Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 272, 2000 г.

Д. С. Катаев

О БИКВАДРАТИЧНЫХ РЯДАХ ЭЙЗЕНШТЕЙНА

0. Введение

В работах [1, 2] Н. В. Проскуриным была решена задача о вычислении коэффициентов Фурье кубических метаплектических рядов Эйзенштейна на группе $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, а также определена и подробно исследована кубическая тета–функция на $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ (данная функция была построена также Кажданом и Паттерсоном, см. [3]). Данная работа посвящена изучению биквадратичных метаплектических рядов Эйзенштейна на $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$. Нами вычисляются коэффициенты Фурье данных рядов, а также определяется биквадратичная тета-функция на группе $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$. При этом используется техника $\ll$ sl(2)-*троек*$\gg$ (см. [2]).

Работа состоит из шести параграфов и приложения. Первый параграф содержит обозначения, определения и вспомогательное утверждение. Во втором параграфе подробно изучается группа $\Gamma(\mathfrak{q})$ и различные ее подгруппы. В третьем параграфе исследуется гомоморфизм Куботы группы $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{O}, 4)$, связанный с символом биквадратичного вычета, и соответствующий гомоморфизм Басса–Милнора–Серра группы $\mathrm{GL}_3(\mathfrak{O}, 4)$, где $\mathfrak{O} = \mathbb{Z}[i]$. Основным результатом данного параграфа является теорема 3.1. В начале четвертого параграфа приведены необходимые определения, относящиеся к метаплектическим формам на $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})/\mathrm{SU}(3)$, рядам Эйзенштейна и их коэффициентам Фурье. Затем формулируется и доказывается основной результат работы (теорема 4.2). Пятый параграф посвящен изучению рядов Дирихле, возникающих в теореме 4.2. В шестом параграфе доказывается, что ряд Эйзенштейна, связанный с биквадратичной тета-функцией, имеет полюс в точке 5/4 и строится биквадратичная тета-функция на группе $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$. В приложении собраны определения и основные свойства символа Меннике, гомоморфизмов Басса–Милнора–Серра и символа биквадратичного вычета.

В данной работе используется система обозначений, принятая в книге [2].

1. Предварительные сведения

Обозначим через $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ специальную линейную группу порядка 3 над полем $\mathbb{C}$. Каждая матрица в $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ может быть разложена единственным образом в произведение матрицы из N, матрицы из A и матрицы из K, где

$$\begin{aligned}
&N = \left\{ n(l) = \begin{pmatrix} 1 & l_3 & l_2 \\ 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; l = (l_1, l_2, l_3) \in \mathbb{C}^3 \right\}, \\
&A = \{\mathrm{diag}(t_1, t_2, t_1^{-1} t_2^{-1}), \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+^*\}, \\
&K = \mathrm{SU}(3) \text{ -- максимальная компактная подгруппа } \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}).
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Отображение $N \times A \times K \to NAK$ является изоморфизмом вещественных аналитических многообразий, аналитическим диффеоморфизмом и разложение $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) = NAK$ есть частный случай разложения Ивасава.

Для $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ положим:

$$\begin{gathered}
h_1(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}, \quad h_2(\gamma) = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}, \\
h_3(\gamma) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{1.2}$$

Очевидно, что «фундаментальные вложения» h_1, h_2, h_3 являются групповыми гомоморфизмами $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$.

Обозначим через P максимальную параболическую подгруппу всех матриц в $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ вида

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Обозначим через σ матрицу

$$\sigma = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Закончим параграф явной формулой параметризации главной клетки в разложении Брюа группы $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, которая будет в дальнейшем использоваться.

Предложение 1.1. *Пусть* $\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$. *Если* $c_3 \neq 0$, $b_2c_3 - b_3c_2 \neq 0$ *и* σ *– матрица, заданная в* (1.4), *то имеет место разложение*

$$\gamma\sigma = n(l_1, l_2, l_3)\ \mathrm{diag}(t_1, t_2, t_1^{-1}t_2^{-1})\ \sigma\ n(l_1', l_2', l_3'), \tag{1.5}$$

где

$$\begin{gathered} l_3 = \frac{a_2c_3 - a_3c_2}{b_2c_3 - b_3c_2}, \quad l_2 = \frac{a_3}{c_3}, \quad l_1 = \frac{b_3}{c_3}, \quad t_1 = \frac{1}{b_2c_3 - b_3c_2}, \\ t_2 = \frac{b_2c_3 - b_3c_2}{c_3}, \quad l_3' = \frac{c_2}{c_3}, \quad l_2' = \frac{c_1}{c_3}, \quad l_1' = \frac{b_1c_3 - b_3c_1}{b_2c_3 - b_3c_2}. \end{gathered} \tag{1.6}$$

Доказательство. См. ([2], предложение 1.1.3). $\bullet$

2. Дискретные подгруппы

Пусть $\mathfrak{q} \subset (4)$ – идеал кольца целых чисел $\mathfrak{O} = \mathbb{Z}[i]$ поля $\mathbb{Q}(i)$ и $\lambda = 1 + i$. Нами будут рассматриваться несколько конгруэнц–подгрупп в группе $\mathrm{SL}_n(\mathfrak{O})$. Первая, обозначаемая $\tilde{\Gamma}_n(\mathfrak{q})$, состоит из всех матриц $(a_{ij}) \in \mathrm{SL}_n(\mathfrak{O})$, удовлетворяющих условию

$$a_{ii} \equiv 1 \pmod{\lambda^3}, \quad a_{ij} \in \mathfrak{q}, \quad i, j = 1 \ldots n,\ i \neq j. \tag{2.1}$$

Вторая, обозначаемая $\Gamma_n(\mathfrak{q})$, является подгруппой $\tilde{\Gamma}_n(\mathfrak{q})$, состоящей из всех матриц $(a_{ij}) \in \Gamma_n(\mathfrak{q})$ таких, что $a_{ii} \equiv 1 \pmod 4$, $i = 1 \ldots n$. Для краткости будем писать $\Gamma(\mathfrak{q})$ вместо $\Gamma_3(\mathfrak{q})$ и $\tilde{\Gamma}(\mathfrak{q})$ вместо $\tilde{\Gamma}_3(\mathfrak{q})$. Обозначим, как обычно, через e_n единичную матрицу в $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.

Пусть B – подгруппа всех верхних треугольных матриц в $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ (данная группа есть минимальная параболическая (или борелевская) подгруппа $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$) и предположим, что P – максимальная параболическая подгруппа $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, заданная в (1.3). Положим $\Delta = \Gamma(\mathfrak{q}) \cap B$, $\Delta_\times = \Gamma(\mathfrak{q}) \cap P$ и $\tilde{\Delta}_\times = \tilde{\Gamma}(\mathfrak{q}) \cap P$.

Предложение 2.1.

a) $\Delta = \{n(l_1, l_2, l_3) \mid l_1, l_2, l_3 \in \mathfrak{q}\}$.

b) *Каждая матрица* $\gamma \in \tilde{\Delta}_\times$ *может быть единственным образом представлена как* $\gamma'\gamma''$, *где* $\gamma' = n(*, *, 0) \in \Delta$ *и* $\gamma'' = h_3(\alpha)$, $\alpha \in \tilde{\Gamma}_2(\mathfrak{q})$.

c) $\tilde{\Delta}_\times = \Delta h_3(\tilde{\Gamma}_2(\mathfrak{q}))$.

Доказательство. Очевидно. •

Каждой паре (m, n), $m \in \mathfrak{q}$, $n \equiv 1 \pmod{\lambda^3}$, $(m, n) = 1$ и целому числу t, взаимно простому с идеалом $\mathfrak{q}$, сопоставим матрицу $\lambda^{(t)}_{m,n}$, выбранную таким образом, что

$$\begin{aligned} &1)\ \lambda^{(t)}_{m,n} = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} \in \tilde{\Gamma}_2(\mathfrak{q}), \quad (l, t) = 1, \\ &2)\ \text{если } m \equiv m' \pmod{n} \text{ и } \lambda^{(t)}_{m',n} = \begin{pmatrix} k' & l' \\ m' & n \end{pmatrix}, \text{ то } l' = l. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Очевидно, что такой выбор возможен (хотя и не является единственным). В дальнейшем будем писать $\lambda_{m,n}$ вместо $\lambda^{(1)}_{m,n}$ и положим

$$\varepsilon_1 = h_1(\lambda^{(n_2)}_{m_1,n_1}), \quad \varepsilon_2 = h_2(\lambda_{m_2,n_2}), \quad \varepsilon_3 = h_3(\lambda_{m_3,n_3}). \tag{2.3}$$

Предложение 2.2. *Каждая матрица* $\gamma \in \tilde{\Gamma}(\mathfrak{q})$ *может быть единственным образом представлена как* $\gamma = \delta\varepsilon_3\varepsilon_2\varepsilon_1$, *где* $\delta \in \Delta$ *и* ε_1, ε_2, ε_3 *определены в* (2.3).

Доказательство. Предположим, что вектор $c = (c_1, c_2, c_3)$ является нижней строчкой матрицы γ. Если $m_2 = c_1 \in \mathfrak{q}$, $n_2 = (c_2, c_3)$, $n_2 \equiv 1 \pmod{\lambda^3}$, $m_1 = c_2/n_2 \in \mathfrak{q}$, $n_1 = c_3/n_2$, $n_1 \equiv 1 \pmod{\lambda^3}$, то получаем, что $c = (m_2, n_2m_1, n_1n_2)$. Так как $(n_1, m_1) = (m_2, n_2) = 1$, то можно выбрать матрицы $\lambda^{(n_2)}_{m_1,n_1}$, λ_{m_2,n_2}, определенные в (2.2). Отсюда следует, что нижняя строчка матрицы $\gamma\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-1}$ есть $(0, 0, 1)$ и данная матрица принадлежит группе $\tilde{\Delta}_\times$. Согласно предложению 2.1(b) получаем, что $\gamma\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-1} = \delta_0 h_3(\alpha)$, $\delta_0 = n(*, *, 0) \in \Delta$, $\alpha = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ m_3 & n_3 \end{pmatrix} \in \tilde{\Gamma}_2(\mathfrak{q})$. Пусть $\lambda_{m_3,n_3} = \begin{pmatrix} k_3 & l_3 \\ m_3 & n_3 \end{pmatrix} \in \tilde{\Gamma}_2(\mathfrak{q})$ – матрица, определенная в (2.2). Так как $l_3m_3 \equiv b_3m_3 \equiv -1 \pmod{n_3}$, то получаем, что $l_3 \equiv b_3 \pmod{n_3}$ и

$l_3 = b_3 + v_3 n_3$, $v_3 \in \mathfrak{q}$. Отсюда $k_3 = a_3 + v_3 m_3$ и $h_3(\lambda_{m_3,n_3}) = \delta_1 h_3(\alpha)$, $\delta_1 = n(0,0,v_3) \in \Delta$. Таким образом, $\gamma\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-1} = \delta_0\delta_1^{-1}\varepsilon_3$, $\delta_0\delta_1^{-1} \in \Delta$.

