Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 272, 2000 г.

С. В. Востоков, О. В. Демченко

ЯВНАЯ ФОРМУЛА СПАРИВАНИЯ ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ФОРМАЛЬНЫХ ГРУПП ХОНДЫ

**Инициатору Питерской серии
работ по закону взаимности
А. В. Яковлеву посвящается**

Введение

1°. Проблема получения явных формул для символа Гильберта имеет длинную историю, которая началась с работы Артина и Хассе 1928 года [1]. В этой работе были получены явные формулы для символа Гильберта в круговом расширении $K_n = \mathbb{Q}_p(\zeta_n)$, $\zeta_n^{p^n} = 1$, для пар (α, ζ_n) и $(\alpha, \zeta_n - 1)$, где α – главная единица. В частности,

$$(\alpha, \zeta_n)_n = \zeta_n^{-\frac{1}{p^n}\operatorname{tr}\,\log\alpha}, \tag{1}$$

где $\operatorname{tr} := \operatorname{tr}_{K_n/\mathbb{Q}_p}$ и $p \neq 2$.

Другой тип явных формул имеет свои корни в формулах Куммера [2]. Результат Куммера на современном языке можно написать следующим образом. Пусть $K_1 = \mathbb{Q}_p(\zeta_1)$, $p \neq 2$. Для главной единицы $\varepsilon = 1 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \dots$, где $\pi = \zeta_1 - 1$ – униформизующая K_1 и $a_i \in \mathbb{Z}$, ряд $1 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ обозначаем через $\underline{\varepsilon}(x)$, таким образом $\underline{\varepsilon}(\pi) = \varepsilon$. Тогда для главных единиц ε и η из K_1 имеет место формула

$$(\varepsilon, \eta)_1 = \zeta_1^{\operatorname{res}_x(\log\underline{\eta}\left(\frac{d}{dx}\log\underline{\varepsilon}\right)/x^p)} \tag{2}$$

Мы видим, что в формулах Артина–Хассе (1) ответ дается в виде следа некоторого числа, в формулах Куммера – в виде вычета некоторого ряда. В этом смысле второй тип формул ближе к аналогиям с алгебраическими функциями.

* Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 0001–00140. Первый автор получил также поддержку от фонда Royal Society grant for collaboration in fundamental sciences between Russia and UK.

Дальнейшее получение явных формул для символа Гильберта пошло по этим двум направлениям – типа Артина–Хассе и типа Куммера. Надо отметить, что в первом направлении на один из аргументов, например, на второй, всегда накладываются ограничения вида $v_p(\beta - 1) > \frac{2}{p-1}$, где v_p – нормализованное нормирование. Соответствующие явные формулы Артин–Хассовского типа в круговом поле $\mathbb{Q}_p(\zeta_n)$ были получены К. Ивасава [3], а в произвольном локальном поле – Ш. Сеном [4]. Полные формулы Куммеровского типа в локальном поле были получены независимо Х. Брюкнером [5] и С. Востоковым [6].

Интересно было бы связать оба типа формул, т.е. из полных формул Брюкнера–Востокова вывести формулы Ш. Сена. На сегодняшний день это сделано лишь в круговом поле П. Кёльче [7], который из формул Востокова вывел формулы Ивасавы.

2°. Общий метод получения формул Куммеровского типа состоит в следующем.

а) В соответствующем модуле (это либо мультипликативная группа классического локального или многомерного локального поля, либо формальный модуль группы точек формальной группы) строится так называемый базис Шафаревича [8].

б) Задается в явном виде спаривание на том же множестве, на котором определен символ Гильберта. В классическом случае это спаривание на множестве $K^* \times K^*$, где K – локальное поле; в n-мерном локальном поле K – на множестве $K_n^{\mathrm{top}}(K) \times K^*$, где $K_n^{\mathrm{top}}(K)$ – топологическая K-группа Милнора; в случае формальных групп – на множестве $K^* \times F(M)$, где $F(M)$ – формальный модуль формальной группы F на максимальном идеале M локального поля K.

Далее проверяются основные свойства построенного спаривания, самыми важными и сложными из которых обычно являются инвариантность выбора униформизующего элемента и независимость от разложения элементов в ряды по униформизующему элементу. В Куммеровской формуле (2), например, инвариантность означает, что ответ не изменится, если униформизующую $\pi = \zeta - 1$ заменить на другую униформизующую; а независимость – что результат не изменится, если менять разложение одного и того же элемента в ряд по π.

в) Проверка совпадения построенного явного спаривания с символом Гильберта на элементах базиса Шафаревича.

г) Проверка совпадения явного спаривания с символом Гильберта на любых элементах, используя инвариантность и независимость явного спаривания, что дает для символа Гильберта явную формулу.

3°. Впервые этот метод был успешно применен в классическом локальном поле в работе [6] (см. также [9, главу VII]). В дальнейшем он применялся для получения явных формул символа Гильберта в следующих случаях:

а) многомерное локальное поле [10];

б) формальные группы Любина–Тэйта [11–15];

в) относительные формальные группы Любина–Тэйта [16];

г) одномерные формальные группы Хонды для символа Гильберта первой степени [17].

Отметим, что метод хорошо работает в тех случаях, когда определено обобщение функции Артина–Хассе $E(x) = \exp(x + \frac{x^p}{p} + \frac{x^{p^2}}{p^2} + \dots)$, которая впервые появилась в работе [1]. В частности, в случае формальных групп это возможно для групп Любина–Тэйта и формальных групп Хонды, для которых есть полная классификация.

Для полноты картины укажем основные результаты, полученные в Артин–Хассовском направлении. Кроме вышеупомянутых работ [1, 3, 4], относящихся к классическому локальному полю, для локальных полей с конечным полем вычетов и формальных групп Любина–Тэйта формулы Артина–Хассовского типа были выведены А. Уайлсом [18] для полей деления изогении $[\pi^n]$ и В. Колывагиным [19] для поля K, содержащего поле деления изогении $[\pi^n]$. Колман [20] в мультипликативном и частично в случае формальных групп Любина–Тэйта получил сильные продвижения. Его гипотетическая формула в общем случае формальных групп Любина–Тэйта была проверена де Шалитом [21]. Ф. Детрам [22] обобщил формулы Ш. Сена до формальных групп Любина–Тэйта. Формулы Ш. Сена были обобщены до p-делимых групп Д. Бенуа [23].

Настоящая работа посвящена случаю символа Гильберта для одномерных формальных групп Хонды, и является в некотором смысле заключительной работой применения классического метода п. 2°. Ключом, позволяющим применить наш метод, являются классификационные теоремы Демченко [24], которые связывают формальные группы Любина–Тэйта и формальные группы Хонды.

Надо отметить, что явные формулы Куммеровского типа для многомерных групп Хонды были получены В. Абрашкиным [25] совершенно другим методом – с использованием теории p-адических периодов, но при этом он рассматривает формальные группы Хонды лишь над кольцом векторов Витта и, кроме того, в работе Абрашкина имеется весьма удивительное ограничение на основное поле (оно должно содержать все корни p^n-ой степени из единицы). В настоящей работе получен полный результат для произвольных одномерных формальных групп Хонды без всяких (кроме естественных) ограничений на основное поле.

В §1 содержатся основные определения, а также формулируются результаты работ [24, 28], являющиеся основой для наших построений. В частности, в работе [28] построен обобщенный базис Шафаревича, т.е. сделан первый шаг из общего метода получения явных формул, описанного в п. 2^0. §2 посвящен описанию свойств алгебры рядов Лорана $\mathcal{L}_\mu$. Идея о том, что ряд, вычет которого нужно взять для построения явной формулы для символа Гильберта, следует искать в $\mathcal{L}_\mu$, принадлежит В. Абрашкину [25]. В предшествующих работах [6, 11–17], для этой цели использовалось кольцо $\mathcal{O}\{x\}$ рядов Лорана, коэффициенты которых при стремлении степени к $-\infty$ стремятся к 0.

В §3 задается в явном виде спаривание для рядов и доказывается его инвариантность относительно замены переменной. Доказательство этого утверждения, а также ряда других аналогично случаю символа Гильберта первой степени (см. статью Д. Бенуа, С. Востокова [17]). Спаривание для рядов используется для построения в §4 спаривания, заданного на той же паре множеств, что и обобщенный символ Гильберта. Там же исследуются свойства этого спаривания, из которых следует, что оно совпадает с обобщенным символом Гильберта, давая тем самым для него явную формулу. Однако все это время мы имели дело не со “стандартным” обобщением символа Гильберта, а с обобщением, естественным в свете новых связей между формальными группами Любина–Тэйта и Хонды [24]. Эти разные обобщения легко могут быть связаны между собой, что позволяет нам в §5 вывести без всяких усилий явную формулу для “стандартного” символа Гильберта.

§1. Основные определения, обозначения и вспомогательные результаты

1°. Пусть

- k – локальное поле (конечное расширение $\mathbb{Q}_p$),
- $\bar{k}$ – поле вычетов характеристики $p \geqslant 3$,
- $q = p^f = \operatorname{card} \bar{k}$,
- $\mathcal{O}$ – кольцо целых поля k,
- π – простой элемент поля k,
- k' – конечное неразветвленное расширение поля k,
- $\mathcal{O}'$ – кольцо целых поля k',
- $\mathfrak{M}'$ – максимальный идеал кольца $\mathcal{O}'$,
- Δ – автоморфизм Фробениуса расширения k'/k,
- $\blacktriangle$ – оператор Фробениуса в кольце $k'((x))$:

$$\blacktriangle(\sum c_i x^i) = \sum c_i^{\Delta} x^{qi}.$$

Заметим, что множество операторов вида $\sum_{i\geqslant 0} a_i \blacktriangle^i$, $a_i \in \mathcal{O}'$, образует некоммутативное кольцо операторов $\mathcal{O}'[[\blacktriangle]]$ от переменной $\blacktriangle$ с правилом умножения

$$\blacktriangle a = a^{\Delta} \blacktriangle, \quad a \in \mathcal{O}'.$$

При этом, если $u, v \in \mathcal{O}'[[\blacktriangle]]$, то $u(v\varphi) = (uv)(\varphi)$.

2°. **Определение 1.** *Формальная группа $F \in \mathcal{O}'[[x, y]]$ с логарифмом $\lambda(x) \in k'[[x]]$ называется формальной группой Хонды, если*

$$u\lambda \equiv 0 \bmod \pi$$

для некоторого оператора $u = \pi + a_1\blacktriangle + \ldots \in \mathcal{O}'[[\blacktriangle]]$. При этом u называется типом формальной группы F.

Определение 2. *Типы u и v формальной группы F называются эквивалентными, если $u = \varepsilon v$, $\varepsilon \in \mathcal{O}'[[\blacktriangle]]$, $\varepsilon(0) = 1$.*

Очевидно, что фиксированная формальная группа F имеет бесконечное множество типов, а именно, имеет место следующее несложное утверждение: если F – типа u, то $v = \pi + b_1\blacktriangle + \ldots \in \mathcal{O}'[[x]]$ является типом F в том и только в том случае, если v эквивалентен u.

Используя подготовительную лемму Вейерштрасса в кольце $\mathcal{O}'[[\blacktriangle]]$, несложно проверить, что для любой формальной группы Хонды F существует единственный *канонический тип*:

$$u = \pi - a_1\blacktriangle - \ldots - a_h\blacktriangle^h, \quad a_1, \ldots, a_{h-1} \in \mathfrak{M}', a_h \in \mathcal{O}'^*. \qquad (3)$$

Этот тип определяет группу F однозначно с точностью до изоморфизма. При этом h будет *высотой* F, т.е. $\operatorname{ht} F = h$.

В классе изоморфных формальных групп Хонды канонический тип (3) определяет единственную формальную группу Хонды F_a с логарифмом Артина–Хассе

$$\lambda_a(x) = (\pi u^{-1})(x) = x + \alpha_1 x^q + \alpha_2 x^{q^2} + \ldots, \quad \alpha_i \in k'$$

[26]. Напомним, что если F и G – формальные группы Хонды типов u и v соответственно, то

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}'}(F, G) = \{a \in \mathcal{O}' : au = va\}, \quad \operatorname{End}_{\mathcal{O}'}(F) \supset \mathcal{O}.$$

Вместе с каноническим типом u вида (3) мы будем часто использовать эквивалентный ему тип

$$\widetilde{u} = \pi - a_h\blacktriangle^h - a_{h+1}\blacktriangle^{h+1} - \ldots, \quad a_h \in \mathcal{O}'^*, a_{h+1} \ldots \in \mathcal{O}' \qquad (4)$$

где эквивалентность задается равенством

$$\widetilde{u} = C^{-1}u, \quad C = 1 - \frac{a_1}{\pi}\blacktriangle - \ldots - \frac{a_{h-1}}{\pi}\blacktriangle^{h-1},$$

т.е.

$$\widetilde{u} = (\pi^{-1}(u + a_h\blacktriangle^h))^{-1}u = \pi - (\pi^{-1}(u + a_h\blacktriangle^h))^{-1}a_h\blacktriangle^h =$$
$$= \pi - a_h\blacktriangle^h - a_{h+1}\blacktriangle^{h+1} - \ldots.$$

Сформулируем классификационные теоремы Демченко, связывающие формальные группы Хонды с формальными группами Любина–Тэйта [24].

Теорема 1.1. *Пусть F – формальная группа Хонды канонического типа $u = \pi - a_1\blacktriangle - \ldots - a_h\blacktriangle^h$, $a_1, \ldots, a_{h-1} \in \mathfrak{M}'$ и соответствующего ему типа $\widetilde{u} = \pi - a_h\blacktriangle^h - a_{h+1}\blacktriangle^{h+1} - \ldots$, $a_i \in \mathcal{O}'$. Пусть $\lambda(x)$ – логарифм F. Положим $\lambda_1 = B\lambda^{\Delta^h}$, где*

$$B = 1 + \frac{a_{h+1}}{a_h}\blacktriangle + \frac{a_{h+2}}{a_h}\blacktriangle^2 + \ldots$$

(т.е. $\widetilde{u} = \pi - a_h B\blacktriangle^h$). Тогда

1) λ_1 – логарифм формальной группы Хонды F_1 типа $\widetilde{u}_1 = a_h^{-1}\widetilde{u}a_h$ и канонического типа $u_1 = a_h^{-1}ua_h$;

2) $f = [\pi/a_h]_{F,F_1} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}'}(F, F_1)$ и $f(x) \equiv x^{q^h} \bmod \pi$.

Замечание 1. а) Формальная группа Любина–Тэйта F имеет тип $u = \pi - \blacktriangle$, $\mathrm{ht}\, F = h = 1$ и $F_1 = F$

б) Относительная формальная группа Любина–Тэйта F имеет тип $u = \pi - a_1\blacktriangle$, где $a_1 = \pi/\pi'$; $\mathrm{ht}\, F = h = 1$ и $F_1 = F^{\Delta}$.

Теорема 1.2 (обратная к теореме 1.1). *Пусть $f \in \mathcal{O}'[[x]]$ – ряд, удовлетворяющий условиям*

$$f(x) \equiv x^{q^h} \bmod \pi, \quad f(x) \equiv \frac{\pi}{a_h}\, x \bmod \deg 2,$$

где a_h – фиксированный обратимый элемент из $\mathcal{O}'$. Пусть $u = \pi - a_1\blacktriangle - \ldots - a_h\blacktriangle^h$, $a_1, \ldots, a_{h-1} \in \mathfrak{M}'$, и $\widetilde{u} = C^{-1}u = \pi - a_h\blacktriangle^h - a_{h+1}\blacktriangle^{h+1} - \ldots$, где $C = 1 - a_1/\pi\,\blacktriangle - \ldots - a_{h-1}/\pi\,\blacktriangle^{h-1}$. Тогда существует единственная формальная группа Хонды F типа $\widetilde{u}$ и канонического типа u такая, что $f = [\pi/a_h]_{F,F_1}$ – гомоморфизм из F в формальную группу F_1, соответствующую F в силу теоремы 1.1.

