Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 272, 2000 г.

В. К. Харченко

ПОЛИЛИНЕЙНЫЕ КВАНТОВЫЕ ОПЕРАЦИИ ЛИ

**Посвящаю дорогому
Анатолию Владимировичу ЯКОВЛЕВУ
к шестидесятилетнему юбилею**

1. Введение.

Понятие полилинейной квантовой операции Ли естественно возникает в связи с различными попытками обобщений алгебр Ли. Необходимость в таких обобщениях появляется по нескольким причинам. Прежде всего, это потребности сформировавшейся в работах Ю. И. Манина, В. Г. Дринфельда, С. Л. Вороновича, Дж. Люстига, Л. Д. Фаддеева и многих других, “квантовой алгебры”, определяемые желанием сохранить интуицию дифференциального исчисления квантовой механики, базирующегося на фундаментальных понятиях теории групп Ли и алгебр Ли. Стремление к определению билинейной скобки на модуле линейных дифференциальных форм, заменяющей лиевскую операцию, обычно приводит к ограничениям типа мультипликативной кососимметричности квантизационных параметров [1], инволютивности скручиваний (брэйдингов), или к требованию биковариантности соответствующего дифференциального исчисления [2, 3]. В то же время, многие квантизации, например, квантизация Дринфельда–Джимбо, определяются мультипликативно некососимметрическими наборами параметров и определяют не биковариантные (но ковариантные с одной стороны) исчисления. По этой и, конечно, по многим другим причинам интерес исследователей распространился на операции, заменяющие скобки Ли, но зависящие от большого числа аргументов. Таковы, например, n-лиевы алгебры, введенные В. Т. Филипповым [4] и затем независимо возникшие в теоретических работах по обобщениям ме-

Работа выполнена при поддержке мексиканской организации CONACyT, грант 32130-E и департамента PAPIIT Национального Независимого Университета Мексики, грант IN 102599.

ханики Намбу как алгебры Намбу–Ли [5, 6]. Трилинейные операции рассматривались уже в оригинальной работу Намбу [7], а также в некоторых других работах по обобщениям квантовой механики (см., например, в [8] трилинейный антикоммутатор или в [9, 10] полилинейный коммутатор). Конечно, следует добавить, что и многоместные и частичные операции уже давно являются предметом исследования теории алгебраических систем, находящейся на стыке алгебры и математической логики, теории алгоритмов и комьютерных вычислений [11, 12].

Другой круг проблем (наиболее близкий интересам автора), тоже требующий обобщений алгебр Ли, связан с исследованием автоморфизмов и косых дифференцирований некоммутативных алгебр. Некоммутативный вариант фундаментальной леммы Дедекинда об алгебраической независимости характеров утверждает, что все операторные зависимости между автоморфизмами и обычными дифференцированиями определяются их алгебраической структурой (т.е. структурой группы, действующей на алгебре Ли) и указанием операторов, действующих “внутренним” способом (см. [13], [14, Гл. 2]). Желание перенести этот, очень хорошо работающий, результат на случай косых дифференцирований неизбежно приводит к вопросу о том, какая алгебраическая структура соответствует операторам косого дифференцирования, а это, в свою очередь, заставляет рассматривать n-арные полилинейные (частичные) операции на модулях Ёттера–Дринфельда, которые не сводятся к билинейным (см. [13], §6.5 или [14], §6.14).

Систематическое исследование квантовых операций Ли, связанных с критерием К. О. Фридрихса, [15], по-существу, начато в работах Б. Парейгиса, [16–18], открытием специальной серии n-арных операций; и затем продолжено в работах автора [19–21], где найден критерий существования нетривиальных полилинейных операций и предложен вариант Пуанкаре–Биргкофа–Витта для класса алгебр, определяемых квантовыми операциями Ли и имеющих реализацию внутри алгебр Хопфа.

В настоящей работе, опираясь на технику, развитую в [20], мы покажем, что при выполнении условия существования размерность пространства всех n-линейных квантовых операций Ли заключена между $(n-2)!$ и $(n-1)!$, причем нижняя граница достигается, если пересечение всех согласованных (т.е. удовлетворяющих условию существования) подмножеств данного множества “квантовых” переменных не пусто, а верхняя – если матрица параметров квантизации мультипликативно кососимметрична или, эквивалентно, все вообще подмножества согласованы. В последнем случае, как и в случае обычных алгебр Ли, все n-линейные операции Ли оказываются суперпозициями одной билинейной квантовой операции (цветной суперскобки). Любопытно, что уже при $n = 4$ не все значения указанного выше промежутка достигаются при различных значениях параметров квантизации. Именно, размерность пространства квадрилинейных операций может принимать значения 2, 3, 4, 6, но она никогда не равна 5 (см. доказательство второй части теоремы 8.4 [19]).

В последнем параграфе мы покажем, что почти всегда пространство полилинейных квантовых операций Ли порождается *симметрическими* операциями, если идеал соотношений параметров квантизации инвариантен относительно группы подстановок (только в этом случае понятие симметрической операции имеет смысл), и укажем все возможные исключения. Пространства *общих* n-линейных операций Ли к исключениям не относится, т.е. это пространство всегда порождается общими симметрическими квантовыми операциями Ли.

2. Предварительные утверждения.

Напомним, что *квантовой переменной* мы называем переменную x, которой сопоставлены элемент g_x фиксированной абелевой группы G и характер $\chi^x : G \to \mathbf{k}^*$ со значениями в группе обратимых элементов основного поля $\mathbf{k}$. Набор квантовых переменных называется *согласованным*, если $\prod_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} p_{ij} = 1$, где $\|p_{ij}\|$ матрица параметров квантизации: $p_{ij} = \chi^{x_i}(g_{x_j})$. *Квантовой операцией Ли* от квантовых переменных $x_1, \ldots , x_n$ (см. [19]) называется многочлен от этих переменных, все значения которого во всех алгебрах Хопфа, содержащих групповую алгебру Хопфа $\mathbf{k}[G]$, относительно примитивны при условии, что переменные принимают относительно примитивные полуинвариантные значения $x_i = a_i$:

$$\Delta(a_i) = a_i \otimes 1 + g_{x_i} \otimes a_i; \quad g^{-1}a_i g = \chi^{x_i}(g)a_i \tag{1}$$

для всех $g \in G$. Ненулевая n-линейная квантовая операция Ли существует тогда и только тогда, когда множество $x_1, \ldots , x_n$ согласовано [20]. При этом все такие операции имеют коммутаторные представления

$$\mathbf{f}(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{\nu\in S_n^1}\beta_\nu\big[\ldots\big[[x_1,x_{\nu(2)}],x_{\nu(3)}\big],\ldots,x_{\nu(n)}\big], \qquad (2)$$

где S_n^1 – группа подстановок индексов $2,\ldots,n$, а скобки обозначают билинейный косой коммутатор $[u,v]=uv-p(u,v)vu$ с бимультипликативным коэффициентом $p(u,v)$, определенным на множестве однородных многочленов при помощи матрицы квантизации: $p(x_i,x_j)=p_{ij}$, см. [19]. Косой коммутатор $[x_i,x_j]$ является квантовой операцией Ли тогда и только тогда, когда $p_{ij}p_{ji}=1$. В частности, если матрица параметров мультипликативно кососимметрична, то все полилинейные многочлены вида (2) будут квантовыми операциями Ли и поэтому размерность пространства операций равна $(n-1)!$.