Пусть $\gamma = \delta\varepsilon_3\varepsilon_2\varepsilon_1 = \delta'\varepsilon'_3\varepsilon'_2\varepsilon'_1$, где $\delta\varepsilon_3\varepsilon_2\varepsilon_1$ есть разложение, заданное в формулировке предложения и $\delta' \in \Delta$, $\varepsilon'_1 = h_1(\lambda^{(n'_2)}_{m'_1,n'_1})$, $\varepsilon'_2 = h_2(\lambda_{m'_2,n'_2})$, $\varepsilon'_3 = h_3(\lambda_{m'_3,n'_3})$. Сравнивая нижние строчки матриц $\delta\varepsilon_3\varepsilon_2\varepsilon_1$ и $\delta'\varepsilon'_3\varepsilon'_2\varepsilon'_1$, видим, что $(m_2, m_1n_2, n_1n_2) = (m'_2, m'_1n'_2, n'_1n'_2)$. Так как наибольший общий делитель чисел m_1n_2, n_1n_2 равен наибольшему общему делителю чисел $m'_1n'_2$, $n'_1n'_2$, то $n_2 = n'_2$, $m_2 = m'_2$ и $n_1 = n'_1$, $m_1 = m'_1$. Таким образом, $\varepsilon'_1 = \varepsilon_1$, $\varepsilon'_2 = \varepsilon_2$ и $\delta\varepsilon_3 = \delta'\varepsilon'_3$. Сравнивая вторые строчки матриц $\delta\varepsilon_3 = \delta'\varepsilon'_3$, видим, что $m_3 = m'_3$, $n_3 = n'_3$. Отсюда следует, что $\delta = \delta'$ и $\varepsilon_3 = \varepsilon'_3$. $\bullet$

Отметим как очевидный факт, что $\{1, 1+\lambda^3\}$ – множество всех элементов некоторой приведенной системы вычетов mod 4, сравнимых с единицей $\operatorname{mod}\lambda^3$. Зафиксируем произвольную матрицу $\lambda_{m_0,n_0} = \begin{pmatrix} k_0 & l_0 \\ m_0 & n_0 \end{pmatrix} \in \tilde{\Gamma}_2(\mathfrak{q})$, удовлетворяющую условию $n_0 \equiv 1+\lambda^3 \pmod 4$, и обозначим через Λ_1, Λ_2 и Λ множества

$$\begin{aligned} &\Lambda_1 = \{(m_2, n_2, m_1, n_1) \mid n_1, n_2 \equiv 1 \pmod 4,\ m_1, m_2 \in \mathfrak{q}\}, \\ &\Lambda_2 = \{(m_2, n_2, m_1, n_1) \mid n_1, n_2 \equiv 1+\lambda^3 \pmod 4,\ m_1, m_2 \in \mathfrak{q}\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

и $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ соответственно. Для заданного вектора $m \in \Lambda$ определим матрицу $\omega(m) \in \tilde{\Gamma}(\mathfrak{q})$ как

$$\omega(m) = \begin{cases} e_3, & \text{если } m \in \Lambda_1, \\ h_3(\lambda_{m_0,n_0}), & \text{если } m \in \Lambda_2. \end{cases} \tag{2.5}$$

Пусть $n = (n_1, n_2)$, $n_1, n_2 \equiv 1 \pmod{\lambda^3}$ и $(n_1n_2, \mathfrak{q}) = 1$. Для каждой пары n выберем подмножества $\mathfrak{m}_1(n)$ и $\mathfrak{m}_2(n)$ идеала $\mathfrak{q}$, являющиеся приведенной системой вычетов mod n_1 и приведенной системой вычетов mod n_2 соответственно.

Предложение 2.3. *Множество матриц $\gamma = \omega(m)\varepsilon_2\varepsilon_1$, где $\omega(m)$ определено в* (2.5), *$m_1 \in \mathfrak{m}_1(n)$, $m_2 \in \mathfrak{m}_2(n)$, $n = (n_1, n_2)$, $m = (m_2, n_2, m_1, n_1) \in \Lambda$ и $\varepsilon_2, \varepsilon_1$ заданы в* (2.3), *есть полная система представителей двойных смежных классов $\Delta_\times\backslash\Gamma(\mathfrak{q})/{}^t\Delta$.*

Доказательство. Пусть $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{q})$. Используя предложение 2.2, видим, что $\gamma = \delta\varepsilon_3\varepsilon_2\varepsilon_1$, где $\delta \in \Delta$, ε_1, ε_2, ε_3 заданы в (2.3) и $n_1n_2 \equiv 1 \pmod 4$. Если $(m_2, n_2, m_1, n_1) \in \Lambda_1$, то $\varepsilon_2\varepsilon_1 \in \Gamma(\mathfrak{q})$ и $\delta\varepsilon_3 \in \Delta_\times$.

Иначе $(m_2, n_2, m_1, n_1) \in \Lambda_2$, следовательно, $h_3(\lambda_{m_0,n_0})\varepsilon_2\varepsilon_1 \in \Gamma(\mathfrak{q})$ и $\delta\varepsilon_3 h_3(\lambda_{m_0,n_0}^{-1}) \in \Delta_\times$. Таким образом, каждый смежный класс в $\Delta_\times\backslash\Gamma(\mathfrak{q})$ содержит матрицу $\omega(m)\varepsilon_2\varepsilon_1$.

Пусть $\mathcal{Z}$ есть двойной смежный класс в $\Delta_\times\backslash\Gamma(\mathfrak{q})/{}^t\Delta$ и матрица $\omega(m)\varepsilon_2\varepsilon_1 \in \mathcal{Z}$. Для соответствующим образом выбранного $\xi \in \mathfrak{q}$ получаем, что

$$\omega(m)\varepsilon_2\varepsilon_1 h_1\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ \xi & 1\end{pmatrix}\right) \in \mathcal{Z}$$

и матрица $\varepsilon_1' = \varepsilon_1 h_1\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ \xi & 1\end{pmatrix}\right) = h_1(\lambda^{(n_2)}_{m_1+\xi n_1,n_1})$ удовлетворяет условию данного предложения. Для подходящего $\mu \in \mathfrak{q}$ и $\beta = h_2\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ \mu & 1\end{pmatrix}\right)$ видим, что $\omega(m)\varepsilon_2\beta\beta^{-1}\varepsilon_1' \in \mathcal{Z}$, матрица $\varepsilon_2' = \varepsilon_2\beta = h_2(\lambda_{m_2+\mu n_2,n_2})$ удовлетворяет условию данного предложения и $\beta^{-1}\varepsilon_1' \in \varepsilon_1'\,{}^t\Delta$. Так как $\omega(m) = \omega(m')$, где $m' = (m_2 + \mu n_2, n_2, m_1 + \xi n_1, n_1)$, то $\mathcal{Z}$ содержит матрицу $\omega(m')\varepsilon_2'\varepsilon_1'$ и первая часть предложения доказана.

Предположим, что матрицы $\omega(m)\varepsilon_2\varepsilon_1$ и $\omega(m')\varepsilon_2'\varepsilon_1'$, удовлетворяющие условию данного предложения, принадлежат одному двойному смежному классу в $\Delta_\times\backslash\Gamma(\mathfrak{q})/{}^t\Delta$. Отсюда следует, что $\omega(m)\varepsilon_2\varepsilon_1 = \delta_1\omega(m')\varepsilon_2'\varepsilon_1'\,{}^t\delta_2$, где $\delta_1 \in \Delta_\times$, $\delta_2 = n(v_1, v_2, v_3) \in \Delta$. Сравнивая нижние строчки данных матриц, получаем, что $m_2 = m_2' + v_3 m_1' n_2' + v_2 n_2' n_1'$, $n_2 n_1 = n_2' n_1'$, $m_1 n_2 = m_1' n_2' + v_1 n_2' n_1'$. Так как наибольший общий делитель $(m_1 n_2, n_2 n_1)$ равен наибольшему общему делителю $(m_1' n_2' + v_1 n_2' n_1', n_2' n_1')$, то $n_2 = n_2'$ и $n_1 = n_1'$. Следовательно, $m_1 \equiv m_1' \pmod{n_1}$, $m_2 \equiv m_2' \pmod{n_2}$. В силу того, что $m_1, m_1' \in \mathfrak{m}_1(n)$ и $m_2, m_2' \in \mathfrak{m}_2(n)$, видим, что $m_1 = m_1'$, $m_2 = m_2'$ и $\varepsilon_1' = \varepsilon_1$, $\varepsilon_2' = \varepsilon_2$, $\omega(m') = \omega(m)$. Отсюда следует единственность, что и завершает доказательство предложения. $\bullet$

Для заданного $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{q})$ обозначим через Δ^γ подгруппу Δ, состоящую из всех матриц $\delta \in \Delta$ таких, что нижняя строчка $\gamma^t\delta$ совпадает с нижней строчкой γ. С помощью простых вычислений можно найти, что

$$\Delta^\gamma = \{n(0, -c_2u/(c_2, c_3), c_3u/(c_2, c_3) \mid u \in \mathfrak{q}\}, \tag{2.6}$$

где $c = (c_1, c_2, c_3)$ есть нижняя строчка γ. Пусть $\vartheta = c_3/(c_2, c_3)$ и $\mathcal{F}_\gamma = \mathbb{C}/\vartheta\mathfrak{q} \times \mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}/\vartheta\mathfrak{q}$ – фундаментальная область решетки $\vartheta\mathfrak{q}$. Также для $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{q})$ обозначим через Λ_γ множество, являющееся полной системой представителей смежных классов ${}^t\Delta^\gamma\backslash{}^t\Delta$ и пусть σ – матрица, определенная в (1.4).

Предложение 2.4. *Пусть множество* $\Omega \subset \Gamma(\mathfrak{q})$ *есть полная система представителей двойных смежных классов* $\Delta_\times\backslash\Gamma(\mathfrak{q})/{}^t\Delta$ *и* $\mathcal{P} = \{(\gamma, h) \mid \gamma \in \Omega, h \in \Lambda_\gamma\}$. *Тогда*

1) *Отображение* $\mathcal{P} \to \Delta_\times\backslash\Gamma(\mathfrak{q})$, *действующее по закону* $(\gamma, h) \mapsto \Delta_\times\gamma h$, *является биективным;*

2) $\sigma^{-1}\Lambda_\gamma\sigma$ *– полная система представителей смежных классов* $\sigma^{-1}{}^t\Delta^\gamma\sigma\backslash\Delta$;

3) $n(\mathcal{F}_\gamma) = \{n(l_1, l_2, l_3) \mid l_1 \in \mathbb{C}/\vartheta\mathfrak{q}, l_2, l_3 \in \mathbb{C}\}$ *есть полная система представителей смежных классов* $\sigma^{-1}{}^t\Delta^\gamma\sigma\backslash N$.

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 1.2.7 в [2]. •

3. О гомоморфизмах Басса–Милнора–Серра

В данном параграфе используются определения и основные свойства символа биквадратичного вычета, символа Меннике и системы гомоморфизмов Басса–Милнора–Серра, собранные в приложении. Положим $\lambda = 1 + i$ и будем использовать обозначение $\|\cdot\|$ для нормы кольца целых чисел $\mathfrak{O} = \mathbb{Z}[i]$. Определим $\mathrm{GL}_n(\mathfrak{O}, \mathfrak{q})$ и $\mathrm{SL}_n(\mathfrak{O}, \mathfrak{q})$ как главные конгруэнц–подгруппы $\operatorname{mod}\mathfrak{q}$ в $\mathrm{GL}_n(\mathfrak{O})$ и $\mathrm{SL}_n(\mathfrak{O})$ соответственно, состоящие из матриц (a_{ij}), чьи элементы удовлетворяют условию $a_{ii} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{q}}$, $a_{ij} \in \mathfrak{q}$, $i \neq j$, $i, j = 1 \ldots n$. Пусть $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ – символ биквадратичного вычета.

Определим отображение χ_2 группы $\tilde{\Gamma}_2(\mathfrak{q})$, $\mathfrak{q} \subset (4)$, следующим образом:

$$\chi_2\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \varepsilon_d\left(\frac{c}{d}\right), \quad \varepsilon_d = \begin{cases} 1, & \text{если } d \equiv 1 \pmod 4, \\ i, & \text{если } d \equiv 1 + \lambda^3 \pmod 4. \end{cases} \tag{3.1}$$

Следующее предложение показывает, что отображение χ_2 является гомоморфизмом. Таким образом, гомоморфизм Кубота группы $\Gamma_2(4)$ (см. [4, 5]) может быть расширен до гомоморфизма группы $\tilde{\Gamma}_2(4)$. Следует заметить, что доказательство предложения 3.1 аналогично доказательству основного утверждения работы [4].

Предложение 3.1. *Отображение* χ_2 *есть групповой гомоморфизм для любого идеала* $\mathfrak{q} \subset (4)$.

