) = -4\pi\mu q(t)\operatorname{rot}[\vec{i}_k\delta(M-M_0)], \tag{18.32}$$

$$\vec{f}(M,t) = \vec{p}_0 q(t)\delta(M-M_0). \tag{18.33}$$

Здесь $\delta(M-M_0)$ – трехмерная δ-функция Дирака, $\vec{p}_0 = \mathrm{const}$ – единичный вектор, а функция $q(t)$, непрерывная вместе с первой производной при всех t, удовлетворяет условию $q(t)\equiv 0$ при $t<0$. (Вследствие этого, очевидно, должно быть $q(0)=\dot{q}(0)=0$).

Поставим задачу определить на основе формулы Стокса поля смещений в точках $M\neq M_0$, отвечающие указанным воздействиям. При этом нужно отметить, что случаи плотностей (18.31) и (18.32) следует рассматривать лишь как упражнение на применение формулы Стокса, так как соответствующие поля смещений уже изучались в §15 и 16 и выражались формулами (15.20) и (16.8) при $t_0=0$.

Как неоднократно указывалось выше, для нахождения полей смещений, отвечающих сингулярным источникам, содержащим в том или ином виде δ-функцию Дирака, нужно сначала рассматривать аналогичную же задачу, в которой δ-функция заменена гладкой δ-образной функцией вида (9.9) или (9.10), и в построенном решении совершать предельный переход при $\varepsilon\to 0$. Предельное поле как раз и дает решение рассматриваемой исходной задачи.

Мы будем придерживаться изложенной последовательности в рассуждениях, пользоваться обозначениями

$$R = |M-M_0|, \quad \vec{R}_1 = \frac{\vec{R}}{R} \equiv \frac{\overrightarrow{MM_0}}{R}, \tag{18.34}$$

$M=(x_1,x_2,x_3)$, $M_0=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)$ и считать, что

$$R\equiv|M-M_0|>\varepsilon_0, \tag{18.35}$$

где $\varepsilon_0 > 0$ – сколь угодно малое фиксированное число. В качестве $\delta_\varepsilon(M - M_0; n_0)$ возьмем функцию из (9.9) при $\varepsilon < \varepsilon_0$, $n_0 > 1$ и будем учитывать указанные в §9 ее свойства гладкости, а также то обстоятельство, что $\delta_\varepsilon(M - M_0; n_0) \equiv 0$ при $|M - M_0| \geqslant \varepsilon$.

5. Для нахождения поля, отвечающего воздействию (18.31), следует исходить из гладко распределенной плотности массовых сил

$$\vec{f}_p(M,t) = -4\pi(\lambda + 2\mu)q(t)\operatorname{grad}\delta_\varepsilon(M - M_0; n_0). \tag{18.31$'$}$$

Искомое поле определяется в результате подстановки плотности (18.31$'$) вместо $\vec{f}(M,t)$ в формулу (17.41) с последующим предельным переходом $\varepsilon \to 0$. Однако из-за третьего слагаемого в (17.41) вычисления по этой формуле оказываются громоздкими и требующими предварительного преобразования интеграла из упомянутого слагаемого, подобного преобразованию интеграла (18.17) в (18.20) или интеграла (18.27) в (18.27$'$). Проще исходить из "еще не преобразованной" формулы Стокса (17.4), в которой полагается $\vec{u}_0(M) = \vec{v}_0 = 0$ ввиду выбранных нулевых начальных данных в нашей задаче, а $\vec{f}(M,\tau) = \vec{f}_\varepsilon(M,\tau) = 0$ ввиду (18.35) и неравенства $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Для интересующих нас точек M формула (17.4) принимает вид

$$\vec{u}(M,t) = \frac{1}{2\rho}[\operatorname{grad}\dot{p}_1 + \operatorname{rot}\dot{\vec{q}}_1], \tag{18.36}$$

где $\dot{p}_1$ и $\dot{\vec{q}}_1$ даются равенствами (17.23) и (17.25).

Как следует из результатов п. 5 §17 подстановка в (17.25) значения $\vec{f} = \vec{f}_\varepsilon(M,t)$ из (18.31$'$) дает тождественный нуль. Поэтому остается вычислить лишь выражения

$$\dot{p}_1 = -2(\lambda + 2\mu)\int\limits_0^t (t-\tau)q(\tau)d\tau \iiint\limits_{r<v_p(t-\tau)} \frac{\vec{r}_1\operatorname{grad}\delta_\varepsilon(M' - M_0'n_0)}{r^2}\,dV' =$$

$$= 2(\lambda+2\mu)\int\limits_0^t \tau q(t-\tau)d\tau \iiint\limits_{r<v_p\tau} \operatorname{grad}\frac{1}{r}\operatorname{grad}\delta_\varepsilon(M' - M_0'n_0)dV', \tag{18.37}$$

где $r = |M - M'|$, $\vec{r}_1 = \overrightarrow{MM'}/r$, а дифференцирование производится по точке M'.

Учитывая, что $\delta_\varepsilon(M'-M_0;n_0)\equiv 0$ в окрестности точки M (т.е. при $r<\varepsilon_0-\varepsilon$) и принимая во внимание известный факт, что

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\frac{1}{r}=\Delta\frac{1}{r}=0 \quad \text{при} \quad r>0,$$

получаем равенство

$$\operatorname{grad}\frac{1}{r}\operatorname{grad}\delta_\varepsilon(M'-M_0;n_0)=\operatorname{div}[\delta_\varepsilon(M'-M_0;n_0)\operatorname{grad}\frac{1}{r}],$$

позволяющее применить теорему Гаусса к интегралу по сфере $r<v_p\tau$ из (18.37). В результате этого, а также замены переменной интегрирования τ на r'/v_p последовательно находим

$$\dot{p}_1=2(\lambda+2\mu)\int\limits_0^t \tau q(t-\tau)d\tau\iint\limits_{r=v_p\tau}\left(\vec{r}_1\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)\delta_\varepsilon(M'-M_0;n_0)dS'=$$

$$=2(\lambda+2\mu)\int\limits_0^{v_pt} q\left(t-\frac{r'}{v_p}\right)\frac{r'}{v_p^2}\,dr'\iint\limits_{r=r'}\left(\vec{r}_1\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)\delta_\varepsilon(M'-M_0;n_0)dS'=$$

$$=2\rho\iiint\limits_{r<v_pt} q\left(t-\frac{r}{v_p}\right)\left(\vec{r}\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)\delta_\varepsilon(M'-M_0;n_0)dV'.$$

Тривиальный переход к пределу при $\varepsilon\to 0$ в этой формуле, очевидно, приводит к выражению

$$\dot{p}_1=2\rho q\left(t-\frac{R}{v_p}\right)\left(R\operatorname{grad}\frac{1}{R}\right)=-2\rho\frac{q\left(t-\frac{R}{v_p}\right)}{R},$$

подстановка которого в (18.36) дает

$$\vec{u}_p(M,t)=-\left[\frac{q'(t-R/v_p)}{v_pR}+\frac{q(t-R/v_p)}{R^2}\right]\vec{R}_1. \tag{18.38}$$

Представление поля смещений формулой (18.38) по своему смыслу в точности совпадает с представлением (15.20), как и должно быть. Заметим, что в (18.38) не выписан множитель $\varepsilon(t-R/v_p)$, так как предполагалось $q(\tau)\equiv 0$ при $\tau<0$, а значение $\vec{R}_1$ связано со значением $\vec{r}_1$ из (15.20) равенством $\vec{R}_1=-\vec{r}_1$, вытекающим из сопоставления (18.34) с (15.4).

Аналогично рассматривается и случай воздействия (18.32), при котором формула (17.4), переписывающаяся в виде (18.36) со значениями $\dot{p}_1$ и $\dot{\vec{q}}_1$ из (17.23) и (17.25), приводит к полю (16.8). Выполнение несложных преобразований предоставляется читателю.