Замечание 2. Напомним, что если λ и λ_1 – логарифмы F и F_1 соответственно, то

$$f = \left[\frac{\pi}{a_h}\right]_{F,F_1} = \lambda_1^{-1} \circ \left(\frac{\pi}{a_h}\,\lambda\right).$$

Замечание 3. Гомоморфизм $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}'}(F, F_1)$, фигурирующий в теоремах 1.1 и 1.2, будем называть выделенным гомоморфизмом формальной группы Хонды F.

Эти теоремы позволяют определить на множестве формальных групп Хонды над кольцом $\mathcal{O}'$ обратимый оператор

$$\mathcal{A} : F \to F_1, \tag{5}$$

который задает цепочку формальных групп Хонды

$$F \underset{f}{\to} F_1 \underset{f_1}{\to} \ldots \underset{f_{n-1}}{\to} F_n, \tag{6}$$

где $F_m = \mathcal{A}^m F$, $1 \leqslant m \leqslant n$.

Применим следующие обозначения:

- λ_m – логарифм F_m,
- u_m – канонический тип группы F_m,
- B_m – оператор из теоремы 1.1, соответствующий u_m,
- $\pi_1 = \pi/a_h$,
- $\pi_m = \pi_1^{\Delta^{h(m-1)}} = \pi/a_h^{\Delta^{h(m-1)}}$,
- $\pi_1^{(m)} = \pi_1 \cdot \pi_2 \ldots \pi_m = \pi^m/a_h^{1+\Delta^h+\ldots+\Delta^{h(m-1)}}$,
- $f^{(m)} = f_{m-1} \circ f_{m-2} \circ \ldots \circ f_1 \circ f$.

Из теоремы 1.1 легко вытекает следующая

Лемма 1.3. а) $f_{m-1}(x) \equiv \pi_m x \bmod \deg 2$, $f^{(m)}(x) \equiv \pi_1^{(m)} x \bmod \deg 2$;
б) $u_m \pi_1^{(m)} = \pi_1^{(m)} u$.

3°. Определим обобщенный символ Гильберта для формальной группы Хонды. Пусть $\widehat{\Omega}$ – пополнение алгебраического замыкания поля k, $F(\mathfrak{M}_{\widehat{\Omega}})$ – группа точек на максимальном идеале $\mathfrak{M}_{\widehat{\Omega}}$ кольца целых поля $\widehat{\Omega}$. Положим

$$W_F^n = \{\alpha \in F(\mathfrak{M}_{\widehat{\Omega}}) : [\pi^n]_F(\alpha) = 0\} = \{\alpha \in F(\mathfrak{M}) : f^{(n)}(\alpha) = 0\}. \quad (7)$$

Пусть

- K – конечное расширение поля k', содержащее W_F^n,
- M – максимальный идеал кольца целых поля K,
- Π – простой элемент в K,
- e – индекс ветвления расширения K/k,
- $e_i = e/(q^h-1)q^{h(i-1)}$, $1 \leqslant i \leqslant n$,
- ν_0, ν – регулярные нормирования на k и K соответственно, $\nu = e\nu_0$,
- k_h – неразветвленное расширение k степени h,
- $\mathcal{O}_h$ – кольцо целых поля k_h,
- T – подполе инерции в расширении K/k,
- $\mathcal{O}_T$ – кольцо целых поля T,
- $\mathcal{R}_h$ и $\mathcal{R}$ – системы представителей Тейхмюллера в поле k_h и T соответственно,
- tr_h и tr – операторы следов в k_h/k и T/k соответственно,
- T_0 – подполе инерции в $K/\mathbb{Q}_p$, $T_0 \subset T$,
- Δ_0 – автоморфизм Фробениуса в $T_0/\mathbb{Q}_p$,

$$\Delta\Big|_{T_0} = \Delta_0^f, \quad \text{где} \quad q = p^f,$$

- $\psi_K : K^* \to \mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$ – отображение взаимности.

Классическое обобщение спаривания Гильберта на формальную группу F задается следующим образом

$$(\, , \,)_F : K^* \times F(M) \to W_F^n$$

$$(\alpha, \beta)_F = \psi_K(\alpha)(\widetilde{\beta}) \underset{F}{-} \widetilde{\beta},$$

где $\widetilde{\beta} \in \Omega : [\pi^n]_F(\widetilde{\beta}) = \beta$ [27]. Наряду с таким обобщением символа Гильберта нам потребуется другое обобщение, которое использует выделенный гомоморфизм $f^{(n)}$ [28, §2]:

$$\{ \, , \, \}_F : K^* \times F(M) \to W_F^n$$

$$\{\alpha, \beta\}_F = \psi_K(\alpha)(\overline{\beta}) \underset{F}{-} \overline{\beta},$$

где $\overline{\beta} \in \Omega : f^{(n)}(\overline{\beta}) = \beta$. Несложно проверяется

Предложение 1.4. а) *Норменное свойство:*

$$(\alpha, \beta)_F = 0 \Longleftrightarrow \alpha \quad \text{– норма в} \quad K(\widetilde{\beta})/K;$$

$$\{\alpha, \beta\}_F = 0 \Longleftrightarrow \alpha \quad \text{– норма в} \quad K(\overline{\beta})/K.$$

б) *Пусть $\mathcal{E}$ – гомоморфизм $G \to F$ двух формальных групп Хонды, $\mathcal{E}_n$ – соответствующий гомоморфизм $\mathcal{A}^n G \to \mathcal{A}^n F$, т.е. $\mathcal{E}_n \circ g^{(n)} = f^{(n)} \circ \mathcal{E}_n$, где g и f – выделенные гомоморфизмы групп G и F соответственно. Тогда*

$$\{\alpha, \mathcal{E}_n(\beta)\}_F = \mathcal{E}(\{\alpha, \beta\}_G).$$

в) $(\alpha, \beta)_F = \{\alpha, [\pi_1^{(n)}/\pi^n]_{F,F_n}(\beta)\}_F$.

4°. Функции Артина–Хассе на формальном модуле Хонды.

В работе [6] ряд Артина–Хассе $E(x) = \exp\left(x + \frac{x^p}{p} + \ldots\right)$ был обобщен до функции на аддитивном $\mathbb{Z}_p$-модуле рядов $\mathcal{O}_{T_0}[[x]]_0$ без свободного члена:

$$E(\varphi) = \exp\left(1 - \frac{\blacktriangle_0}{p}\right)^{-1}(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{O}_{T_0}[[x]]_0\,,$$

а также определена обратная функция l. Далее эти функции были обобщены на формальные группы Любина–Тэйта [11] и формальные группы Хонды (см. [17], а также [28, §5]). Напомним их определение.

Пусть $\mathcal{O}_T\left[[x]\right]_0$ – аддитивная группа формальных степенных рядов с коэффициентами из $\mathcal{O}_T$ без свободного члена со структурой $\mathcal{O}$-модуля. Пусть $\mathcal{H}_F$ – $\mathcal{O}$-модуль, совпадающий как множество с $\mathcal{O}_T\left[[x]\right]_0$, операции на котором задаются формальной группой F:

$$\varphi \underset{F}{+} \psi = F(\varphi, \psi); \quad a \cdot \varphi = [a]_F(\varphi), \quad a \in \mathcal{O}.$$

В классе изоморфных F формальных групп Хонды содержится каноническая группа F_a типа

$$u = \pi - a_1 \blacktriangle - \ldots - a_h \blacktriangle^h, \quad a_i, \ldots, a_{h-1} \in \mathfrak{M}', \quad a_h \in {\mathcal{O}'}^*$$

с логарифмом Артина–Хассе

$$\lambda_a = (u^{-1}\pi)(x) = x + \alpha_1 x^q + \alpha_2 x^{q^2} + \ldots, \quad \alpha_i \in k'.$$

Определим обобщенную функцию Артина-Хассе E_F и обратную к ней функцию l_F

$$E_F(\varphi) = \lambda^{-1} \circ (1 + \alpha_1 \blacktriangle + \alpha_2 \blacktriangle^2 + \ldots)(\varphi)$$
$$l_F(\psi) = \left(1 - \frac{a_1}{\pi} \blacktriangle - \ldots - \frac{a_h}{\pi} \blacktriangle^h\right)(\lambda \circ \psi),$$

где $\varphi, \psi \in \mathcal{O}_T\left[[x]\right]_0$.

Нам понадобятся также аналогичные функции Артина–Хассе для формальной группы $F_n = \mathcal{A}^n F$ с логарифмом λ_n (см. (6)). Пусть $u_n = \pi - b_1 \blacktriangle - \ldots - b_h \blacktriangle^h$ – канонический тип F_n (см. лемму 1.3). Возьмем каноническую формальную группу F_b типа u_n с логарифмом Артина–Хассе

$$\lambda_b = (u_n^{-1}\pi)(x) = x + \beta_1 x^q + \beta_2 x^{q^2} + \ldots, \quad \beta_i \in k'.$$

Группы F_n и F_b изоморфны, так как имеют одинаковый тип u_n. Определим, далее, функции

$$E_{F_n}(\varphi) = \lambda_n^{-1} \circ (u_n^{-1}\pi)(\varphi) = \lambda_n^{-1} \circ (1 + \beta_1 \blacktriangle + \beta_2 \blacktriangle^2 + \ldots)(\varphi)$$

$$l_{F_n}(\psi) = (u_n \pi^{-1})(\lambda_n \circ \psi) = \left(1 - \frac{b_1}{\pi} \blacktriangle - \ldots - \frac{b_h}{\pi} \blacktriangle^h\right)(\lambda_n \circ \psi).$$

Предложение 1.5. *Функции E_F и l_F осуществляют взаимно обратные изоморфизмы между $\mathcal{O}_T[[x]]_0$ и $\mathcal{H}_F$, а функции E_{F_n} и l_{F_n} – между $\mathcal{O}_T[[x]]_0$ и $\mathcal{H}_{F_n}$. (См. [17], введение, п. 4°, а также [28], предложение 4.)*

5°. Базис Шафаревича на формальном модуле Хонды.

Определим сперва примарные элементы. Напомним, что по определению, элемент $\omega \in F(M)$ называется *примарным*, если расширение $K(\widetilde{\omega})/K$, где $[\pi^n]_F(\widetilde{\omega}) = \omega$, неразветвлено. Такие элементы в мультипликативном случае были построены в работе [6]. Нам потребуются примарные элементы модуля $F_n(M)$.

Модуль W_F^n (см. (7)) как $\mathcal{O}$-модуль имеет h образующих (см. [29] или [28], предложение 1). Зафиксируем эти образующие $\eta_1, \dots, \eta_h$ и пусть η – одна из них. Известно, что $\nu(\eta) = e_n$ (см. [28], лемма 3). Пусть, далее, $z(x) \in \mathcal{O}_T[[x]]$ – ряд, соответствующий некоторому разложению η в ряд по степеням $\sqcap$, первый ненулевой коэффициент которого обратим. Таким образом, $z(\sqcap) = \eta$ и первый ненулевой коэффициент z встречается при степени x^{e_n}.

Определим теперь ряды

$$s_m = f^{(m)} \circ z, \quad 1 \leqslant m \leqslant n.$$

Зафиксируем элемент $b \in \mathcal{O}_T$ и обозначим

$$\widehat{b} = b + b^{\Delta} + \ldots + b^{\Delta^{h-1}}.$$

Предложение 1.6. *Элемент*

$$\omega(b) = E_{F_n}(\widehat{b}\lambda_n \circ s_n)\big|_{x=\sqcap}$$

корректно определен, принадлежит $F_n(M)$ и является примарным элементом, при этом

$$\{\sqcap, \omega(b)\}_F = [\operatorname{tr} b]_F(z)$$

(см. [29], предложение 2.3 и [28], предложение 5).

Построим теперь остальные элементы базиса Шафаревича. Пусть

$$\begin{aligned} &g_0(x) = \pi_{n-1}x + x^{q^h} \\ &g_{\rho,a}(x) = \pi_{n-1}x + \pi_{n-1}ax^{p^\rho} + x^{q^h}, \quad a \in \mathcal{O}_T, \quad 1 \leqslant \rho < fh \end{aligned} \tag{8}$$

– многочлены Эньяра (см. [12], §8), $q = p^f$.

Пусть u_{n-1} – тип формальной группы F_{n-1} из цепочки (6). Тогда по теореме 1.2 найдутся единственные формальные группы Хонды G_0 и $G_{\rho,a}$ типа u_{n-1}, у которых $g_0(x)$ и $g_{\rho,a}(x)$ будут выделенными изогениями соответственно. Обозначим

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_n^0 : \mathcal{A}G_0 \to F_n \\ &\mathcal{E}_n^{\rho,a} : \mathcal{A}G_{\rho,a} \to F_n \end{aligned} \tag{9}$$

соответствующие изоморфизмы формальных групп.

Теорема 1.7. *Наборы элементов*

$$\{\omega_i(b);\, b \in \mathcal{O}_T,\, 1 \leqslant i \leqslant h\},$$

$$\{\mathcal{E}_n^0(\theta\sqcap^i);\, \theta \in \mathcal{R},\, 1 \leqslant i < q^h e_1,\, (i,p) = 1\},$$

$$\{\mathcal{E}_n^{\rho,a}(\theta\sqcap^i);\, \theta \in \mathcal{R},\, a \in \mathcal{O}_T^*,\, 1 \leqslant \rho < fh,\, 1 \leqslant i < q^h e_1,\, (i,p) = 1\}$$

составляют систему образующих $\mathcal{O}$-модуля $F_n(\mathfrak{M})$. При этом

$$\{\sqcap, \mathcal{E}_n^0(\theta\sqcap^i)\}_F = \{\sqcap, \mathcal{E}_n^{\rho,a}(\theta\sqcap^i)\}_F = 0,$$

$$\{\sqcap, \omega_i(b)\}_F = [\operatorname{tr} b]_F(z_i)$$

(см. [29], *предложение* 3.3, *а также* [28], *теорема* 3*).*

6°. Вспомогательные результаты о логарифмах формальных групп Хонды.

Пусть G – формальная группа Хонды с логарифмом $\lambda_0(x) = \sum_{i\geqslant 1} c_i x^i$ канонического типа $u = \pi - a_1\blacktriangle - \ldots - a_h\blacktriangle^h$ и $\widetilde{u} = \pi - a_h\blacktriangle^h - a_{h+1}\blacktriangle^{h+1} - \ldots$ – эквивалентный тип (см. (3) и (4)).

Лемма 1.8. а) *Для логарифма $\lambda_0(x)$ выполнены оценки: $\nu_0(c_i) \geqslant -k$, если $i = q^{hk} r$, $q^h \nmid r$, и $\nu_0(c_i) = -k$, если $i = q^{hk}$.*

б) *Пусть λ_1 – логарифм формальной группы $\mathcal{A}G$ типа u_1 (см.* (5)*). Тогда*

$$u_1\lambda_1 = (\widetilde{u}\lambda_0)^{\Delta^h}.$$

Доказательство. Относительно а) см., например, [28], лемма 2.