В общем случае по теореме 3 [20] линейная комбинация (2) есть квантовая операция Ли тогда и только тогда, когда коэффициенты β_ν удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{\nu\in N^1(s)}\beta_{\nu\mu}\,t^\mu_{\nu,s}=0, \quad \mu\in S_n^1, \quad 1<s<n. \qquad (3)$$

Здесь $N^1(s)$ – есть множество всех s-суфле из S_n^1, т.е. совокупность подстановок ν таких, что

$$\begin{aligned}&\nu^{-1}(2)<\nu^{-1}(3)<\ldots<\nu^{-1}(s);\\ &\nu^{-1}(s+1)<\nu^{-1}(s+2)<\ldots<\nu^{-1}(n),\end{aligned} \qquad (4)$$

а коэффициенты $t^\mu_{\nu,s}$ – это некоторые конкретные многочлены от $p_{ij}p_{ij}^{-1}$, именно, $t^\mu_{\nu,s}=\varphi(T^\mu_{\nu,s})$, см. ниже формулу (10). Эту систему уравнений можно переписать в виде соотношений в скрещенном произведении.

3. Скрещенное произведение.

Рассмотрим свободную абелеву группу $\mathcal{F}_n$, свободно порожденную символами P_{ij}, $1\leqslant i\neq j\leqslant n$, и обозначим через $\mathcal{P}_n$ групповую алгебру этой группы над минимальным подполем $\mathbf{F}$ поля $\mathbf{k}$. Понятно, что кольцо $\mathcal{P}_n$ имеет поле частных $\mathcal{Q}_n$, изоморфное полю рациональных функций $\mathbf{F}(P_{ij})$. Элементы P_{ij}, $1\leqslant i\neq j\leqslant m$ порождают в $\mathcal{P}_n$ подалгебру $\mathcal{P}_m$. На кольце $\mathcal{P}_n$ и на поле $\mathcal{Q}_n$ корректно определено действие группы подстановок $P_{ij}^\pi=P_{\pi(i)\pi(j)}$. Поэтому мы можем определить скрещенное произведение $\mathcal{Q}_n * S_n$ (с тривиальной системой факторов), изоморфное алгебре всех $n! \times n!$-матриц над полем Галуа $\mathcal{Q}_n^{S_n}$, а также косую групповую алгебру $\mathcal{P}_n * S_n$, содержащуюся в этом скрещенном произведении. Напомним, что подстановки и коэффициенты в тривиальном скрещенном произведении переставляются по правилу $A\pi = \pi A^\pi$ (см. [22–24] или другие учебники по теории колец).

Если параметры p_{ij} определяются квантовыми переменными $x_1, \ldots, x_n$, то существует однозначно определенный гомоморфизм

$$\varphi : \mathcal{P}_n \to \mathbf{k}, \tag{5}$$

переводящий P_{ij} в p_{ij}.

Для слова $A \in \mathcal{F}_n$ обозначим через $\overline{A}$ слово, получающееся из A заменой всех букв P_{ij} на P_{ji}, и будем называть слова A и $\overline{A}$ *сопряженными*. Определим

$$\{A\} = A - \overline{A}^{\,-1}. \tag{6}$$

Для двух индексов m, k обозначим через $[m;k]$ монотонный цикл начинающийся с m и заканчивающийся на k:

$$[m;k] \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} (m, m+1, \ldots, k), & \text{если} \quad m \leqslant k \\ (m, m-1, \ldots, k), & \text{если} \quad m \geqslant k. \end{cases} \tag{7}$$

Понятно, что при таких обозначениях $[m;k]^{-1} = [k;m]$. Легко видеть, что подстановка ν принадлежит $N^1(s)$ тогда и только тогда, когда

$$\nu = [2;k_2]\,[3;k_3]\ldots[s;k_s] \tag{8}$$

для некоторой последовательности индексов $1 < k_2 < k_3 < \ldots k_s \leqslant n$ (см. лемму 1 [20]). Зафиксируем обозначения следующих конкретных элементов косой групповой алгебры

$$\begin{aligned} V_s &= \sum_{\nu \in N^1(s)} \nu T_{\nu,s} = \\ &= \sum_{1<k_2<k_3<\ldots k_s \leqslant n} [2;k_2]\,[3;k_3]\,[4;k_4]\ldots[s;k_s]\,T_{k_2:k_3:\ldots:k_s}, \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} T_{\nu,s} &= T_{k_2:k_3:\ldots:k_s} = \\ &= \Big\{ \prod_{m=2}^{m=s} \Big(P_{1\,m} \ldots P_{m-1\,m} \cdot P_{s+1\,m} \ldots P_{s-m+k_m\,m} \Big) \Big\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь фигурные скобки определены в (6).

Теорема 3.1. *Если $\prod_{i\neq j} p_{ij} = 1$, то линейная комбинация* (2) *будет квантовой операцией Ли тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{\nu} \beta_\nu \nu^{-1} \cdot V_s \in \ker(\varphi) S_n^1 \tag{11}$$

для всех s, $2 \leqslant s < n$, где элементы V_s определяются формулой (9).

Доказательство см. теорему 4 [20]. □

Пусть Σ – произвольное мультипликативно замкнутое подмножество кольца $\mathcal{P}_n$, не пересекающееся с $\ker(\varphi)$. Рассмотрим локализацию (кольцо частных) $\mathcal{P}_n\Sigma^{-1}$. Гомоморфизм φ однозначно продолжается до гомоморфизма из $\mathcal{P}_n\Sigma^{-1}$ в поле $\mathbf{F}(p_{ij})$ при помощи формулы

$$\varphi(P\sigma^{-1}) = \varphi(P)\varphi(\sigma)^{-1}, \quad P \in \mathcal{P}_n, \quad \sigma \in \Sigma. \tag{12}$$

Теорема 3.2. *Если $\prod_{i\neq j} p_{ij} = 1$ и Σ – произвольное мультипликативно замкнутое подмножество $\mathcal{P}_n$, не пересекающееся с $\ker(\varphi)$, то элемент $B = \sum_{\nu\in S_n^1} B_\nu \nu^{-1}$ с коэффициентами из $\mathcal{P}_n\Sigma^{-1}$ будет определять квантовую операцию Ли*

$$\sum_{\nu\in S_n^1} \varphi(B_\nu)\big[\dots\big[[x_1, x_{\nu(2)}], x_{\nu(3)}\big], \dots, x_{\nu(n)}\big],$$

тогда и только тогда, когда

$$B \cdot V_s \in \ker(\varphi)\Sigma^{-1} S_n^1 \tag{13}$$

для всех s, $2 \leqslant s < n$.