6. При рассмотрении нетривиального случая (18.33) следует исходить из гладкой плотности массовых сил

$$\vec{f}_\varepsilon(M,t) = \vec{p}_0 q(t)\delta_\varepsilon(M' - M_0; n_0) \tag{18.33'}$$

и пользоваться формулой (17.41).

Подстановка значения $\vec{f}_\varepsilon(M,t)$ из (18.33′) вместо $\vec{f}(M,t)$, например, в первое слагаемое правой части (17.41) приводит к выражению

$$\vec{I}_\varepsilon = \frac{1}{4\pi(\lambda+2\mu)} \iiint\limits_{r<v_p t} \frac{(\vec{r}_1\vec{p}_0)\vec{r}_1}{r}\, q\left(t - \frac{r}{v_p}\right)\delta_\varepsilon(M' - M_0; n_0)dV' =$$

$$= \begin{cases} 0, \quad v_p t < R - \varepsilon, \\ \frac{1}{4\pi(\lambda+2\mu)}\times \\ \times \iiint\limits_{|M'-M_0|<\varepsilon} q\left(t - \frac{r}{v_p}\right)\frac{(\vec{r}_1\vec{p}_0)\vec{r}_1}{r}\,\delta_\varepsilon(M'-M_0;n_0)dV', \quad v_p t > R+\varepsilon, \end{cases}$$

из которого вследствие предположения, что $q(\tau) \equiv 0$ при $\tau < 0$, а также непрерывности подинтегральной функции сразу же получается

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \vec{I}_\varepsilon = \frac{(\vec{R}_1\vec{p}_0)\vec{R}_1}{4\pi(\lambda+2\mu)R}\, q\left(t - \frac{R}{v_p}\right). \tag{18.39}$$

Столь же просто вычисляются и остальные слагаемые из (17.41). При этом третье слагаемое целесообразно сначала преобразовать на основе (18.12).

Таким образом, для искомого поля смещений, отвечающего воздействию (18.33), получается окончательное выражение

$$\vec{u}(M,t) = \vec{u}_p(M,t) + \vec{u}_s(M,t) + \vec{u}_0(M,t), \tag{18.40}$$

в котором

$$\vec{u}_p = \frac{(\vec{R}_1\vec{p}_0)\vec{R}_1}{4\pi(\lambda+2\mu)R}\, q\left(t - \frac{R}{v_p}\right), \tag{18.41}$$

$$\vec{u}_s = \frac{\vec{p}_0 - (\vec{R}_1\vec{p}_0)\vec{R}_1}{4\pi\mu R}\, q\left(t - \frac{R}{v_s}\right), \tag{18.42}$$

$$\vec{u}_0 = \frac{\vec{a}(M, M_0)}{4\pi\rho R^3} \int\limits_{t-R/v_s}^{t-R/v_p} (t-\tau)q(\tau)d\tau, \tag{18.43}$$

причем

$$\vec{a} = R^3 \mathrm{grad}\left(\mathrm{grad}\,\frac{1}{R}\,\vec{p}_0\right) = 3\vec{R}_1(\vec{R}_1\vec{p}_0) - \vec{p}_0 =$$

$$= 2(\vec{R}_1\vec{p}_0)\vec{R}_1 - [\vec{p}_0 - (\vec{R}_1\vec{p}_0)\vec{R}_1], \tag{18.43$'$}$$

а R и $\vec{R}_1$ определены в (18.34).

Первое слагаемое из правой части (18.40), т.е. $\vec{u}_p(M,t)$ из (18.41), описывает продольную волну, убывающую как R^{-1}, при возрастании расстояния R точки наблюдения M от точки M_0, в которой расположен источник. Множитель $(\vec{R}_1\vec{p}_0)\vec{R}_1 = \vec{R}_1\cos\theta$, где θ – угол между векторами $\vec{p}_0$ и $\vec{R}_1$ определяет ее функцию направленности. Само по себе поле $\vec{u}_p(M,t)$ не удовлетворяет уравнению Ламе. Второе слагаемое из (18.40), т.е. функция (18.42), соответствует поперечной сферической волне с функцией направленности, равной $\vec{p}_0 - (\vec{R}_1\vec{p}_0)\vec{R}_1 = \vec{\theta}_1\sin\theta$, где $\vec{\theta}_1$ – орт сферической системы координат (перпендикулярный $\vec{R}_1$). Функция $\vec{u}_s(M,t)$ убывает при возрастании R как R^{-1}, причем она также не удовлетворяет уравнению Ламе самостоятельно.

Характер разрывов поля $\vec{u}(M,t)$ из (18.40) на фронтах

$$t - \frac{R}{v_p} = c = \mathrm{const} \quad \text{и} \quad t - \frac{R}{v_s} = c = \mathrm{const} \tag{18.44}$$

определяется свойствами функции $q(t)$. Если при $t > 0$ эта функция не имеет разрывов в производных всех порядков, то фронтами оказываются поверхности (18.44) лишь при $c = 0$. При этом в случае $q(0) = 0$, $q'(0) \neq 0$ поле $\vec{u}(M,t)$ из (18.40) имеет правильные сильные разрывы за счет разрывов в первых производных у слагаемых $\vec{u}_p$ и $\vec{u}_s$. Что касается слагаемого $\vec{u}_0$ из (18.40), то оно остается непрерывным с первыми частными производными. Производные же более высоких порядков от $\vec{u}_0$ испытывают на указанных фронтах разрывы непрерывности, причем эти разрывы реализуются как в продольной, так и в поперечной составляющих поля. Последнее видно на примере выражения

$$\vec{u}_0 = \frac{\vec{a}(M, M_0)}{4\pi\rho R^3}\times$$

$$\times\left[\frac{R}{v_p}\, q'\left(t - \frac{R}{v_p}\right) - \frac{R}{v_s}\, q'\left(t - \frac{R}{v_s}\right) + \left(t - \frac{R}{v_p}\right) - q\left(t - \frac{R}{v_s}\right)\right],$$

в котором вектор $\vec{a}(M, M_0)$ в соответствии с $(18.43')$ имеет составляющие по направлению как вектора $\vec{R}_1$, так и вектора $\vec{\theta}_1$. Это, естественно, согласуется с общим заключением из п. 4 §7 о характере разрывов поля $\vec{u}$ на волновых фронтах.

Итак, поле $\vec{u}_0(M, t)$ относится как к продольной, так и к поперечной волнам. С возрастанием R оно убывает как R^{-2}, т.е. на "порядок" быстрее, чем поля (18.41) и (18.42). Поэтому на достаточно больших расстояниях R полем $\vec{u}_0$ в (18.40) можно пренебрегать. Следует отметить, что слова "на достаточно больших расстояниях" приобретают точный смысл при переходе от функции $q(t)$ к ее спектральному представлению Фурье. При этом большими оказываются расстояния R, во много раз превосходящие длину волны поля.

В заключение полезно подчеркнуть, что полученный результат (18.40)–(18.43) не зависит от частного выбора функции $\delta_\varepsilon(M - M_0; n_0)$ из $(18.33')$, от которой мы переходили к функции Дирака $\delta(M - M_0)$ из (18.33). Так, например, все выкладки остаются практически неизменными, если в качестве δ_ε в $(18.33')$ взять функцию вида

$$\delta_\varepsilon(M - M_0; n_0) = \prod_{k=1}^{3} \delta_{\varepsilon_k}(x - x_k^0), \tag{18.45}$$

где

$$\delta_{\varepsilon_k}(x_k - x_k^0) = \begin{cases} > 0, & |x_k - x_k^0| < \varepsilon_k, \\ 0 < & |x_k - x_k^0| \geqslant \varepsilon_k \end{cases} \tag{18.46}$$

– достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon_k}(x_k - x_k^0)dx_k = 1. \tag{18.46'}$$

Областью ненулевых значений такой функции оказывается не сфера $|M - M_0| < \varepsilon$, а параллелепипед $|x_k - x_k^0| < \varepsilon_k$, $(k = 1, 2, 3)$, вследствие чего единственное различие в выкладках бедет теперь состоять в том, что вместо прежнего одного предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ в (18.39) теперь нужно рассматривать три предельных перехода при $\varepsilon_k \to 0$, порядок которых, очевидно, безразличен.