б) Обозначив $B = 1 + a_{h+1}/a_h\,\blacktriangle + a_{h+2}/a_h\,\blacktriangle^2 + \ldots$, получим

$$\lambda_1 = B\lambda_0^{\Delta^h}, \quad \widetilde{u} = \pi - a_h B\blacktriangle^h = \pi - (\pi^{-1}(u + a_h\blacktriangle^h))^{-1} a_h\blacktriangle^h.$$

Выразим u из последнего равенства $a_h B = (\pi^{-1}(u+a_h \blacktriangle^h))^{-1} a_h$, откуда $u = \pi a_h B^{-1} a_h^{-1} - a_h \blacktriangle^h$. Поскольку $u_1 = a_h^{-1} u a_h$ (см. теорему 1.1), то можно записать $u_1 B = a_h^{-1} u a_h B = \pi - \blacktriangle^h a_h B = \widetilde{u}^{\Delta^h}$, значит, $u_1 \lambda_1 = u_1 B \lambda_0^{\Delta^h} = \widetilde{u}^{\Delta^h} \lambda_0^{\Delta^h}$. $\square$

Докажем теперь одно важное свойство логарифмов формальных групп G_0 и $G_{\rho,a}$ (см. (8)) типа u_{n-1}. Пусть λ_0 и μ – логарифмы G_0 и $G_{\rho,a}$ соответственно, а λ_1 и μ_1 – логарифмы $\mathcal{A}G_0$ и $\mathcal{A}G_{\rho,a}$. Пусть

$$\lambda_1 = x + c_2' x^2 + \dots, \quad c_i' \in k',$$

$$\pi^{-1} u_n \lambda_1 = x + d_2' x^2 + d_3' x^3 + \dots, \quad d_i' \in \mathcal{O}'.$$

Предложение 1.9. *Для любых натуральных* $m = q^{hk} m_0$, $q^h \nmid m_0$, *выполнены оценки*

$$\nu_0(c_m') \geqslant -(k - \sigma(m_0)), \ \nu_0(d_m') \geqslant k + \sigma(m_0), \quad \textit{где}$$

$$\sigma(m_0) = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad p \nmid m_0 \\ 1, & \textit{если} \quad p \mid m_0 \end{cases}.$$

Доказательство. 1. Заметим, что $\lambda_1 = B_{n-1} \lambda_0^{\Delta^h}$ (см. теорему 1.1) и $u_n \lambda_1 = (\widetilde{u}_{n-1} \lambda_0)^{\Delta^h}$ по лемме 1.8.б). Поэтому достаточно доказать следующие оценки:

$$\nu_0(c_m) \geqslant -(k - \sigma(m_0)), \quad \nu_0(d_m) \geqslant k + \sigma(m_0),$$

где

$$\lambda_0 = x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots, \ c_i \in k',$$

$$\pi^{-1} \widetilde{u}_{n-1} \lambda_0 = x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + \dots, \quad d_i \in \mathcal{O}'$$

(мы используем, кроме того, обратимость оператора B_{n-1}).

2. Пусть $\widetilde{u}_{n-1} = \pi - \widetilde{b}_h \blacktriangle^h - \widetilde{b}_{h+1} \blacktriangle^{h+1} - \dots$, $\widetilde{b}_h \in \mathcal{O}'^*$, и пусть $\pi_{n-1} = \pi / \widetilde{b}_h$. По определению, $g_0 = [\pi_{n-1}]_{G_0, \mathcal{A}G_0}$, поэтому $\pi_{n-1}^{-1} \lambda_1(\pi_{n-1} x + x^{q^h}) = \lambda_0$. Запишем это равенство как равенство коэффициентов при x^m:

$$\pi_{n-1}^{m-1} c_m' + \sum_{\substack{q^h i - j(q^h - 1) = m \\ m/q^h \leqslant i < m}} c_i' \binom{i}{j} \pi_{n-1}^{j-1} = c_m \tag{10}$$

Далее,

$$\pi\lambda_0 - \widetilde{u}_{n-1}\lambda_0 = \widetilde{b}_h\lambda_0^{\Delta^h}(x^{q^h}) + \widetilde{b}_{h+1}\lambda_0^{\Delta^{h+1}}(x^{q^{h+1}}) + \ldots = \widetilde{b}_h\lambda_1(x^{q^h}),$$

поэтому

$$\pi^{-1}\widetilde{u}_{n-1}\lambda_0 = \lambda_0 - \pi_{n-1}^{-1}\lambda_1(x^{q^h}) = \pi_{n-1}^{-1}(\lambda_1(\pi_{n-1}x + x^{q^h}) - \lambda_1(x^{q^h})),$$

что дает для коэффициентов:

$$d_m = \sum_{\substack{q^h i - j(q^h-1)=m \\ m/q^h < i \leqslant m}} c_i' \binom{i}{j} \pi_{n-1}^{j-1}. \tag{11}$$

И, наконец, распишем равенство $\lambda_1 = B_{n-1}\lambda_0^{\Delta^h}$:

$$c_m' = c_m^{\Delta^h} + \frac{\widetilde{b}_{h+1}}{\widetilde{b}_h} c_{m/q}^{\Delta^{h+1}} + \ldots. \tag{12}$$

3. Теперь докажем индукцией по m следующие оценки:

$$\nu_0(d_m) \geqslant k + \sigma(m_0),$$
$$\nu_0(c_m) \geqslant -(k - \sigma(m_0)),$$
$$\nu_0(c_m') \geqslant -(k - \sigma(m_0)).$$

Для этого достаточно доказать, что если для любого $i < m$ эти оценки выполнены, то

а) $\nu_0\left(c_i'\binom{i}{j}\pi_{n-1}^{j-1}\right) \geqslant k + \sigma(m_0)$, для всех i таких, что $m/q^h < i < m$, $q^h i - j(q^h - 1) = m$;

б) $\nu_0\left(c_i'\binom{i}{j}\pi_{n-1}^{j-1}\right) \geqslant -(k - \sigma(m_0))$ для $i = cm/q^h$, $j = 0$.

Действительно, если а) и б) доказаны, то из (10) следует, что $\nu_0(\pi_{n-1}^{m-1}c_m' - c_m) \geqslant -(k - \sigma(m_0))$; из (12) следует, что $\nu_0(c_m' - c_m^{\Delta^h}) \geqslant -(k - \sigma(m_0))$, что в итоге дает требуемые оценки на $\nu_0(c_m')$ и $\nu_0(c_m)$.

Чтобы из а) и (11) получить требуемую оценку на $\nu_0(d_m)$, надо доказать, что $\nu_0\left(c_i'\binom{i}{j}\pi_{n-1}^{j-1}\right) \geqslant k + \sigma(m_0)$ для $i = m$, $j = m$, т.е., что $\nu_0(c_m') \geqslant k + \sigma(m_0) - (m-1)$. Но уже доказано, что $\nu_0(c_m') \geqslant -(k - \sigma(m_0))$ и при этом $k \leqslant q^k - k - 1 \leqslant -k + (m-1)$.

4. Приступим к доказательству а) и б). Доказательство б) тривиально: $i = q^{h(k-1)}m_0$, поэтому по лемме 1.8а) $\nu_0(c_i') \geqslant -(k-1-\sigma(m_0))$. Для доказательства а) рассмотрим отдельно следующие случаи. Предположим, что $i = q^{hk'}m_0'$, $q^h \nmid m_0'$.

I) $j < p$. Поскольку $j \equiv m \bmod q^h$, заключаем, что $k = \sigma(m_0) = 0$. С другой стороны, $c_i'\binom{i}{j} = ic_i'\binom{i-1}{j-1}j^{-1}$ – целое, и поскольку $j \geqslant 1$, оценка доказана.

II) $j \geqslant p$. Рассмотрим дробь $\binom{i}{j} = \frac{i(i-1)\ldots(i-j+1)}{j!}$. При этом $i > q^{h(k-1)}m_0 > i-j$, значит, число $q^{h(k-1)}m_0$ наряду с числом $q^{hk'}m_0'$ присутствует в числителе этой дроби. Поэтому его p-адическое нормирование есть, по крайней мере, $h(k-1)+\sigma(m_0)+hk'+\sigma(m_0') \geqslant k-1+\sigma(m_0)+k'$. У знаменателя дроби p-адическое нормирование равно $[j/p]+[j/p^2]+\ldots \leqslant \frac{j-1}{p-1}$. Значит, верна оценка

$$\nu_0\left(\binom{i}{j}\right) \geqslant k-1+\sigma(m_0)+k'-\frac{j-1}{p-1}.$$

Кроме того, $\nu_0(c_i') \geqslant -k'$. Суммируя все оценки нормирований, получаем, что надо доказать неравенство $j\left(1-\frac{1}{1-p}\right) \geqslant 2-\frac{1}{1-p}$. При $j \geqslant p \geqslant 3$ оно, очевидно, выполняется.

Замечание 4. Аналогичные оценки могут быть получены и для коэффициентов μ_1.

§2. Ряды Лорана

1°. Для рациональных чисел τ и μ, $0 < \tau < \mu$, определим

$$\mathcal{L}_{\tau,\mu} = \Big\{ \sum_{i\in\mathbb{Z}} d_i x^i,\ d_i \in T : \nu(d_i) \geqslant -\tau i \quad \text{при} \quad i \geqslant 0,$$
$$\nu(d_i) \geqslant -\mu i \quad \text{при} \quad i < 0, \Big\}$$

[25]. Непосредственно проверяется, что $\mathcal{L}_{\tau,\mu}$ является алгеброй формальных рядов Лорана и что $\mathcal{L}_{\tau_1,\mu} \subset \mathcal{L}_{\tau_2,\mu}$ для $\tau_1 < \tau_2 < \mu$. Через $\mathcal{L}_\mu$ обозначим p-адическое замыкание алгебры

$$\bigcup_{\tau<\mu} \mathcal{L}_{\tau,\mu}.$$

Прежде чем изучать строение алгебры $\mathcal{L}_\mu$, сделаем несколько очевидных наблюдений. Если $\Lambda \in \mathcal{L}_\mu$, то $x\frac{d\Lambda}{dx} \in \mathcal{L}_\mu$. Если $\Lambda = \sum d_i x^i \in \mathcal{L}_\mu$, то $\blacktriangle\Lambda = \sum d_i^\Delta x^{qi}$ не обязан принадлежать $\mathcal{L}_\mu$, однако это всегда так, если Λ является рядом Лорана из $\mathcal{L}_\mu^+$ – подалгебры $\mathcal{L}_\mu$, состоящей из рядов с нулевыми коэффициентами при отрицательных степенях.

Лемма 2.1. *Пусть* $\Lambda \in \mathcal{L}_\mu$, $\varphi = \sum_{i\geqslant N} l_i x^i \in \mathcal{O}\,[[x]]_0$ *и* l_N*-обратим. Тогда* $\Lambda \circ \varphi \in \mathcal{L}_{\mu/N}$.

Доказательство. Пусть $\Lambda = \sum_{j\in\mathbb{Z}} D_j x^j \in \mathcal{L}_{\tau,\mu}$. Ясно, что

$$\Lambda \circ \varphi = \sum_{j\geqslant 0} D_j x^{jN}(l_N + l_{N+1}x + \dots)^j +$$

$$+\sum_{j>0} D_{-j} l_N^{-j} x^{-Nj}\left(1 + \sum_{\substack{i_1,\dots,i_d\geqslant 1\\ d\geqslant 1}} (-1)^d l_N^{-d} l_{N+i_1}\dots l_{N+i_d} x^{i_1+\dots+i_d}\right)^j.$$

Обозначив $\Lambda\circ\varphi = \sum_{i\in\mathbb{Z}} d_i x^i$, имеем следующие оценки для нормирований коэффициентов:

Для $i \geqslant 0$

$$\nu(d_i) \geqslant \min_{-\infty<j\leqslant i/N} \nu(D_j) \geqslant \min_{0<j\leqslant i/N} -\tau j = -\tau i/N,$$

$$\nu(d_{-i}) \geqslant \min_{-j\leqslant -i/N} \nu(D_{-j}) \geqslant \min_{j\geqslant i/N} \mu j = \mu i/N.$$

Таким образом, $\Lambda\circ\varphi \in \mathcal{L}_{\tau/N,\mu/N}$. $\square$

2°. Определим ряды V, $U \in \mathcal{O}_T\,[[x]]$:

$$V = f^{(n)}/f^{(n-1)}; \quad U = s_n/s_{n-1} = V \circ z. \tag{13}$$

Кроме того, существенную роль в дальнейшем будут играть степенные ряды

$$W^{(m)} = \lambda_m \circ s_m = \pi_1^{(m)}\lambda\circ z,$$

и в особенности ряд

$$W := W^{(n)} \tag{14}$$

(относительно $f^{(m)}$, λ_m, s_m, z см. введение п. 2° и п. 5°). Если $z_1\dots,z_h$ – разложения в ряды образующих $\eta_1,\dots,\eta_h$ модуля

$W_F^n = \operatorname{Ker}[\pi^n]_F$ (см. (7)), то под W_i будем понимать ряд W, построенный с помощью z_i, т.е.

$$W_i = \pi_1^{(n)} \lambda \circ z_i.$$

Лемма 2.2. *1)* $W^{(m)} \equiv B_{m-1} \blacktriangle^h W^{(m-1)} \mod \pi^m$*;*

2) $(u_n \pi^{-1}) W_i \equiv 0 \mod \pi^n$, $1 \leqslant i \leqslant h$*.*

Доказательство. 1) Напомним, что каноническому типу u_{m-1} формальной группы F_m из (7) соответствует эквивалентный ему тип

$$\widetilde{u}_{m-1} = \pi - \pi/\pi_m B_m \blacktriangle^h$$

(см. (4)). Поэтому

$$\pi_1^{(m)} - B_{m-1} \blacktriangle^h \pi_1^{(m-1)} = (\pi_m - B_{m-1} \blacktriangle^h) \pi_1^{(m-1)} =$$

$$= \pi_m/\pi \cdot \widetilde{u}_{m-1} \pi_1^{(m-1)} = \pi_m/\pi \cdot \pi_1^{(m-1)} \widetilde{u}.$$

Осталось заметить, что

$$W^{(m)} - B_{m-1} \blacktriangle^h W^{(m-1)} = (\pi_1^{(m)} - B_{m-1} \blacktriangle^h \pi_1^{(m-1)}) \lambda \circ z$$

и

$$\widetilde{u}(\lambda \circ z) \equiv (\widetilde{u}\lambda) \circ z \equiv 0 \mod \pi.$$

2) Поскольку u_n эквивалентен типу $\widetilde{u}_n = \pi - \pi/\pi_{n+1} B_n \blacktriangle^h$, то достаточно доказать, что $(\pi_{n+1} - B_n \blacktriangle^h) W^{(n)} \equiv 0 \mod \pi^{n+1}$. Но $\pi_{n+1} W^{(n)} = \pi_{n+1} \pi_1^{(n)} \lambda \circ z = \pi_1^{(n+1)} \lambda \circ z = W^{(n+1)}$, и утверждение следует из предыдущего пункта. $\square$

Лемма 2.3. *Пусть* $\pi_1^{(n)} \lambda / V = \sum_{i \geqslant 1} D_i x^i$ *в кольце* $k'[[x]]$*. Тогда* $\nu(D_i) \geqslant (n-k)e$ *для любого* i*, такого что* $q^{h(k-1)} < i < q^{hk}$ *и* $\nu(D_{q^{hk}}) = (n-k-1)e$*.*

Доказательство. Имеем

$$\sum_{i \geqslant 1} \pi_1^{(n)} c_i x^i = \sum_{j \geqslant 0} V_j x^j \sum_{i \geqslant 1} D_i x^i,$$

где $V = \sum_{j \geqslant 0} V_j x^j$, и $\lambda(x) = \sum_{i \geqslant 1} c_i x^i$. Принимая во внимание тот факт, что $V_0 = \pi_n$ и $V \equiv x^{q^{h(n-1)}(q^h - 1)} \mod \pi$, докажем требуемую оценку индукцией по i. База индукции очевидна: $D_1 = \pi_1^{(n-1)}$. Пусть оценка выполняется для всех $i < N$, причем $N < q^{hk}$. Тогда

$$D_N = \pi_1^{(n-1)} c_N - D_{N-1}\frac{V_1}{\pi_n} - \ldots - D_1\frac{V_{N-1}}{\pi_n}.$$

По лемме 1.8 а), имеем: $\nu(\pi_1^{n-1)} c_N) \geqslant (n-1)e-(k-1)e = (n-k)e$. Кроме того, если $N > q^{h(n-1)}(q^h-1)$, то $k \geqslant n$, и

$$N - q^{h(n-1)}(q^h-1) < q^{hk} - q^{h(n-1)}(q^h-1) \leqslant q^{h(k-1)},$$

откуда

$$\nu\left(\frac{1}{\pi_n} D_{N-q^{h(n-1)}(q^h-1)}\right) \geqslant (n-k+1)e - e = (n-k)e.$$

Если же $N = q^{hk}$, то $\nu(\pi_1^{(n-1)}\ c_N) = (n-k-1)e$, а нормирования остальных слагаемых, также как и раньше, не превосходят $(n-k)e$. $\square$

Лемма 2.4. *Пусть для коэффициентов ряда* $\xi = \sum_{i\geqslant 1} D_i x^i$ *выполняются оценки* $\nu(D_i) \geqslant (n+1-k)e$ *для любого* $i < q^{hk}$, *и* $\nu(D_{q^{hk}}) = (n-k)e$. *Тогда* $1/\xi \in \mathcal{L}_\mu$ *при* $e_n/q^{2h} < \mu \leqslant e_n(q^h-1)/q^{2h}$.