Доказательство. Для краткости положим $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\alpha' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, $\alpha, \alpha' \in \tilde{\Gamma}_2(\mathfrak{q})$.

a) Так как $\varepsilon_d^2 = \left(\frac{-1}{d}\right)$ и $\varepsilon_d = \varepsilon_a$, то видим, что $\chi_2(\alpha) = \chi_2^{-1}({}^t\alpha) = \varepsilon_d^{-1}\left(\frac{b}{d}\right)^{-1} = \varepsilon_a^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ и для $b = 0$ или $b' = 0$ имеем, что $\chi_2(\alpha\alpha') = \chi_2(\alpha')$ или $\chi_2(\alpha\alpha') = \chi_2(\alpha)$ соответственно.

b) Предполагая $(c, d') = 1$, получаем, что $(a'c+c'd)d' = c+c'(b'c+dd')$ и

$$\chi_2(\alpha\alpha') = \chi_2\left(\begin{pmatrix} * & * \\ a'c+c'd & b'c+dd' \end{pmatrix}\right) = \varepsilon_{b'c+dd'}\left(\frac{a'c+c'd}{b'c+dd'}\right) =$$
$$= \varepsilon_{dd'}\left(\frac{(a'c+c'd)d'}{b'c+dd'}\right)\left(\frac{d'}{b'c+dd'}\right)^{-1} =$$
$$= \varepsilon_{dd'}\left(\frac{c}{b'c+dd'}\right)\left(\frac{b'c+dd'}{d'}\right)^{-1}(-1)^{(\|d'\|-1)(\|dd'\|-1)/16}. \tag{3.2}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\chi_2(\alpha\alpha') &= \varepsilon_{dd'}\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{b'}{d'}\right)^{-1}(-1)^{(\|d'\|-1)(\|dd'\|-1)/16} = \\ &= \varepsilon_{dd'}\left(\frac{-1}{d'}\right)(-1)^{(\|d'\|-1)(\|dd'\|-1)/16}\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{c'}{d'}\right).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Очевидно, что если $d \equiv 1 \pmod 4$, то $\|d\| \equiv 1 \pmod 8$, и если $d \equiv 1+\lambda^3 \pmod 4$, то $\|d\| \equiv 5 \pmod 8$. Отсюда следует равенство

$$\varepsilon_{dd'}\left(\frac{-1}{d'}\right)(-1)^{(\|d'\|-1)(\|dd'\|-1)/16} = \varepsilon_d\varepsilon_{d'} \tag{3.4}$$

и $\chi_2(\alpha\alpha') = \chi_2(\alpha)\chi_2(\alpha')$

c) Пусть $\mathfrak{q} = (q)$, $d' = d_1d_2$, $d_1 = \prod_i p_i^{\alpha_i}$, $d_2 = \prod_j q_j^{\beta_j}$, $(p_i, c) = 1$, $(q_j, c) = q_j$. Так как $(c, a) = 1$, то $(c+qad_1, d_1) = 1$, $(c+qad_1, d_2) = 1$, следовательно, $(c+qad_1, d') = 1$. Положим $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ qd_1 & 1 \end{pmatrix}$. Из пункта (a) вытекает, что $\chi_2(\tau\alpha\alpha') = \chi_2(\alpha\alpha')$. Так как матрицы $\tau\alpha, \alpha'$ удовлетворяют условию пункта (b), то $\chi_2(\tau\alpha\alpha') = \chi_2(\tau\alpha)\chi_2(\alpha') =$

$\chi_2(\alpha)\chi_2(\alpha')$. Таким образом, $\chi_2(\alpha\alpha') = \chi_2(\alpha)\chi_2(\alpha')$, т.е. χ_2 является гомоморфизмом. •

В качестве простого следствия получаем предложение, доказанное Сузуки (см. [6]).

Предложение 3.2. *Отображение* $\kappa_2 : \mathrm{GL}_2(\mathfrak{O}, \mathfrak{q}) \to C$, *действующее по закону*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(\frac{c}{d}\right), \tag{3.5}$$

является групповым гомоморфизмом для любого идеала $\mathfrak{q} \subset (4)$.

Доказательство. Очевидно, что $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{O}, 4) = \mathrm{SL}_2(\mathfrak{O}, 4) = \Gamma_2(4)$. Из определения (3.1) следует, что $\chi_2\big|_{\Gamma_2(4)} = \kappa_2$ и из предложения 3.1 вытекает, что κ_2 – гомоморфизм группы $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{O}, 4)$. Так как $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{O}, \mathfrak{q}) \subset \mathrm{GL}_2(\mathfrak{O}, 4)$, $\mathfrak{q} \subset (4)$, то отсюда следует предложение. •

Пусть $W_{\mathfrak{q}} = \{(a, b) \mid a \in 1 + \mathfrak{q}, b \in \mathfrak{q}, (a, b) = 1\}$ и $C = \{\pm 1, \pm i\}$. Для $\mathfrak{q} \subset (4)$ определим отображение $\left[\frac{\cdot}{\cdot}\right] : W_{\mathfrak{q}} \to C$, полагая

$$\left[\frac{b}{a}\right] = \left(\frac{b}{a}\right), \quad (a, b) \in W_{\mathfrak{q}}. \tag{3.6}$$

Данное отображение является символом Меннике тогда и только тогда, когда $\mathfrak{q} \subset (\lambda^6)$. Но это отображение удовлетворяет требованиям условия (5) приложения для любого идеала $\mathfrak{q} \subset (4)$. Из предложения 3.2 вытекает, что отображение $\kappa_2 : \mathrm{GL}_2(\mathfrak{O}, \mathfrak{q}) \to C$, связанное с (3.6), является гомоморфизмом для любого $\mathfrak{q} \subset (4)$, а также удовлетворяет условиям $(1)_2, (2)_2$, приведенным в приложении. Тогда из свойств (1)–(5) приложения следует, что имеется система гомоморфизмов $\kappa_n : \mathrm{GL}_n(\mathfrak{O}, \mathfrak{q}) \to C$, $n \geqslant 2$ при $\mathfrak{q} \subset (4)$.

Определим отображение $\chi_3 : \tilde{\Gamma}(\mathfrak{q}) \to \mathbb{C}$ следующим образом: для $\gamma \in \tilde{\Gamma}(\mathfrak{q})$, $\gamma = \delta\varepsilon_3\varepsilon_2\varepsilon_1$, $\delta \in \Delta$, $\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1$ заданы в (2.3) (также см. предложение 2.2), полагаем

$$\chi_3(\gamma) = \left(\frac{m_2}{n_2}\right)\chi_2(\lambda_{m_3,n_3})\chi_2(\lambda^{(n_2)}_{m_1,n_1}). \tag{3.7}$$

Следующая теорема показывает, что χ_3 является расширением гомоморфизма κ_3. Данный факт будет играть существенную роль при вычислении коэффициентов Фурье биквадратичных рядов Эйзенштейна.

Теорема 3.1. $\chi_3\big|_{\Gamma(\mathfrak{q})} = \kappa_3$.

Доказательство. Пусть $\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \in \tilde{\Gamma}(\mathfrak{q})$. Так как наибольший общий делитель $(a_1, b_1, c_1) = 1$, то существует некоторое $t \in \mathfrak{q}$ такое, что $(b_1 + tc_1, a_1) = 1$, и можно найти матрицу $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \tilde{\Gamma}_2(\mathfrak{q})$, удовлетворяющую условию

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ c_1 & * & * \end{pmatrix}. \qquad (3.8)$$

Правая часть (3.8) является матрицей вида $\omega\bar{\beta}$, где

$$\omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c_1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{β}} \\ 0 & & \end{pmatrix} \qquad (3.9)$$

и $\omega, \bar{\beta} \in \tilde{\Gamma}(\mathfrak{q})$. Таким образом, каждая матрица $\gamma \in \tilde{\Gamma}(\mathfrak{q})$ может быть разложена как $\gamma = \bar{\alpha}\omega\bar{\beta}$, где

$$\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{α}} & * \\ & & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (3.10)$$

$\bar{\alpha} \in \tilde{\Gamma}(\mathfrak{q})$ и $\omega, \bar{\beta}$ заданы в (3.9). Используя данное разложение, положим

$$f : \tilde{\Gamma}(\mathfrak{q}) \to \mathbb{C}^*, \quad f(\gamma) = \chi_2(\alpha)\chi_2(\beta).$$

Для доказательства корректности определения f достаточно показать, что если

$$\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{α}} & * \\ & & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \omega_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{β}} \\ 0 & & \end{pmatrix}, \qquad (3.11)$$

$\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \omega_1, \omega_2 \in \tilde{\Gamma}(\mathfrak{q})$ и $\bar{\alpha}\omega_1\bar{\beta} = \omega_2$, то $f(\bar{\alpha}\omega_1\bar{\beta}) = 1$ (так как χ_2 является гомоморфизмом, $f(\bar{\alpha}\gamma) = f(\bar{\alpha})f(\gamma)$ и $f(\gamma\bar{\beta}) = f(\gamma)f(\bar{\beta})$, то общий случай легко сводится к данному условию). Сравнив элементы матриц $\bar{\alpha}\omega_1\bar{\beta}$, ω_2, видим, что $\alpha, \beta \in \Gamma_2(\mathfrak{q})$ и, следовательно,

$f(\bar{\alpha}\omega_1\bar{\beta}) = \chi_2(\alpha)\chi_2(\beta) = \kappa_2(\alpha)\kappa_2(\beta) = \kappa_3(\bar{\alpha}\omega_1\bar{\beta}) = \kappa_3(\omega_2) = 1$ (также см. в приложении свойства гомоморфизма κ_3).

Если $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{q})$, то индуктивный процесс Басса–Милнора–Серра влечет, что $\gamma = \bar{\alpha}\omega\bar{\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathrm{SL}_2(\mathfrak{O}, 4) = \Gamma_2(4)$. Предположим, что f, χ_2 и κ_n определены для $\mathfrak{q} = (4)$. Тогда $f(\gamma) = \chi_2(\alpha)\chi_2(\beta) = \kappa_2(\alpha)\kappa_2(\beta) = \kappa_3(\gamma)$, т.е. $f\big|_{\Gamma(4)} = \kappa_3$ и осталось доказать, что $f = \chi_3$.

Легко видеть, что

$$f(\gamma) = f(\delta\varepsilon_3\varepsilon_2\varepsilon_1) = f(\delta\varepsilon_3)f(\varepsilon_2)f(\varepsilon_1) = \chi_2(\lambda_{m_3,n_3})f(\varepsilon_2)\chi_2(\lambda^{(n_2)}_{m_1,n_1}).$$

Несложные вычисления показывают, что

$$\begin{pmatrix} k_2 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ m_2 & 0 & n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2 & -v & 0 \\ m_2^2 & u & -m_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} 1 & v & l_2u + vm_2n_2 \\ 0 & k_2 & k_2m_2n_2 - l_2m_2^2 \\ 0 & -vm_2 & n_2 - m_2(l_2u + vm_2n_2) \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

где $u \equiv 1 \pmod{\lambda^3}$, $v \in \mathfrak{q}$ и $k_2u + m_2^2v = 1$. Отсюда получаем, что

$$f(\varepsilon_2) = \chi_2\left(\begin{pmatrix} k_2 & -v \\ m_2^2 & u \end{pmatrix}\right)\chi_2\left(\begin{pmatrix} k_2 & k_2m_2n_2 - l_2m_2^2 \\ -vm_2 & n_2 - m_2(l_2u + vm_2n_2) \end{pmatrix}\right). \tag{3.13}$$

Так как $\chi_2(\alpha) = \chi_2^{-1}({}^t\alpha) = \varepsilon_d^{-1}\left(\frac{b}{d}\right)^{-1} = \varepsilon_a^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$, где ε_d определено в (3.1) и $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \tilde{\Gamma}_2(\mathfrak{q})$, то

$$f(\varepsilon_2) = \chi_2^{-1}\left(\begin{pmatrix} k_2 & m_2^2 \\ -v & u \end{pmatrix}\right)\varepsilon_{k_2}^{-1}\left(\frac{-l_2m_2^2}{k_2}\right) = \\ = \varepsilon_{k_2}\left(\frac{m_2}{k_2}\right)^{-2}\varepsilon_{k_2}^{-1}\left(\frac{-l_2}{k_2}\right)\left(\frac{m_2}{k_2}\right)^2 = \left(\frac{-l_2}{k_2}\right) = \left(\frac{m_2}{k_2}\right)^{-1} = \left(\frac{m_2}{n_2}\right). \tag{3.14}$$

Таким образом, $f = \chi_3$, что и завершает доказательство. •

Замечание. К сожалению, отображение χ_3 не является гомоморфизмом. Более того, можно показать, что не существует гомоморфизма χ группы $\tilde{\Gamma}(\mathfrak{q})$ такого, что $\chi\big|_{\Gamma(\mathfrak{q})} = \kappa_3$.

4. Коэффициенты Фурье рядов Эйзенштейна

Пусть $\mathbb{X} = \mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}_{+}^{*2}$, где правая часть рассматривается как произведение вещественных аналитических многообразий. Для $w = (z_1, z_2, z_3, u, v) \in \mathbb{X}$ примем следующие обозначения:

$$\begin{gathered} n(w) = n(z_1, z_2, z_3), \quad a(w) = \operatorname{diag}(u^{1/3}v^{2/3}, u^{1/3}v^{-1/3}, u^{-2/3}v^{-1/3}), \\ U(w) = u, \quad V(w) = v, \quad Z_i(w) = z_i, \quad Q(w) = (z_3, v). \end{gathered} \tag{4.1}$$

Согласно Ивасава, отображение

$$\mathbb{X} \to \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})/\mathrm{SU}(3), \quad w \mapsto n(w)a(w)\mathrm{SU}(3), \tag{4.2}$$

является изоморфизмом вещественных аналитических многообразий. Группа $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ действует левыми умножениями на $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})/\mathrm{SU}(3)$ и изоморфизм (4.2) переносит на $\mathbb{X}$ данное действие. Образ $w \in \mathbb{X}$, полученный действием $\gamma \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})/\mathrm{SU}(3)$, будем обозначать через γw.

