Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 271, 2000 г.

И. В. Денисова, В. А. Солонников

КЛАССИЧЕСКАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ СВЯЗАННОЙ С ДВИЖЕНИЕМ ИЗОЛИРОВАННОЙ МАССЫ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

**Посвящается памяти
Александра Васильевича Иванова**

§1. Введение

В этой работе мы начинаем исследование классической разрешимости задачи о нестационарном движении конечной массы сжимаемой баротропной жидкости с доказательства гладкости решения некой линейной задачи в полупространстве $\mathbb{R}^3_+ = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\}$. Последняя порождается нелинейной задачей со свободной границей с учетом сил поверхностного натяжения. Этот путь линеаризации был предложен в [1], где было найдено явное решение упомянутой полупространственной задачи после преобразования Фурье–Лапласа и получены его оценки в соболевских пространствах функций. Здесь мы анализируем это решение в гёльдеровских классах. Хотим отметить тот факт,что мы используем иную технику, чем метод мультипликаторов, который был применен в [2] для доказательства гладкости решения полупространственной задачи для случая несжимаемой жидкости. Мы будем развивать здесь методы, предложенные В. А. Солонниковым в [3] для доказательства разрешимости начально-краевых задач для системы Стокса в пространствах Гёльдера с пониженным показателем гладкости по временной переменной. В этой работе используются обычные дробные гёльдеровские пространства. Напомним их определение.

Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $T > 0$, $Q_T = \Omega\times(0, T)$, и пусть $\alpha \in (0, 1)$. Обозначим через $C^{\alpha,\alpha/2}(Q_T)$ пространство функций, заданных в

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ, грант No. 99-01-00108).

Q_T и имеющих конечную норму

$$|f|_{Q_T}^{(\alpha,\alpha/2)} = |f|_{Q_T} + \langle f \rangle_{Q_T}^{(\alpha,\alpha/2)},$$

где

$$|f|_{Q_T} = \sup_{(x,t)\in Q_T} |f(x,t)|, \quad \langle f \rangle_{Q_T}^{(\alpha,\alpha/2)} = \langle f \rangle_{x,Q_T}^{(\alpha)} + \langle f \rangle_{t,Q_T}^{(\alpha/2)}$$

$$\langle f \rangle_{x,Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{x,y\in\Omega} \sup_{t\in(0,T)} |f(x,t) - f(y,t)||x-y|^{-\alpha},$$

$$\langle f \rangle_{t,Q_T}^{(\beta)} = \sup_{x\in\Omega} \sup_{t,\tau\in(0,T)} |f(x,t) - f(x,\tau)|\,|t-\tau|^{-\beta}, \quad \beta \in (0,1).$$

Положим: $|f|_{x,Q_T}^{(\alpha)} = |f|_{Q_T} + \langle f \rangle_{x,Q_T}^{(\alpha)}$.

Пусть $\mathcal{D}_x^{|\mathbf{r}|} = \partial^{(\mathbf{r})}/\partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_n^{r_n}$, $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$, $r_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $|\mathbf{r}| = r_1 + \ldots + r_n$, $\mathcal{D}_t^s = \partial^s/\partial t^s$, $s \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, и пусть $k \in \mathbb{N}$. Пространство $C^{k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}}(Q_T)$ состоит из функций с конечной нормой

$$|f|_{Q_T}^{\left(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}\right)} = \sum_{|\mathbf{r}|+2s\leqslant k} |\mathcal{D}_x^{\mathbf{r}} \mathcal{D}_t^s f|_{Q_T} + \langle f \rangle_{Q_T}^{\left(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}\right)},$$

$$\langle f \rangle_{Q_T}^{\left(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}\right)} = \sum_{|\mathbf{r}|+2s=k} \langle D_x^{\mathbf{r}} D_t^s \rangle_{Q_T}^{(\alpha,\alpha/2)} + \sum_{|\mathbf{r}|+2s=k-1} \langle \mathcal{D}_x^{\mathbf{r}} \mathcal{D}_t^s f \rangle_{t,Q_T}^{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}.$$

Символом $\overset{\circ}{C}{}^{k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}}(Q_T)$ будем обозначать подпространство $C^{k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}}(Q_T)$, состоящее из функций f таких, что $\mathcal{D}_t^i f\big|_{t=0} = 0$, $i = 0, \ldots, \left[\frac{k+\alpha}{2}\right]$.