Доказательство. Имеем

$$\pi\xi = \sum_{i\geqslant 1} \pi D_i x^i = \delta x^{q^{h(n+1)}}\left(1 + \sum_{i\neq q^{h(n+1)}} \pi\delta^{-1} D_i x^{i-q^{h(n+1)}}\right),$$

где $\delta = \pi D_{q^{h(n+1)}}$ – обратимый элемент. Тогда

$$1/\xi = \pi/\pi\xi = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_d\neq q^{h(n+1)} \\ i_1,\ldots i_d\geqslant 1}} \pi^{d+1}\delta^{-(d+1)} D_{i_1}\ldots D_{i_d} x^{i_1+\ldots+i_d-(d+1)q^{h(n+1)}}$$

где $d \geqslant 1$. Нужно выяснить, для каких μ выполняется неравенство

$$e(d+1) + \nu(D_{i_1}\ldots D_{i_d}) \geqslant -\mu(i_1+\ldots+i_d-(d+1)q^{h(n+1)}).$$

Выбрав k_s, $1 \leqslant s \leqslant d$ так, что $q^{hk_s} \leqslant i_s < q^{h(k_s+1)}$, приходим к более сильному неравенству

$$e(d+1+nd-k_1-\ldots-k_d) \geqslant -\mu(q^{hk_1}+\ldots+q^{hk_d}-(d+1)q^{h(n+1)}).$$

Положим $l_s := k_s - n - 1$, $1 \leqslant s \leqslant d$. Тогда неравенство преобразуется в следующее:

$$l_1 + \ldots + l_d - 1 \leqslant \frac{\mu}{e} q^{h(n+1)}(q^{hl_1} + \ldots + q^{hl_d} - (d+1)).$$

Понятно, что одно из необходимых условий выполнения этого неравенства заключается в том, что $\frac{\mu}{e} q^{h(n+1)} \leqslant 1$. Покажем, что если

$$q^{hl_1} + \ldots + q^{hl_d} - (d+1) \leqslant 0,$$

то оно будет также и достаточным условием:

$$\frac{\mu}{e} q^{h(n+1)}(q^{hl_1} + \ldots + q^{hl_d} - (d+1)) \geqslant q^{hl_1} + \ldots + q^{hl_d} - (d+1) =$$

$$= (q^{hl_1} - 1) + \ldots + (q^{hl_d} - 1) - 1 \geqslant l_1 + \ldots + l_d - 1.$$

Рассмотрим теперь случай $q^{hl_1} + \ldots + q^{hl_d} - (d+1) > 0$. Здесь необходимым и достаточным условием выполнения исследуемого неравенства будет следующая оценка: $\frac{\mu}{e} q^{h(n+1)} > \frac{1}{q^h - 1}$. Действительно,

$$\frac{\mu}{e} q^{h(n+1)}(q^{hl_1} + \ldots + q^{hl_d} - (d+1)) >$$

$$> \frac{1}{q^h - 1}(q^{hl_1} + \ldots + q^{hl_d} - (d+1)) = \frac{q^{hl_1} - 1}{q^h - 1} + \ldots + \frac{q^{hl_d} - 1}{q^h - 1} - \frac{1}{q^h - 1} \geqslant$$

$$\geqslant l_1 + \ldots + l_d - 1. \quad \square$$

Следствие. *Если ряд ξ удовлетворяет условиям леммы* 2.4, *то* $1/\xi \in \mathcal{L}_\mu$, *поэтому по лемме* 2.1 $(1/\blacktriangle^m \xi) = \blacktriangle^m(1/\xi) \in \mathcal{L}_{\mu/q^m}$.

Лемма 2.5. *Пусть $\rho \in \mathcal{O}_T[[x]]$ такой ряд, что $\rho(\sqcap) = 0$. Тогда существует ряд $g \in \mathcal{O}_T[[x]]$ такой, что $\rho = U \cdot g$, где U определен в* (13) *(см.* [6], *лемма* 6*).*

Доказательство. Все коэффициенты ряда U до степени e делятся на π, коэффициент при x^e обратим, а свободный член ряда U не делится на π^2. Поэтому, согласно подготовительной лемме Вейерштрасса существует ряд $\varepsilon \in \mathcal{O}_T[[x]]$ с обратимым свободным членом такой, что $U_* = U\varepsilon$ – многочлен Эйзенштейна над $\mathcal{O}_T$ степени e. Не нарушая общности можно считать, что наибольший общий делитель всех коэффициентов ряда ρ равен 1. Тогда из подготовительной леммы Вейерштрасса вытекает существование $\varepsilon_1 \in \mathcal{O}_T[[x]]$ с обратимым свободным членом, для которого

$\rho_* = \rho\varepsilon_1$ – многочлен над $\mathcal{O}_T$ с корнем Π. Значит, $\rho_* = U_*\psi$ для некоторого многочлена $\psi \in \mathcal{O}_T[x]$. Теперь можно взять $g = \psi\varepsilon/\varepsilon_1$. $\square$

3°. Предложение 2.6.

1. *$U/\pi W$, $1/W \in \mathcal{L}_\mu$, если $\frac{1}{q^{2h}} < \mu \leqslant \frac{q^h-1}{q^{2h}}$.*

2. *Пусть $\rho \in \mathcal{O}_T[[x]]$ такой ряд, что $\rho(\Pi) = 0$. Тогда $\lambda_n \circ \rho/W \in \mathcal{L}_\mu$, если $\frac{1}{q^{2h}-1} < \mu \leqslant \frac{q^h-1}{q^{2h}}$.*

Доказательство. 1) Согласно лемме 2.3, ряд $\pi^{n+1}\lambda/V$ удовлетворяет условию леммы 2.4, поэтому обратный к нему ряд $V/\pi^{n+1}\lambda$ принадлежит $\mathcal{L}_\mu$, если $e_n/q^{2h} < \mu \leqslant \frac{q^h-1}{q^{2h}}e_n$. Далее, по определению U и W (см. (13), (14)) имеем

$$\frac{U}{\pi W} = \frac{V \circ \eta}{\pi \cdot \pi^{(n)}\lambda \circ \eta} = \frac{\pi^n}{\pi^{(n)}}\left(\frac{V}{\pi^{n+1}\lambda}\right)(\eta).$$

Чтобы получить $U/\pi W \in \mathcal{L}_\mu$ осталось применить лемму 2.1.

Ряд $1/W$ принадлежит $\mathcal{L}_\mu$, так как $W = \pi_1^{(n)}\lambda \circ \eta$ и коэффициенты ряда $\pi_1^{(n)}\lambda$, согласно лемме 1.8 а) удовлетворяют лемме 2.4. Далее применяем лемму 2.1.

2) По лемме 2.5 такой ряд ρ можно представить в виде $\rho = Ug$ для некоторого $g \in \mathcal{O}_T[[x]]$. Тогда с учетом пункта 1) и оценки нормирования коэффициентов логарифма достаточно проверить, что

$$\frac{1}{\pi^{k-1}}U^{q^{hk-1}} \in \mathcal{L}_\mu \quad \text{для} \quad k \geqslant 2,\ \mu > \frac{1}{q^{2h}-1}.$$

Поскольку первый обратимый коэффициент встречается в ряде U при x^e, проверим, что

$$\pi^{s-k+1}x^{e(q^{hk}-1-s)} \in \mathcal{L}_\mu, \quad \text{для} \quad s \geqslant 0,$$

то есть, что $e(s-k+1) > -\mu e(q^{hk}-1-s)$, если $\mu > \frac{1}{q^{2h}-1}$. Это очевидным образом сводится к проверке неравенства $(q^{hk}-s-1) \geqslant (q^{2h}-1)(k-s-1)$, которая не представляет труда. $\square$

Следствие 1. *Пусть $\varphi_i = W_i/W_1$, $1 \leqslant i \leqslant h$. Тогда $\varphi_i \in \mathcal{L}_\mu$, если $\frac{1}{q^{2h}-1} < \mu \leqslant \frac{q^h-1}{q^{2h}}$.*

Лемма 2.1 дает

Следствие 2. а) *Пусть* $m \geqslant 1$, *тогда* $1/\blacktriangle^m W \in \mathcal{L}_{\mu_m}$, *где* $1/q^{2h+m} < \mu_m \leqslant q^h - 1/q^{2h+m}$,

б) $\blacktriangle^m \varphi_i \in \mathcal{L}_{\mu_m}$, *где* $1.q^m(q^{2h}-1) < \mu_m \leqslant q^h - 1.q^m \cdot q^{2h}$.

4°. Пусть $\eta_1, \dots, \eta_h$ – $\mathcal{O}$-образующие модуля W_F^n. В работе [17], лемма 1.2 (см. также [28], лемма 4) было доказано следующее утверждение

Лемма 2.7. *Существуют элементы* $\theta_{ij} \in \mathcal{R}_h$, $1 \leqslant i, j \leqslant h$, *такие, что*

$$\eta_i \equiv \theta_{ij}\eta_j \bmod \Pi^{2e_n} \quad \text{для любых} \quad i, j.$$

При этом для каждого j *элементы* $\theta_{1j}, \dots, \theta_{hj}$ *образуют базис* $\mathcal{O}$-*модуля* $\mathcal{O}_h$. *Кроме того,* $k_h \subset T$.

Лемма 2.8. *Существуют такие* $\widetilde{\varphi}_i \in \mathcal{L}_\mu^+$, *что*

$$\varphi_i - \widetilde{\varphi}_i \in \pi^n \mathcal{L}_\mu \quad \text{для} \quad \frac{1}{q^{2h}-1} < \mu \leqslant \frac{q^h-1}{q^{2h}}.$$

Кроме того, ряд z_i *(см. §1, п. 5°) можно выбрать так, что* $\widetilde{\varphi}_i \equiv \theta_{i1} \bmod \deg 1$, *где* $\theta_{i1} \in \mathcal{R}_h$ *взяты из леммы* 2.7.

Доказательство.

$$\varphi_i = \frac{W_i}{W_1} = \frac{B_n\blacktriangle^h W_i}{B_n\blacktriangle^h W_1}\left(1 + \frac{B_n\blacktriangle^h W_1 - \pi_{n+1}W_1}{\pi_{n+1}W_1}\right) + \frac{\pi_{n+1}W_i - B_n\blacktriangle^h W_i}{\pi_{n+1}W_1}.$$

По определению $W_1^{(m)}$ имеем

$$\pi_{n+1}W_1 = \pi_{n+1}\pi^{(n)}\lambda \circ \eta_1 = \pi^{(n+1)}\lambda \circ \eta_1 = W_1^{(n+1)}.$$

Учитывая теперь сравнение леммы 2.2, 1) и определение π_{n+1}, получаем

$$\frac{B_n\blacktriangle^h W_1 - \pi_{n+1}W_1}{\pi_{n+1}} = \frac{B_n\blacktriangle^h W_1 - W_1^{(n+1)}}{\pi_{n+1}} \equiv 0 \bmod \pi^n.$$

По предложению 2.6, 1) ряд $1/W_1 \in \mathcal{L}_\mu$, значит,

$$\frac{B_n\blacktriangle^h W_1 - \pi_{n+1}W_1}{\pi_{n+1}W_1}, \quad \frac{\pi_{n+1}W_i - B_n\blacktriangle^h W_i}{\pi_{n+1}W_1} \in \pi^n\mathcal{L}_\mu.$$

Далее, по следствию 1 предложения 2.6, $\varphi_i \in \mathcal{L}_\mu$. Кроме того,

$$\frac{B_n\blacktriangle^h W_i}{B_n\blacktriangle^h W_1} = \left(\varphi_i - \frac{\pi_{n+1}W_i - B_n\blacktriangle^h W_i}{\pi_{n+1}W_1}\right)\left(1 + \frac{B_n\blacktriangle^h W_1 - \pi_{n+1}W_1}{\pi_{n+1}W_1}\right)^{-1},$$

откуда следует, что

$$\varphi_i - \frac{B_n \blacktriangle^h W_i}{B_n \blacktriangle^h W_1} \in \pi^n \mathcal{L}_\mu.$$

Аналогичным образом заключаем, что

$$\frac{B_n \blacktriangle^h W_i}{B_n \blacktriangle^h W_1} - \frac{B_{n+1} \blacktriangle^h (B_n \blacktriangle^h W_i)}{B_{n+1} \blacktriangle^h (B_n \blacktriangle^h W_1)} \in \pi^n \mathcal{L}_\mu.$$

В результате такой процедуры можно получить, что

$$\varphi_i - \frac{B_{2n+1} B_{2n}^{\Delta^h} \dots B_n^{\Delta^{hn}} \blacktriangle^{h(n+1)} W_i}{B_{2n+1} B_{2n}^{\Delta^h} \dots B_n^{\Delta^{hn}} \blacktriangle^{h(n+1)} W_1} = \varphi_i - \frac{D \blacktriangle^{h(n+1)} W_i}{D \blacktriangle^{h(n+1)} W_1} \in \pi^n \mathcal{L}_\mu.$$

Теперь заметим, что

$$\frac{D \blacktriangle^{h(n+1)} W_i}{D \blacktriangle^{h(n+1)} W_1} = \frac{D' \blacktriangle^{h(n+1)} (\lambda \circ z_i)}{D' \blacktriangle^{h(n+1)} (\lambda \circ z_1)} =$$

$$= \frac{\blacktriangle^{h(n+1)} z_i}{\blacktriangle^{h(n+1)} z_1} \cdot \frac{1 + \sum_{(l,j) \neq (0,0)} \gamma_{l,j} \blacktriangle^{h(n+1)+l} z_i^j / \blacktriangle^{h(n+1)} z_i}{1 + \sum_{(l,j) \neq (0,0)} \gamma_{l,j} \blacktriangle^{h(n+1)+l} z_1^j / \blacktriangle^{h(n+1)} z_1},$$

где $\nu(\gamma_{l,j}) \geqslant -ke$, $j = q^{hk} r$, $q^h \nmid r$. Несложно проверить неравенство

$$\mu(j e_n q^{h(n+1)+l} - e_n q^{h(n+1)}) \geqslant ke,$$

из которого следует, см. определение $\mathcal{L}_\mu^+$ (§2, п. 1°), что

$$\gamma_{l,j} \blacktriangle^{h(n+1)+l} z^j / \blacktriangle^{h(n+1)} z \in \mathcal{L}_\mu^+.$$

Таким образом, дробь

$$\frac{1 + \sum_{(l,j) \neq (0,0)} \gamma_{l,j} \blacktriangle^{h(n+1)+l} z_i^j / \blacktriangle^{h(n+1)} z_i}{1 + \sum_{(l,j) \neq (0,0)} \gamma_{l,j} \blacktriangle^{h(n+1)+l} z_1^j / \blacktriangle^{h(n+1)} z_1},$$

принадлежит $\mathcal{L}_\mu^+$ и имеет свободный член, равный 1.