Пусть Γ – дискретная подгруппа $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ и $\tilde{\psi} : \Gamma \to \mathbb{C}^*$ является унитарным характером Γ. Назовем $F : \mathbb{X} \to \mathbb{C}$ автоморфной формой относительно Γ с системой мультипликаторов $\tilde{\psi}$, если F есть $\mathbb{C}^\infty$–функция, удовлетворяющая следующим условиям:

(a) $F(\gamma w) = \tilde{\psi}(\gamma)F(w)$ для $\gamma \in \Gamma, w \in \mathbb{X}$;

(b) F является собственной функцией для всех инвариантных дифференциальных операторов на $\mathbb{X}$;

(c) Существует $c \in \mathbb{R}$ такое, что $|F(w)| < \operatorname{Norm}(n(w)a(w))^c$ для всех $w \in \mathbb{X}$.

В условии (c) под $\operatorname{Norm}(\delta)$ для $\delta \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ понимается $\operatorname{trace}(\delta^t\bar{\delta})$. Обозначим через $\mathbb{D}(\mathbb{X})$ алгебру всех инвариантных дифференциальных операторов на $\mathbb{X}$. Тогда можно дать более общее определения автоморфной формы, полученное заменой условия (b) на условие

(b′) $DF = 0$ для всех $D \in I_F$, где I_F есть идеал конечной коразмерности в $\mathbb{D}(\mathbb{X})$.

Данное определение понадобится только в последнем параграфе в связи с определением биквадратичной тета-функции на $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, причем идеал I_F будет зависеть от разложения Лорана соответствующего ряда Эйзенштейна (см. также замечание в конце шестого параграфа). Все остальные автоморфные формы будут удовлетворять условию (b).

Изоморфизм аналитических многообразий

$$(z_1, z_2, z_3) \mapsto n(z_1, z_2, z_3), \tag{4.3}$$

переносит меру Лебега $\mathbb{C}^3$ на группу N с мерой Хаара. Предположим, что измеримое множество $\mathcal{F}_{\mathfrak{q}} \subset \mathbb{C}^3$ выбрано так, что его образ под действием (4.3) является полной системой представителей смежных классов $\Delta\backslash N$, $\Delta = \Gamma(\mathfrak{q}) \cap N$. В частности, можно считать, что $\mathcal{F}_{\mathfrak{q}} = (\mathbb{C}/\mathfrak{q})^3$. Обозначим через $\operatorname{vol}\mathcal{F}_{\mathfrak{q}}$ объем $\mathcal{F}_{\mathfrak{q}}$ и положим $c = (\operatorname{vol}\mathcal{F}_{\mathfrak{q}})^{-1}$. Очевидно, что $\operatorname{vol}\mathcal{F}_{\mathfrak{q}}$ не зависит от выбора системы представителей. Пусть $F : \mathbb{X} \to \mathbb{C}$ является автоморфной формой относительно $\Gamma(\mathfrak{q})$ с системой мультипликаторов $\tilde{\psi}$. Предположим, что Δ содержится в ядре гомоморфизма $\tilde{\psi}$. Для заданных $\mu, \nu \in \mathfrak{q}^*$, где $\mathfrak{q}^*$ – идеал, сопряженный с $\mathfrak{q}$, пусть $e(z) = \exp(2\pi i(z + \bar{z}))$ и

$$c_{\mu,\nu}(u, v; F) = c \iiint\limits_{\mathcal{F}_{\mathfrak{q}}} F(w)\overline{e(\mu z_1 + \nu z_3)}\ dz_1\ dz_2\ dz_3 \tag{4.4}$$

для $w = (z_1, z_2, z_3, u, v) \in \mathbb{X}$. Δ содержится как в ядре $\tilde{\psi}$, так и в ядре отображения $n(l_1, l_2, l_3) \mapsto e(\mu l_1 + \nu l_3)$, следовательно, интеграл (4.4) не зависит от выбора системы представителей смежных классов $\Delta\backslash N$. Величины $c_{\mu,\nu}(u, v; F)$ будем называть коэффициентами Фурье формы F.

Известно (см. [7]), что можно реализовать $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\mathrm{SU}(2)$ как $\mathbb{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^*$. Группа $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ действует на $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\mathrm{SU}(2)$ левыми умножениями и это действие переносится на $\mathbb{H}$. Образ $w \in \mathbb{H}$ под действием $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ будем обозначать как γw. Предположим, что Γ является подгруппой конечного индекса в $\Gamma_2(4)$ и пусть $\tilde{\kappa}$ – произвольный унитарный характер Γ. Множество параболичеких вершин группы Γ является подмножеством $\mathbb{Q}(i) \cup \{\infty\}$ и каждая параболическая вершина может быть записана в виде $\sigma\infty$ для подходящего $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathfrak{O})$. Для прозвольного $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathfrak{O})$ положим

$$\begin{aligned} &\Lambda_\sigma = \{l \in \mathbb{C} \mid \sigma \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma^{-1} \in \Gamma\}, \\ &\Lambda_\sigma^* = \{k \in \mathbb{C} \mid (kl + \bar{k}\bar{l}) \in \mathbb{Z} \text{ для всех } l \in \Lambda_\sigma\}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Пусть $\epsilon = \sigma\infty$ – некоторая параболическая вершина Γ. Функция $\Lambda_\sigma \to \mathbb{C}^*$, действующая по закону

$$l \mapsto \tilde{\kappa}(\sigma \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma^{-1}), \tag{4.6}$$

является гомоморфизмом решетки Λ_σ. В случае тривиальности гомоморфизма (4.6) ϵ будет называться существенной параболической вершиной Γ для $\tilde{\kappa}$. В общем же случае для некоторого $h_\sigma \in \mathbb{C}$ и для всех $l \in \Lambda_\sigma$ имеем, что

$$\tilde{\kappa}(\sigma \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma^{-1}) = e(h_\sigma l). \tag{4.7}$$

Стандартные рассуждения (см. [2, 7]) приводят к следующей теореме, использующей понятие автоморфной формы на пространстве $\mathbb{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^*$ (см. [2, 7]).

Теорема 4.1. *Пусть Γ – подгруппа конечного индекса в $\Gamma_2(4)$ и f является автоморфной формой относительно Γ с системой мультипликаторов $\tilde{\kappa}$, причем $\mathrm{D}_{\mathrm{L-B}} f = r(2-r)f$, $r \in \mathbb{C}$, где $\mathrm{D}_{\mathrm{L-B}}$ есть оператор Лапласа–Бельтрами. Предположим, что $\epsilon = \sigma\infty$ – параболическая вершина Γ, $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathfrak{O})$, Λ_σ, Λ_σ^* и h_σ определены в (4.5), (4.7). Тогда f может быть разложена в ряд Фурье*

$$f(\sigma(z,v)) = c_0^\sigma(v) + \sum_{\nu \in h_\sigma + \Lambda_\sigma^*, \nu \neq 0} \rho(\sigma;\nu) v \mathrm{K}_{r-1}(4\pi|\nu|v) e(\nu z), \quad (z,v) \in \mathbb{H}, \tag{4.8}$$

где $c_0^\sigma(v) = \rho_+(\sigma)v^r + \rho_-(\sigma)v^{2-r}$ при $r \neq 1$ и $c_0^\sigma(v) = \rho_+(\sigma)v\log v + \rho_-(\sigma)v$ при $r = 1$; $\rho_+(\sigma)$, $\rho_-(\sigma)$, $\rho(\sigma;\nu) \in \mathbb{C}$, K_m есть функция Бесселя–Макдональда.

Если ϵ является существенной параболической вершиной Γ для $\tilde{\kappa}$, то $h_\sigma = 0$. Если $\Gamma = \Gamma_2(\mathfrak{q})$, то $\Lambda_\sigma = \mathfrak{q}$ и $\Lambda_\sigma^* = \mathfrak{q}^*$.

Предположим, что ядро $\tilde{\psi}$ – подгруппа конечного индекса в $\Gamma(\mathfrak{q})$, содержащая Δ, ${}^t\Delta$, и $\tilde{\psi}(\sigma\gamma\sigma^{-1}) = \tilde{\psi}(\gamma)$ для всех $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{q})$, где σ задано в (1.4). Определим характер $\tilde{\kappa} : \Gamma_2(\mathfrak{q}) \to \mathbb{C}^*$, полагая $\tilde{\kappa}(\gamma) = \tilde{\psi}(h_3(\gamma))$ для любого $\gamma \in \Gamma_2(\mathfrak{q})$. Тогда автоморфной форме f относительно группы $\Gamma_2(\mathfrak{q})$ с системой мультипликаторов $\tilde{\kappa}$ можно сопоставить ряд

$$E(w,s;f) = \sum_\gamma \overline{\tilde{\psi}}(\gamma) U(\gamma w)^{2s} V(\gamma w)^s f(Q(\gamma w)), \tag{4.9}$$

$w \in \mathbb{X}$, $s \in \mathbb{C}$, причем суммирование производится по множеству матриц $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{q})$, являющемуся полной системой представителей смежных классов $\Delta_\times \backslash \Gamma(\mathfrak{q})$. Значение суммы не зависит от выбора системы представителей (для доказательства этого достаточно повторить рассуждения, приведенные в [2], параграф 1.3.7), таким образом, ряд (4.9) определен корректно. В рамках теории Сельберга–Ленглендса данный ряд является максимальным параболическим рядом Эйзенштейна, связанным с формой f и максимальной параболической подгруппой P. Из общей теории рядов Эйзенштейна известно (см. [8]), что максимальный параболический ряд Эйзенштейна сходится абсолютно и локально равномерно в $\mathbb{X}\times\{s\in\mathbb{C}\mid\Re(s)>\tau\}$ для некоторого $\tau\in\mathbb{R}$; для заданного $w\in\mathbb{X}$ функция $E(w,s;f)$ регулярна в области $\{s\in\mathbb{C}\mid\Re(s)>\tau\}$ и может быть мероморфно продолжена на $\mathbb{C}$; $E(\cdot,s;f)$ также является автоморфной формой на $\mathbb{X}$ относительно $\Gamma(\mathfrak{q})$ с системой мультипликаторов $\tilde{\psi}$.

Так как $\sigma\Gamma(\mathfrak{q})\sigma^{-1}=\Gamma(\mathfrak{q})$ и $\tilde{\psi}(\sigma\gamma\sigma^{-1})=\tilde{\psi}(\gamma)$ для всех $\gamma\in\Gamma(\mathfrak{q})$, то отображение $w\mapsto E(\sigma w,s;f)$, $w\in\mathbb{X}$ также является автоморфной формой относительно группы $\Gamma(\mathfrak{q})$ с системой мультипликаторов $\tilde{\psi}$. Данный факт легко проверить.