Указанная возможность раздельного рассмотрения предельных переходов при $\varepsilon_k \to 0$ придает выводу несколько большую гибкость. В частности, если положить

$$\vec{f}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}(M, t) = \vec{p}_0 q(t) \prod_{k=1}^{3} \delta_{\varepsilon_k}(x_k - x_k^0), \tag{18.47}$$

подставить значение $\vec{f}(M, t) = \vec{f}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(M,t)}$ в правую часть формулы (17.41) и совершить предельный переход при $\varepsilon_3 \to 0$, то получится формула, совпадающая с (17.41), если в последней: 1) тройные интегралы заменить на двукратные по круговым областям, совпадающим с сечениями сфер $r = v_p t$ и $r = v_s t$ плоскостью $x_3 = x_3^0$; 2) под r понимать выражение

$$r = \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + (x_3^0 - x_3)^2};$$

3) под M' – точку (x_1', x_2', x_3^0) и, наконец, 4) под $\vec{f}$ – функцию

$$\vec{f}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(M, t) = \vec{p}_0 q(t) \delta_{\varepsilon_1}(x_1 - x_1^0) \delta_{\varepsilon_2}(x_2 - x_2^0), \tag{18.48}$$

имеющую смысл (поверхностной) плотности массовой силы, заданной на плоскости $x_3 = x_3^0$. Последующий предельный переход при $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$ в описанной формуле, очевидно, также приводит к формулам (18.40)–(18.43). Таким образом, выясняется, что переход к сосредоточенному воздействию (18.33), возбуждающему поле (18.40)–(18.43), можно совершать на основе первичного задания поверхностной плотности сил вида (18.48). Заметим, что такой подход к заданию точечных источников упругих волн оказывается весьма удобным во многих задачах на распространение волн в средах, содержащих плоскопараллельные границы раздела.

7. Нетрудно видеть, что поле смещений (18.40)–(18.43) может быть положено в основу определения полей любых точечных источников волн в однородной и изотропной упругой среде. Это дает основание называть такое поле фундаментальным.

Полагая в (18.33) и (18.40)–(18.43) последовательно $\vec{p}_0 = \vec{i}_k$, $(k = 1, 2, 3)$, где $\vec{i}_k$ – орт декартовой системы координат, получаем три независимых фундаментальных поля

$$\vec{u}_k(M, M_0, t) = \vec{a}_k(\vec{R})q(t - R - v_p) + \vec{b}_k(\vec{R})q(t - R/v_s) + \\ + \vec{c}_k(\vec{R}) \int\limits_{t-R/v_s}^{t-R/v_p} (t-\tau)q(\tau)d\tau, \qquad (18.49)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \vec{a}_k(\vec{R}) = \frac{\vec{R}(\vec{R}\vec{i}_k)}{4\pi(\lambda+2\mu)R^3}, \quad \vec{b}_k(\vec{R}) = \frac{R^2\vec{i}_k - \vec{R}(\vec{R}\vec{i}_k)}{4\pi\mu R^3}, \\ \vec{c}_k(\vec{R}) = \frac{3\vec{R}(\vec{R}\vec{i}_k) - R^2\vec{i}_k}{4\pi\rho R^5}, \end{aligned}\right\} \qquad (18.49')$$

причем использованы обозначения (18.34). Каждое из полей (18.49) удовлетворяет нулевым начальным данным при $t = 0$, если $q(t) \equiv 0$ при $t < 0$, и возбуждается в результате действия массовой силы с плотностью

$$\vec{f}_k(M, t) = \vec{i}_k q(t)\delta(M - M_0). \qquad (18.50)$$

Не представляет труда убедиться в том, что поле (18.49), (18.49′) содержит в себе поля (18.22) и (18.30), (18.30′) фундаментальных статического и стационарного точечных источников (18.14′) и (18.23′). Для этого достаточно соответственно положить $q(t) = \varepsilon(t)$, $q(t) = \varepsilon(t)\exp(i\omega t)$ и вычислить интеграл из (18.49) при значениях времени $t > R/v$, превосходящих время установления статического и стационарного режимов. Таким образом, все результаты для статических и стационарных точечных источников могут быть получены на основе рассмотрения источников (18.50).

Переходя к определению понятия о точечных источниках различных порядков, мы сначала отбросим временной множитель $q(t)$ и вместо $\delta(M - M_0)$ будем рассматривать функцию $\delta_\varepsilon(M - M_0)$ из (9.9), имеющую производные всех порядков. При этом под

$M_0 + \Delta x_q^0$ будем понимать точку, получающуюся из M_0 изменением ее координаты x_q^0 (с номером q) на величину Δx_q^0 и будем называть выражения

$$I_k(q_1, q_2, q_3) = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} (x_1' - x_1^0)^{q_1}(x_2' - x_2^0)^{q_2}(x_3' - x_3^0)^{q_3} f_k(M')dM', \tag{18.51}$$

в которых $q_1 + q_2 + q_3 = m$, а q – целые числа, моментами m-го порядка относительно точки M_0 от составляющей $f_k(M)$ плотности массовых сил

$$\vec{f}(M) = \sum_{k=1}^{3} \vec{i}_k f_k(M).$$

В качестве исходных для определения возьмем три плотности массовых (единичных) сил

$$\vec{f}_k^{\,0} = \vec{i}_k \delta_\varepsilon(M - M_0), \quad (k = 1, 2, 3) \tag{18.52}$$

которые для наглядности можно толковать как силы, приложенные к точке M_0 (что реализуется, конечно, лишь при $\varepsilon \to 0$).

По плотностям сил (18.52) определим девять плотностей массовых двойных сил (с моментами первого порядка):

$$\vec{f}_{kq}^{\,0}(M) = \lim_{\Delta x_q^0 \to 0} \frac{\vec{i}_k \delta_\varepsilon(M - M_0 - \Delta x_q^0) - \vec{i}_k \delta_\varepsilon(M - M_0)}{\Delta x_q^0} =$$

$$\vec{i}_k \frac{\partial}{\partial x_q^0} \delta_\varepsilon(M - M_0) = -\vec{i}_k \frac{\partial}{\partial x_q} \delta_\varepsilon(M - M_0), \tag{18.53}$$

конструируемых по аналогии с тем, как конструируется математический диполь в электростатике.

По девяти плотностям двойных сил (18.53) определим 27 пар двойных сил (с моментами второго порядка), характеризуемых массовыми плотностями

$$\vec{f}_{kqp}^{\,0} = \lim_{\Delta x_p^0 \to 0} \frac{\vec{i}_k \frac{\partial}{\partial x_q^0} \delta_\varepsilon(M - M_0 - \Delta x_p^0) - \vec{i}_k \frac{\partial}{\partial x_q^0} \delta_\varepsilon(M - M_0)}{\Delta x_p^0} =$$

$$\vec{i}_k \frac{\partial^2 \delta_\varepsilon(M - M_0)}{\partial x_p^0 \partial x_q^0} = \vec{i}_k \frac{\partial^2 \delta_\varepsilon(M - M_0)}{\partial x_p \partial x_q} \tag{18.54}$$

Продолжая указанный процесс, приходим к совокупности плотностей массовых сил с моментами m-го порядка, определяемых формулами

$$\vec{f}^{\,0}_{kq_1q_2q_3} = \vec{i}_k \frac{\partial^m \delta_\varepsilon(M-M_0)}{(\partial x_1^0)^{q_1}(\partial x_2^0)^{q_2}(\partial x_3^0)^{q_3}} = \vec{i}_k(-)^m \frac{\partial^m \delta_\varepsilon(M-M_0)}{(\partial x_1)^{q_1}(\partial x_2)^{q_2}(\partial x_3)^{q_3}}, \tag{18.55}$$

в которых, как и везде далее, $q_r \geqslant 0$ – целые числа, связанные условием $q_1+q_2+q_3=m$.