Единственное, что осталось проверить, это возможность выбора z_i, при котором

$$\frac{\blacktriangle^{h(n+1)} z_i}{\blacktriangle^{h(n+1)} z_1} \equiv \theta_{i1} \bmod \deg 1.$$

Определим $z_i = (\theta_{i1} + g)z_1$, где $g \in \mathcal{O}_T\,[[x]]$ – разложение $\eta_i/\eta_1 - \theta_{i1}$ в степенной ряд по Π. По лемме 2.7 имеем $\eta_i/\eta_1 - \theta_{i1} \equiv 0 \bmod \Pi^{e_n}$, поэтому g можно выбрать без свободного члена. Тогда

$$\frac{\blacktriangle^{h(n+1)} z_i}{\blacktriangle^{h(n+1)} z_1} \equiv \theta_{i1}^{\Delta^{h(n+1)}} = \theta_{i1} \bmod \deg 1. \ \square$$

Лемма 2.9. *Существуют такие $v_1, \dots, v_h \in \mathcal{O}_h$, что для всех $1 \leqslant i, j \leqslant h$ выполнено равенство*

$$\operatorname{tr}_h(v_i \theta_{ji}) = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, а $\operatorname{tr}_h := \operatorname{tr}_{k_h/k}$. При этом

1) *матрица $A_k = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant h}$, где $a_{ij} = \theta_{jk}^{\Delta^{i-1}}$, обратима и обратная к ней матрица есть*

$$B_k = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant h}, \quad b_{ij} = (\theta_{ki} v_i)^{\Delta^{j-1}};$$

2) *для любого $b \in \mathcal{O}_T$,*

$$\operatorname{tr}(v_i \theta_{ji} \widehat{b}) = \delta_{ij} \cdot \operatorname{tr} b,$$

где $\widehat{b} = b + b^{\Delta} + \ldots + b^{\Delta^{h-1}}$.

Доказательство. Элемент v_i есть не что иное, как i-ый элемент базиса, двойственного к $\theta_{1i}, \theta_{2i}, \dots, \theta_{hi}$ относительно спаривания $(x, y) \mapsto \operatorname{tr}_h(xy)$ (по лемме 2.7, $\theta_{1i}, \theta_{2i}, \dots, \theta_{hi}$ образуют базис $\mathcal{O}_h$).

Далее, поскольку по построению θ_{ji} для любых $1 \leqslant i, j, k \leqslant h$ выполняется $\theta_{ji}\theta_{ik} = \theta_{jk}$, то

$$\sum_{m=0}^{h-1} \left(\theta_{ik}^{\Delta^m} v_k^{\Delta^m}\right) \theta_{ji}^{\Delta^m} = \sum_{m=0}^{h-1} (\theta_{jk} v_k)^{\Delta^m} = \operatorname{tr}_h(\theta_{jk} v_k) = \delta_{kj}.$$

Кроме того, $\operatorname{tr}(v_i \theta_{ji} \widehat{b}) = \operatorname{tr}_h \circ \operatorname{tr}_{T/k_h}(v_i \theta_{ji} \widehat{b}) = \operatorname{tr}_h(v_i \theta_{ji} \operatorname{tr}_{T/k_h} \widehat{b}) = \operatorname{tr}_h(v_i \theta_{ji} \operatorname{tr} b) = \operatorname{tr} b \cdot \operatorname{tr}_h(v_i \theta_{ji}) = \delta_{ij} \operatorname{tr} b$. $\square$

§3. Спаривание для рядов

1°. Пусть T_0 – подполе инерции расширения $K/\mathbb{Q}_p$, $\mathcal{O}_0$ – его кольцо целых, Δ_0 – автоморфизм Фробениуса в $T_0/\mathbb{Q}_p$. Ясно, что $T_0 \subset T$ и $\Delta \big|_{T_0} = \Delta_0^f$, где $q = p^f$.

Определим мультипликативную группу рядов

$$\mathcal{H}_m = \left\{ x^k \theta \varepsilon(x) : k \in \mathbb{Z}, \theta \in \mathcal{R}, \varepsilon \in \mathcal{O}_0 [[x]], \varepsilon(0) = 1 \right\}.$$

Напомним, что $\mathcal{H}_{F_n}$ обозначает $\mathcal{O}$-модуль формальных степенных рядов с коэффициентами из $\mathcal{O}_T$ без свободного члена, операции на котором задаются с помощью F_n.

Построим спаривание для рядов

$$[\,,\,]_F : \mathcal{H}_m \times \mathcal{H}_{F_n} \to \mathcal{O}_T$$

по формуле

$$[\alpha(x), \beta(x)]_F = \operatorname{res}_x \Phi_n(x)\Gamma(x),$$

где

$$\Phi_n(x) = l_{F_n}(\beta)\alpha^{-1}\frac{d\alpha}{dx} - \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{h} b_i \left(1 - \frac{\blacktriangle^i}{q^i}\right) \log\varepsilon \cdot \frac{d}{dx}\blacktriangle^i(\lambda_n \circ \beta),$$

а $\Gamma(x) \in \mathcal{L}_\mu$ – некоторый фиксированный ряд Лорана, для которого выполнено условие $(*)$:

Существует такая последовательность рядов Лорана $\Gamma^{(0)}$, $\Gamma^{(1)}, \ldots, \Gamma^{(n)} = \Gamma$, что для всех $0 \leqslant s \leqslant n$

а) $\Gamma^{(s)} \in \mathcal{L}_{\mu q^{h(n-s)}}$

б) $x\frac{d}{dx}\Gamma^{(s)} \in \pi^s \mathcal{L}_{\mu q^{h(n-s)}}$ $\qquad (*)$

в) $\blacktriangle^h \Gamma^{(s-1)} - \Gamma^{(s)} \in \pi^s \mathcal{L}_{\mu q^{h(n-s)}}$.

2°.Отметим следующую формулу, которая будет неоднократно использоваться в дальнейшем: для любого ряда Лорана g и любого $i \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\frac{d}{dx}\blacktriangle^i g = q^i x^{-1} \blacktriangle^i \left(x \frac{dg}{dx} \right).$$

Лемма 3.1. *Ряд* $\Phi_n \in \mathcal{O}_T[[x]]$, *т.е. спаривание* $[\,,\,]_F$ *корректно определено.*

Доказательство. Первое слагаемое имеет целые коэффициенты, поскольку $\alpha^{-1}\frac{d\alpha}{dx} = kx^{-1} + \frac{d}{dx}\log\varepsilon$, если $\alpha(x) = x^k\theta\varepsilon(x)$. Рассмотрим i-ое слагаемое суммы:

$$\frac{b_i}{\pi}\left(1 - \frac{\blacktriangle^i}{q^i}\right)\log\varepsilon \cdot \frac{d}{dx}\blacktriangle^i(\lambda_n \circ \beta) =$$

$$= \frac{b_i}{\pi}\left(1+\frac{\blacktriangle}{q}+\ldots+\frac{\blacktriangle^{i-1}}{q^{i-1}}\right) l_m(\varepsilon)\cdot q^i x^{-1}\blacktriangle^i\left(x\frac{d}{dx}(\lambda_n\circ\beta)\right),$$

где $l_m(\varepsilon)=\left(1-\frac{\blacktriangle}{q}\right)\log\varepsilon$. Поскольку производная логарифма формальной группы имеет целые коэффициенты, то остается проверить, что $\frac{q}{\pi}l_m(\varepsilon)$ также имеет целые коэффициенты. Пусть $\blacktriangle_0$ есть аналог оператора $\blacktriangle$ для Δ_0 (см. §1, п. 3°). Тогда

$$\frac{q}{p}\,l_m(\varepsilon)=p^{f-1}\left(1-\frac{\blacktriangle_0^f}{p^f}\right)\log\varepsilon=$$

$$=p^{f-1}\left(1+\frac{\blacktriangle_0}{p}+\ldots+\frac{\blacktriangle_0^{f-1}}{p^{f-1}}\right)\left(1-\frac{\blacktriangle_0}{p}\right)\log\varepsilon.$$

Ясно, что $\left(1-\frac{\blacktriangle_0}{p}\right)\log\varepsilon$ – аналог l_F для мультипликативной формальной группы, поэтому имеет целые коэффициенты (см. [6], лемма 2). □

Лемма 3.2. *Пусть $g(x)=x^k\theta\varepsilon(x)$, где $k\geqslant 1$, $\theta\in\mathcal{R}$, $\varepsilon\in\mathcal{O}_0[[x]]$, $\varepsilon(0)=1$. Тогда для любых натуральных m,i выполняются сравнения:*

1) $g^{mq^i}-\blacktriangle^i g^m\equiv mq^i\blacktriangle^i g^m\cdot\left(1-\frac{\blacktriangle^i}{q^i}\right)\log\varepsilon \bmod (mp)^2$;

2) *Пусть φ,ψ – такие степенные ряды, что $\frac{q^h}{p}\varphi$ и ψ имеют целые коэффициенты, а ряд ψ имеет нулевой свободный член и обратимый первый коэффициент. Тогда*

$$\operatorname{res}_x\frac{d\varphi}{dx}\,\Gamma^{(s)}\circ\psi\equiv 0 \bmod \pi^s,$$

в частности,

$$\operatorname{res}_x\frac{d\varphi}{dx}\,\Gamma\circ\psi\equiv 0 \bmod \pi^n.$$

3) *Если $m=q^{hr}m_0$, $q^h\nmid m_0$, $0\leqslant r<n$, то*

$$\operatorname{res}_x\left(\frac{d}{dx}\frac{g^m}{m}\right)\Gamma\equiv 0 \bmod \pi^{n-r}.$$

Доказательство. 1) Имеем:

$$mq^i\left(1-\frac{\blacktriangle^i}{q^i}\right)\log\varepsilon=\log\frac{\varepsilon^{mq^i}}{\blacktriangle^i\varepsilon^m}=\log\frac{g^{mq^i}}{\blacktriangle^i g^m}.$$

Следовательно,

$$g^{mq^i} - \blacktriangle^i g^m = \blacktriangle^i g^m \left(\exp\left(mq^i\left(1-\frac{\blacktriangle^i}{q^i}\right)\log\varepsilon\right)-1\right) =$$

$$= \blacktriangle^i g^m \cdot mq^i\left(1-\frac{\blacktriangle^i}{q^i}\right)\log\varepsilon + \blacktriangle^i g^m \sum_{j\geqslant 2}\frac{(mp)^j}{j!}\left(q^i\left(1-\frac{\blacktriangle^i}{q^i}\right)\log\varepsilon\right)^j.$$

При $j \geqslant 2$ число $\frac{(mp)^j}{j!}$ делится на $(mp)^2$, а ряд $\frac{q^i}{p}\left(1-\frac{\blacktriangle^i}{q^i}\right)\log\varepsilon$ имеет целые коэффициенты (см. доказательство леммы 3.1)

2)

$$\operatorname{res}_x \frac{d\varphi}{dx}\,\Gamma^{(s)}\circ\psi \equiv \operatorname{res}_x \frac{d\varphi}{dx}\left(\blacktriangle^h\Gamma^{(s-1)}\right)\circ\psi =$$

$$= -\operatorname{res}_x \varphi\cdot\frac{d}{dx}(\blacktriangle^h\Gamma^{(s-1)})\circ\psi =$$

$$= -\operatorname{res}_x\left(\frac{q^h}{p}\varphi\right)\psi^{-1}\frac{d\psi}{dx}\cdot p\,\blacktriangle^h\left(x\frac{d}{dx}\,\Gamma^{(s-1)}\right)\circ\psi \equiv 0 \bmod \pi^s$$

по свойствам $\Gamma^{(s)}$ (см. п. 1°, (*)).

3) Докажем индукцией по r, что для любого ряда g и любых s, r таких, что $r \leqslant s \leqslant n$, имеет место сравнение

$$\operatorname{res}_x\left(\frac{d}{dx}\frac{g^m}{m}\right)\Gamma^{(s)} \equiv 0 \bmod \pi^{s-r}.$$

Нужное нам утверждение получается в случае $s = n$.

Если $r = 0$, т.е. $q^h \nmid m$, то согласно п. 2) имеем:

$$\operatorname{res}_x\left(\frac{d}{dx}\frac{g^m}{m}\right)\Gamma^{(s)} \equiv 0 \bmod \pi^s,$$

так как q^h/m делится на p. Если $r \geqslant 1$, то по пункту 1) ряд

$$\frac{q^h}{p}\,\frac{g^m - \blacktriangle^h g^{m/q^h}}{m}$$

имеет целые коэффициенты. Значит, из пункта 2) следует, что

$$\operatorname{res}_x\left(\frac{d}{dx}\,\frac{g^m - \blacktriangle^h g^{m/q^h}}{m}\right)\Gamma^{(s)} \equiv 0 \bmod \pi^s.$$

Отсюда

$$\operatorname{res}_x\left(\frac{d}{dx}\frac{g^m}{m}\right)\Gamma^{(s)} \equiv \operatorname{res}_x\left(\frac{d}{dx}\frac{\blacktriangle^h g^{m/q^h}}{m}\right)\Gamma^{(s)} \equiv$$

$$\equiv \operatorname{res}_x\left(\frac{d}{dx}\frac{\blacktriangle^h g^{m/q^h}}{m}\right)\blacktriangle^h\Gamma^{(s-1)} =$$

$$= \operatorname{res}_x x^{-1}\blacktriangle^h\left[x\left(\frac{d}{dx}\frac{g^{m/q^h}}{m/q^h}\right)\Gamma^{(s-1)}\right] =$$

$$=\Delta^h \operatorname{res}_x\left(\frac{d}{dx}\frac{g^{m/q^h}}{m/q^h}\right)\Gamma^{(s-1)} \bmod \pi^s.$$

По индукционному предположению,

$$\operatorname{res}_x\left(\frac{d}{dx}\frac{g^{m/q^h}}{m/q^h}\right)\Gamma^{(s-1)} \equiv 0 \bmod \pi^{(s-1)-(r-1)}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{res}_x\left(\frac{d}{dx}\frac{g^m}{m}\right)\Gamma^{(s)} \equiv 0 \bmod \pi^{s-r}. \ \Box$$

Лемма 3.3. 1) *Если ряды Лорана Γ и Γ' удовлетворяют условию $(*)$ из п. 1°, то $\Gamma+\Gamma'$ и $\Gamma\Gamma'$ также удовлетворяют этому условию.*

2) *Если ряд Лорана Γ удовлетворяет условию $(*)$ и $1/\Gamma \in \mathcal{L}_\mu$, то $1/\Gamma$ удовлетворяет условию $(*)$.*

3) *W удовлетворяет условию $(*)$.*

Доказательство. Перейдем сразу к доказательству пункта 2), так как пункт 1) доказывается совершенно аналогично. Итак, пусть $\Gamma^{(0)}, \Gamma^{(1)}, \dots, \Gamma^{(n)} = \Gamma$ – последовательность рядов Лорана для Γ из условия $(*)$. Покажем, что $1/\Gamma^{(0)}$, $1/\Gamma^{(1)}$,..., $1/\Gamma^{(n)} = 1/\Gamma$ является последовательностью для $1/\Gamma$, удовлетворяющей условию $(*)$. Поскольку

$$\blacktriangle^h\Gamma^{(s-1)} = \Gamma^{(s)} + \pi^s\Lambda$$

для некоторого ряда $\Lambda \in \mathcal{L}_{\mu q^{h(n-s)}}$, то

$$\frac{1}{\blacktriangle^h\Gamma^{(s-1)}} = \frac{1}{\Gamma^{(s)}+\pi^s\Lambda} = \frac{1}{\Gamma^{(s)}}\left(1-\pi^s\frac{\Lambda}{\Gamma^{(s)}}+\pi^{2s}\left(\frac{\Lambda}{\Gamma^{(s)}}\right)^2-\dots\right).$$

Заметим, что если ряд $\blacktriangle^m \varphi \in \mathcal{L}_\mu$, то $\varphi \in \mathcal{L}_{\mu q^m}$. Отсюда с помощью обратной индукции (напомним, что $1/\Gamma^{(n)} = 1/\Gamma \in \mathcal{L}_\mu$ по условию) получаем, что $1/\Gamma^{(s)} \in \mathcal{L}_{\mu q^{h(n-s)}}$ и

$$\blacktriangle^h \frac{1}{\Gamma^{(s-1)}} - \frac{1}{\Gamma^{(s)}} \in \pi^s \mathcal{L}_{\mu q^{h(n-s)}}.$$

Наконец,

$$x\frac{d}{dx}\,\frac{1}{\Gamma^{(s)}} = -x\left(\frac{d}{dx}\,\Gamma^{(s)}\right)\left(\frac{1}{\Gamma^{(s)}}\right)^2 \in \pi^s \mathcal{L}_{\mu q^{h(n-s)}}.$$