Нам предстоит вычислить коэффициенты Фурье

$$c_{\mu,\nu}(u,v;E(\sigma(\cdot),s;f)) \tag{4.10}$$

ряда Эйзенштейна $E(\sigma(\cdot),s;f)$, где $\mu,\nu\in\mathfrak{q}^*$. Для краткости будем писать $c_{\mu,\nu}$ вместо (4.10). Тогда непосредственно из определения получаем, что

$$\begin{aligned} c_{\mu,\nu} &= c\iiint\limits_{\mathcal{F}_\mathfrak{q}} E(\sigma w,s;f)\overline{e(\mu z_1+\nu z_3)}\;dz_1\;dz_2\;dz_3\\ &= c\sum_{\gamma}\overline{\tilde{\psi}}(\gamma)\iiint\limits_{\mathcal{F}_\mathfrak{q}}\nabla(\gamma\sigma w)\overline{e(\mu z_1+\nu z_3)}\;dz_1\;dz_2\;dz_3. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Суммирование производится по некоторому множеству матриц γ, являющемуся полной системой представителей смежных классов в $\Delta_\times\backslash\Gamma(\mathfrak{q})$, причем значение суммы не зависит от выбора системы представителей; $\mathcal{F}_\mathfrak{q}=(\mathbb{C}/\mathfrak{q})^3$, $c=(\operatorname{vol}\mathcal{F}_\mathfrak{q})^{-1}$ и

$$\nabla(w)=U(w)^{2s}V(w)^s f(Q(w)),\quad w=(z_1,z_2,z_3,u,v)\in\mathbb{X}. \tag{4.12}$$

Пусть $m=\operatorname{vol}(\mathbb{C}/\mathfrak{q})^{-2}$, $n=(n_1,n_2)$, $l=(m_2,n_2,m_1,n_1)$, Λ_1,Λ_2 заданы в (2.4),

$$\Omega_i=\{\gamma\mid\gamma=\omega(l)\varepsilon_2\varepsilon_1, m_1\in\mathfrak{m}_1(n), m_2\in\mathfrak{m}_2(n), l\in\Lambda_i\},\quad i=1,2, \tag{4.13}$$

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$; матрицы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ определены в (2.3), $\omega(l)$ описано в (2.5). Из предложения 2.3 вытекает, что Ω является полной системой представителей двойных смежных классов в $\Delta_\times \backslash \Gamma(\mathfrak{q})/{}^t\Delta$. Зафиксируем также некоторую матрицу $\lambda_{m_0,n_0} = \begin{pmatrix} k_0 & l_0 \\ m_0 & n_0 \end{pmatrix} \in \tilde{\Gamma}_2(\mathfrak{q})$ такую, что $n_0 \equiv 1 + \lambda^3 \pmod 4$ и положим $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Теорема 4.2. *Коэффициенты Фурье $c_{\mu,\nu}$ имеют следующий вид:*

$$c_{0,\nu} = \begin{cases} m(\mathcal{D}^+_{0,\nu}(s,r)\mathcal{J}_{0,\nu}(u,v,s,r) + \mathcal{D}^-_{0,\nu}(s,2-r)\mathcal{J}_{0,\nu}(u,v,s,2-r)) \\ m(\dfrac{\partial}{\partial t}\mathcal{D}^+_{0,\nu}(s,t)\mathcal{J}_{0,\nu}(u,v,s,t)\Big|_{t=1} + \mathcal{D}^-_{0,\nu}(s,1)\mathcal{J}_{0,\nu}(u,v,s,1)) \end{cases} \tag{4.14}$$

при $r \neq 1$ или $r = 1$ соответственно и

$$c_{\mu,\nu} = m\mathcal{D}_{\mu,\nu}(s)\mathcal{J}_{\mu,\nu}(u,v,s,r) \tag{4.15}$$

для $\mu \neq 0$ и любого r, где $\mu,\nu \in \mathfrak{q}^*$, $s \in \mathbb{C}$, $\sigma_\gamma = \sigma_0$ для $\gamma \in \Omega_1$ и $\sigma_\gamma = \lambda_{m_0,n_0}\sigma_0$ для $\gamma \in \Omega_2$,

$$\mathcal{D}^\pm_{0,\nu}(s,t) = \sum_\gamma \overline{\tilde{\psi}}(\gamma)e(\nu c_2/c_3)\rho_\pm(\sigma_\gamma)|c_3|^{2-t-3s}|k_\gamma|^{2t}|l_\gamma|^{-2},$$

$$\mathcal{D}_{\mu,\nu}(s) = \sum_\gamma \overline{\tilde{\psi}}(\gamma)e(\mu n_\gamma/k_\gamma + \nu c_2/c_3)\rho(\sigma_\gamma; -\mu c_3/k_\gamma^2)|c_3|^{1-3s}|k_\gamma/l_\gamma|^2. \tag{4.16}$$

Суммирование производится по множеству матриц $\gamma \in \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где Ω_1, Ω_2 заданы в (4.13). Под (a_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,b_3) и (c_1,c_2,c_3) понимаются первая, вторая и третья строчки матрицы $\varepsilon_2\varepsilon_1$, где $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ определены в (2.3). Коэффициенты $\rho_\pm(\sigma)$, $\rho(\sigma;\lambda)$, $\lambda \in \mathfrak{q}^*$, $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathfrak{O})$ и число r связаны с формой f аналогично формулировке теоремы 4.1; кроме того, $n_\gamma = b_1c_3 - b_3c_1$, $k_\gamma = b_2c_3 - b_3c_2$, $l_\gamma = (c_2,c_3)$, $\hat{w} = (0,z_2,z_3,u,v) \in \mathbb{X}$,

$$\mathcal{J}_{\mu,\nu}(u,v,s,t) = \iint_{\mathbb{C}^2} (U^{2s}V^{s+t})(\hat{\sigma}\hat{w})\overline{e(\nu z_3)}\, dz_2\, dz_3 \tag{4.17}$$

при $\mu = 0$ и

$$\mathcal{J}_{\mu,\nu}(u,v,s,t) = \\ = \iint_{\mathbb{C}^2} (U^{2s}V^{s+1})(\hat{\sigma}\hat{w})\mathrm{K}_{t-1}(4\pi|\mu|V(\hat{\sigma}\hat{w}))\overline{e(\mu Z_3(\hat{\sigma}\hat{w}) + \nu z_3)}\, dz_2\, dz_3 \tag{4.18}$$

иначе. Через $\hat\sigma$ *обозначим матрицу*

$$\hat\sigma = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

и будем предполагать, что $\sigma_\gamma\infty$ *является существенной параболической вершиной* $\Gamma_2(\mathfrak{q})$ *для* $\widetilde{\psi}(h_3(\cdot))$ *и* $\rho(\sigma_\gamma;\lambda) = 0$ *при* $\lambda \notin \mathfrak{q}^*$.

Все ряды и интегралы являются абсолютно сходящимися при достаточно большом $\Re(s)$.

Лемма 4.1. (a) *Если* $\gamma = n(l_1, l_2, l_3)$, $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{C}$, *то*

$$Z_i(\gamma w) = z_i + l_i + \begin{cases} 0 & \text{для } i = 1,3, \\ l_3 z_1 & \text{для } i = 2; \end{cases}$$

$$U(\gamma w) = u, \quad V(\gamma w) = v, \quad Q(\gamma w) = (z_3 + l_3, v).$$

(b) *Если* $\gamma = \operatorname{diag}(t_1, t_2, t_1^{-1}t_2^{-1})$, $t_1, t_2 \in \mathbb{C}^*$, *то*

$$Z_i(\gamma w) = z_i \cdot \begin{cases} t_1 t_2^2, & \text{если } i = 1, \\ t_1^2 t_2, & \text{если } i = 2, \\ t_1 t_2^{-1}, & \text{если } i = 3; \end{cases}$$

$$U(\gamma w) = |t_1 t_2^2| u, \quad V(\gamma w) = |t_1 t_2^{-1}| v,$$

$$Q(\gamma w) = (t_1 t_2^{-1} z_3, |t_1 t_2^{-1}| v).$$

Доказательство. См. ([2], предложение 1.3.1). •

Лемма 4.2. *Пусть* $\gamma = h_3(\alpha)$, $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. *Тогда* $(U^2V)(\gamma w) = u^2 v$ *и* $Q(\gamma w) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} Q(w)$.

Доказательство. См. ([2], предложение 1.3.3). •

Лемма 4.3. *Пусть* $a, b \in \mathbb{C}^*$, $\hat w = (0, z_2, z_3, u, v) \in \mathbb{X}$, *матрицы* $\sigma, \hat\sigma$ *заданы в* (1.4) *и* (4.19) *соответственно. Тогда*

(a) $Q(\sigma w) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (-z_1 + Z_3(\hat\sigma\hat w), V(\hat\sigma\hat w))$;

(b) $\left(\frac{a}{b} Z_3(\sigma w), \left|\frac{a}{b}\right| V(\sigma w)\right) =$
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{b}{a}(-z_1 + Z_3(\hat\sigma\hat w)), \left|\frac{b}{a}\right| V(\hat\sigma\hat w)\right)$;

(c) $(U^2V)(\sigma w) = (U^2V)(\hat\sigma\hat w)$.

Доказательство. См. ([2], предложение 1.4.2). $\bullet$

Доказательство теоремы 4.2. Из формулы (4.11) и предложений 2.3, 2.4 следует, что

$$c_{\mu,\nu} = c\sum_{\gamma} \overline{\tilde{\psi}}(\gamma) \sum_{h} \overline{\tilde{\psi}}(h) \iiint\limits_{\mathcal{F}_{\mathfrak{q}}} \nabla(\gamma h\sigma w)\overline{e(\mu z_1 + \nu z_3)}\ dz_1\ dz_2\ dz_3, \tag{4.20}$$

где суммирование производится по $\gamma \in \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ и $h \in \Lambda_\gamma$. Очевидно, что $\tilde{\psi}(h) = 1$ для $h \in \Lambda_\gamma$. Заменяя $h \in \Lambda_\gamma$ на $\sigma h \sigma^{-1}$ и используя предложение 2.4 (b), (c), получаем:

$$\begin{aligned} c_{\mu,\nu} &= c\sum_{\gamma} \overline{\tilde{\psi}}(\gamma) \sum_{h} \iiint\limits_{\mathcal{F}_{\mathfrak{q}}} \nabla(\gamma \sigma h w)\overline{e(\mu z_1 + \nu z_3)}\ dz_1\ dz_2\ dz_3 = \\ &= c\sum_{\gamma} \overline{\tilde{\psi}}(\gamma) \iiint\limits_{\mathcal{F}_{\gamma}} \nabla(\gamma \sigma w)\overline{e(\mu z_1 + \nu z_3)}\ dz_1\ dz_2\ dz_3. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Суммирование в (4.21) производится по $\gamma \in \Omega$, $h \in \sigma^{-1}\Lambda_\gamma\sigma$ и

$$\mathcal{F}_\gamma = \{(z_1, z_2, z_3) \mid z_1 \in \mathbb{C}/\vartheta\mathfrak{q}, z_2, z_3 \in \mathbb{C}\}, \quad \vartheta = c_3/(c_2, c_3).$$

Согласно предложению 1.1, можно представить матрицу $\varepsilon_2\varepsilon_1\sigma$ как произведение $\varepsilon_2\varepsilon_1\sigma = n\tilde{a}\sigma\tilde{n}$. Из формулы (1.6) вытекает, что в данном разложении $l_3 = 0$. Используя леммы 4.1, 4.2, находим для $\gamma\sigma = \omega(l)\varepsilon_2\varepsilon_1\sigma = \omega(l)n\tilde{a}\sigma\tilde{n}$, что

$$(U^2V)(\gamma\sigma w) = (U^2V)(\tilde{a}\sigma\tilde{n}w) = |t_1t_2|^3(U^2V)(\sigma\tilde{n}w),$$

кроме того,

$$Q(\gamma\sigma w) = Q(\tilde{a}\sigma\tilde{n}w) = \left(\frac{t_1}{t_2}Z_3(\sigma\tilde{n}w), \left|\frac{t_1}{t_2}\right| V(\sigma\tilde{n}w)\right)$$

и

$$Q(\gamma\sigma w) = \lambda_{m_0,n_0}Q(\tilde{a}\sigma\tilde{n}w) = \lambda_{m_0,n_0}\left(\frac{t_1}{t_2}Z_3(\sigma\tilde{n}w), \left|\frac{t_1}{t_2}\right| V(\sigma\tilde{n}w)\right)$$

для $\gamma \in \Omega_1$ и $\gamma \in \Omega_2$ соответственно, где t_1, t_2 заданы в (1.6), $t_1t_2 = c_3^{-1}$, $t_1/t_2 = c_3/k_\gamma^2$. Таким образом,

$$\nabla(\gamma\sigma w) = \frac{1}{|c_3|^{3s}}(U^2V)(\sigma\tilde{n}w)^s f(\lambda_\gamma\left(\frac{t_1}{t_2}Z_3(\sigma\tilde{n}w), \left|\frac{t_1}{t_2}\right| V(\sigma\tilde{n}w)\right)), \tag{4.22}$$

где $\lambda_\gamma = e_2$, если $\gamma \in \Omega_1$ и $\lambda_\gamma = \lambda_{m_0,n_0}$, если $\gamma \in \Omega_2$. Произведем замену переменной $\tilde{n}w \mapsto w$. Тогда интеграл в (4.21) становится независимым от $\tilde{n}$:

$$c_{\mu,\nu} = c\sum_\gamma \overline{\tilde{\psi}}(\gamma)e(\mu n_\gamma/k_\gamma + \nu c_2/c_3)|c_3|^{-3s}I_\gamma, \tag{4.23}$$

$$I_\gamma = \iiint\limits_{\mathcal{F}_\gamma}(U^2V)(\sigma w)^s f(\lambda_\gamma\left(\frac{t_1}{t_2}Z_3(\sigma w), \left|\frac{t_1}{t_2}\right|V(\sigma w)\right))\times$$
$$\times\overline{e(\mu z_1+\nu z_3)}\ dz_1\ dz_2\ dz_3.$$