Заметим, что вследствие предположения о бесконечной гладкости функции $\delta_\varepsilon(M-M_0)$ все ее частные производные вида (18.55) имеют классический смысл. При этом для любой аналитической функции $\Phi(M)$ и любого $m \geqslant 0$ выполняются очевидные соотношения

$$\left.\begin{aligned} I_\varepsilon \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(M') \frac{\partial^m \delta_\varepsilon(M'-M_0)}{(\partial x_1')^{q_1}(\partial x_2')^{q_2}(\partial x_3')^{q_3}}\, dM' = \\ = (-)^m \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^m \Phi(M')}{(\partial x_1')^{q_1}(\partial x_2')^{q_2}(\partial x_3')^{q_3}}\, dM', \\ \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = (-)^m \frac{\partial^m \Phi(M)}{(\partial x_1)^{q_1}(\partial x_2)^{q_2}(\partial x_3)^{q_3}}\bigg|_{M=M_0}. \end{aligned}\right\} \tag{18.56}$$

Условимся понимать под сосредоточенной массовой силой $\vec{f}_{kq_1q_2q_3}(M)$ с моментом m-го порядка результат предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ от плотности $\vec{f}^{\,0}_{kq_1q_2q_3}(M)$ из (18.55). Плотность такой силы будем обозначать символом

$$\vec{f}_{kq_1q_2q_3}(M) = \vec{i}_k \frac{\partial^m \delta(M-M_0)}{(\partial x_1^0)^{q_1}(\partial x_2^0)^{q_2}(\partial x_3^0)^{q_3}}, \tag{18.57}$$

где $q_1+q_2+q_3=m$, причем свойства m-й производной от $\delta(M-M_0)$ будем понимать в смысле (18.56).

Вследствие соотношений (18.56) и аналитичности функции $\Phi(M') = (x_1'-x_1^0)^{\widehat{q}_1}(x_2'-x_2^0)^{\widehat{q}_2}(x_3'-x_3^0)^{\widehat{q}_3}$, входящей под знак интеграла в (18.51), ясно, что все моменты $I_k(q_1,q_2,q_3)$ плотности силы (18.57) равны нулю, если выполняется хотя бы одно из неравенств $\tilde{q}_1 \neq q_1$, $\tilde{q}_2 \neq q_2$, $\tilde{q}_3 \neq q_3$. Что касается момента (18.51) с параметрами $\tilde{q}_1 = q_1$, $\tilde{q}_2 = q_2$, $\tilde{q}_3 = q_3$, то для него получается значение

$$I_k(q_1,q_2,q_3) = (-)^m q_1!q_2!q_3!. \tag{18.58}$$

Рассмотрим теперь сосредоточенные силы, характеризуемые массовыми плотностями

$$\vec{f}_{kq_1q_2q_3} = \vec{i}_k q(t) \frac{\partial^m \delta(M - M_0)}{(\partial x_1^0)^{q_1} (\partial x_2^0)^{q_2} (\partial x_3^0)^{q_3}} \tag{18.59}$$

с функцией $q(t)$, непрерывно дифференцируемой до порядка m включительно.

Если в (18.59) заменить $\delta(M - M_0)$ на $\delta_\varepsilon(M - M_0)$ и подставить результат в формулу (17.41) вместо $\vec{f}(M, t)$, то появится очевидная возможность вынесения за знак всех интегралов операции m-кратного дифференцирования по точке M_0. При этом под знаком производной (m-го порядка по x_1^0, x_2^0, x_3^0) окажется выражение, в точности равное результату подстановки вместо $\vec{f}(M, t)$ в правую часть (17.41) плотности силы

$$\vec{f}_\varepsilon(M, t) = \vec{i}_k q(t) \delta_\varepsilon(M - M_0). \tag{18.50$'$}$$

Подобное выражение изучалось в п. 6, где было показано, что при $\varepsilon \to 0$ оно приводит к полю (18.40) или, что то же, (18.49). В случае же малого $\varepsilon > 0$ оно приводит к полю $\vec{u}_k(M, M_0, t)$ из (18.52), в котором аргумент $M_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ заменен на аргумент $M_0 = (x_1^0 + \theta_1 \varepsilon, x_2^0 + \theta_2 \varepsilon + \theta_3 \varepsilon)$, где θ_k – некоторые числа, удовлетворяющие неравенствам $|\theta_k| < 1$. Но на основании предположенной гладкости функции $q(t)$ из (18.59) и конструкции правой части (18.49) можно утверждать, что при $|M - M_0| > \varepsilon$ все производные m-го порядка от поля $\vec{u}_k(M, M_0, t)$ непрерывны по точке M_0. Вследствие этого под знаком упоминавшейся производной m-го порядка (вынесенной из под знаков интегрирования в (17.41)) допустимо переходить к пределу при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, можно утверждать, что воздействие (18.59) возбуждает в однородной и изотропной безграничной упругой среде поле смещений, выражающееся по формулам

$$\vec{u}_{kq_1q_2q_3}(M, M_0, t) = \frac{\partial^m \vec{u}_k(M, M_0, t)}{(\partial x_1^0)^{q_1} (\partial x_2^0)^{q_2} (\partial x_3^0)^{q_3}} =$$

$$= (-)^m \frac{\partial^m \vec{u}_k(M, M_0, t)}{(\partial x_1)^{q_1} (\partial x_2)^{q_2} (\partial x_3)^{q_3}}, \tag{18.60}$$

через поле $\vec{u}_k(M, M_0, t)$ из (18.49). (Замена дифференцирования по точке M_0 на дифференцирование по точке M в случае рассматриваемой среды возможна ввиду того, что поле $\vec{u}(M, M_0, t)$

фактически зависит лишь от t и вектора $\vec{R} = (x_1^0 - x_1)\vec{i}_1 + (x_2^0 - x_2)\vec{i}_2 + (x_3^0 - x_3)\vec{i}_3 = \overrightarrow{MM_0}$. Подобная зависимость является одним из характерных свойств полей в однородных и изотропных безграничных упругих средах).

В заключение полезно отметить, что рассмотренные нами ранее плотности сил $\vec{f}_p(M,t)$ и $\vec{f}_k(M,t)$ из (18.31) и (18.32) относятся (по введенной терминологии) к сосредоточенным силам с первыми моментами. При этом из-за наличия формул

$$\vec{f}_p(M,t) = 4\pi(\lambda + 2\mu)q(t)\sum_{k=1}^{3}\vec{i}_k\frac{\partial}{\partial x_k^0}\delta(M - M_0)$$

и

$$\vec{f}_k(M,t) = 4\pi\mu q(t)\left[\sum_{q=1}^{3}\vec{i}_q\frac{\partial\delta(M - M_0)}{\partial x_q^0} \times \vec{i}_k\right] = 4\pi\mu q(t)\times$$

$$\times\sum_{q=1}^{3}[\vec{i}_q \times \vec{i}_k]\frac{\partial\delta(M - M_0)}{\partial x_q^0} = 4\pi\mu q(t)\times$$

$$\times\left[\frac{\partial\delta(M - M_0)}{\partial x_{k-1}^0}\,\vec{i}_{k+1} - \frac{\partial\delta(M - M_0)}{\partial x_{k+1}^0}\,\vec{i}_{k-1}\right],$$

(где $k - 1 = 3$ при $k = 1$ и $k + 1 = 1$ при $k = 3$) можно утверждать, что поля $\vec{u}_p(M,t)$ и $\vec{u}_k(M,t)$ из (18.38) и (16.8) выражаются через векторное поле $\vec{u}_k(M, M_0, t)$ из (18.49) в виде равенства

$$\vec{u}_p(M,t) = 4\pi(\lambda + 2\mu)\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k^0}\mathbf{u}_k(M, M_0, t), \tag{18.61}$$

в случае продольных волн, и в форме равенств

$$\vec{u}_k(M,t) = 4\pi\mu\left[\frac{\partial}{\partial x_{k-1}^0}\vec{u}_{k+1}(M, M_0, t) - \frac{\partial}{\partial x_{k+1}^0}\vec{u}_{k-1}(M, M_0, t)\right]. \tag{18.62}$$

в случае волн поперечных.