Доказательство получается умножением слева B на общий знаменатель $\sigma \in \Sigma$ всех коэффициентов и применением теоремы 3.1. □

Напомним, что *идеалом согласованности* называется идеал I алгебры $\mathcal{P}_n$, порожденный всеми элементами вида $\{W\}$, где W – любое (полугрупповое) слово от P_{ij} длины C_n^2, не имеющее ни удвоенных, ни сопряженных букв. Легко видеть, что переменные $x_1, \dots, x_n$ согласованы тогда и только тогда, когда $\ker(\varphi)$ содержит идеал согласованности. Очень важно отметить, что I инвариантен относительно действия S_n (в отличие от $\ker(\varphi)$ в целом) и поэтому двусторонний идеал, им порожденный в $\mathcal{P}_n * S_n$, будет совпадать с IS_n.

Рассмотрим поле рациональных функций $\mathbf{K}$ с коэффициентами из $\mathbf{F}$ от C_n^2-1 переменных $\overline{P}_{ij}$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, $(i,j) \neq (1,n)$. Обозначим

$$\overline{P}_{1n} = \Big(\prod_{(k,l)\neq(1,n)} \overline{P}_{kl} \Big)^{-1}. \tag{14}$$

Тогда отображение $\xi : P_{ij} \to \overline{P}_{ij}$ задает вложение алгебры $\mathcal{P}_n/I$ в поле $\mathbf{K}$.

Рассмотрим новое множество квантовых переменных X_1, $X_2, \ldots, X_n$, которым сопоставлены элементы $G_1, \ldots, G_n$, свободно порождающие абелеву группу $\mathbf{G}$, а соответствующие характеры в поле $\mathbf{K}$ определены равенством $\chi^{X_i}(G_j) = \overline{P}_{ij}$.

Определение 3.3. *Систему уравнений* (3), *в которой* $p_{ij} := \overline{P}_{ij}$, *мы будем называть общей основной системой уравнений. Ее решения определяют общие квантовые операции Ли от переменных* X_1, $X_2, \ldots, X_n$ *с коэффициентами из поля* $\mathbf{K}$.

Обозначим через Σ_0 множество всех элементов алгебры $\mathcal{P}_n$, не лежащих в I. Это мультипликативно замкнутое множество, и в силу теоремы 3.2 элемент B отвечает общей квантовой операции Ли тогда и только тогда, когда $B \cdot V_s \in I\Sigma_0^{-1} * S_n^1$. Если гомоморфизм φ можно распространить на коэффициенты B, то общая операция Ли определяет операцию над основным полем.

Лемма 3.4. *Пусть элемент* B *отвечает общей квантовой операции. Если* $\prod_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} p_{ij} = 1$ *и коэффициенты* B_ν *элемента* B *принадлежат* $\mathcal{P}_n\Sigma^{-1}$ *для некоторого множества* Σ, *не пересекающегося с* $\ker(\varphi)$, *то* B *определяет квантовую операцию от* $x_1, \ldots, x_n$ *над полем* $\mathbf{F}(p_{ij})$.

Доказательство. По теореме 3.2 достаточно показать, что $B \cdot V_s \in I\Sigma^{-1}S_n^1$. Левая часть последнего включения принадлежит пересечению $I\Sigma_0^{-1}S_n^1 \cap \mathcal{P}_n\Sigma^{-1}S_n^1$. Это пересечение равно правой части. Действительно, если $i\sigma_0^{-1} = P\sigma^{-1}$, то $i\sigma = P\sigma_0$. Так как I – простой идеал и $\sigma_0 \notin I$, получаем $P \in I$. $\square$

4. Модули понижения.

Напомним, что через $S_n^{k,l,\cdots}$ мы обозначаем группу подстановок индексов, действующих тождественно на $k, l, \ldots$. Правый модуль над $\mathcal{P}_n * S_n^{1,n}$, порожденный элементами $A_2, \ldots, A_n$, называется *модулем понижения*, если порождающие связаны соотношениями

$$A_k V_{(k)} + A_{k-1} D_{(k)} = 0, \quad 3 \leqslant k \leqslant n, \tag{15}$$

где элементы $V_{(k)}$ и $D_{(k)}$ определяются формулами

$$V_{(k)} = \sum_{l=2}^{k-1} [2;l]\, T_{[2;l]}. \tag{16}$$

$$D_{(k)} = \tau_k\, T_{[2;n]}^{(2,n)} + \sum_{l=2}^{n-1} [2;l]\, T_{[2;l]}^{(k,n)}. \tag{17}$$

где $T_{[2;l]} = \{P_{12}P_{32}\dots P_{l2}\}$ определяется в соответствии с (10) при $s = 2$. Здесь подстановка τ_k, определяется по формуле

$$\tau_k = \begin{cases} [2;k-1][k;n-1], & \text{если } \ 2 < k < n, \\ [2;n-1], & \text{если } \ k = n, 2 \end{cases} \tag{18}$$

(см. определение 8 и формулы (35), (39), (40) в [20]).

Для любого элемента

$$B = \mathcal{A}_2(2,n) + \mathcal{A}_3(3,n) + \ldots + \mathcal{A}_{n-1}(n-1,n) + \mathcal{A}_n \,\mathrm{id}\,, \tag{19}$$

где $\mathcal{A}_i \in \mathcal{P}_n * S_n^{1,n}$, справедлива формула

$$B \cdot V_2 = D_2(2,n) + \sum_{k=3}^{n} \big(\mathcal{A}_k\, V_{(k)} + \mathcal{A}_{k-1} D_{(k)}\big)(k,n), \tag{20}$$

в которой

$$D_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{A}_n [2;n-1]\, T_{[2;n]}^{(2,n)} + \sum_{l=2}^{n-1} \mathcal{A}_l [2;l]\, T_{[2;l]}^{(2,n)}. \tag{21}$$

Поэтому равенство $B \cdot V_2 \in \ker(\varphi) S_n^1$ означает, что $D_2 \equiv 0$ в фактор-модуле $\mathcal{P}_n * S_n^1 / \ker(\varphi) S_n^1$ и что элементы $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \ldots, \mathcal{A}_n$ порождают модуль понижения в этом фактор-модуле (детали см. [20], §5).