Используя лемму 4.3, получаем, что

$$\begin{aligned} I_\gamma &= \iint\limits_{\mathbb{C}^2}(U^2V)(\hat{\sigma}\hat{w})^s\overline{e(\nu z_3)}\hat{I}_\gamma\ dz_2\ dz_3,\\ \hat{I}_\gamma &= \int\limits_{\mathbb{C}/\vartheta\mathfrak{q}} f(\sigma_\gamma\left(\frac{t_2}{t_1}(-z_1+Z_3(\hat{\sigma}\hat{w})), \left|\frac{t_2}{t_1}\right|V(\hat{\sigma}\hat{w})\right))\overline{e(\mu z_1)}dz_1. \end{aligned}\tag{4.24}$$

Легко видеть, что $t_2\vartheta/t_1 \in \mathfrak{O}$. Далее, можно проверить, что

$$\int\limits_{\mathbb{C}/\vartheta\mathfrak{q}} e(\lambda z)dz = \begin{cases} \mathrm{vol}(\mathbb{C}/\mathfrak{q})|\vartheta|^2, & \text{если } \lambda = 0,\\ 0, & \text{если } \lambda \neq 0, \lambda\vartheta \in \mathfrak{q}^*. \end{cases}\tag{4.25}$$

Параболическая вершина $\sigma_\gamma\infty$ является существенной параболической вершиной $\Gamma_2(\mathfrak{q})$ для $\tilde{\psi}(h_3(\cdot))$, и можно подставить разложение Фурье формы f в теореме 4.1 в формулу для $\hat{I}_\gamma$. Почленно интегрируя и используя замечания выше, получаем, что

$$\hat{I}_\gamma = \mathrm{vol}(\mathbb{C}/\mathfrak{q})|\vartheta|^2\cdot \tag{4.26}$$
$$\cdot\begin{cases} \rho_+(\sigma_\gamma)\left|\frac{t_2}{t_1}\right|^r V(\hat{\sigma}\hat{w})^r + \rho_-(\sigma_\gamma)\left|\frac{t_2}{t_1}\right|^{2-r} V(\hat{\sigma}\hat{w})^{2-r}, \\ \qquad\qquad\qquad \text{если } \mu = 0, r\neq 1,\\ \rho_+(\sigma_\gamma)\left|\frac{t_2}{t_1}\right| V(\hat{\sigma}\hat{w})\log(\left|\frac{t_2}{t_1}\right| V(\hat{\sigma}\hat{w})) + \rho_-(\sigma_\gamma)\left|\frac{t_2}{t_1}\right| V(\hat{\sigma}\hat{w}),\\ \qquad\qquad\qquad \text{если } \mu = 0, r = 1,\\ \rho(\sigma_\gamma; -\frac{t_1}{t_2}\mu)\left|\frac{t_2}{t_1}\right| V(\hat{\sigma}\hat{w})\mathrm{K}_{r-1}(4\pi|\mu|V(\hat{\sigma}\hat{w}))\overline{e(\mu Z_3(\hat{\sigma}\hat{w}))},\\ \qquad\qquad\qquad \text{если } \mu\neq 0. \end{cases}$$

Окончательный результат следует из (4.23), (4.24) и (4.26). •

5. О рядах $\mathcal{D}_{\mu,\nu}$

В данном параграфе будут рассматриваться ряды Дирихле, возникающие в теореме 4.2, в частном случае системы мультипликаторов $\tilde{\psi} = \bar{\kappa}_3$, где $\kappa_n, n \geqslant 2$ – система гомоморфизмов Басса–Милнора–Серра, определенная в третьем параграфе. Очевидно, что $\kappa_3(\delta) = 1$ для $\delta \in \Delta$ и так как κ_3 удовлетворяет условию $(2)_3$ приложения, то $\kappa_3(\delta) = 1$ для $\delta \in {}^t\Delta$. Также имеет место равенство $\kappa_3(\sigma\gamma\sigma^{-1}) = \kappa_3(\gamma)$ для всех $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{q})$ и матрицы σ, заданной в (1.4). Поэтому можно переписать (4.16) в виде суммы по переменным $(m_2, n_2, m_1, n_1) \in \Lambda$, $m_1 \in \mathfrak{m}_1(n)$, $m_2 \in \mathfrak{m}_2(n)$, $n = (n_1, n_2)$. Также получаем, что $c_2 = m_1 n_2$, $c_3 = n_1 n_2$, $k_\gamma = n_2$, $n_\gamma = -l_1 m_2$, l_1 – правый верхний элемент матрицы $\lambda^{(n_2)}_{m_1,n_1}$, $(l_1, n_2) = 1$, $l_\gamma = n_2$, $\tilde{\kappa} = \bar{\kappa}_2$. Легко проверить, что $\sigma_0\infty$ и $\lambda_{m_0,n_0}\sigma_0\infty$ являются существенными параболическими вершинами $\Gamma_2(\mathfrak{q})$ для $\bar{\kappa}_2$ и $h_3(\lambda_{m_0,n_0})\varepsilon_2\varepsilon_1 \in \Gamma(\mathfrak{q})$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon_i \in \tilde{\Gamma}(\mathfrak{q})$, $\varepsilon_i \notin \Gamma(\mathfrak{q})$, $i = 1, 2$. Из теоремы 3.1 вытекает, что

$$\mathcal{D}^+_{0,\nu}(s,t) = \sum_{\substack{n_1,n_2 \equiv 1 \pmod 4 \\ (n_1 n_2, \mathfrak{q}) = 1}} \frac{\rho_+(\sigma_0)\mathcal{E}(0,\nu,n)}{|n_1|^{3s+t-2}|n_2|^{3s-t}} - \\ -\left(\frac{m_0}{n_0}\right) \sum_{\substack{n_1,n_2 \equiv 1+\lambda^3 \pmod 4 \\ (n_1 n_2, \mathfrak{q}) = 1}} \frac{\rho_+(\lambda_{m_0,n_0}\sigma_0)\mathcal{E}(0,\nu,n)}{|n_1|^{3s+t-2}|n_2|^{3s-t}}, \tag{5.1}$$

$$\mathcal{D}^-_{0,\nu}(s,t) = \sum_{\substack{n_1,n_2 \equiv 1 \pmod 4 \\ (n_1 n_2, \mathfrak{q}) = 1}} \frac{\rho_-(\sigma_0)\mathcal{E}(0,\nu,n)}{|n_1|^{3s+t-2}|n_2|^{3s-t}} - \\ -\left(\frac{m_0}{n_0}\right) \sum_{\substack{n_1,n_2 \equiv 1+\lambda^3 \pmod 4 \\ (n_1 n_2, \mathfrak{q}) = 1}} \frac{\rho_-(\lambda_{m_0,n_0}\sigma_0)\mathcal{E}(0,\nu,n)}{|n_1|^{3s+t-2}|n_2|^{3s-t}}, \tag{5.2}$$

$$\mathcal{D}_{\mu,\nu}(s) = \sum_{\substack{n_1,n_2 \equiv 1 \pmod 4 \\ (n_1 n_2, \mathfrak{q}) = 1, \mu n_1/n_2 \in \mathfrak{q}^*}} \frac{\rho(\sigma_0; -\mu n_1/n_2)\mathcal{E}(\mu,\nu,n)}{|n_1 n_2|^{3s-1}} - \\ -\left(\frac{m_0}{n_0}\right) \sum_{\substack{n_1,n_2 \equiv 1+\lambda^3 \pmod 4 \\ (n_1 n_2, \mathfrak{q}) = 1, \mu n_1/n_2 \in \mathfrak{q}^*}} \frac{\rho(\lambda_{m_0,n_0}\sigma_0; -\mu n_1/n_2)\mathcal{E}(\mu,\nu,n)}{|n_1 n_2|^{3s-1}}, \tag{5.3}$$

где

$$\mathcal{E}(\mu,\nu,n)=\sum_{\substack{m_1\in\mathfrak{m}_1(n)\\ m_2\in\mathfrak{m}_2(n)}}\left(\frac{m_1}{n_1}\right)\left(\frac{m_2}{n_2}\right)e\left(-\mu\frac{l_1m_2}{n_2}+\nu\frac{m_1}{n_1}\right). \tag{5.4}$$

Пусть $\varphi(c)$ – функция Эйлера кольца целых чисел $\mathfrak{O}=\mathbb{Z}[i]$ поля $\mathbb{Q}(i)$. Для $\lambda\in\mathfrak{q}^*$, $\mathfrak{q}\subset(4)$, $c\in 1+\mathfrak{q}$ определим сумму Гаусса $S_a(\lambda,c)$ как

$$S_a(\lambda,c)=\sum_{k\in\mathfrak{c}(c)}\left(\frac{k}{c}\right)^a e(\lambda k/c), \tag{5.5}$$

где $a\in\mathbb{Z}$, $\mathfrak{c}(c)\subset\mathfrak{q}$ является приведенной системой вычетов mod c.

Далее, предположим, что $c'\in\mathfrak{O}$ может быть представлено в виде ld^4, где $(d,4)=1$, $l,d\in\mathfrak{O}$ и для любого простого числа p выполняется следующее: если $\operatorname{ord}_p l\geqslant 1$, то $\operatorname{ord}_p c\geqslant 1$. Тогда положим

$$S(\lambda,c,c')=\sum_{k\in\mathfrak{c}(c,c')}\left(\frac{k}{c}\right)\left(\frac{k}{c'}\right)e(\lambda k/c), \tag{5.6}$$

где $\mathfrak{c}(c,c')\subset\mathfrak{q}$ есть приведенная система вычетов mod c, состоящая из чисел, взаимно простых с c'. Для краткости будем писать $S(\lambda,c)$ вместо $S_1(\lambda,c)$ и обозначим через $\mathfrak{N}$ множество всех пар $n=(n_1,n_2)$ таких, что сумма Гаусса $S(\lambda,n_1,n_2)$ определена для $(n_1,n_2)\in\mathfrak{N}$. Очевидно, что $(p^\alpha,p^\beta)\in\mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда $\alpha>0$ или $\alpha=0$, $\beta\equiv 0 \pmod 4$, где p – простое число, $p\equiv 1 \pmod{\lambda^3}$.

В следующем предложении собраны некоторые элементарные свойства определенных выше сумм.

Предложение 5.1.

(a) $\varphi(c)=\|c\|\prod\limits_{\substack{p\mid c,\\ p\equiv 1 \pmod{\lambda^3}\ \textit{или}\ p=\lambda}}\left(1-\frac{1}{\|p\|}\right);$

(b) $S(0,c)=\begin{cases}\varphi(c), & \textit{если } c=d^4, d\in\mathfrak{O},\\ 0 & \textit{иначе;}\end{cases}$

(c) $S(\lambda,c_1c_2,c_1'c_2')=\left(\frac{c_1}{c_2c_2'}\right)\left(\frac{c_2}{c_1c_1'}\right)S(\lambda,c_1,c_1')S(\lambda,c_2,c_2')$, *если* $(c_1c_1',c_2c_2')=1;$

(d) $S(\delta\lambda, c, c') = \left(\dfrac{\delta}{cc'}\right)^{-1} S(\lambda, c, c')$, *если* $\delta \in \mathfrak{O}$, $(\delta, cc') = 1$;

(e) *Для простого числа* $p \equiv 1 \pmod{\lambda^3}$, $\delta = \operatorname{ord}_p \lambda$ *и* $\lambda' = \lambda p^{-\delta}$

$$S(\lambda, p^\alpha, p^\beta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = 0, \beta \equiv 0 \pmod 4, \\ \varphi(p^\alpha), & \text{если } 1 \leqslant \alpha \leqslant \delta, \alpha + \beta \equiv 0 \pmod 4, \\ \|p\|^\delta S_a(\lambda', p), & \text{если } \alpha = \delta + 1, \alpha + \beta \equiv a \pmod 4, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Предложение 5.2. *Пусть* $(n_1 n_2, \mathfrak{q}) = 1$, $\mu n_1 / n_2 \in \mathfrak{q}^*$ *и* $\mu \neq 0$. *Тогда*

$$\mathcal{E}(0, \nu, n) = S(\nu, n_1) S(0, n_2),$$

$$\mathcal{E}(\mu, \nu, n) = \begin{cases} S(\mu, n_2) S(\nu, n_1, n_2), & \text{если } n \in \mathfrak{N}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{5.7}$$