Замечания автора

Прежде всего здесь нужно отметить, что по техническим причинам последние три главы монографии (главы № 7–9) пришлось перенести в первый раздел следующего № 274 тома Записок научных семинаров ПОМИ.

Остающееся же в этом томе (№ 273) небольшое место (порядка 20-и стр.) было решено посвятить краткому освещению послевоенного периода формирования Ленинградско-Петербургской школы по распространению упругих (сейсмических) волновых полей. Как и всё послевоенное время, этот период становления школы обладал рядом уникальных особенностей, что в какой-то мере оправдывает включение схематического его описания в качестве главы № 6 монографии. Конечно, такая глава оказывается в монографии инородной. Однако она занимает немного места и приводит сведения (подкрепленные списком литературы того времени), получить которые другим путем едва ли было бы возможно. А в них имеется научное содержание и даже, пожалуй, – нетривиальное!

Общим же с монографией у этих страниц оказывается область научных интересов, общность стремлений, а отчасти и общность результатов. Возможно, что этот послевоенный период заслуживал бы и более обстоятельного предметного описания. Но для этого требовалось бы значительно больше места, равно как и больше повествовательной сноровки автора.

Автор решается сохранить эту главу в монографии с оговоркой, что “главу 6 можно опускать при чтении без какого-либо ущерба для понимания основного текста монографии”.

ГЛАВА 6.

Слово о послевоенном становлении Ленинградско-Петербургской школы по распространению упругих (сейсмических) волновых полей

Сразу по окончании войны и по возвращению в Ленинград (летом 1945 г.) Ленинградской Военно-Воздушной Академии, где я нес воинскую службу в качестве майора-профессора физики, меня пригласил совместительствовать в Институте Математики и Механики Ленинградского Университета (ЛГУ) его директор, акад. В. И. Смирнов. Он поручил мне разработку динамической теории упругости, а также – чтение лекций на старших курсах физического и математико-механического факультетов ЛГУ. Помимо этого он передал моим заботам будущего аспиранта матмеха – К. И. Огурцова – сыгравшего в последующем решающую роль в обращении нас лицом к сейсмическому эксперименту.

Тематика исследований не была лимитирована. Высказывалось лишь пожелание рассматривать однородные и изотропные упругие среды, содержащие границы раздела в форме сферы, бесконечного кругового цилиндра, или плоскостей, на которых выполняются условия жесткости контакта сред.

Здесь, естественно, было бы начать исследования с плоских границ раздела, возбуждаемых волнами простейших типов, т.е. – плоскими, или локально-плоскими волнами. Однако при разработке количественных методов изучения упругих или акустических полей, начавшейся в ЛГУ сразу по окончании войны, сначала сформировалось несколько иное , аппаратно значительно более сложное математически направление исследований. Изучались волновые процессы в упругих и акустических сфере и в круговом цилиндре, возбуждаемые импульсными сосредоточенными воздействиями (плоскими в случае цилиндра). При этом целью ставилось изучение в указанных средах процессов распространения волновых фронтов прямых и отраженных волн, с количественной оценкой полей в прифронтовых их зонах.

Работа шла успешно, и сравнительно быстро усилия привели к ряду нетривиальных результатов, решающих, в принципе, поставленные задачи. Получаемые же новые результаты публиковались в узковедомственной серии выпусков “Ученых записок ЛГУ”, не пользовавшихся в то, послевоенное время, спросом, и выходивших в свет малыми тиражами. В результате, указанная серия исследований осталась практически незамеченной сейсмической (научной) общественностью.

И вот, вследствие научной значимости полученных тогда результатов, сохраняющих элементы новизны до сих пор, а также из-за того обстоятельства, что именно из них выкристаллизовался (широко используемый теперь) метод изучения волновых полей в слоисто-однородных упругих средах с плоскопараллельными границами раздела (названный методом контурных интегралов), представляется оправданным небольшое отклонение от основной канвы текста монографии с тем, чтобы напомнить (или информировать) о полученных тогда результатах, представляющих и сейчас определенный интерес в динамической теории упругости.

Этому как раз и посвящен §19, а также список ряда публикаций того времени, помещенный в конце этих листков.

§19. О НЕКОТОРЫХ ПОСЛЕВОЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ РАЗРАБОТКИ ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН

1. Отправляясь от общеизвестных для того (послевоенного) времени результатов по теории распространения упругих волн, было оправданно (хотя и очень рискованно) обращение к серии основных задач динамической теории упругостей для однородных и изотропных сферы (шара), или шарового слоя, или – для бесконечного кругового цилиндра, или, наконец, – обращение к ряду задач на дифракцию акустических и упругих волн от сферы, двугранных углов и полубесконечных плоских экранов. Однако в рамках именно таких задач для ограниченных областей и проводились у нас (на первых порах после войны) исследования по теории волновых полей...

2. Тогда приходилось много общаться со студентами старших курсов физфака и матмеха ЛГУ во время чтения семестровых (и двухсеместровых) лекций по математической физике, по теории относительности и по динамической теории упругости, а также – во время руководства курсовыми, дипломными и аспирантскими работами, число которых скоро становились непомерно большим. (Оно еще увеличивалось за счет студентов геолого-почвенного факультета ЛГУ, которых "приводили ко мне" студенты-физики, слушатели моих лекций). Было трудно, но и очень интересно, так как среди тогдашних студентов было очень много ярко-талантливых личностей, выросших вскоре в действительно крупных ученых. Как раз из них и составлялся костяк Ленинградской школы по распространению волн. А с 1950 г. к группе наших, "добровольных-преданных" сотрудников-студентов и аспирантов ЛГУ – примкнули еще сотрудники упругисты из Математического Института (ЛОМИ).

Совместно с (многочисленной) группой упомянутых "приватных" сотрудников, состоявших из (талантливых) аспирантов первых двух – и студентов последних двух курсов ЛГУ, а также с группой молодых сотрудников ЛОМИ, в течение нескольких лет (с конца 40-х – и более половины 50-х годов нашего века) проводились исследования в области распространения упругих (сейсмических) волн как теоретическими методами, так и экспериментально – в полевых условиях с адекватной (достаточно современной) измерительной аппаратурой. Полученные результаты освещались в двух сериях (ведомственных) изданий. Во-первых, в серии "Динамические задачи теории упругости" по линии Ученых Записок ЛГУ. (За 50-е годы выпущено 7 сборников этой серии, нормальных объемов). И, во-вторых, в серии "Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн", где освещались не только теоретические результаты, но и результаты наших экспериментальных (полевых) исследований. Сборники этой серии выходили в свет, практически, ежегодно до 1990 г., причем за 50-е годы вышел в свет сборник (1957 г.), посвященный методике расчетов волновых полей в слоистых средах при помощи специально-составленных таблиц. (Компьютеров тогда в России не было! А изложенная методика расчетов совпадала с нулевым приближением лучевого метода и появилась на десяток лет раньше).