Заметим, что элемент $V_{(k+1)}$ равен элементу V_2, определяемому набором переменных $x_1,\ x_2, \ldots, x_k$. Поэтому следующее утверждение показывает, в частности, что элемент D_2 равен нулю в фактор-модуле $\mathcal{P}_n * S_n^{1,n} / I(\varphi) S_n^{1,n}$, если элементы V_2 для собственных подмножеств обратимы.

Теорема 4.1 (теорема 6 [20]). *Пусть $n \geqslant 3$ и*

$$X = \Big(\prod_{n>i>j>1} P_{ij}\Big)\Big(\prod_{i=1}^{n-1} P_{in}\Big)\Big(\prod_{j=2}^{n-1} P_{1j}\Big). \tag{22}$$

Тогда в любом модуле понижения выполняется соотношение

$$D_2 \prod_{k=0}^{n-3}[n-1;2]V_{(n-k)} = A_2[n-1;2]\prod_{k=0}^{n-3}[2;2+k]\times$$
$$\times V_{(n-k)}^{(1,n)[3;n-1]^k}\cdot\{X\}^{[2;n-1]}(-1)^n, \tag{23}$$

где D_2 определяется формулой (21) *с заменой $\mathcal{A}$ на A.*

5. Вторые подкомпоненты.

Предположим теперь, что пересечение всех согласованных подмножеств не пусто. Без ограничения общности мы можем считать, что x_n принадлежит всем согласованным подмножествам. Для каждого подмножества $Y \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ обозначим через $W(Y)$ множество всех элементов вида $\{W\}$, где W – полугрупповое слово от P_{ij}, x_i, $x_j \in Y$ длины $C^2_{|Y|}$, не имеющее ни удвоенных, ни сопряженных букв. Согласованность подмножества Y эквивалентна тому, что $W(Y) \subseteq \ker(\varphi)$. Обозначим через Σ_m, $m \leqslant n$ мультипликативное множество, порожденное $W(Y)$, где Y пробегает совокупность всех подмножеств, не содержащих ни одной из букв x_m, $x_{m+1}, \dots, x_n$. Множество Σ_m инвариантно относительно действия подгруппы S^1_{m-1} и не пересекается с $\ker(\varphi)$, так как $\ker(\varphi)$ простой идеал и x_n принадлежит всем согласованным подмножествам. Мы можем определить локализацию $\mathcal{P}_n\Sigma_m^{-1}$ и косое групповое кольцо $\mathcal{P}_n\Sigma_m^{-1} * S^1_{m-1}$, содержащееся в скрещенном произведении.

Лемма 5.1. *Если x_n принадлежит всем согласованным подмножествам, то элементы $V_{(m)}$, $3 \leqslant m \leqslant n$, определенные формулой* (16), *обратимы в $\mathcal{P}_n\Sigma_m^{-1} * S^1_{m-1}$.*

Доказательство. Проведем индукцию по m. По определению, множество Σ_3 содержит элемент $\{P_{12}\}$ и значит $V_{(3)}^{-1} = \{P_{12}^{-1}\}\cdot \mathrm{id} \in \mathcal{P}_n\Sigma_3^{-1} * S^1_2$.

Предположим, что каждый из элементов $V_{(k)}$, $3 \leqslant k \leqslant m$, обратим в $\mathcal{P}_k\Sigma_k^{-1} * S^1_{k-1}$ и тем более в $\mathcal{P}_n\Sigma_{m+1}^{-1} * S^1_m$. Рассмотрим множество квантовых переменных $x_1, \dots, x_m$. Элемент V_2 для этого множества совпадает с $V_{(m+1)}$. Поэтому, заменяя обозначения n на N и m на n, нам достаточно показать, что существует элемент $B \in \mathcal{P}_N \Sigma_{n+1}^{-1} * S_n^1$ такой, что $B \cdot V_2 \in S_n^1$ (теперь $V_2 = \sum_{l=2}^n [2;l]\, T_{2;l}$ и $V_{(3)}, \dots, V_{(n)}$ обратимы в $\mathcal{P}_N \Sigma_{n+1}^{-1} * S_n^1$). Построим по индукции последовательность элементов $A_2, \dots, A_n \in \mathcal{P}_N \Sigma_{n+1}^{-1} * S_n^1$. Пусть

$$A_2 = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-3} [n-1;2] V_{(n-k)} \times$$
$$\times \left([n-1;2] \prod_{k=0}^{n-3} [2;2+k]\, V_{(n-k)}^{(1,n)[3;n-1]^k} \cdot \{X\}^{[2;n-1]} \right)^{-1}, \tag{24}$$

где слово X определяется по формуле (22). Все сомножители, стоящие в круглых скобках этой формулы, обратимы в $\mathcal{P}_N \Sigma_{n+1}^{-1} * S^1 + n : V$ – в силу индуктивных предположений, а $\{X\}$ – в силу того, что этот элемент лежит в Σ_{n+1}. Далее, положим

$$A_k = -A_{k-1} D_{(k)}\, V_{(k)}^{-1}, \quad 3 \leqslant k \leqslant n, \tag{25}$$

где элементы $D_{(k)}$ определяются формулой (17).

Тогда, умножая последнее равенство справа на $V_{(k)}$, мы получим, что элементы $A_2, \dots, A_n$ порождают правый модуль понижения над $\mathcal{P}_n * S_n^{1,n}$. Поэтому мы можем воспользоваться теоремой 4.1. В силу (23) и (24) мы получим

$$D_2 \prod_{k=0}^{n-3} [n-1;2]\, V_{(n-k)} = \prod_{k=0}^{n-3} [n-1;2]\, V_{(n-k)},$$

т.е. элемент D_2, определенный формулой (21) (с заменой $\mathcal{A}$ на A), равен тождественной подстановке. Рассмотрим теперь элемент B, определенный формулой (19) (с заменой $\mathcal{A}$ на A):

$$B = A_2(2,n) + A_3(3,n) + \ldots + A_n \,\mathrm{id}\,.$$

Формула (20) и определение (25) показывают, что

$$B \cdot V_2 = D_2(2,n) + \sum_{k=3}^{n} \big(A_k\, V_{(k)} + A_{k-1} D_{(k)}\big)(k,n) = (2,n).$$

Лемма доказана. $\square$

6. Интервал размерностей.

Теорема 6.1. *Если $x_1, \ldots, x_n$ – согласованное множество различных квантовых переменных, то размерность пространства всех полилинейных квантовых операций Ли от этого множества не меньше $(n-2)!$. Если существует одна переменная, которая входит в каждое согласованное подмножество, то эта размерность равна $(n-2)!$.*

Доказательство. Чтобы установить справедливость первой части теоремы достаточно показать, что ранг основной системы уравнений не превосходит $(n-1)! - (n-2)! = (n-2)!(n-2)$. Это условие эквивалентно тому, что все миноры порядка большего, чем $(n-2)!(n-2)$ равны нулю. Так как миноры это целые функции от коэффициентов матрицы, нам достаточно показать, что требуемое свойство выполняется для общей основной системы уравнений (см. определение 3.3). Параметры $\overline{P}_{ij}$ этой системы связаны единственным сооношением. Поэтому множество $X_1, \ldots, X_n$ не содержит собственных согласованных подмножеств. Применяя к нему теорему 10 [20], мы получаем требуемое утверждение.