Доказательство. Случай $\mathcal{E}(0, \nu, n)$ очевиден. Так как $(l_1, n_2) = 1$, то можно выбрать множество $\mathfrak{m}_1(n)$ таким образом, что $m_1 l_1 \equiv -1 \pmod{n_1 n_2}$. Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mu, \nu, n) = \sum_{m_1 \in \mathfrak{m}_1(n)} \left(\frac{m_1}{n_1}\right) e\left(\nu \frac{m_1}{n_1}\right) \times \\ \times \sum_{m_2 \in \mathfrak{m}_2(n)} \left(\frac{m_2}{n_2}\right) e\left(-\mu \frac{l_1 m_2}{n_2}\right) = \\ = \sum_{m_1 \in \mathfrak{m}_1(n)} \left(\frac{m_1}{n_1}\right) \left(\frac{-l_1}{n_2}\right)^{-1} e\left(\nu \frac{m_1}{n_1}\right) \times \\ \times \sum_{m_2 \in \mathfrak{m}_2(n)} \left(\frac{-l_1 m_2}{n_2}\right) e\left(-\mu \frac{l_1 m_2}{n_2}\right) = \\ = S(\mu, n_2) \sum_{m_1 \in \mathfrak{m}_1(n)} \left(\frac{m_1}{n_1}\right) \left(\frac{m_1}{n_2}\right) e\left(\nu \frac{m_1}{n_1}\right). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Очевидно, что $\mathcal{E}(\mu, \nu, n) = S(\mu, n_2) S(\nu, n_1, n_2)$ при $n \in \mathfrak{N}$. Пусть $n \notin \mathfrak{N}$. Это означает, что существует простое число $p \equiv 1 \pmod{\lambda^3}$ такое, что $\alpha = 0$ и $\beta \not\equiv 0 \pmod 4$, где $\alpha = \operatorname{ord}_p n_1$, $\beta = \operatorname{ord}_p n_2$. Из условия $\mu n_1 / n_2 \in \mathfrak{q}^*$ следует, что $\gamma \geqslant \beta$, где $\gamma = \operatorname{ord}_p \mu$. Используя предложение 5.1, получаем, что $S(p^\gamma, p^\beta) = 0$, $S(\mu, n_2) = 0$ и $\mathcal{E}(\mu, \nu, n) = 0$ при $n \notin \mathfrak{N}$. •

Предложение 5.3. *Ряды* $\mathcal{D}^{\pm}_{0,\nu}(s,t)$, $\mathcal{D}_{\mu,\nu}(s)$ *имеют следующий вид:*

$$\mathcal{D}^{\pm}_{0,\nu}(s,t) = \sum_{\substack{n_1,n_2\equiv 1 \pmod 4\\ (n_1n_2,\mathfrak{q})=1}} \frac{\rho_{\pm}(\sigma_0)S(\nu,n_1)S(0,n_2)}{|n_1|^{3s+t-2}|n_2|^{3s-t}}, \tag{5.9}$$

$$\mathcal{D}_{\mu,\nu}(s) =$$

$$= \sum_{\substack{n_1,n_2\equiv 1 \pmod 4), \mu n_1/n_2\in\mathfrak{q}^*\\ (n_1n_2,\mathfrak{q})=1,(n_1,n_2)\in\mathfrak{N}}} \frac{\rho(\sigma_0;-\mu n_1/n_2)S(\mu,n_2)S(\nu,n_1,n_2)}{|n_1n_2|^{3s-1}} - \left(\frac{m_0}{n_0}\right)\times$$

$$\times \sum_{\substack{n_1,n_2\equiv 1+\lambda^3 \pmod 4), \mu n_1/n_2\in\mathfrak{q}^*\\ (n_1n_2,\mathfrak{q})=1,(n_1,n_2)\in\mathfrak{N}}} \frac{\rho(\lambda_{m_0,n_0}\sigma_0;-\mu n_1/n_2)S(\mu,n_2)S(\nu,n_1,n_2)}{|n_1n_2|^{3s-1}}, \tag{5.10}$$

Доказательство. В силу предложения 5.1 (b) $S(0,n)=0$ при $n\equiv 1+\lambda^3 \pmod 4$. Таким образом, данное утверждение следует из предложения 5.2. $\bullet$

6. О биквадратичной тета-функции

Для $w=(z,v)\in\mathbb{H}$ положим $V(w)=v$, $\tilde\kappa=\bar\kappa_2$ и пусть Δ_* – подгруппа $\Gamma_2(\mathfrak{q})$, состоящая из всех верхних треугольных матриц. Тогда ряд Эйзенштейна

$$E_*(w,s)=\sum_{\gamma\in\Delta_*\backslash\Gamma_2(\mathfrak{q})} \overline{\tilde\kappa}(\gamma)V(\gamma w)^s \tag{6.1}$$

определен корректно, сходится абсолютно при $\Re(s)>2$ и является собственной функцией оператора Лапласа–Бельтрами (см. [7]). Кроме того,

$$E_*(\gamma w,s)=\tilde\kappa(\gamma)E_*(w,s) \tag{6.2}$$

для всех $\gamma\in\Gamma_2(\mathfrak{q})$.

Следуя Кубота (см. [7]), определим биквадратичную тета-функцию Θ_{K} как вычет ряда Эйзенштейна. Точнее, пусть $\mathfrak{q}=(4)$, тогда положим

$$\Theta_{\mathrm{K}}:\mathbb{H}\to\mathbb{C},\quad \Theta_{\mathrm{K}}(w)=\operatorname*{Res}_{s=5/4} E_*(w,s). \tag{6.3}$$

Данная функция является биквадратичной метаплектической формой относительно $\Gamma_2(4)$ и нами будут использоваться результаты, полученные в предыдущих параграфах, в частном случае $\mathfrak{q} = (4)$ и $f = \Theta_{\mathrm{K}}$. При этом имеет место следующее: $\lambda_{m_0,n_0} = \begin{pmatrix} 1+\lambda^3-\lambda^5 & \lambda^4 \\ -\lambda^4 & 1+\lambda^3 \end{pmatrix}$, $\lambda = 1+i$, $\mathrm{vol}(\mathbb{C}/\mathfrak{q}) = 2^4$ и $m = 2^{-8}$.

Пусть

$$\zeta_*(s) = \sum_{n\equiv 1 \pmod{\lambda^3}} \frac{1}{\|n\|^s}, \quad \Psi(s,\mu) = \sum_{n\equiv 1 \pmod 4} \frac{S(\mu,n)}{\|n\|^s} \tag{6.4}$$

Согласно Сузуки (см. [6]), для функции $f = \Theta_{\mathrm{K}}$ в обозначениях четвертого параграфа имеем: $r = 5/4$, $\rho_+(\sigma_0) = 0$ и $\rho_-(\sigma_0) = \dfrac{\pi}{4\zeta_*(2)} \operatorname*{Res}_{s=1} \zeta_*(s)$. Очевидно, что $\zeta_*(s) = (1-2^{-s})\zeta_{\mathbb{Q}(i)}(s)$, где $\zeta_{\mathbb{Q}(i)}(s)$ – ζ–функция Дедекинда поля $\mathbb{Q}(i)$. Так как $\operatorname*{Res}_{s=1} \zeta_{\mathbb{Q}(i)}(s) = \dfrac{\pi}{4}$ (см. [9]), то получаем, что $\rho_-(\sigma_0) = \dfrac{\pi^2}{2^5\zeta_*(2)}$.

Стандартные рассуждения приводят к следующим формулам:

$$\begin{aligned}
&\zeta_*(s) = \prod_{p\equiv 1 \pmod{\lambda^3}} \left(1 - \frac{1}{\|p\|^s}\right)^{-1}, \quad \Re(s) > 1, \\
&\frac{\zeta_*(s-1)}{\zeta_*(s)} = \sum_{n\equiv 1 \pmod{\lambda^3}} \frac{\varphi(n)}{\|n\|^s}, \quad \Re(s) > 2, \\
&\Psi(s,0) = \sum_{n\equiv 1 \pmod{\lambda^3}} \frac{\varphi(n^4)}{\|n\|^{4s}} = \\
&= \sum_{n\equiv 1 \pmod{\lambda^3}} \frac{\varphi(n)}{\|n\|^{4s-3}} = \frac{\zeta_*(4s-4)}{\zeta_*(4s-3)}, \quad \Re(s) > 5/4,
\end{aligned} \tag{6.5}$$

где $p, n \in \mathfrak{O}$, p – простое число и все ряды и произведения являются абсолютно сходящимися.

Предложение 6.1. *Коэффициент Фурье $c_{0,0}$ ряда Эйзенштейна $E(\sigma(\cdot), s; \Theta_{\mathrm{K}})$ имеет следующий вид:*

$$c_{0,0} = h\frac{\zeta_*(6s-13/2)}{\zeta_*(6s-9/2)} I_{0,0}(u,v,s), \tag{6.7}$$

где

$$h = \frac{\pi^4}{2^{11}\zeta_*(2)}, \quad I_{0,0}(u,v,s) = \frac{u^{11/4-s}v^{4-2s}}{(3s-11/4)(3s-13/4)}. \tag{6.8}$$

Доказательство. Из теоремы 4.2 и предложения 5.3 следует, что

$$c_{0,0} = \frac{1}{2^8}\frac{\pi^2}{2^5\zeta_*(2)}\mathcal{D}(s)\mathcal{J}_{0,0}(u,v,s,3/4), \tag{6.9}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(s) &= \sum_{n_1,n_2\equiv 1 \pmod 4} \frac{S(0,n_1)S(0,n_2)}{|n_1|^{3s-5/4}|n_2|^{3s-3/4}} = \\ &= \Psi\left(\frac{3s}{2}-\frac{5}{8},0\right)\Psi\left(\frac{3s}{2}-\frac{3}{8},0\right).\end{aligned} \tag{6.10}$$

Используя (6.5), получаем:

$$\mathcal{D}(s) = \frac{\zeta_*(6s-\frac{5}{2}-4)}{\zeta_*(6s-\frac{5}{2}-3)}\frac{\zeta_*(6s-\frac{3}{2}-4)}{\zeta_*(6s-\frac{3}{2}-3)} = \frac{\zeta_*(6s-13/2)}{\zeta_*(6s-9/2)}. \tag{6.11}$$

Интегралы $\mathcal{J}_{\mu,\nu}(u,v,s,t)$ были вычислены в работе ([2], теоремы 1.4.6–1.4.9) и

$$\mathcal{J}_{0,0}(u,v,s,3/4) = \frac{2^2\pi^2u^{11/4-s}v^{4-2s}}{(3s-11/4)(3s-13/4)}. \tag{6.12}$$

Данное равенство завершает доказательство. •

Так как $\zeta(s)$ имеет простой полюс в точке $s=1$ и является регулярной ненулевой функцией в точке $s=3$, то коэффициент Фурье $c_{0,0}$ как функция на $\mathbb{C}$ с фиксированными параметрами $u,v\in\mathbb{R}_+^*$ обладает простым полюсом в точке $5/4$. Отсюда получаем следующую теорему.

Теорема 6.1. *Ряд Эйзенштейна $E(\sigma(\cdot),s;\Theta_{\mathrm{K}})$ имеет полюс в точке $5/4$ и вычет в данной точке является метаплектической формой на $\mathbb{X}$ относительно группы $\Gamma(4)$.*

Следует заметить, что хотя точка $5/4$ – простой полюс коэффициента Фурье $c_{0,0}$, отсюда не следует, что данная точка является простым полюсом ряда Эйзенштейна. Но $E(\sigma(\cdot),s;\Theta_{\mathrm{K}})$ может быть разложен в ряд Лорана в окрестности точки $5/4$, причем главный член данного разложения будет собственной функцией всех инвариантных дифференциальных операторов, удовлетворяя условию (b) определения автоморфной формы в четвертом параграфе. Остальные члены разложения удовлетворят условию (b′), поэтому в теореме 6.1 под метаплектической формой понимается форма, для которой выполняется (b′).

Таким образом, можно построить биквадратичную тета-функцию $\Theta : \mathbb{X} \to \mathbb{C}$ как

$$\Theta = \operatorname*{Res}_{s=5/4} E(\sigma(\cdot), s; \Theta_{\mathrm{K}}). \tag{6.13}$$

Приложение

Первая часть приложения, описывающая свойства символа Меннике и гомоморфизмов Басса–Милнора–Серра, представляет собой фрагмент главы 0.2.3 книги [2].