Через $C^{k+\alpha}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, обозначим пространство функций $f(x)$, $x \in \Omega$, с нормой

$$|f|_{\Omega}^{(k+\alpha)} = \sum_{|\mathbf{r}|\leqslant k} |\mathcal{D}_x^{\mathbf{r}} f|_{\Omega} + \langle f \rangle_{\Omega}^{(k+\alpha)},$$

$$\langle f \rangle_{\Omega}^{(k+\alpha)} = \sum_{|\mathbf{r}|\leqslant k} \langle \mathcal{D}_x^{\mathbf{r}} f \rangle_{\Omega}^{(\alpha)} = \sup_{x,y\in\Omega} \sum_{|\mathbf{r}|=k} |\mathcal{D}_x^{\mathbf{r}} f(x) - \mathcal{D}_y^{\mathbf{r}} f(y)|\,|x-y|^{-\alpha}.$$

Будем считать, что вектор-функция принадлежит пространству Гёльдера, если этому пространству принадлежат все компоненты этой вектор-функции. Норму вектора определим как максимум норм его компонент. Условимся обозначать вектора и пространства, которым они принадлежат, полужирным шрифтом.

Итак, мы будем изучать следующую начально-краевую задачу относительно неизвестной вектор-функции $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$$
\begin{gathered}
\mathcal{D}_t\mathbf{w} - (\nu+\nu')\nabla(\nabla\cdot\mathbf{w}) - \nu\Delta\mathbf{w} = \mathbf{f}, \quad x_3 > 0, \quad t > 0,\\
\mathbf{w}\big|_{t=0} = \mathbf{w}_0, \quad \mathbf{w} \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0,\\
-\mu\left(\frac{\partial w_\beta}{\partial x_3} + \frac{\partial w_3}{\partial x_\beta}\right)\bigg|_{x_3=0} = d_\beta(t,x'), \quad x' = (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2, \quad \beta = 1,2,\\
\mu'\nabla\cdot\mathbf{w} + 2\mu\frac{\partial w_3}{\partial x_3} + \sigma\Delta'\int_0^t w_3\,\mathrm{d}\tau\big|_{x_3=0} = d_3 + \sigma\int_0^t D\,\mathrm{d}\tau \text{ на } \mathbb{R}^2,
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

где $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$, $\Delta = \nabla\cdot\nabla$, $\Delta' = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, ν, ν', μ, μ' – положительные константы, причем $\mu = \nu\rho_0$, $\mu' = \nu'\rho_0$, $\rho_0 > 0$, константа $\sigma \geqslant 0$; $\mathbf{f}$, $\mathbf{w}_0$, $\mathrm{d} = \{d_j\}_{j=1}^3$, D – заданные функции.

Обозначим: $D_T = \mathbb{R}^3_+ \times (0,T)$, $\mathbb{R}^2_T = \mathbb{R}^2 \times (0,T)$.

Основным результатом данной работы является теорема:

Теорема 1.1. *Пусть $\alpha \in (0,1)$, $T < \infty$. Предположим, что $\mathbf{f} \in \mathbf{C}^{\alpha,\alpha/2}(D_T)$, $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3_+)$, $\mathbf{d} \in \mathbf{C}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{R}^2_T)$, $D \in C^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{R}^2_T)$. Кроме того, допустим, что все заданные функции вместе со своими производными убывают на бесконечности степенным образом и что выполнены условия согласования*

$$
\begin{gathered}
-\mu\left(\frac{\partial w_{03}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial w_{0\beta}}{\partial x_3}\right) = d_\beta(0,x'), \quad \beta = 1,2,\\
\mu'\nabla\cdot\mathbf{w}_0 + 2\mu\frac{\partial w_{03}}{\partial x_3} = d_3(0,x'), \quad x'\in\mathbb{R}^2.
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

Тогда существует единственное решение $\mathbf{w} \in \mathbf{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(D_T)$ задачи (1.1) и для него верна оценка

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{w}|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{D_T} \leqslant C(T)\big\{&|\mathbf{f}|^{(\alpha,\alpha/2)}_{D_T} + |\mathbf{w}_0|^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} +\\
&+ |\mathbf{d}|^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)}_{\mathbb{R}^2_T} + |D|^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^2_T}\big\},
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

где $C(T)$ – неубывающая функция T.

Мы начнем изучение задачи (1.1) со случая однородного уравнения и нулевого начального условия.

§2. Однородная задача (1.1)

В этом параграфе мы докажем классическую однозначную разрешимость задачи (1.1) при $\mathbf{f} = 0$, $\mathbf{w}_0 = 0$. В этом случае (1.1) переходит в задачу

$$\begin{gathered}
\mathcal{D}_t\mathbf{v} - (\nu+\nu')\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}) - \nu\Delta\mathbf{v} = 0, \quad x_3 > 0, \quad t > 0,\\
\mathbf{v}\big|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{v} \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0,\\
-\mu\left(\frac{\partial v_\beta}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_\beta}\right)\bigg|_{x_3=0} = b_\beta(t,x'), \quad \beta = 1,2, \qquad (2.1)\\
\mu'\nabla\cdot\mathbf{v} + 2\mu\frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \sigma\Delta'\int_0^t v_3\,\mathrm{d}\tau\bigg|_{x_3=0} = b_3 + \sigma\int_0^t B\,\mathrm{d}\tau \equiv b_3'(t,x').
\end{gathered}$$

Будем считать, что известные функции убывают на бесконечности степенным образом и обращаются в ноль при $t = 0$.