3. Начались наши послевоенные теоретические исследования с проводимого мною тогда изучения волновых процессов в прифронтовых зонах прямых и отраженных волн в упругом шаре, возбужденном сосредоточенным импульсным воздействием[1] Поле смещений в шаре представлялось бесконечными рядами по шаровым векторам $\vec{Y}_{nm}(\theta, \varphi)$ [7], коэффициенты которых представлялись комбинациями функций Бесселя и Ханкеля половинных значков вида $J_{n+\frac{1}{2}}(-inrz)$, содержащих комплексный произвольный аргумент z. Далекие члены рядов при больших значениях индексов $n \gg 1$ и аргументов $(-inrz)$, выражались громоздкими комбинациями цилиндрических функций, что препятствовало применению к исследованию структуры и характера сходимости применяемых рядов методов контурного интегрирования. Поэтому пришлось сначала построить практически полную асимптотику всех цилиндрических функций

$$J_{n+\frac{1}{2}}(-inrz), \quad H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(inrz) \quad \text{и} \quad H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(-inrz)$$

[1] Такая тематика спонтанно возникла у меня в военные годы, как следствие довоенной аспирантской работы в области квантовой механики под руководством незабвенного учителя акад. В. А. Фока. Тогда и был разработан метод шаровых векторов [7], оказавшийся естественным аппаратом решения любых векторных задач с центральной симметрией.

при больших значениях значков $(n+1/2)$ и больших комплексных аргументах $(-inrz)$ (которая в литературе в то время отсутствовала).

Построения производились путем деформации путей интегрирования в представлениях функций Бесселя интегралами Зоммерфельда–Сонина в стационарные линии наибыстрейшего спуска (фазовой функции), что позволяло получать приближенные представления полей с хорошей точностью, допускающей количественную оценку. При использовании же асимптотических представлений функций Бесселя, а также – асимптотики шаровых векторов при $n \gg 1$, удавалось получать оценки "хвостов" бесконечных рядов по шаровым векторам, представляющих поля смещений волн в упругом шаре. А это приводило, в конце-концов, к требуемой оценке волновых полей в прифронтовых их зонах...

4. Аппарат цилиндрических функций, примененный в ряде работ того времени, интересных по постановке и по конечным результатам как с математической, так и с прикладной точек зрения, оказался трудным (из-за его громоздкости) даже для специалистов математиков, не сталкивающихся в своей работе непосредственно с функциями Бесселя. Это мешало восприятию примененных новых идей при подходах к решению задач на распространение волн в сферических и цилиндрических областях.

Чтобы преодолеть возникшие здесь затруднения и довести разрабатываемый подход до полного понимания (во всех деталях) математиками и физиками, возникла мысль применить его к ряду уже решенных задач в случае областей, границами раздела которых являются плоскости, или параллельные плоскости. В таких случаях решения задач представляются в элементарных функциях, вследствие чего "трудность громоздкости решения" отпадает.

В качестве первой из таких задач была выбрана задача Лемба для упругого полупространства, подробное решение которой дано в [9], с описанием методов исследования волновых полей с целью получения физических следствий.

Несмотря на известное несовершенство текста (с современной точки зрения) эта статья, равно как и подобная же статья [23], написанная с такой же целью, позволили разъяснить ситуацию и продемонстрировать простоту и математическую естественность применяемых новых подходов к решению серии практически-важных задач для сейсморазведки, а также – их эффективность и предельную широту в области извлечения из решений физических следствий. Это позволило разрабатываемый подход назвать методом контурных интегралов и широко применять его при решении задач сейсмической практики. В результате, удалось получить ряд полезных, новых для того времени, результатов в области теории упругих (сейсмических) волн и их возбуждения, причем авторами их в значительной степени были сами студенты и аспиранты, прошедшие стажировку в зародившейся нашей "школе".

В связи с этим мне приятно упомянуть здесь аспиранта Г. И. Марчука и студентов-дипломантов А. С. Алексеева и Е. И. Шемякина, ставших вскоре академиками, а также – множество других ярких наших добровольных сотрудников: В. М. Бабича, В. С. Булдырева, братьев Молотковых, Г. И. Макарова, Б. Я. Гельчинского, Ф. М. Гольцмана и множество других, не уступавших по таланту первым, но менее удачливых в жизненной карьере... Однако в приведенных ниже литературных ссылках все они действительно были авторами, или полноценными соавторами. Поэтому следовало считать подарком судьбы тому, кому довелось с ними работать и помогать им приобщаться к большой науке.

5. В конце 1950 года в Ленинграде прошел слух, что в Университете умеют решать прямые задачи теории упругости (т.е. сейсмики) в случае слоисто-однородных сейсмических сред с плоско-параллельными границами раздела. (Осадочные чехлы). Это вызвало настойчивые просьбы сейсморазведочных организаций о разработке инженерных методов расчета динамики волновых полей в осадочных толщах, возбуждаемых применяемыми полевыми воздействиями. Отказаться от таких просьб не было возможностей, что повлияло и на направления наших исследований.

Волновые поля, возбуждаемые в указанных средах различными источниками, подвергались всесторонним исследованиям. Были установлены различные формы аналитических интегральных представлений решений одних и тех же задач и установлены внутренние аналитические связи между ними. Разработаны методы оптимальной количественной оценки волновых полей в различных областях слоистой среды и т.п. При этом теория волновых полей в слоистых средах постепенно приобретала облик специального (прикладного) раздела теории функций комплексного переменного, связанного с методами контурного интегрирования и с количественными оценками интегралов по методу перевала, равно как и численными способами. Такая теория не сразу была полностью формализована, однако все время находилась в работе. Лишь в конце 70-х годов она была изложена в достаточно полном виде и была издана в форме небольшой (но весьма полезной) монографии [34], основной недостаток которой заключается в том, что все ее вычислительные алгоритмы ориентированы на работу без персональных компьютеров, которых в то время в России не было. Указанный недостаток, конечно, следует устранить возможно скорее.

6. По мере продвижения в количественном изучении упругих волновых полей, а также – обсуждения и осмысливания общей картины распространения упругих (сейсмических) волн в слоистых средах, у наших молодых сотрудников, и прежде всего у аспиранта К. И. Огурцова, скоро сложилось глубочайшее убеждение в том, что получаемые нами физические следствия из теории волн должны подтверждаться “правильно-поставленными” полевыми экспериментами. Их (“надоедливая”) настоячивость и заверения, что “всю организационную работу по полевым экспериментам” они берут на себя, возобладала – и с середины 1951 г. наш молодежный (приватный) научный коллектив стал заниматься не только теорией волн, но также – и вопросами полевого сейсмического эксперимента.

Наши (нештатные) сотрудники за 3–4 года заметно подросли, и среди них нашлись энтузиасты с недюженным организационным талантом, различных специальностей вплоть до радиофизиков высокой квалификации. Они установили деловые контакты с сейсморазведочными организациями Ленинграда. Умудрились каким-то образом раздобыть необходимое для полевых работ оборудование (вплоть до 24-х канальной сейсмостанции на автомашине со всем комплектом оборудования и приспособлений). Оставалось только помогать им в формально-организационной сфере, и разрабатывать планы экспериментальных исследований, адекватных нашей количественной теории волновых полей...

Самостоятельные наши сейсморазведочные полевые исследования, носившие методический характер (использовавшие как ударные, так и взрывные воздействия) проводились под Ленинградом летом 1952-го и 1953-го годов и, против ожидания многих, оказались весьма плодотворными и даже новаторскими. Было доказано, что процессы распространения сейсмических волн в осадочных средах хорошо согласуются с предписаниями количественной теории волн. Были опробованы подходы к разработке интерференционной теории приема волновых полей, как средства борьбы с волнами-помехами разных типов (Ф. М. Гольцман). Был установлен (изучен и описан) ряд новых явлений, положивших начало разработке метода поперечных волн в сейсморазведке (К. И. Огурцов, Е. И. Шемякин, А. П. Волин), а также – метода корреляционного прослеживания волновых полей в скважинах, осуществляемого при помощи самодельного сейсмоприемника с прижимом к стенке скважины (Н. И. Берденникова, А. Г. Рудаков, В. В. Жадин), положившего начало разработке хорошо теперь известного метода вертикального сейсмического прифилирования (Е. И. Гальперин).