Второе утверждение вытекает из обратимости вторых подкомпонент.

Лемма 6.2. *Если $V_{(3)}, V_{(4)}, \ldots, V_{(n)}$ обратимы в $\mathcal{P}_n\Sigma^{-1} * S_n^{1,n}$, где $\Sigma = \mathcal{P}_n \setminus \ker(\varphi)$, то размерность пространства всех полилинейных квантовых операций Ли не превосходит $(n-2)!$.*

Пусть элемент $B = \sum B_\nu \nu^{-1}$ отвечает квантовой операции (2), $\varphi(B_\nu) = \beta_\nu$. Тогда $B \cdot V_2 \equiv 0$. Расписывая B по смежным классам (19), мы получим, что элементы $\mathcal{A}_i$ порождают правый модуль понижения в $\mathcal{P}_n * S_n^{1,n} / \ker(\varphi) S_n^{1,n}$. Поэтому

$$B \equiv \mathcal{A}_2 \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \Big(\prod_{i=3}^{k} D_{(i)} V_{(i)}^{-1} \Big)(k,n). \tag{26}$$

Таким образом, сквозное отображение

$$\mathbf{f} \to B \to \mathcal{A}_2 \xrightarrow{\varphi} \mathbf{F}(p_{ij}) S_n^{1,n},$$

сопоставляющее операции (2) сначала элемент $B = \sum_{\nu \in S_n^l} B_{\nu\nu^{-1}}$ такой, что $\varphi(B_\nu) = \beta_\nu$, затем элемент $\mathcal{A}$, появляющийся в разложении (19) элемента B, и, наконец, применением гомоморфизма φ, определенного в (5), к коэффициентам есть линейное отображение с нулевым ядром множества операций в множество левых линейных комбинаций $\sum_{\mu\in S_n^{1,n}} \alpha_\mu \mu$ над $\mathbf{F}(p_{ij})$. Следовательно, размерность пространства полилинейных квантовых операций Ли не превосходит числа элементов подгруппы $S_n^{1,n}$. Теорема доказана. $\square$

7. Симметрические квантовые операции Ли и симметрические наборы переменных.

Операция $[\![x_1, \dots, x_n]\!]$ называется *симметрической* (иногда *кососимметрической*), если для любой подстановки $\pi \in S_n$ справедливо равенство

$$[\![x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}]\!] = \alpha_\pi [\![x_1, \dots, x_n]\!], \tag{27}$$

где $\alpha_\pi \in \mathbf{k}$. В случае квантовых операций (как и в случае любых частичных операций) мы должны разъяснить, что означает левая часть равенства (27). Строго говоря, левая часть определена только в случае, если $x_{\pi(i)}$ имеет те же параметры χ, g, что и x_i (по определению только в этом случае допустима подстановка $x_i := x_{\pi(i)}$). Иными словами, все параметры p_{ij} должны быть равны одному числу q. Это чрезвычайно ограничительное условие.

Оно исключает из рассмотрения как цветную суперскобку, так и операции Парейгиса, вместе с определенными выше общими операциями Ли.

Мы можем, однако, предполагать, что $[\![x_1, \dots, x_n]\!]$ – это многочлен, коэффициенты которого как-то зависят от параметров переменных χ^{x_i}, g_{x_i}, т.е. в них указаны особые вхождения p_{ij}. Тогда произвольная замена $x_i \to y$ означает замену не только самой переменной, но и соответствующих параметров $g_i \to g_y$, $\chi^{x_i} \to \chi^y$. В частности, перестановка аргументов в (27) подразумевает применение этой подстановки ко всем индексам: $p_{ij} \to p_{\pi(i)\pi(j)}$.

Такая интерпретация равенства (27) будет однозначной и непротиворечивой только в том случае, если применение подстановок не зависит от того, каким именно образом коэффициенты $[\![x_1, \dots, x_n]\!]$ представлены в виде рациональных функций или многочленов от p_{ij}, p_{ij}^{-1}. Действие подстановок не будет зависеть от указанного представления в том (и только в том) случае, если $\ker(\varphi)$ – инвариантный идеал относительно действия группы S_n.

Определение 7.1. *Набор квантовых переменных* $x_1, \ldots, x_n$ *называется симметрическим, если* $\ker(\varphi)$ *– инвариантный относительно группы* S_n *идеал, или, эквивалентно, формула* $p_{ij}^{\pi} = p_{\pi(i)\pi(j)}$ *корректно определяет действие* S_n *на кольце* $\mathbf{F}[p_{ij}]$.

Обратим внимание, что симметричность набора квантовых переменных никак не связана с симметричностью матрицы параметров квантизации $\|p_{ij}\|$, но означает симметричность идеала соотношений между этими параметрами.

Итак, чтобы придать смысл термину "симметрическая операция" мы должны, во-первых, предполагать, что коэффициенты операций принадлежат полю $\mathbf{F}(p_{ij})$, что никак не уменьшает общность (см. [20], стр. 194); и, во-вторых, мы должны рассматривать только симметрические наборы квантовых переменных. Это уже ограничительное условие, но при этом условии из рассмотрения не исключается ни один из указанных выше примеров. Более того, существование симметрического набора переменных X_i с накрывающимися параметрами $\overline{P}_{ij} \rightarrow p_{ij}$ – это ключевой момент доказательства как теоремы существования, так и ее следствий. Поэтому симметрические наборы переменных заслуживают особого внимания.