Решение системы (2.1) было найдено в явном виде после преобразования Фурье по касательным переменным и Лапласа по времени в [1]. Основная идея доказательства гладкости этого решения состоит в сведении задачи (2.1) к аналогичной задаче с $\sigma = 0$:

$$\mathcal{D}_t\mathbf{v} - (\nu+\nu')\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}) - \nu\Delta\mathbf{v} = 0, \quad x_3 > 0, \quad t > 0, \qquad (2.2)$$

$$\begin{gathered}
\mathbf{v}\big|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{v} \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0,\\
-\mu\left(\frac{\partial v_\beta}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_\beta}\right)\bigg|_{x_3=0} = a_\beta(t,x'), \quad \beta = 1,2, \qquad (2.3)\\
\mu'\nabla\cdot\mathbf{v} + 2\mu\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\big|_{x_3=0} = a_3(t,x'), \quad x' \in \mathbb{R}^2.
\end{gathered}$$

Уравнение (2.2) является параболической по Петровскому системой относительно v_j, $j = 1,2,3$. Для краевых условий (2.3) выполняется условие дополнительности (по Лопатинскому), поэтому согласно теореме 4.9 из [4] решение задачи (2.2), (2.3) существует и единственно. Кроме того, для него верна оценка

$$|\mathbf{v}|_{D_T}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)} \leqslant c(T)\sum_{j=1}^{3}|a_j|_{\mathbb{R}^2_T}^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)} \qquad (2.4)$$

где $c(T)$ – неубывающая функция T.

Сделаем в задачах (2.1) и (2.2), (2.3) преобразованием Фурье–Лапласа по формуле

$$\widetilde{u}(s,\xi,x_3)=\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x'}u(t,x)\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t,\quad x'=(x_1,x_2). \tag{2.5}$$

Тогда вместо (2.1), например, мы получим следующую краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}
\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{v}_\beta}{\mathrm{d}x_3^2}-\Big(\frac{s}{\nu}+\xi^2\Big)\widetilde{v}_\beta+(1+\gamma)\mathrm{i}\xi_\beta\left(\sum_{\alpha=1}^2\mathrm{i}\xi_\alpha\widetilde{v}_\alpha+\frac{\mathrm{d}v_3}{\mathrm{d}x_3}\right)=0,\quad \beta=1,2,\\
(2+\gamma)\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{v}_3}{\mathrm{d}x_3^2}-\Big(\frac{s}{\nu}+\xi^2\Big)\widetilde{v}_3+(1+\gamma)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_3}\sum_\alpha\mathrm{i}\xi_\alpha\widetilde{v}_\alpha=0,\quad x_3>0,\\
\widetilde{\mathbf{v}}(s,\xi,x_3)\underset{x_3\to+\infty}{\longrightarrow}0,\\
\frac{d\widetilde{v}_\beta}{dx_3}+\mathrm{i}\xi_\beta\,\widetilde{v}_3\Big|_{x_3=0}=\widetilde{b}_\beta,\quad \beta=1,2;\\
(2\mu+\mu')\frac{d\widetilde{v}_3}{dx_3}+\mu'\sum_\beta\mathrm{i}\xi_\beta\widetilde{v}_\beta-\frac{\sigma\xi^2}{s}\,v_3\Big|_{x_3=0}=\widetilde{b}_3+\sigma\frac{\widetilde{B}}{s}\equiv\widetilde{b}'_3,
\end{gathered} \tag{2.6}$$

где $\xi^2=\xi_1^2+\xi_2^2$, $\gamma=\frac{\nu'}{\nu}=\frac{\mu'}{\mu}$.

Решение этой системы можно найти в виде:

$$\widetilde{\mathbf{v}}=\mathbf{W}e_0+\mathbf{V}e_1,$$

где

$$\mathbf{W}=\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix},\quad \mathbf{V}=h(r-r_1)\begin{pmatrix}\mathrm{i}\xi_1\\ \mathrm{i}\xi_2\\ -r_1\end{pmatrix},$$

$$e_0=\mathrm{e}^{-rx_3},\quad e_1=\frac{\mathrm{e}^{-rx_3}-\mathrm{e}^{-r_1x_3}}{r-r_1},$$

$$r=\sqrt{\frac{s}{\nu}+\xi^2},\quad r_1=\sqrt{\frac{s}{2\nu+\nu'}+\xi^2}.$$

Мы выпишем только выражения для коэффициентов, которыми будем пользоваться (см. подробнее по этому поводу [1]). Так

$$\omega_3 = -\frac{1}{P}\{[s - 2\nu(rr_1 - \xi^2)]\sum_\beta \mathrm{i}\xi_\beta \widetilde{b}_\beta + r_1 s \widetilde{b}'_3\}.$$

Здесь $P = sM + \sigma r_1 \xi^2$, $M = \rho_0 s + \frac{4\mu(\mu+\mu')\xi^2}{2\mu+\mu'}\frac{r}{r+r_1}$.