3) По лемме 2.2, 1)

$$W^{(s)} \equiv B_{s-1}\blacktriangle^h W^{(s-1)} \bmod \pi^s,$$

поэтому последовательность

$$\Gamma^{(s)} = B_{n-1}^{\Delta^{-(n-s)h}}\, B_{n-2}^{\Delta^{-(n-s-1)h}} \dots B_s^{\Delta^{-h}}\, W^{(s)}, \quad 0 \leqslant s \leqslant n$$

удовлетворяет условию $(*)$ для $\Gamma^{(n)} = W$. Действительно, из определения ряда $W^{(s)}$ (см. (14)) и операторов B_m (см. теорему 1.1) получаем

$$\Gamma^{(s)} = \pi^s \sum_{i\geqslant 0} d_i \blacktriangle^i (\lambda \circ \eta)$$

при некоторых $d_i \in \mathcal{O}'$. Поэтому

$$x\frac{d\Gamma^{(s)}}{dx} = \pi^s \sum_{i\geqslant 0} d_i q^i \blacktriangle^i\left(x\frac{d}{dx}(\lambda\circ\eta)\right) \equiv 0 \bmod \pi^s,$$

так как производная логарифма имеет целые коэффициенты. □

3°. Отметим, что построенное спаривание $[\,,\,]_F$ является билинейным, т.е.

$$[\alpha_1\alpha_2, \beta]_F = [\alpha_1, \beta]_F + [\alpha_2, \beta]_F,$$

$$[\alpha, \beta_1 \underset{F_n}{+} \beta_2]_F = [\alpha, \beta_1]_F + [\alpha, \beta_2]_F,$$

$$[\alpha, [a]_{F_n}(\beta)]_F = a[\alpha, \beta]_F, \quad a \in \mathcal{O}.$$

Предложение 3.4. *Спаривание* $[\,,\,]_F$ *инвариантно по* $\operatorname{mod}\pi^n$ *относительно замены* $x = g(y) = y\theta\varepsilon(y)$, *где* $\theta \in \mathcal{R}$, $\varepsilon \in \mathcal{O}_0[[y]]$, $\varepsilon(0) = 1$, *по крайней мере, на паре* $(x, \beta(x))$ *(см. также* [17], *предложение* 3.4*).*

Доказательство. Ясно, что достаточно проверить инвариантность только для $\beta(x) = E_{F_n}(\alpha x^m)$, где $\alpha \in \mathcal{O}_T$, $m \geqslant 1$, поскольку в общем случае $\beta(x)$ можно представить в виде $\beta(x) = E_{F_n}(l_{F_n}(\beta))$ (см. предложение 1.5) и воспользоваться затем линейностью E_{F_n} и $[\,,\,]_F$.

Прежде чем непосредственно приступить к доказательству, сделаем следующее замечание. Операторы $\blacktriangle$ и E_{F_n} по определению зависят от выбора переменной. В наших рассуждениях мы будем использовать две разные переменные, поэтому во избежание недоразумений будем указывать переменную соответствующим индексом. Кроме того, индексом g будем снабжать операторы, возводящие ряд g в степень q, а на коэффициенты при степенях g действующие как Δ.

Для облегчения вычислений обозначим

$$\mathcal{B} = \pi - u_n = b_1\blacktriangle + \ldots + b_h\blacktriangle^h.$$

Тогда

$$\left(1 - \frac{\mathcal{B}}{\pi}\right)^{-1} = 1 + \beta_1\blacktriangle + \beta_2\blacktriangle^2 + \ldots.$$

Итак, надо доказать следующее утверждение

$$[x, E_{F_n,x}(\alpha, x^m)]_F \equiv [g(y), E_{F_n,y}(\alpha g(y)^m)]_F \operatorname{mod}\pi^n. \tag{15}$$

Прежде всего выясним связь $E_{F_n,x}$ и $E_{F_n,y}$. Пусть

$$S = \left(1 - \frac{\mathcal{B}_g}{\pi}\right)^{-1}(\alpha g^m).$$

Тогда

$$E_{F_n,x}(\alpha x^m) = E_{F_n,g}(\alpha g^m) = \lambda_n^{-1} \circ \left(\left(1 - \frac{\mathcal{B}_g}{\pi}\right)^{-1}(\alpha g^m)\right) =$$

$$= \lambda_n^{-1} \circ S = E_{F_n,y}\left(\left(1 - \frac{\mathcal{B}_y}{\pi}\right)S\right).$$

Теперь мы готовы приступить к непосредственной проверке сравнения (15). По определению спаривания имеем

$$[x, E_{F_n,x}(\alpha x^m)]_F = \operatorname{res}_x \alpha x^{m-1}\Gamma(x)$$

$$[g(y), E_{F_n,y}(\alpha g(y)^m]_F = \left[g(y), E_{F_n,y}\left(1 - \frac{\mathcal{B}_y}{\pi}\right) S\right]_F =$$

$$= \operatorname{res}_y \Psi(y)(\Gamma \circ g)(y),$$

где

$$\Psi(y) = \left(1 - \frac{\mathcal{B}_y}{\pi}\right) S \cdot g^{-1}\frac{dg}{dy} - \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{h} b_i \left(1 - \frac{\blacktriangle_y^i}{q^i}\right)\log\varepsilon \cdot \frac{d}{dy}\blacktriangle_y^i S.$$

Из разложения

$$\left(1 - \frac{\mathcal{B}_y}{\pi}\right) S = \left(1 - \frac{\mathcal{B}_y}{\pi}\right)\left(1 + \frac{\mathcal{B}_g}{\pi} + \frac{\mathcal{B}_g^2}{\pi^2} + \dots\right)(\alpha g^m) =$$

$$= \alpha g^m + \sum_{r \geqslant 1} \frac{\mathcal{B}_g^r(\alpha g^m) - \mathcal{B}_y \mathcal{B}_g^{r-1}(\alpha g^m)}{\pi^r}$$

следует, что $\Psi(y)$ можно представить в виде

$$\Psi(y) = \alpha g^{m-1}\frac{dg}{dy} + \sum_{r\geqslant 1}\left(\frac{\mathcal{B}_g^r(\alpha g^m) - \mathcal{B}_y \mathcal{B}_g^{r-1}(\alpha g^m)}{\pi^r} \cdot g^{-1}\frac{dg}{dy} -\right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{h} b_i \left(1 - \frac{\blacktriangle_y^i}{q^i}\right)\log\varepsilon \cdot \frac{d}{dy}\blacktriangle_y^i \frac{\mathcal{B}_g^{r-1}(\alpha g^m)}{\pi^r}\right). \qquad (16)$$

Мы хотим получить следующий вид ряда $\Psi(y)$:

$$\Psi(y) = \alpha g^{m-1}\frac{dg}{dy} + \sum_{i=1}^{h} \frac{d}{dy}\frac{\psi_i}{q^{i-1}}$$

для некоторых $\psi_i \in \mathcal{O}_T[[y]]$. Если мы этого добьемся, то (15) будет следовать из леммы 3.2, 2). Действительно,

$$\operatorname{res}_y \Psi(y)\cdot(\Gamma\circ g)(y) = \operatorname{res}_y \alpha g^{m-1}\frac{dg}{dy}\cdot(\Gamma\circ g) +$$

$$+\operatorname{res}_y \left(\frac{d}{dy} \sum_{i=1}^{h} \frac{\psi_i}{q^{i-1}} \right) \cdot (\Gamma \circ g) \equiv$$

$$\equiv \operatorname{res}_y \alpha g^{m-1} \frac{dg}{dy} \cdot (\Gamma \circ g) = \operatorname{res}_x \alpha x^{m-1} \Gamma(x) \bmod \pi^n.$$

Итак, разберем формулу (16). Поскольку $\mathcal{B}_g^r = d_r \blacktriangle_g^r + \ldots + d_{hr} \blacktriangle_g^{hr}$ для некоторых $d_j \in \mathcal{O}'$, то $(r+1)$-ое слагаемое в сумме (16) имеем вид

$$\frac{\mathcal{B}_g \mathcal{B}_g^r(\alpha g^m) - \mathcal{B}_y \mathcal{B}_g^r(\alpha g^m)}{\pi^{r+1}} \, g^{-1} \frac{dg}{dy} -$$

$$- \sum_{i=1}^{h} \frac{b_i}{\pi^{r+1}} \left(1 - \frac{\blacktriangle_y^i}{q^i} \right) \log \varepsilon \cdot \frac{d}{dy} \blacktriangle_y^i \mathcal{B}_g^r(\alpha g^m) =$$

$$= \frac{1}{\pi^{r+1}} \Bigg[\left(\sum_{i=1}^{h} b_i (\blacktriangle_g^i - \blacktriangle_y^i)(d_r \blacktriangle_g^r + \ldots + d_{hr} \blacktriangle_g^{hr})(\alpha g^m) \right) g^{-1} \frac{dg}{dy} -$$

$$- \sum_{i=1}^{h} b_i \left(1 - \frac{\blacktriangle_y^i}{q^i} \right) \log \varepsilon \cdot \frac{d}{dy} \left(d_r^{\Delta^i} \blacktriangle_y^i \blacktriangle_g^r + \ldots + d_{hr}^{\Delta^i} \blacktriangle_y^i \blacktriangle_g^{hr} \right) (\alpha g^m) \Bigg] =$$

$$= \frac{1}{\pi^{r+1}} \sum_{i=1}^{h} b_i \Bigg[\left((\blacktriangle_g^i - \blacktriangle_y^i)(d_r \blacktriangle_g^r + \ldots + d_{hr} \blacktriangle_g^{hr})(\alpha g^m) \right) g^{-1} \frac{dg}{dy} -$$

$$- \left(1 - \frac{\blacktriangle_y^i}{q^i} \right) \log \varepsilon \cdot \frac{d}{dy} (d_r^{\Delta^i} \blacktriangle_y^i \blacktriangle_g^r + \ldots + d_{hr}^{\Delta^i} \blacktriangle_y^i \blacktriangle_g^{hr})(\alpha g^m) \Bigg] =$$

$$= \frac{1}{\pi^{r+1}} \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=r}^{hr} b_i d_j^{\Delta^i} \alpha^{\Delta^{i+j}} \Bigg[\left((\blacktriangle_g^i - \blacktriangle_y^i) \blacktriangle_g^j g^m \right) g^{-1} \frac{dg}{dy} -$$

$$- \left(1 - \frac{\blacktriangle_y^i}{q^i} \right) \log \varepsilon \cdot \frac{d}{dy} \blacktriangle_y^i \blacktriangle_g^j g^m \Bigg] =$$

$$= \frac{1}{\pi^{r+1}} \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=r}^{hr} b_i d_j^{\Delta^i} \alpha^{\Delta^{i+j}} \times$$

$$\times \frac{d}{dy} \left(\frac{g^{q^{i+j} m} - \blacktriangle_y^i g^{q^i} m}{q^{i+j} m} - \blacktriangle_y^i g^{q^j m} \cdot \left(1 - \frac{\blacktriangle_y^i}{q^i} \right) \log \varepsilon \right). \qquad (17)$$

Последнее равенство может быть получено следующим образом:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{g^{q^{i+j}m}-\blacktriangle_y^i g^{q^j m}}{q^{i+j}m}-\blacktriangle_y^i\, g^{q^j m}\cdot\left(1-\frac{\blacktriangle_y^i}{q^i}\right)\log\varepsilon\right)=$$

$$=g^{q^{i+j}m}\cdot g^{-1}\frac{dg}{dy}-\blacktriangle_y^i g^{q^j m}\frac{\frac{d}{dy}\blacktriangle_y^i g}{q^i\blacktriangle_y^i g}-\left(1-\frac{\blacktriangle_y^i}{q^i}\right)\log\varepsilon\cdot\frac{d}{dy}\,\blacktriangle_y^i g^{q^j m}-$$

$$-\blacktriangle_y^i g^{q^j m}\left(\varepsilon^{-1}\frac{d\varepsilon}{dy}-\left(\frac{\frac{d}{dy}\blacktriangle_y^i\varepsilon}{q^i\blacktriangle_y^i\varepsilon}\right)\right)=$$

$$=g^{q^{i+j}m}\cdot g^{-1}\frac{dg}{dy}-\blacktriangle_y^i g^{q^j m}\frac{\frac{d}{dy}\blacktriangle_y^i g}{q^i\blacktriangle_y^i g}-$$

$$-\left(1-\frac{\blacktriangle_y^i}{q^i}\right)\log\varepsilon\cdot\frac{d}{dy}\,\blacktriangle_y^i g^{q^j m}-$$

$$-\blacktriangle_y^i g^{q^j m}\left(g^{-1}\frac{dg}{dy}-y^{-1}-\left(\frac{\frac{d}{dy}\blacktriangle_y^i g}{q^i\blacktriangle_y^i g}-y^{-1}\right)\right)=$$

$$=g^{q^{i+j}m}g^{-1}\frac{dg}{dy}-\blacktriangle_y^i g^{q^j m}g^{-1}\frac{dg}{dy}-$$

$$-\left(1-\frac{\blacktriangle_y^i}{q^i}\right)\log\varepsilon\cdot\frac{d}{dy}\,\blacktriangle_y^i g^{q^j m}.$$

Обозначим ряд, стоящий под знаком производной в (17) через $\varphi_{i,j}/q^{i+j}m$. По лемме 3.2, 1)

$$\varphi_{i,j}\equiv 0 \bmod (q^j mp)^2/(q^{i+j}m),$$

значит,

$$\frac{1}{\pi^{r+1}}\,\varphi_{i,j}\equiv 0 \bmod (q^j mp)^2/(q^{i+j}m\pi^{r+1}).$$

Поскольку $j\geqslant r$, то

$$(q^j mp)^2/q^{i+j}m\pi^{r+1}\equiv 0 \bmod \frac{1}{q^{i-1}},$$

что дает требуемое представление $\Psi(y)$. $\square$

§4. Спаривание $\langle , \rangle_F$

1°. Зафиксируем для всех последующих рассмотрений

$$\mu = \frac{q^h - 1}{q^{2h}}.$$

Тогда из следствия 2 предложения 2.6 вытекает, что $1/W, \ldots, 1/(\blacktriangle^{h-1}W)$; $\varphi_i, \ldots, \blacktriangle^{h-1}\varphi_i \in \mathcal{L}_\mu$. Пусть $\alpha \in K^*$, представим его в виде $\alpha = \sqcap^m \theta\varepsilon$, где $m \in \mathbb{Z}$, $\theta \in \mathcal{R}$, ε – главная единица. Обозначим через $\underline{\varepsilon}$ степенной ряд с коэффициентами из $\mathcal{O}_0$, для которого $\underline{\varepsilon}(\sqcap) = \varepsilon$, $\underline{\varepsilon}(0) = 1$; пусть $\underline{\alpha} = x^m \theta \underline{\varepsilon} \in \mathcal{H}_m$. Аналогично, для $\beta \in M$; пусть $\underline{\beta} \in \mathcal{H}_{F_n}$ – его разложение в степенной ряд по $\sqcap$ без свободного члена с коэффициентами из $\mathcal{O}_T$.

Определим спаривание:

$$\langle\, ,\, \rangle_F : K^* \times F_n(M) \to W_F^n$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle_F = \sum_{j=1}^{h} {}_{(F)}[\operatorname{tr} \operatorname{res} R_j]_F(\eta_j),$$

где $R_j \in \mathcal{L}_\mu$, $1 \leqslant j \leqslant h$, определяются из уравнения

$$\begin{pmatrix} W_1, & W_2, & \ldots, & W_h \\ \blacktriangle W_1, & \blacktriangle W_2, & \ldots, & \blacktriangle W_h \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \blacktriangle^{h-1} W_1, & \blacktriangle^{h-1} W_2, & \ldots, & \blacktriangle^{h-1} W_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

а Φ_n, как и прежде, обозначает ряд

$$\Phi_n(x) = l_{F_n}(\underline{\beta})\underline{\alpha}^{-1}\frac{d\underline{\alpha}}{dx} - \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{h} b_i \left(1 - \frac{\blacktriangle^i}{q^i}\right) \log \underline{\varepsilon} \cdot \frac{d}{dx} \blacktriangle^i(\lambda_n \circ \underline{\beta}).$$

2°. **Лемма 4.1.** *Пусть $g \in \mathcal{O}'[[x]]$ и $r_1, \ldots, r_h$ – решение уравнения*

$$\begin{pmatrix} W_1, & W_2, & \ldots, & W_h \\ \blacktriangle W_1, & \blacktriangle W_2, & \ldots, & \blacktriangle W_h \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \blacktriangle^{h-1} W_1, & \blacktriangle^{h-1} W_2, & \ldots, & \blacktriangle^{h-1} W_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $r_1, \ldots, r_h \in \mathcal{L}_\mu$ и удовлетворяют условию $(*)$ (см. §3, п. 1°).