Рассмотрим произвольный симметрический многочлен с коэффициентами из $\mathbf{F}(p_{ij})$:

$$\mathbf{f}(x_1, \ldots, x_n) = \sum \gamma_\mu \, x_{\mu(1)} \ldots x_{\mu(n)}. \tag{28}$$

Без ограничения общности (применив, если нужно подстановку) мы можем считать, что в это разложение одночлен $x_1 x_2 \ldots x_n$ входит с коэффициентом 1. Сравнивая коэффициенты при $x_{\pi(1)} x_{\pi(2)} \ldots x_{\pi(n)}$ в обеих частях равенства (27) с учетом (28), мы сразу находим $\alpha_\pi = \gamma_{\pi^{-1}}^{\pi}$. После этого равенство (27) принимает вид

$$\gamma_{\pi^{-1}}^{\pi} \sum_{\mu \in S_n} \gamma_\mu x_{\mu(1)} \ldots x_{\mu(n)} = \left(\sum_{\mu \in S_n} \gamma_\mu x_{\mu(1)} \ldots x_{\mu(n)} \right)^{\pi}$$

$$= \sum_{\mu \in S_n} \gamma_\mu^{\pi} x_{\pi(\mu(1))} \ldots x_{\pi(\mu(n))} = \sum_{\nu \in S_n} \gamma_{\nu\pi^{-1}}^{\pi} x_{\nu(1)} \ldots x_{\nu(n)}. \tag{29}$$

Отсюда $\gamma_{\mu\pi^{-1}}^{\pi} = \gamma_{\pi^{-1}}^{\pi} \gamma_\mu$. Заменяя $\nu = \pi^{-1}$ и применяя затем к обеим частям последнего равенства ν, мы получаем, что симметричность нормированного многочлена (28) эквивалентна системе равенств

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma_\mu^\nu \gamma_\nu, \quad \text{причем} \quad \alpha_\pi = \gamma_{\pi^{-1}}^\pi = \gamma_\pi^{-1}. \tag{30}$$

Иными словами, множество нормированных симметрических многочленов можно отождествить с первой группой когомологий $H^1(S_n, \mathbf{F}(p_{ij})^*)$ со значениями в мультипликативной группе поля $\mathbf{F}(p_{ij})$.

Теперь возникает естественный вопрос: порождается ли пространство полилинейных квантовых операций Ли симметрическими квантовыми операциями Ли в случае симметричности набора квантовых переменных? Мы начнем с рассмотрения нескольких примеров.

Примеры. Пусть набор переменных *абсолютно симметричен*, т.е. $p_{ij} = q$. В этом случае группа S_n действует тривиально на поле $\mathbf{F}(p_{ij})$. Поэтому существует только два симметрических многочлена:

$$S(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\pi \in S_n} x_{\pi(1)} \dots x_{\pi(n)}, \tag{31}$$

$$T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^\pi x_{\pi(1)} \dots x_{\pi(n)}, \tag{32}$$

С другой стороны, если выполняется условие существования $q^{n(n-1)} = 1$, то по теореме 6.1 размерность l пространства полилинейных квантовых операций Ли не может быть меньше $(n-2)!$. Таким образом, при $n > 4$, а также в случае поля характеристики 2 при $n = 4$, базиса из симметрических операций заведомо не существует.

Если $n = 4$, то мы можем воспользоваться анализом из [19] (см. доказательство теоремы 8.4): $l = 2$ только в случае $q^{12} = 1$, $q^6 \neq 1$, $q^4 \neq 1$, или, эквивалентно, $q^6 = -1$, $q^2 \neq -1$. Если при этих условиях многочлены S, T являются квантовыми операциями Ли, то они должны выражаться через главную квадрилинейную операцию (см. [19], формула (57)) с коэффициентами, равными коэффициентам этих многочленов при $x_1x_2x_3x_4$ и $x_1x_3x_2x_4$, т.е.

$$S = [\![x_1, x_2, x_3, x_4]\!] + [\![x_1, x_3, x_2, x_4]\!]$$

$$T = [\![x_1, x_2, x_3, x_4]\!] - [\![x_1, x_3, x_2, x_4]\!].$$

Складывая эти равенства, мы получим, что все коэффициенты главной квадрилинейной скобки при мономах соответствующих нечетным подстановкам из S_4^1 должны равняться нулю. С другой стороны, явная формула (56), [19] показывает, что коэффициент при $x_1x_2x_4x_3$ равен

$$\frac{\{p_{13}\,p_{23}\}}{\{p_{13}\,p_{23}\,p_{43}\}} = -\frac{q^2-q^{-2}}{q^3-q^{-3}} \neq 0,$$

так как $q^4 \neq 1$. Поэтому и в этом случае базиса из симметрических операций не существует.

Если $n = 3$, условие существования принимает вид $q^6 = 1$. Если $q \neq \pm 1$, то с точностью до умножения на скаляр существует только одна трилинейная операция и она симметрична (см. теорему 8.1 и формулу (46), [19]). Если же $q = \pm 1$, то пространство операций порождается двумя многочленами: $[[x_1, x_2], x_3]$ и $[[x_1, x_3], x_2]$. Если S, T квантовые операции, то, как и выше, получаем противоречие $S + T = 2[[x_1, x_2]x_3]$.

Лемма 7.2. *Пусть матрица квантизации симметрической четверки квантовых переменных имеет вид*

$$\|p_{ij}\| = \begin{pmatrix} * & p & q & s \\ p & * & s & q \\ q & s & * & p \\ s & q & p & * \end{pmatrix}, \tag{33}$$

где p, q, s попарно различны и $p^2q^2s^2 = 1$.

(1) *Если характеристика поля $\mathbf{k}$ отлична от двух, то ненулевых симметрических квантовых операций Ли нет.*

(2) *Если характеристика поля $\mathbf{k}$ равна двум, то существует не более двух линейно независимых симметрических квантовых операций Ли.*

(3) *В обоих случаях размерность всего пространства полилинейных квантовых операций Ли равна трем.*

Доказательство. Если матрица параметров имеет вид (33), то группа S_4 действует на поле $\mathbf{F}(p_{ij})$ не точно. Ядро этого действия включает в себя следующие четыре элемента

$$\mathrm{id}\,; \quad a = (12)(24); \quad b = (13)(24); \quad c = (14)(23), \tag{34}$$

образующие нормальную подгруппу $H \lhd S_4$, изоморфную $Z_2 \times Z_2$. Пусть

$$S = \sum_{\pi \in S_4} \gamma_\pi \, x_{\pi(1)} \, x_{\pi(2)} \, x_{\pi(3)} \, x_{\pi(4)} \tag{35}$$

– некоторая симметрическая квантовая операция Ли, $\gamma_{\rm id} = 1$. Тогда в силу (30) при $h = \mu = \nu \in H$ мы имеем $\gamma_h^2 = \gamma_{h^2} = \gamma_{\rm id} = 1$, т.е. $\gamma_h = \pm 1 \in \mathbf{F}$. Более того, все элементы γ_h, $h \neq {\rm id}$, $h \in H$ не могут одновременно равняться -1, так как, снова в силу (30), произведение любых двух из них равно третьему. С другой стороны, при $h \in H$, $g \in S_4$ формула (30) дает $\gamma_{g^{-1}}^g \gamma_g = 1$ и

$$\gamma_{g^{-1}hg} = \gamma_{g^{-1}}^{hg} \gamma_{hg} = \gamma_{g^{-1}}^g \gamma_h^g \gamma_g = \gamma_h^g = \gamma_h.$$

Поэтому все γ_g, $h \in H$ равны между собой и равны 1.