Результаты наших полевых сейсморазведочных работ обсуждались в 1953-ом и в 1954-ом годах на большим семинаре Геофизического Института АН СССР в Москве, и получили весьма лестную оценку.

После же 1954 г. наш коллектив был переполнен предложениями о прикомандировании на время полевых работ наших сотрудников к ведущим производственным сейсморазведочным партиям страны. И с некоторыми из них мы продолжали плодотворные экспериментально-теоретические исследования в течение многих лет...

7. По завершении (в основном) разработки инженерных методов расчета сейсмических волновых полей в осадочных толщах встал вопрос о внедрении разработанных методов в практику сейсморазведки. Для этой цели в 1956-ом и в 1958-ом годах (по просьбе Министерства Геологии) при ЛГУ были организованы Всесоюзные месячные курсы повышения квалификации инженеров-интерпретаторов сейсморазведочных партий страны.

В работе курсов приняло участие соответсвенно около 90 и 60 человек. Занятия на курсах проводили заметно подросшие наши сотрудники и аспиранты, для которых были выделены, наконец, (в 1956 г.) штатные единицы в рамках лаборатории Динамики упругих сред при физическом факультете ЛГУ. Тематика же работы курсов была примерно следующей:

1) элементы теории распространения сейсмических волн (цикл 2-х часовых лекций);

2) методика расчета полей объемных и головных волн при помощи таблиц (двухчасовые семинарские занятия). И, наконец,

3) теория интерференционного приема (полезных) сигналов с целью подавления волн помех. (Комбинированные лекционные и семинарские двухчасовые занятия.)

Работа курсов прошла вполне успешно и вызвала неподдельный интерес у слушателей. Ведь возможность оценки динамических характеристик регистрируемых сейсмических волн была новостью в то время, причем новостью, несомненно, с большой будущностью. И слушатели курсов были полны решимости по возвращению в свои партии проводить расчеты волновых полей во всех сложных (или сомнительных) случаях, и тем самым уточнять результаты применяемых классических методов интерпретации полевых наблюдений. И они проводили такие расчеты несмотря на встречающиеся затруднения и медлительность работы с таблицами.

Конечно, расчеты параметров волн вручную при помощи таблиц были анахронизмом уже в то время. Но что другое можно было предложить, когда об использовании в вычислительной работе компьютеров в России 70-х–80-х годов, практически, можно было только мечтать!

8. Если бы расчеты сейсмических полей по нашим алгоритмам 60-х годов (совпадающих с алгоритмами лучевого метода в нулевом его приближении, по предложенным значительно ранее и имеющим очевидную тенденцию к совершенствованию) можно было бы поставить на компьютеры и придать, тем самым, классическим (корреляционным) методам интерпретации сейсмических данных технологичный характер, то пришедшие в 70-х–80-х годах с Запада технологичные методы ОГТ не смогли бы вытеснить сейсмическую классику с арены сейсморазведки России.

Ведь классические методы интерпретации имеют под собой четкое физически-бесспорное обоснование, адекватное рассматриваемым моделям сейсмических сред. Как и во всех точных естественных науках, связанных с наблюдением некоторых исходных данных и требующих их интерпретации, они развивались в общей струе подходов к проблемам типа "проблем черного ящика", к которым задачи сейсморазведки имеют прямое отношение. Классические методы базировались на современном уровне развития представлений о закономерностях в распространении волн тех или иных типов, носителей информации о строении и составе изучаемого участка среды. Они требовали как теоретического изучения волновых полей, так и экспериментального изучения волн методами корреляционного прослеживания, т.е. единственным надежным способом, позволяющим определять элементы истинного распространения индивидуальных волн различных типов. Они стимулировали разработку теории распространения волновых полей во все усложняющихся геологических средах, так как было ясно, что без знания свойств сигнала, носителя требующейся информации о среде, – правильных сведений о среде получить нельзя.

Таким образом, в идейном отношении классические методы интерпретации данных сейсморазведки опираются на современную науку в области распространения волновых полей и их сигнальных составляющих. Подобно этому они опираются и на теорию информации, реалистично учитывая ее возможности. Им недостает лишь разумной технолизации процесса выполнения работ: от посылки в среду требующихся сигналов и регистрации обратных сигналов, несущих информацию о среде, – до процесса извлечения из обратного сигнального поля требующейся информации. При наличии компьютеров такую технолизацию классической сейсморазведки осуществить не представляло бы особого труда. Однако при современном комерческом подходе к сейсморазведке об этом, всерьез, не может быть и речи...

Что же касается современных технологичных методов сейсморазведки, основанных на возбуждении полей при помощи различных (фактически неидентичных и неконтролируемых) перемещаемых воздействий, и при регистрации вторичных волн по схемам многократных перекрытий, то они лишены какого-либо логически всесторонне-увязанного физического обоснования. Более того, они не связаны даже единством языка, обладающего единой терминологией для понятий, которые должны выражать одни и те же отношения, или факты. Поэтому в учебниках, и даже в "научной" литературе, невозможно найти двух идентичных изложений основных положений метода, т.е. – точного свода всех его допущений, положений и понятий. В технологичных методах игнорируется представление о среде, как об изменчивой субстанции, в которой волны-сигналы, несущие информацию о среде, распространяются. При этом основные его положения находятся в вопиющем противоречии со всем положительным, чем располагают точные естественные науки, имеющие отношение к интерпретации результатов наблюдений. В технологичной сейсморазведке нет метода (исследования), как научной категории. Имеется же некоторая зафиксированная последовательность действий (колоссальной и все возрастающей стоимости), приводящая к картинкам (смысл которых совершенно не ясен), которые, однако, можно использовать в рамках схемы "распознавания образов". Но об этом как-нибудь потом...

9. Теперь же пора возвратиться к нашей молодежной в прошлом, многочисленной научной группе студентов-аспирантов ЛГУ. Ядро ее более, или менее сохраняло стабильность до 1956 года, когда, наконец, были выделены штаты на десяток единиц для лаборатории "Динамики упругих сред" при физическом факультете ЛГУ. После этого стало легче в формальном и в материальном отношениях. Однако и после этого состав нашей научной группы непрерывно обновлялся: студенты 3-го–5-го курсов приходили и включались в работу. По окончании же университета без аспирантуры они уходили от нас. Правда, мы старались устраивать их на работу по специальности, что было нетрудно делать "в отъезд", так как со временем близкие знакомства у нас завелись во всех сейсмических организациях нашей огромной страны. Это приводило, в частности, к тому, что наши теоретико-экспериментальные исследования стали проводиться в больших сейсмических партиях, где нам предоставляли полную свободу действий (и с интересом следили за ее результатами). В общем, работа шла успешно и в сейсмических партиях и дома (в лаборатории), причем частично она была отображена в ряде статей наших изданий в серии "Вопросы" (ссылки на которые здесь не приводятся). Не имея возможности останавливаться подробнее на подобных вопросах, лишь отмечу, что три начатые нашими молодыми сотрудниками в 50-х годах новые направления исследований (доведенные ими до полного теоретико-экспериментального обоснования) были удостоены позднее тремя Государственными премиями нашей страны!

Кроме того, уместно, пожалуй, отметить, что значительное число наших воспитанников “осели” в г. Новосибирске и в прилегающих к нему городах, где и продолжают работать в области геофизики с неизменным успехом.