Доказательство.

$$r_j = \frac{\det A_j}{\det A} = (-1)^{j+1} g \cdot \frac{\Delta_{1,j}\ (A)}{\det A},$$

где $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant h}$, $a_{ij}=\blacktriangle^{i-1}W_j$; матрица A_j получается из A заменой j-го столбца на столбец $(g,0,\dots,0)^T$, а $\Delta_{1j}(A)$ – минор $h-1$-го порядка матрицы A. Поэтому достаточно доказать, что

$$r'_j=\frac{\Delta_{1,j}(A)}{\det A}\in\mathcal{L}_\mu \quad \text{и удовлетворяет условию} (*).$$

Из леммы 2.8 получаем

$$r'_j=\frac{1}{W_1}\frac{\Delta_{1,j}(A')}{\det A'}=\frac{1}{W_1}\frac{\Delta_{1,j}(\tilde A)}{\det\tilde A}+\pi^n\Lambda$$

для некоторого ряда $\Lambda\in\mathcal{L}_\mu$ (здесь $A'=(a'_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant h}$, $a'_{ij}=\blacktriangle^{i-1}\varphi_j$, $\tilde A=(\tilde a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant h}$, $\tilde a_{ij}=\blacktriangle^{i-1}\tilde\varphi_j$; $\Delta_{1,j}(A')$, $\Delta_{1,j}(\tilde A)$ – соответствующие миноры $(h-1)$-го порядка матриц A' и A). При этом (см. лемму 2.8) $\tilde\varphi_i=\theta_{i1}+\psi_i$, где $\psi_i\in x\mathcal{L}^+_\mu$. Значит,

$$\frac{\Delta_{1,j}(\tilde A)}{\det\tilde A}=\frac{\Delta_{1,j}(B)}{\det B}+\sum_{l_{k,i}\geqslant 0}\alpha_{l_{0,1},\dots,l_{h-1,h}}\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant h-1\\1\leqslant i\leqslant h}}\blacktriangle^k\psi_i^{l_{k,i}}$$

для некоторых $\alpha_{l_{0,1}\dots,l_{h-1,h}}\in\mathcal{O}_h$ (здесь $B=(b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant h}$, $b_{ij}=\theta_{j1}^{\Delta^{i-1}}$). При этом мы воспользовались вытекающей из леммы 2.9 обратимостью определителя $\det B$ в кольце $\mathcal{O}_h$.

Таким образом,

$$r'_j=\frac{1}{W_1}\left(\Theta_j+\sum_{l_{k,i}\geqslant 0}\alpha_{l_{0,1}\dots l_{h-1,h}}\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant h-1\\1\leqslant i\leqslant h}}\blacktriangle^k\psi_i^{l_{k,i}}\right)+\pi^n\Lambda, \tag{18}$$

где $\Theta_j=\Delta_{1,j}(B)\big/\det B$.

Элемент Θ_j по построению является целым элементом из $\mathcal{O}_h$, далее $\psi_i=\tilde\varphi_i-\theta_{i1}=\varphi_i-\theta_{i1}+\pi^n\Lambda_i=W_i\big/W_1-\theta_{i1}+\pi^n\Lambda_i$ для некоторого ряда $\Lambda_i\in\mathcal{L}_\mu$ (см. лемму 2.8). Значит, по лемме 3.3 ряд, стоящий в скобках в равенстве (18), удовлетворяет условию $(*)$, поэтому ряд r'_j, а с ним и r_j принадлежит $\mathcal{L}_\mu$ и они удовлетворяют условию $(*)$. □

Лемма 4.2. *Существуют такие ряды Лорана* Γ_j, $1\leqslant j\leqslant h$, *для которых*

$$\langle\alpha,\beta\rangle_F=\sum_{j=1}^{h}{}_{(F)}[\operatorname{tr}\gamma_j]_F(\eta_j),$$

где $\gamma_j = [\underline{\alpha}, \underline{\beta}]_F$ – спаривание для рядов, определенное с помощью Γ_j (см. §3, п. 1°).

Доказательство. Из определения спаривания $\langle\, ,\, \rangle_F$, используя обозначения предыдущей леммы, получаем

$$R_j = \frac{\det A_j}{\det A} = (-1)^{j+1}\Phi_n \frac{\Delta_{1,j}\,(A)}{\det A}.$$

Поэтому ряд Γ_j для γ_j имеет вид

$$\Gamma_j = (-1)^{j+1}\frac{\Delta_{1,j}\,(A)}{\det A} \quad (\text{см. §3, п. } 1^\circ).$$

Из предыдущей леммы следует теперь, что Γ_j удовлетворяет условию $(*)$, и тем самым лемма доказана. □

3°. Из свойств спаривания $[\, ,\,]_F$ вытекает корректность определения спаривания $\langle\, ,\, \rangle_F$, его билинейность и инвариантность относительно выбора $\sqcap$, по крайней мере, на паре $(\sqcap, \beta)$, где $\beta \in M$ (см. §3, п. 3°).

Предложение 4.3. *Значение спаривания $\langle \sqcap, \beta\rangle_F$ не зависит от способа разложения $\beta \in M$ в степенной ряд по $\sqcap$.*

Доказательство. Надо проверить, что для ряда $\rho \in \mathcal{O}_T\,[[x]]$ такого, что $\rho(\sqcap) = 0$, выполняется сравнение

$$\operatorname{tr}\operatorname{res} R_i \equiv 0 \bmod \pi^n,$$

где $A \cdot (R_1, R_2, \ldots, R_h)^T = (x^{-1} l_{F_n}(\rho), 0, \ldots, 0)^T$ (здесь A, как и выше, есть матрица $(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant h}$, $a_{ij} = \blacktriangle^{i-1} W_j$).

Пусть ряды Лорана $\xi_1, \ldots, \xi_h$ определяются из уравнения

$$A \cdot (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_h)^T = (\lambda_n \circ \rho, \blacktriangle(\lambda_n \circ \rho), \ldots, \blacktriangle^{h-1}(\lambda_n \circ \rho))^T.$$

Тогда

$$\xi_i = \frac{\det A_i}{\det A} = \sum_{k=1}^{h} (-1)^{i+k} \blacktriangle^{k-1}\left(\frac{\lambda_n \circ \rho}{W_1}\right)\frac{\Delta_{k,i}\,(A')}{\det A'}$$

(здесь A_i – матрица, полученная из A заменой i-го столбца на $(\lambda_n \circ \rho, \blacktriangle(\lambda_n \circ \rho), \ldots, \blacktriangle^{h-1}(\lambda_n \circ \rho))^T$, $A' = (a'_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant h}$, $a'_{ij} = \blacktriangle^{i-1}\varphi_j$, $\Delta_{k,i}\,(A')$ – минор $(h-1)$-го порядка матрицы A'). Согласно следствию 2 предложения 2.6,

$$\blacktriangle^{k-1}\left(\frac{\lambda_n \circ \rho}{W_1}\right) \in \mathcal{L}_\mu$$

для $1 \leqslant k \leqslant h$. Принадлежность второго сомножителя к $\mathcal{L}_\mu$ доказывается так же, как и в лемме 4.1. Таким образом, $\xi_1, \dots, \xi_h \in \mathcal{L}_\mu$.

По лемме 2.2, 2)

$$W_j = \frac{b_1}{\pi} \blacktriangle W_j + \ldots + \frac{b_h}{\pi} \blacktriangle^h W_j + \pi^n g_j$$

для некоторого ряда $g_j \in x\mathcal{O}_T[[x]]$. Тогда

$$\begin{aligned} &A \cdot (\xi_1 - \blacktriangle\xi_1, \xi_2 - \blacktriangle\xi_2, \dots, \xi_h - \blacktriangle\xi_h)^T = \\ &= (\lambda_n \circ \rho, \blacktriangle(\lambda_n \circ \rho), \dots, \blacktriangle^{h-1}(\lambda_n \circ \rho))^T - \\ &-\Big(\frac{b_1}{\pi} \blacktriangle(\lambda_n \circ \rho) + \ldots + \frac{b_h}{\pi} \blacktriangle^h(\lambda_n \circ \rho) + \pi^n \sum_{j=1}^h g_j \blacktriangle\xi_j, \\ &\blacktriangle(\lambda_n \circ \rho), \dots, \blacktriangle^{h-1}(\lambda_n \circ \rho)\Big)^T = \\ &= (l_{F_n}(\rho) - \pi^n \sum_{i=1}^h g_i \blacktriangle\xi_i, 0, \dots, 0)^T. \end{aligned}$$

Пусть $r_{i,j}$, $1 \leqslant i, j \leqslant h$, определяются из равенства

$$A(r_{1,j}, \dots, r_{h,j})^T = (x^{-1} g_j, 0, \dots, 0).$$

Тогда по лемме 4.1, $r_{i,j} \in \mathcal{L}_\mu$ и

$$R_i = x^{-1}(\xi_i - \blacktriangle\xi_i) - \pi^n \sum_{j=1}^h \blacktriangle\xi_j \cdot r_{i,j},$$

значит,

$$\operatorname{tr}\operatorname{res} R_i \equiv \operatorname{tr} x^{-1}(\xi_i - \blacktriangle\xi_i) = 0 \bmod \pi^n. \quad \square$$

Предложение 4.4. *Значение спаривания $\langle\,,\,\rangle_F$ не зависит от выбора униформизующей $\sqcap$ и от способа разложения второго аргумента в степенной ряд по $\sqcap$.*

Доказательство. Утверждение уже доказано на множестве $(\sqcap, F_n(M))$ в предложениях 3.4 и 4.3. Продемонстрируем, что этого достаточно для общего случая. В силу билинейности спаривания утверждение достаточно проверить только на паре (ε, β), для произвольной единицы $\varepsilon \in K^*$ и $\beta \in M$.

1) Независимость от выбора Π. Для произвольных униформизующих Π и Π' нужно показать, что $\langle\varepsilon,\beta\rangle_{F,\Pi} = \langle\varepsilon,\beta\rangle_{F,\Pi'}$ (униформизующие, фигурирующие в определении спаривания, обозначаются соответствующими индексами).

Из билинейности следует, что

$$\langle\Pi\varepsilon,\beta\rangle_{F,\Pi} = \langle\Pi,\beta\rangle_{F,\Pi} \underset{F}{+} \langle\varepsilon,\beta\rangle_{F,\Pi},$$

$$\langle\Pi\varepsilon,\beta\rangle_{F,\Pi'} = \langle\Pi,\beta\rangle_{F,\Pi'} \underset{F}{+} \langle\varepsilon,\beta\rangle_{F,\Pi'}.$$

Из инвариантности на множестве $(\Pi, F_n(M))$ следует, что в этих равенствах попарно равны левые части и первые слагаемые в правых частях. Значит, равны и вторые слагаемые.

2) Независимость по второму аргументу от способа разложения в ряд по Π.

Пусть $\Pi' = \Pi\varepsilon$ – униформизующая. Тогда по пункту 1) имеем:

$$\langle\varepsilon,\beta\rangle_{F,\Pi} = \langle\Pi',\beta\rangle_{F,\Pi} \underset{F}{-} \langle\Pi,\beta\rangle_{F,\Pi} =$$

$$= \langle\Pi',\beta\rangle_{F,\Pi'} -_F \langle\Pi,\beta\rangle_{F,\Pi}.$$

Поэтому независимость спаривания от разложения второго аргумента по степеням Π на паре (ε,β) следует из уже доказанной независимости на множестве $(\Pi, F_n(M))$. $\square$

4°. **Предложение 4.5.** *Спаривание $\langle\,,\rangle_F$ обладает символьным свойством в следующей форме: для всех $\alpha\in M$*

$$\langle\alpha,\mathcal{E}_n^0(\alpha)\rangle_F = 0; \quad \langle\alpha,\mathcal{E}_n^{\rho,a}(\alpha)\rangle_F = 0,$$

где $\mathcal{E}_n^0$, $\mathcal{E}_n^{\rho,a}$ – степенные ряды, определенные в (9).

Доказательство. Будем доказывать первое равенство, второе доказывается аналогично. Согласно предложению 4.4, разложим элемент $\mathcal{E}_n^0(\alpha)$ в степенной ряд по Π в виде $\mathcal{E}_n^0\circ\underline{\alpha}$. Тогда

$$\Phi_n = l_{F_n}(\mathcal{E}_n^0\circ\underline{\alpha})\cdot\underline{\alpha}^{-1}\frac{d\underline{\alpha}}{dx} - \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{h} b_j\left(1-\frac{\blacktriangle^j}{q^j}\right)\log\underline{\varepsilon}\cdot\frac{d}{dx}\blacktriangle^j(\lambda_1\circ\underline{\alpha}),$$

поскольку $\mathcal{E}_n^0 = \lambda_n^{-1}\circ\lambda_1$. Далее,

$$l_{F_n}(\mathcal{E}_n^0\circ\underline{\alpha}) = \left(1-\frac{b_1}{\pi}\blacktriangle-\ldots-\frac{b_h}{\pi}\blacktriangle^h\right)(\lambda_1\circ\underline{\alpha}) = \pi^{-1}(u_n\lambda_1)\circ\underline{\alpha}+$$

$$+\sum_{j=1}^{h}\frac{b_j}{\pi}\left(\lambda_1^{\Delta^j}(\underline{\alpha}^{q^j})-\blacktriangle^j(\lambda_1\circ\underline{\alpha})\right)=$$

$$=\sum_{m\geqslant 1}\left(d'_m\underline{\alpha}^m+\sum_{j=1}^{h}\frac{b_j}{\pi}{c'_m}^{\Delta^j}(\underline{\alpha}^{mq^j}-\blacktriangle^j\underline{\alpha}^m)\right)$$

в обозначениях предложения 1.9. Тогда, воспользовавшись формулой, выведенной в доказательстве предложения 3.4, имеем

$$\Phi_n=\sum_{m\geqslant 1}d'_m\underline{\alpha}^{m-1}\frac{d\underline{\alpha}}{dx}+\sum_{j=1}^{h}\frac{b_j}{\pi}\left\{\sum_{m\geqslant 1}{c'_m}^{\Delta^j}\left((\underline{\alpha}^{mq^j}-\blacktriangle^j\underline{\alpha}^m)\cdot\underline{\alpha}^{-1}\frac{d\underline{\alpha}}{dx}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(1-\frac{\blacktriangle^j}{q^j}\right)\log\underline{\varepsilon}\cdot\frac{d}{dx}\blacktriangle^j\underline{\alpha}^m\right)\right\}=\sum_{m\geqslant 1}d'_m\frac{d}{dx}\frac{\underline{\alpha}^m}{m}+$$

$$+\sum_{j=1}^{h}\sum_{m\geqslant 1}\frac{b_j}{\pi}{c'_m}^{\Delta^j}\frac{d}{dx}\left(\frac{\underline{\alpha}^{mq^j}-\blacktriangle^j\underline{\alpha}^m}{mq^j}-\left(1-\frac{\blacktriangle^j}{q^j}\right)\log\underline{\varepsilon}\cdot\blacktriangle^j\underline{\alpha}^m\right).$$

Обозначим ряд, стоящий в последнем выражении под знаком производной, через $\varepsilon_{m,j}$. Итак, докажем, что $\operatorname{res}\Phi_n\Gamma\equiv 0 \bmod \pi^n$ для любого ряда Лорана Γ, удовлетворяющего условию $(*)$. Для этого покажем, что

$$\operatorname{res}\left(d'_m\frac{d}{dx}\frac{\underline{\alpha}^m}{m}\right)\Gamma\equiv 0 \bmod \pi^n,$$

$$\operatorname{res}\left(\frac{b_j}{\pi}{c'_m}^{\Delta^j}\frac{d}{dx}\varepsilon_{m,j}\right)\Gamma\equiv 0 \bmod \pi^n.$$

Пусть $m=q^{hr}m_0$, $q^h\nmid m_0$. По предложению 1.9 $d'_m\equiv 0 \bmod \pi^r$. Значит, если $r\geqslant n$, то первое сравнение выполнено; если же $r<n$, то с использованием леммы 3.2, 2), оно также выполняется.