Далее, многочлен S, как и всякая другая квантовая операция Ли, имеет коммутаторное представление (2):

$$S = \sum_{\nu \in S_4^1} \beta_\nu \Big[\big[[x_1, x_{\nu(2)}], x_{\nu(3)} \big] x_{\nu(4)} \Big]. \tag{36}$$

Сравнивая коэффициенты при одночленах $x_1x_2x_3x_4$ и $x_4x_3x_2x_1$, мы получим $1 = \gamma_{\rm id} = \beta_{\rm id}$ и

$$1 = \gamma_{(14)(23)} = \beta_{\rm id}\,(-p_{12})(-p_{13}p_{23})(-p_{14}p_{24}p_{34}) = -p^2q^2s^2 = -1.$$

Это доказывает справедливость первого утверждения.

Как в первом, так и во втором случае условие $p^2q^2s^2 = 1$ означает, что все трехэлементные подмножества данной четверки квантовых переменных согласованы. Если какая-нибудь пара переменных согласована, например, $1 = p_{12}p_{21} = p^2$, то, в силу симметричности, согласованными будут и все остальные, т.е. $q^2 = s^2 = 1$. Но тогда $p, q, s \in \mathbf{F}$ и $p = p^{(23)} = q = q^{(34)} = s$, что противоречит условию леммы. По теореме 8.4 [19] (см. п. 2 доказательства второй части) пространство квантовых операций Ли порождается следующими тремя многочленами

$$[W, x_4]; \quad [W^\sigma, x_1]; \quad [W^{\sigma^2}, x_2], \tag{37}$$

где $\sigma = (1234)$ – циклическая перестановка, а W – главная трилинейная операция от x_1, x_2, x_3. Расписывая определение этой операции (см. [19], формула (45)), в случае характеристики 2 мы получим

$$W\big(x_1x_2x_3 + x_3x_2x_1\big) + \frac{p+p^{-1}}{q+q^{-1}}\big(x_2x_3x_1 + x_1x_3x_2\big) + \\ + \frac{s+s^{-1}}{q+q^{-1}}\big(x_3x_1x_2 + x_2x_1x_3\big). \tag{38}$$

Пусть

$$S = \xi\big[W, x_4\big] + \xi_1\big[W^\sigma, x_1\big] + \xi_2\big[W^{\sigma^2}, x_2\big]. \tag{39}$$

Сравнивая коэффициенты при мономах $x_1x_2x_3x_4$ и $x_2x_1x_4x_3$, мы получим, что $\xi + \xi_1 = \gamma_{\mathrm{id}} = 1$, $\xi_2 = \gamma_{(12)(34)} = 1$. Поэтому

$$S = \xi\Big(\big[W, x_4\big] + \big[W^\sigma, x_1\big]\Big) + \Big(\big[W^\sigma, x_1\big] + \big[W^{\sigma^2}, x_2\big]\Big). \tag{40}$$

Следовательно, симметрические квантовые операции порождают не более, чем двумерное пространство. Лемма доказана. □

Теорема 7.3. *Если x_1, $x_2, \ldots, x_n$ – симметрический, но не абсолютно симметрический набор квантовых переменных, то пространство полилинейных квантовых операций Ли порождается симметрическими операциями, за исключением случая, рассмотренного в лемме* 7.2.

Доказательство. Рассмотрим косую групповую алгебру $M = \mathbf{F}(p_{ij}) * S_n$. Действие подстановок определяет на множестве полилинейных многочленов структуру правого M-модуля:

$$\sum \gamma_\pi\, x_{\pi(1)} \ldots x_{\pi(n)} \cdot \sum \beta_\nu\, \nu = \sum_{\nu,\pi} \beta_\nu\, \gamma_\pi^\nu\, x_{\nu(\pi(1))} \ldots x_{\nu(\pi(n))}. \tag{41}$$

Симметричность многочлена (28) эквивалентна тому, что подмодуль, порожденный этим многочленом, одномерен над $\mathbf{F}(p_{ij})$.

Заметим, что если набор квантовых переменных симметричен, то множество квантовых операций Ли образует правый M-подмодуль. Действительно, если для коэффициентов многочлена $\mathbf{f}$, заданного формулой (2), справедлива система уравнений (3), то, применяя к ней подстановку $\pi \in S_n^1$, мы получим, что коэффициенты многочлена $\mathbf{f}^\pi$ удовлетворяют той же системе при переименовании переменных $x_i \to x_{\pi(i)}$. Поэтому $\mathbf{f}^\pi$, $\pi \in S_n^1$ – квантовая операция Ли. Меняя ролями индексы 1 и 2, мы получим, что $\mathbf{f}^{\pi}$, $\pi \in S_n^2$, – тоже квантовая операция. Так как подгруппы S_n^1 и S_n^2 при $n > 2$ порождают S_n, все полилинейные операции Ли образуют M-подмодуль.

Предположим теперь, что группа S_n действует на поле $\mathbf{F}(p_{ij})$ точно. Тогда M изоморфна тривиальному скрещенному произведению поля $\mathbf{F}(p_{ij})$ с группой Галуа S_n. Следовательно, M изоморфна алгебре $n! \times n!$-матриц над подполем Галуа $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}(p_{ij})^{S_n}$. Поэтому любой правый M-модуль равен прямой сумме неприводимых подмодулей и все неприводимые модули изоморфны модулю строк длины $n!$ над подполем Галуа $\mathbf{F}_1$. С другой стороны, размерность $\mathbf{F}(p_{ij})$ над $\mathbf{F}_1$ тоже равна $n!$. Так как любой правый M-модуль является правым пространством над $\mathbf{F}(p_{ij})$, все неприводимые правые M-модули одномерны над $\mathbf{F}(p_{ij})$, что и доказывает теорему в случае точного действия.

Если $n > 4$ или $n = 3$ и действие не точно, то все четные подстановки действуют тождественно. Отсюда сразу вытекает, что набор переменных абсолютно симметричен, $p_{ij} = q$.

Пусть $n = 4$. Если действие не точно, то все подстановки (34) действуют тождественно. Отсюда следует, что матрица параметров имеет вид (33). Условие существования квантовых операций Ли задается равенством $p^4q^4s^4 = 1$. Если $p^2q^2s^2 = 1$, то мы приходим к исключению, рассмотренному в лемме 7.2. Пусть поэтому $p^2q^2s^2 = -1 \neq 1$.

Если параметры p, q, s попарно различны, то подгруппа S_4^1 действует точно на $\mathbf{F}(p,q,s)$. Поэтому $M_1 = \mathbf{F}(p,q,s) * S_4^1$ – это алгебра 6×6-матриц над подполем Галуа $\mathbf{F}_1$. Как центральная простая подалгебра, она выделяется из M тензорным сомножителем, $M = M \otimes Z_1$, где Z_1 – централизатор M_1 в M. Найдем этот централизатор.