Для дедекиндова кольца A и идеала $\mathfrak{q}$, лежащего в A, обозначим через $\mathrm{GL}_n(A, \mathfrak{q})$ и $\mathrm{SL}_n(A, \mathfrak{q})$ главные конгруэнц–подгруппы $\operatorname{mod} \mathfrak{q}$ в $\mathrm{GL}_n(A)$ и $\mathrm{SL}_n(A)$ соответственно, состоящие из матриц (a_{ij}), элементы которых удовлетворяют условию

$$a_{ii} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{q}}, \quad a_{ij} \in \mathfrak{q}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1 \ldots n.$$

Матрица (a_{ij}) будет называться элементарной, если $a_{ii} = 1$ и существует не более одной пары (i, j), $i \neq j$ такой, что $a_{ij} \neq 0$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Пусть $W_\mathfrak{q} = \{(a, b) \mid a \in 1 + \mathfrak{q}, b \in \mathfrak{q}, aA + bA = A\}$ и отображение

$$W_\mathfrak{q} \to C, \quad (a, b) \mapsto \left[\frac{b}{a}\right]$$

есть символ Меннике со значениями в произвольной группе C. По определению, это означает, что

(a) $\left[\dfrac{0}{1}\right] = 1$;

(b) $\left[\dfrac{b_1 b_2}{a}\right] = \left[\dfrac{b_1}{a}\right]\left[\dfrac{b_2}{a}\right]$ для всех $(a, b_1), (a, b_2) \in W_\mathfrak{q}$;

(c) $\left[\dfrac{b + ka}{a}\right] = \left[\dfrac{b}{a}\right]$ для всех $k \in \mathfrak{q}$, $(a, b) \in W_\mathfrak{q}$;

(d) $\left[\dfrac{b}{a + kb}\right] = \left[\dfrac{b}{a}\right]$ для всех $k \in A$, $(a, b) \in W_\mathfrak{q}$.

Из аксиом символа Меннике вытекают следующие свойства.

(e) $\left[\dfrac{b}{a_1 a_2}\right] = \left[\dfrac{b}{a_1}\right]\left[\dfrac{b}{a_2}\right]$ для всех $(a_1, b), (a_2, b) \in W_{\mathfrak{q}}$;

(f) $\left[\dfrac{-b}{a}\right] = \left[\dfrac{b}{a}\right]$ для всех $(a, b) \in W_{\mathfrak{q}}$;

(g) $\left[\dfrac{b}{1+kb}\right] = 1$ для всех $k, b \in \mathfrak{q}$;

(h) Если $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(A, \mathfrak{q})$, то $\left[\dfrac{c}{d}\right] = \left[\dfrac{b}{a}\right]$ и $\left[\dfrac{b}{a}\right]\left[\dfrac{b}{d}\right] = 1$.

Зададим два условия, накладываемые на отображения $\kappa_n : \mathrm{GL}_n(A, \mathfrak{q}) \to C$.

$(1)_n$ $\kappa_n(\varepsilon) = 1$ для любой элементарной матрицы $\varepsilon \in \mathrm{SL}_n(A, \mathfrak{q})$;

$(2)_n$ если $\kappa_n(\gamma) = 1$, то $\kappa_n({}^t\gamma) = 1$.

Предположим, что κ_n является групповым гомоморфизмом, удовлетворяющим условиям $(1)_n, (2)_n$, $n \geqslant 2$. Согласно работе [5], имеет место следующее.

(1) Всякая матрица $\gamma \in \mathrm{GL}_{n+1}(A, \mathfrak{q})$ может быть разложена как

$$\gamma = \begin{pmatrix} & & * \\ & \alpha & \vdots \\ & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & * \\ \vdots & & \\ \vdots & \beta & \\ 0 & & \end{pmatrix},$$

где $\alpha, \beta \in \mathrm{GL}_n(A, \mathfrak{q})$.

(2) Для γ, α, β, заданных в (1), произведение $\kappa_n(\alpha)\kappa_n(\beta)$ зависит только от γ и не зависит от выбора множителей в (1). Таким образом, имеется отображение $\kappa_{n+1} : \mathrm{GL}_{n+1}(A, \mathfrak{q}) \to C$, $\kappa_{n+1}(\gamma) = \kappa_n(\alpha)\kappa_n(\beta)$.

(3) Если $n \geqslant 3$, то отображение $\kappa_{n+1} : \mathrm{GL}_{n+1}(A, \mathfrak{q}) \to C$, определенное в (2), есть групповой гомоморфизм, расширяющий κ_n в том смысле, что

$$\kappa_{n+1}(\begin{pmatrix} & & 0 \\ & \delta & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}) = \kappa_n(\delta)$$

для всех $\delta \in \mathrm{GL}_n(A,\mathfrak{q})$, и κ_{n+1} удовлетворяет условиям $(1)_{n+1}$, $(2)_{n+1}$. Кроме того, это отображение является единственным гомоморфизмом $\mathrm{GL}_{n+1}(A,\mathfrak{q}) \to C$, расширяющим κ_n и удовлетворяющим условию $(1)_{n+1}$.

(4) Пусть $n = 2$ и отображение $\kappa_3 : \mathrm{GL}_3(A,\mathfrak{q}) \to C$, определенное в (2), удовлетворяет условию $\kappa_3(\lambda\sigma\lambda^{-1}) = \kappa_3(\sigma)$ для любой матрицы

$$\sigma = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(A,\mathfrak{q}) \text{ и } \lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда κ_3 – групповой гомоморфизм, расширяющий κ_2 , и κ_3 удовлетворяет условиям $(1)_3, (2)_3$. Данный гомоморфизм является единственным гомоморфизмом $\mathrm{GL}_3(A,\mathfrak{q}) \to C$, расширяющим κ_2 и удовлетворяющим $(1)_3$.

Согласно работе [2], выполняется следующее.

(5) Предположим, что $\kappa_2 : \mathrm{GL}_2(A,\mathfrak{q}) \to C$ есть групповой гомоморфизм, удовлетворяющий условиям $(1)_2, (2)_2$ и связанный с некоторым отображением $\left[\frac{\cdot}{\cdot}\right] : W_\mathfrak{q} \to C$ таким образом, что $\kappa_2(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \left[\frac{b}{a}\right]$. Если данное отображение $W_\mathfrak{q} \to C$ удовлетворяет аксиомам символа Меннике (a), (b), (c) и имеет свойства (e), (f), (g), (h), то $\kappa_3 : \mathrm{GL}_3(A,\mathfrak{q}) \to C$, заданное в (2), удовлетворяет условиям пункта (4). Таким образом, κ_3 будет групповым гоморфизмом, расширяющим κ_2 и удовлетворяющим свойствам $(1)_3, (2)_3$.

Вторая часть приложения написана на основе [5, 10].

Зафиксируем дедекиндово кольцо $A = \mathbb{Z}[i]$ и группу $C = \{\pm1, \pm i\}$. Пусть $a, b \in \mathbb{Z}[i]$, $(4c, d) = 1$ и $d = \varepsilon p_1^{\omega_1} \cdots p_n^{\omega_n}$ есть каноническое разложение на простые множители $p_i \equiv 1 \pmod{\lambda^3}$, $\varepsilon \in C$. Тогда положим

$$\left(\frac{c}{d}\right) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\frac{c}{p_i}\right)^{\omega_i},$$

где, для простого числа $p \equiv 1 \pmod{\lambda^3}$, символ $\left(\dfrac{c}{p}\right)$ равен числу $\zeta \in \mathbb{C}$, однозначно определенному условиями $\zeta^4 = 1$ и $c^{(\|p\|-1)/4} \equiv \zeta \pmod{p}$.

Символ биквадратичного вычета обладает следующими свойствами.

(a) Если $a \equiv b \pmod d$, то $\left(\frac{a}{d}\right) = \left(\frac{b}{d}\right)$;

(b) $\left(\frac{c}{ab}\right) = \left(\frac{c}{a}\right)\left(\frac{c}{b}\right)$;

(c) $\left(\frac{ab}{d}\right) = \left(\frac{a}{d}\right)\left(\frac{b}{d}\right)$;

(d) Если $a, b \equiv 1 \pmod{\lambda^3}$, $(a,b) = 1$, то

$$\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = (-1)^{(\|a\|-1)(\|b\|-1)/16};$$

(e) Если $\delta = 1 + \alpha_4\lambda^4 + \alpha_5\lambda^5 + \alpha_6\lambda^6 + \ldots$ $(\alpha_k = 0, 1)$, то

$$\left(\frac{\lambda}{\delta}\right) = i^{-\alpha_4 + 2\alpha_6}, \quad \left(\frac{i}{\delta}\right) = (-1)^{\alpha_4 + \alpha_5};$$

(f) Если $\delta = 1 + \lambda^3 + \alpha_4\lambda^4 + \alpha_5\lambda^5 + \alpha_6\lambda^6 + \ldots$ $(\alpha_k = 0, 1,)$ то

$$\left(\frac{\lambda}{\delta}\right) = -i^{-\alpha_4 + 2\alpha_6}, \quad \left(\frac{i}{\delta}\right) = i(-1)^{\alpha_4 + \alpha_5};$$

(g) Если $b, k \equiv 0 \pmod 4$, $a \equiv 1 \pmod{\lambda^3}$, $(a,b) = 1$, то $\left(\frac{b}{a+kb}\right) = \left(\frac{b}{a}\right)$.

Также положим $\left(\frac{0}{d}\right) = 1$ для $d \in \mathbb{Z}[i]$, $(4,d) = 1$.

Литература

1. Н. В. Проскурин, *Автоморфные формы и гомоморфизм Басса–Милнора–Серра 1, 2.* — Записки научн. семин. ЛОМИ, **129** (1983), 85–163; (English translation: J. of Soviet Math., Vol. 29, Number 2, April 1985, 1160–1191, 1192–1219).
2. N. V. Proskurin, *Cubic metaplectic forms and theta functions.* — Springer–Verlag, Lecture Notes in Math. **1677** (1998), 196 pp.
3. D. A. Kazhdan, S. J. Patterson, *Metaplectic forms.* — Institut des Hautes Études Scientifiques, Publ. Math., **59** (1984), 35–142.
4. T. Kubota, *Ein arithmetischer Satz über eine Matrizengruppe.* — J. reine angew. Math., Band **222** (1965), 55–57.

5. H. Bass, J. Milnor, J.-P. Serre, *Solution of the congruence subgroup problem for* $\mathrm{SL}_n (n \geqslant 3)$ *and* $\mathrm{Sp}_{2n}(n \geqslant 2)$. — Institut des Hautes Études Scientifiques, Publ. Math., **33** (1967), 59–137; (русский перевод: Басс Х., Милнор Дж., Серр Ж.-П., *Решение конгруэнцпроблемы для* $\mathrm{SL}_n(n \geqslant 3)$ и $\mathrm{Sp}_{2n}(n \geqslant 2)$. Математика, сб. переводов, 1970, 14:6, 64–128).
6. T. Suzuki, *Some results on the coefficients of the biquadratic theta series.* — J. reine angew. Math., Band **340** (1983), 70–117.
7. T. Kubota, *On automorphic functions and reciprocity law in a number theory.* — Lecture in Math. Kyoto Univer., **2** (1969), (русский перевод: Кубота Т., *Об автоморфных формах и законе взаимности в числовых полях.* Математика, сб. переводов, 1970, 14:6, 3–37).
8. R. P. Langlands, *On the functional equations satisfied by Eisenstein series.* — Springer–Verlag, Lecture Notes in Math. **544** (1976).
9. З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел.* — М., Мир (1964), 566 с. (English translation: Borevich Z.I., Shafarevich I.R., *Number theory*, New York, 1966).
10. K. Ireland, M. Rosen, *A Classical Introduction to Modern Number Theory.* — Graduate Texts in Mathematics, Springer–Verlag, New York, Heidelberg, Berlin **87** (1982), (русский перевод: Айерлэнд К., Роузен М., *Классическое введение в современную теорию чисел*, М., Мир, 1987, 415 с.).

Kataev D. S. On the biquadratic Eisenstein series.

Biquadratic metaplectic Eisenstein series over the group $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ are studies, and the “sl(2)-triples” technique for the computation of the Fourier coefficients of these series is used. Also, the biquadratic theta-function over the group $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ is constructed.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
e-mail:dmitry@pdmi.ras.ru

Поступило 21 августа 2000 г.