Второе сравнение доказывается следующим образом. По лемме 3.2, 1) ряд $q^h/p\,\varepsilon_{m,j}$ делится на mp, т.к. $j\leqslant h$. Значит, ряд

$$\frac{q^h}{p}\frac{b_j}{\pi}{c'_m}^{\Delta^j}\varepsilon_{m,j}$$

имеет целые коэффициенты, т.е. возможно применение леммы 3.2, 1), которое и завершает доказательство. □

Следствие. *Для любых* $\theta \in \mathcal{R}$, $i \in \mathbb{N}$, $(i,p)=1$, *верны равенства*

$$\langle \sqcap, \xi_n^0(\theta\sqcap^i)\rangle_F = \langle \sqcap, \mathcal{E}_n^{\rho,a}(\theta\sqcap^i)\rangle_F = 0.$$

Доказательство.

$$0 = \langle \theta\sqcap^i, \xi_n^0(\theta\sqcap^i)\rangle_F =$$

$$= \langle \theta, \xi_n^0(\theta\sqcap^i)\rangle_F \underset{F}{+} [i]_F\langle \sqcap, \xi_n^0(\theta\sqcap^i)\rangle_F = [i]_F\langle \sqcap, \xi_n^0(\theta\sqcap^i)\rangle_F,$$

так как θ – корень из единицы степени, взаимно простой с p. Аналогично, условие $(i,p)=1$ влечет $\langle \sqcap, \xi_n^0(\theta\sqcap^i)\rangle_F = 0$. Второе равенство доказывается точно так же. □

5°. **Теорема 4.6.** *Обобщенный символ Гильберта* $\{\,,\}_F$ *совпадает со спариванием* $\langle\,,\rangle_F$.

Доказательство. Как и в предложении 4.4, достаточно проверить совпадение символа $\{\,,\}_F$ со спариванием $\langle\,,\rangle_F$ на паре $(\sqcap,\beta)$, $\beta \in M$. Разложим β по образующим, указанным в теореме 1.7, и покажем, что значения $\{\sqcap,\cdot\}_F$ и $\langle\sqcap,\cdot\rangle_F$ на этих образующих совпадают.

Действительно, теорема 1.7 говорит, что

$$\{\sqcap, \xi_n^0(\theta\sqcap^i)\}_F = \{\sqcap, \xi_n^{\rho,a}(\theta\sqcap^i)\}_F = 0,$$

а следствие из предложения 4.5, что

$$\langle \sqcap, \xi_n^0(\theta\sqcap^i)\rangle_F = \langle \sqcap, \xi_n^{\rho,a}(\theta\sqcap^i)\rangle_F = 0.$$

Кроме того, согласно теореме 1.7

$$\{\sqcap, \omega_i(b)\}_F = [\operatorname{tr} b]_F(\eta_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant h,$$

и единственное, что нам осталось доказать, это равенство

$$\langle \sqcap, \omega_i(b)\rangle_F = [\operatorname{tr} b]_F(\eta_i).$$

Для простоты положим $i=1$. Тогда по определению

$$\langle \sqcap, \omega_1(b)\rangle_F = \sum_{j=1}^{h}{}_{(F)} [\operatorname{tr}\operatorname{res} R_j]_F(\eta_j),$$

где

$$A\cdot(R_1,R_2,\ldots,R_h)^T = (x^{-1}\widehat{b}W_1, 0, \ldots, 0)^T$$

(здесь $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant h}$, $a_{ij} = \blacktriangle^{i-1}W_j$). Согласно формуле, полученной в доказательстве леммы 4.1, имеем

$$R_j = (-1)^{j+1}x^{-1}\widehat{b}\left(\Theta_j + \sum_{l_{k,i}\geqslant 0}\alpha_{l_{0,1}\dots l_{h-1,h}}\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant h-1\\1\leqslant i\leqslant h}}\blacktriangle^k\psi_i^{l_{k,i}}\right) + \pi^n\Lambda,$$

где Θ_j определен в (18). Поэтому $\operatorname{res} R_j \equiv (-1)^{j+1}\widehat{b}\Theta_j \mod \pi^n$, т.к. $\psi_i \in x\mathcal{L}_\mu^+$, т.е.

$$B(\operatorname{res} R_1, \operatorname{res} R_2, \dots, \operatorname{res} R_h)^T \equiv (\hat{b}, 0, \dots, 0)^T \mod \pi^n$$

(относительно матрицы B см. (18)). Применим теперь лемму 2.9, 1), чтобы получить сравнение

$$(\operatorname{res} R_1, \dots, \operatorname{res} R_h)^T \equiv B_1(\widehat{b}, 0, \dots, 0)^T =$$
$$= (v_1\theta_{11}\widehat{b}, v_2\theta_{12}\widehat{b}, \dots, v_h\theta_{1h}\hat{b})^T \mod \pi^n$$

(здесь $B_k = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant h}$, $b_{ij} = (\theta_{1i}v_i)^{\Delta^{j-1}}$). Лемма 2.9, 2) завершает доказательство:

$$\operatorname{tr}\operatorname{res} R_1 \equiv \operatorname{tr} b \mod \pi^n, \quad \operatorname{tr}\operatorname{res} R_j \equiv 0 \mod \pi^n \quad \text{для} \quad j \neq 1. \square$$

§5. Явная формула для обобщенного символа Гильберта

Как и раньше, для $\alpha = \sqcap^m\theta\varepsilon \in K^*$, где $m \in \mathbb{Z}$, $\theta \in \mathcal{R}$, ε – главная единица, пишем $\underline{\alpha} = x^m\theta\underline{\varepsilon}(x)$, где $\underline{\varepsilon}(x) \in \mathcal{O}_0[[x]]$, $\underline{\varepsilon}(\sqcap) = \varepsilon$, $\varepsilon(0) = 1$. Аналогично для $\beta \in M$, пусть $\underline{\beta}(x) \in \mathcal{O}[[x]]_0$, $\underline{\beta}(\sqcap) = \beta$.

Напомним, что $u = \pi - a_1\blacktriangle - \dots - a_h\blacktriangle^h$ – канонический тип F.

Теорема 5.1. *Обобщенный символ Гильберта $(\,,\,)_F$ задается явной формулой*

$$(\alpha, \beta)_F = \sum_{j=1}^h {}_{(F)}[\operatorname{tr}\operatorname{res} R_j]_F(\eta_j),$$

где $R_j \in \mathcal{L}_\mu$, $1 \leqslant j \leqslant h$, определяются из уравнения

$$\begin{pmatrix} \pi^n\lambda\circ\eta_1, & \pi^n\lambda\circ\eta_2, & \dots, & \pi^n\lambda\circ\eta_h \\ \pi^n\blacktriangle(\lambda\circ\eta_1), & \pi^n\blacktriangle(\lambda\circ\eta_2), & \dots, & \pi^n\blacktriangle(\lambda\circ\eta_h) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \pi^n\blacktriangle^{h-1}(\lambda\circ\eta_1), & \pi^n\blacktriangle^{h-1}(\lambda\circ\eta_2), & \dots, & \pi^n\blacktriangle^{h-1}(\lambda\circ\eta_h) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_h \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \Phi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi = l_F(\underline{\beta})\underline{\alpha}^{-1}\frac{d\underline{\alpha}}{dx} - \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{h} a_i \left(1 - \frac{\blacktriangle^i}{q^i}\right) \log \underline{\varepsilon} \cdot \frac{d}{dx}\blacktriangle^i(\lambda \circ \underline{\beta}).$$

Доказательство. Применим предложение 1.4 в) и теорему 4.6:

$$(\alpha, \beta)_F = \{\alpha, [\pi_1^{(n)}/\pi^n]_{F,F_n}(\beta)\}_F = \langle \alpha, [\pi_1^{(n)}/\pi^n]_{F,F_n}(\beta)\rangle_F =$$

$$= \sum_{j=1}^{h} {}_{(F)}[\operatorname{tr}\operatorname{res} R_j]_F(\eta_j),$$

где

$$\begin{pmatrix} W_1, & W_2, & \ldots, & W_h \\ \blacktriangle W_1, & \blacktriangle W_2, & \ldots, & \blacktriangle W_h \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \blacktriangle^{h-1} W_1, & \blacktriangle^{h-1} W_2, & \ldots, & \blacktriangle^{h-1} W_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (19)$$

и

$$\Phi_n = l_{F_n}\left(\left[\frac{\pi_1^{(n)}}{\pi^n}\right]_{F,F_n} \circ \underline{\beta}\right)\underline{\alpha}^{-1}\frac{d\underline{\alpha}}{dx} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{h} b_i \left(1 - \frac{\blacktriangle^i}{q^i}\right) \log \underline{\varepsilon} \cdot \frac{d}{dx}\blacktriangle^i\left(\lambda_n \circ \left[\frac{\pi_1^{(n)}}{\pi^n}\right]_{F,F_n} \circ \underline{\beta}\right).$$

Если мы проверим, что

$$\Phi_n = \frac{\pi_1^{(n)}}{\pi^n}\,\Phi, \qquad (20)$$

то вспоминая, что $(\pi^n/\pi_1^{(n)})\ W_i = \pi^n \lambda \circ \eta_i$ (см. §2, п. 2°), мы из (19) получим утверждение теоремы.

Из определения l_{F_n} (см. предложение 1.5) и равенств $u_n \pi_1^{(n)} = \pi_1^{(n)} u$ (см. лемму 1.3, б) и $[a]_{F,F_n} = \lambda_n^{-1}(a\lambda)$ следует, что

$$\left(1 - \frac{b_1}{\pi}\blacktriangle - \ldots - \frac{b_h}{\pi}\blacktriangle^h\right)\pi_1^{(n)} = (u_n \pi^{-1})\pi_1^{(n)} = \pi_1^{(n)}(u\pi^{-1}) =$$

$$= \pi_1^{(n)} \left(1 - \frac{a_1}{\pi} \blacktriangle - \ldots - \frac{a_h}{\pi} \blacktriangle^h\right)$$

и значит,

$$l_{F_n}([\pi_1^{(n)}/\pi^n]_{F,F_n} \circ \underline{\beta}) = \frac{\pi_1^{(n)}}{\pi^n} l_F(\underline{\beta})$$

и кроме того, $b_i \blacktriangle^i \pi_1^{(n)} = \pi_1^{(n)} a_i \blacktriangle^i$. Отсюда сразу получается (20). $\square$

Литература

1. E. Artin, H. Hasse, *Die beiden Ergänzungssätze zum Reziprozitätsgesetz der l^n-ten Potenzreste im Körper der l^n-ten Einheitswurzeln.* Abh. Mathem. Seminar, Hamburg, **6** (1928), 146–162.
2. E. Kummer, *Über die allgemeinen Reziprozitätsgesetze der Potenzreste.* J. reine und angew. Math., **56** (1858), 270–279.
3. K. Iwasawa, *On explicit formulas for the norm residue symbol.* J. Math. Soc. Japan, **20** (1968), 151–164.
4. S. Sen, *On explicit reciprocity laws I, II.* J. reine und angew. Math., **313** (1980), 1–26; **323** (1981), 68–87.
5. H. Brückner, *Explizites Reziprozitätsgesetz und Anwendungen.* Vorlesungen aus dem Fachbereich Mathematik der Universität Essen. (1979).
6. С. В. Востоков, *Явная форма закона взаимности.* Изв. АН СССР. Сер. матем., **42**, вып. 6 (1978), 1287–1320.
7. P. Kölcze, *Expizite Formeln für das Klassische Hilbertsymbol.* Dissertation, Universität zu Regensburg (1994).
8. И. Р. Шафаревич, *Общий закон взаимности.* Матем. сб., **26(68)**, вып. 1 (1950), 113–146.
9. I. Fesenko, S. Vostokov, *Local Fields and Their Extensions.* AMS, Providence (1993).
10. С. В. Востоков, *Явная конструкция теории полей классов для многомерных локальных полей.* Изв. АН СССР. Сер. матем., **49**, вып. 2 (1985), 283–308.
11. С. В. Востоков, *Норменное спаривание в формальных модулях.* Изв. АН СССР. Сер. матем., **43**, вып. 4 (1979), 765–794.
12. С. В. Востоков, *Символы на формальных модулях.* Изв. АН СССР. Сер. матем., **45**, вып. 5 (1981), 985–1014.
13. С. В. Востоков, *Символ Гильберта для формальных групп Любина–Тэйта I.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **114** (1982), 77–95.
14. С. В. Востоков, И. Б. Фесенко, *Символ Гильберта для формальных групп Любина–Тэйта II.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **132** (1983), 85–96.
15. И. Б. Фесенко, *Обобщенный символ Гильберта в 2-адическом случае.* Вестник Ленингр. унив., матем., мех., астрон., **18** (1985), 88–91.
16. С. В. Востоков, О. В. Демченко, *Явная форма спаривания Гильберта для относительных формальных групп Любина–Тэйта.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **227** (1995), 41–44.

17. Д. Г. Бенуа, С. В. Востоков, *Норменное спаривание в формальных группах и представления Галуа.* Алгебра и анализ, **2**, вып. 6 (1990), 71–101.
18. A. Wiles, *Higher reciprocity laws.* Ann. Math., **107** (1978), 235–254.
19. В. А. Колывагин, *Формальные группы и символ норменного вычета.* Изв. АН СССР. Сер. матем., **43** (1979), 1054–1120.
20. R. Coleman, *The dilogarithm and the norm residue symbol.* Bull. Soc. Math. France, **109** (1981), 373–402.
21. E. de Shalit, *The explicit reciprocity law in local class field theory.* Duke Math. J., **53** (1986), 163–176.
22. F. Destrempes, *Explicit reciprocity laws for Lubin–Tate modules.* J. reine und angew. Math., **463** (1995), 27–47.
23. D. Benois, *Périodes p-adiques et lois de réciprocité explicites.* J. reine und angew. Math., **493** (1997), 115–151.
24. О. В. Демченко, *Новое в отношениях формальных групп Любина–Тэйта и формальных групп Хонды.* Алгебра и анализ, **10**, вып. 5 (1998), 77–84.
25. В. А. Абрашкин, *Явные формулы для символа Гильберта формальной группы над векторами Витта.* Изв. РАН. Сер. матем., **61**, вып. 3 (1997), 3–56.
26. T. Honda, *On the theory of commutative formal groups.* J. Math. Soc. Japan, **22** (1970), 213–246.
27. A. Fröhlich, *Formal groups.* Lect. Notes Math., **74** (1968), 240.
28. О. В. Демченко, *Формальные группы Хонды: арифметика группы точек.* Алгебра и анализ, **12**, вып. 1 (2000), 115–133.
29. Д. Г. Бенуа, С. В. Востоков, *Арифметика группы точек формальной группы.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **191** (1991), 9–23.

Vostokov S. V., Demchenko O. V. The explicit formula of the Hilbert symbol for Honda formal groups.

In the present paper, we give an explicit formula for the Hilbert symbol in the case of Honda formal groups. The proof uses the Shafarevich basis and the relationship between the Lubin–Tate formal groups and Honda formal groups.

Санкт-Петербургский
Государственный университет
E:mail sergei@vostokov.usr.pu.ru

Поступило 15 мая 2000 г.