10. В заключение можно еще добавить, во-первых, что вследствие непрекращившейся работы со студентами ЛГУ, с аспирантами и с многочисленными сотрудниками Лаборатории динамики упругих сред ЛОМИ, было много проще осуществлять выпуск научной продукции в свет через посредство специальных ведомственных изданий. Это меньше отвлекало от творческой работы, позволяло не ограничивать размерами “важные статьи” и не относиться с чрезмерными требованиями к литературному “стилю статей”. Помимо этого упрощались и некоторые обстоятельства, связанные с особенностями общественного строя в нашей стране. Однако за все это приходилось платить немалой ценой – в частности оторванностью от мировой литературы по теории распространения сейсмических волн...

И, во-вторых, что содержание §19 следует рассматривать как эпизодическое отступление от общей линии изложения материала монографии, вызванное желанием хоть кратко и фрагментарно осветить в общих чертах нашу научную деятельность (ее стиль и формы) в трудные послевоенные годы, протекшие к тому же под “железным занавесом”. Не знаю, удалось ли мне это? Удалось ли соблюсти без слов жизненные масштабы событий и их нестандартность, приведшую к тому же к ряду несомненных успехов?

Теперь же следует возвратиться к основной канве нашего текста, но уже в томе № 274 Записок.

Литература к части 1

1. Г. И. Петрашень, *Основы математической теории распространения упругих волн.* — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн (“Вопросы”). В. 18, Л., Наука (1978) 247 с.
2. Г. И. Петрашень, *Распространение волн в анизотропных упругих средах.* Л., Наука (1980), 280 с.
3. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики.* Т. 3, часть 1.
4. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики.* Т. 4.
5. Ф. И. Федоров, *Теория упругих волн в кристаллах.* М., Наука (1965), 386 с.

6. M. J. P. Musgrave, *Crystal acoustic waves and vibrations in cristals.* San-Francisco (1970), 288 s.

Приложение к главе 6

Здесь приводится сокращенный список исследований, выполенных по моему предложению студентами старших курсов и аспирантами ЛГУ в начале послевоенного периода деятельности Ленинградского Гос. Университета (1948–1957 гг.). Результаты этих работ, равно как и многих из неоформленных наших исследований, сыграли заметную роль в разработке теории распространения сейсмических волн в слоистых средах. Они ощутимо повлияли на уровень качественного и количественного понимания наблюдаемых сейсмических процессов и способствовали развитию методов сейсморазведки в нашей стране...

Для публикации этих работ Издательство Университета выделило специальную серию “Динамические задачи теории упругости” в журнале “Ученые записки ЛГУ”.

Перечисление работ производится здесь в порядке следования номеров выпусков Уч. записок ЛГУ, в которых работы помещаются. При этом к каждому выпуску Уч. записок относятся статьи, помещенные в строках списка, расположенных непосредственно под строкой с номером выпуска...

Что же касается нумерации статей то, во избежании путаницы, здесь применена порядковая нумерация, порождающая номера (выше расположенного) короткого списка цитируемой в монографии литературы.

Список важнейших работ студентов и аспирантов ЛГУ (выпущенных в свет вне планов), обработанный литературно их руководителем

Выпуск 114, Уч. записки ЛГУ, 1949 г.

7. Г. И. Петрашень, “Симметрия вращения и шаровые векторы”, (27 с.)

Выпуск 135, Уч. записки ЛГУ, 1950 г.

8. Г. И. Петрашень, “Свободные и вынужденные колебания упругой сферы”, (47 с.)
9. Г. И. Петрашень, Г. И. Марчук, К. И. Огурцов, “О задаче Лемба в случае полупространства”, (48 с.)

Выпуск 149, Уч. записки ЛГУ, 1951 г.

10. К. И. Огурцов, Г. И. Петрашень, “Динамические задачи для упругого полупространства в случае осевой симметрии”.
11. Г. И. Петрашень, “Колебания упругого полупространства, покрытого слоем жидкости”.
12. Г. И. Петрашень, “К теории тонких пластин”.

Выпуск 162, Уч. записки ЛГУ, 1952 г.

13. Г. И. Петрашень, “Распространение упругих волн в слоистоизотропных средах, разделенных параллельными плоскостями”.

Выпуск 170, Уч. записки ЛГУ, 1953 г.

14. Г. И. Петрашень, Н. С. Смирнова, Г. И. Макаров, “Об асимптотических представлениях цилиндрических функций”.
15. Г. И. Петрашень, “О методе исследования волновых процессов в областях, ограниченных сферическими или цилиндрическими поверхностями”.
16. Г. И. Петрашень, Н. С. Смирнова, Б. Я. Гельчинский, “Распространение упругих волн в средах, содержащих сферические, или цилиндрические границы раздела”.
17. Г. И. Макаров, Г. И. Петрашень, “Нестационарная диффракция акустических и электромагнитных волн от сферы”.

Выпуск 177, Уч. записки ЛГУ, 1957 г.

18. Г. И. Петрашень, “Постановка задач на сейсмическое экранирование волн тонкими слоями и методы их решения”, (110 с.)
19. Г. И. Петрашень, “Распространение волн в слоисто-изотропных средах, содержащих наклонные пласты I”, (40 с.).
20. Е. И. Шемякин, В. Л. Файншмидт, “Распространение волн в упругом полупространстве, возбужденном поверхностной касательной силой”, (35 с.).
21. А. С. Алексеев, В. М. Бабич, “Об одном эффекте экранирования упругих волн тонким слоем”, (21 с.).
22. И. М. Хайкович, “Динамическая задача для упругого слоя, погруженного в жидкую безграничную среду”, (110 с.)

Выпуск 208, Уч. записки ЛГУ, 1956 г.

23. Г. И. Петрашень, “О рациональном методе решения задач динамической теории упругости в случае слоисто-изотропных областей с плоско-параллельными границами раздела”, (53 с.).
24. Г. И. Петрашень, И. Н. Успенский, “О распространении волн в слоисто-изотропных упругих средах I”, (84 с.).
25. К. И. Огурцов, “Количественные исследования волновых процессов в упругом полупространстве при различных типах воздействий”, (60 с.).

Выпуск 246, Уч. записки ЛГУ, 1958 г.

26. Г. И. Петрашень, Б. Г. Николаев, Д. П. Коузов, "Метод рядов в теории дифракции волн от плоских угловых областей", (64 с.).
27. Б. Г. Николаев, М. В. Васильева, "Некоторые количественные исследования по дифракции волн от угловых областей", (104 с.).
28. А. С. Алексеев, "Задачи типа Лемба для волнового уравнения в линейно-неоднородном полупространстве", (60 с.).
29. В. М. Бабич, "Распространение нестационарных волн и каустики", (32 с.).
30. В. С. Булдырев, И. А. Молотков, "О нестационарном распространении волн в однородных изотропных средах, разделенных цилиндрической или сферической границе", (60 с.).
31. Б. Я. Гельчинский, "Некоторые вопросы распространения волн в однородной изотропной упругой сфере", (23 с.).

Серия "Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн" т. 1
Изд. Главнефтьгеофизика. М. 1957 г.

32. Г. И. Петрашень, "Общая количественная теория отраженных и головных волн, возбуждающихся в слоистых средах с плоско-параллельными границами раздела", (94 с.).
33. Г. И. Петрашень, А. В. Манухов, "О методике вычисления интенсивностей отраженных и головных волн при помощи таблиц", (49 с.).
34. Г. И. Петрашень, "Метод контурных интегралов в нестационарных задачах динамической теории упругости". Изд-во Наука, Л., 1982, 286 с.

Petrashen G. I. Propagation of seismic wave fields in layered media. (Part. I. Feneral notions of the theory.)

The general theory of the propagation of seismic wave fields of signal type is presented in mathematically precise and physically descriptive form. Basic relations and notions of the theory are given for general cases of the anisotropy of a medium. Consequences of the theory are discussed, comparing phenomena in the anisotropic and isotropic seismic media.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 12 июня 2000 г.