Прежде всего Z_1 содержится в централизаторе $\mathbf{F}(p,q,s)$, который равен групповой алгебре $A = \mathbf{F}(p,q,s)[\mathrm{id}, a, b, c]$. Эта групповая алгебра имеет разложение в прямую сумму идеалов

$$A = \mathbf{F}(p,q,s)e_1 \oplus \mathbf{F}(p,q,s)e_2 \oplus \mathbf{F}(p,q,s)e_3 \oplus \mathbf{F}(p,q,s)e_4,$$

где

$$e_1 = \frac{1}{4}(\mathrm{id} + a + b + c), \quad e_2 = \frac{1}{4}(\mathrm{id} + a - b + c),$$

$$e_3 = e_2^{(23)}, \quad e_4 = e_2^{(34)}.$$

Стабилизатор e_2 в группе S_4^1 равен двухэлементной подгруппе $S_4^{1,3}$. Пусть $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}(p,q,s)^{S_4^{1,3}}$ – поле Галуа этой подгруппы. Тогда Z_1 равен централизатору S_4^1 в A, который состоит из сумм

$$\alpha e_1 + \beta e_2 + \beta^{(23)} e_3 + \beta^{(34)} e_4, \quad \alpha \in \mathbf{F}_1, \quad \beta \in \mathbf{F}_2.$$

Таким образом, $Z_1 \cong \mathbf{F}_1 \oplus \mathbf{F}_2$. Следовательно, $M_1 \cong (\mathbf{F}_1)_{6\times 6} \oplus (\mathbf{F}_2)_{6\times 6}$.

Это значит, что с точностью до изоморфизма, существует только два неприводимых правых модуля над M. Один из них равен пространству 6-строк над $\mathbf{F}_1$, а второй равен пространству 6-строк над $\mathbf{F}_2$. Их размерности над $\mathbf{F}_1$ равны соответственно 6 и 18. Таким образом, первый модуль одномерен над $\mathbf{F}(p,q,s)$, а второй имеет размерность 3. По теореме 8.4 [19] модуль квантовых операций двумерен над $\mathbf{F}(p,q,s)$ и, следовательно, его неприводимые подмодули не могут иметь размерность 3, но все имеют размерность 1. Теорема доказана. $\square$

Следствие 7.4. *Существует набор из $(n-2)!$ общих симметричных операций Ли, порождающий пространство всех общих квантовых операций Ли.*

Аналогичное утверждение справедливо и для квантовых переменных, рассмотренных Парейгисом в [16], т.е. в случае, когда параметры квантизации связаны соотношениями $p_{ij}p_{ji} = \zeta^2$, где ζ – примитивный корень из единицы степени n.

Следствие 7.5. *Общее число симметрических квантовых операций Ли для симметрических, но не абсолютно симметрических переменных Парейгиса не меньше $(n-2)!$.*

Литература

1. C. Bautista, *A Poincarè–Birkhoff–Witt theorem for generalized color algebras.* — J. Math. Phys. **30** (1998), 3829–3843.
2. S. L. Woronowicz, *Compact matrix pseudogroups.* — Comm. Math. Phys. **111** (1985), 613–665.
3. S. L. Woronowicz, *Differential calculus on compact matrix pseudogroups.* — Comm. Math. Phys. **122** (1989), 125–170.
4. В. Т. Филиппов, *n-Лиевы алгебры.* — Сиб. мат. ж. **26**, No. 6 (1985), 126–140.
5. L. Takhtajan, *On foundations of the generalized Nambu mechanics.* — Comm. Math. Phys. **160** (1994), 295–315.

6. G. Dito, M. Flato, D. Sternheimer, and L. Takhtajan, *Deformation quantization and Nambu mechanics.* — Comm. Math. Phys. **183** (1997), 1–22.
7. Y. Nambu, *Generalized Hamilton dynamics.* — Phys. Rev. D **7** (1973), 2405–2412.
8. Р. М. Ямалеев, *Элементы кубичной квантовой механики.* — Сообщения ОИЯИ (1988), 1-11, Дубна, P2-88-147.
9. Р. М. Ямалеев, *Модель полилинейного осцилятора в пространстве нецелых квантовых чисел.* — Сообщения ОИЯИ (1988), 1-10, Дубна, P2-88-871.
10. Р. М. Ямалеев, *Модель полилинейного Бозе- и Ферми-подобного осцилятора.* — Сообщения ОИЯИ (1988), 1-10, Дубна, P2-88-871.
11. А. И. Мальцев, *Алгебраические системы.* Наука, М. (1965).
12. А. И. Мальцев, *Алгоритмы и рекурсивные функции.* Наука, М. (1970).
13. V. K. Kharchenko, *Automorphisms and derivations of associative rings.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (Boston) London (1991).
14. В. К. Харченко, *Некоммутативная теория Галуа.* Новосибирск (1996).
15. K. O. Fridrichs, *Mathematical aspects of the quantum theory of fields. V.* — Comm. Pure Appl. Math. **6** (1953), 1–72.
16. B. Pareigis, *On Lie algebras in braided categories.* Quantum Groups and Quantum Spaces. Banach Center Publications, **40** (1997), pp. 139–158.
17. B. Pareigis, *Skew-primitive elements of quantum groups and braided Lie algebras, rings, Hopf algebras, and Brauer groups.* — Lecture Notes Pure Appl. Math. **197** (1996), 219–238.
18. B. Pareigis, *On Lie algebras in the category of Yetter–Drinfeld modules.* — Appl. Categ. Structures **6** (1998), 152–175.
19. В. К. Харченко, *Алгебра относительно примитивных элементов.* — Алгебра и логика **37** (1998), 181–223.
20. V. K. Kharchenko, *An existence condition for multilinear quantum operations.* — J. Algebra **217** (1999), 188–228.
21. В. К. Харченко, *Квантовый аналог теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта.* — Алгебра и логика **38** (1999), 476–507.
22. A. A. Albert, *Structure of Algebras.* Am. Math. Soc., Providence, RI (1961).
23. N. Jacobson, *Structure of Rings.* Am. Math. Soc., Providence, RI (1956).
24. I. Herstein, *Noncommutative Rings.* Math. Ass. Am. (1968).

Kharchenko V. K. Multilinear Lie quantum operations.

In is proved that if the existence condition is fulfilled the dimension of the all n-linear Lie quantum operations is lying between $(n-2)!$ and $(n-1)!$; moreover, the low bound is attained if the intersection of all consistent (i.e., satisfying the existence condition) subsets of a given set of "quantum" variables is nonemply. The upper bound is attained if all the subsets are consistents. The space of multilinear Lie quantum operations almost aloways is generated by symmetric operations. All exceptional cases are given. In particular, the space of general n-linear Lie operations is always generated by general symmetric Lie quantum operations.

Институт Математики
им. С. Л. Соболева СО РАН

Поступило 28 июня 2000