Выразим теперь преобразованные коэффициенты $\widetilde{a}_j$, $j = 1, 2, 3$, в (2.3) через $\widetilde{b}_\beta$, $\widetilde{b}'_3$ и решение (2.6) $\widetilde{\mathbf{v}}$. Очевидно,

$$\widetilde{a}_\beta(s,\xi) = \widetilde{b}_\beta(s,\xi), \quad \beta = 1, 2,$$

$$\widetilde{a}_3 = \widetilde{b}'_3 + \frac{\sigma\xi^2}{s}\,\widetilde{v}_3\Big|_{x_3=0} = \widetilde{b}'_3 + \frac{\sigma\xi^2}{s}\omega_3 = \tag{2.7}$$

$$= \frac{\sigma\xi^2}{P}\left[1 - \frac{2(\nu+\nu')r}{(2\nu+\nu')(r+r_1)}\right]\sum_\beta \mathrm{i}\xi_\beta\widetilde{b}_\beta + \widetilde{b}_3 - \sum_{\beta=1}^{2}\frac{\sigma r_1 \mathrm{i}\xi_\beta}{P}\,\mathrm{i}\xi_\beta\widetilde{b}_3 + \frac{M}{P}\,\widetilde{B}.$$

Отметим, что аналогичный приём для оценки решения модельной задачи в полупространстве для несжимаемой жидкости был применен в [3]. Следуя этой работе, приведем несколько вспомогательных предложений.

Лемма 1. *Пусть $s \in \mathbb{C}$ такое, что*

$$\operatorname{Re} s + \varkappa|\operatorname{Im} s| \geqslant -\delta|\xi|^2,$$

где $\varkappa$ и δ малые положительные числа.

Тогда

$$c_1(|s| + |\xi|^2)^{1/2} \leqslant \operatorname{Re} r(s,\xi) \leqslant |r(s,\xi)| \leqslant c_2(|s| + |\xi|^2)^{1/2},$$

$$c_3(|s| + |\xi|^2)^{1/2} \leqslant \operatorname{Re} r_1(s,\xi) \leqslant |r_1(s,\xi)| \leqslant c_4(|s| + |\xi|^2)^{1/2}$$

$$c_5 \leqslant \operatorname{Re}\frac{r}{r+r_1} \leqslant \left|\frac{r}{r+r_1}\right| \leqslant c_6, \tag{2.8}$$

$$c_7(|s| + |\xi|^2) \leqslant |M(s,\xi)| \leqslant c_8(|s| + |\xi|^2). \tag{2.9}$$

Более того, эти неравенства сохраняются (может быть, с другими константами) и в случае, если ξ_j заменить на $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, ξ_j, $\eta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$,

$$|\eta| \leqslant \delta_1|\xi|, \tag{2.10}$$

где δ_1 – достаточно малое положительное число.

Доказательство. Неравенства (2.8) достаточно очевидны. Остановимся на оценке выражения $M(s,\xi)$. Рассмотрим сумму

$$\operatorname{Re} M + \varkappa_1|\operatorname{Im} M| \geqslant \rho_0(\operatorname{Re} s + \varkappa_1|\operatorname{Im} s|)+$$

$$+\frac{4\mu(\mu+\mu')}{2\mu+\mu'}\xi^2\left(\operatorname{Re}\frac{r}{r+r_1} - \varkappa_1\left|\operatorname{Im}\frac{r}{r+r_1}\right|\right).$$

Если $\operatorname{Re} s \geqslant 0$, то с учетом (2.8)

$$\operatorname{Re} M + \varkappa_1|\operatorname{Im} M| \geqslant \rho_0 \min(1,\varkappa_1)\,|s| + c_9|\xi|^2(c_5 - \varkappa_1 c_6).$$

Если $\operatorname{Re} s < 0$, то в этом случае $|\operatorname{Im} s| \geqslant \frac{|s|-\delta\xi^2}{\varkappa+1}$, поэтому

$$\operatorname{Re} M + \varkappa_1|\operatorname{Im} M| \geqslant -\delta|\xi|^2\rho_0 + \rho_0\frac{\varkappa_1-\varkappa}{\varkappa+1}(|s|-\delta\xi^2) + c_9|\xi|^2(c_5-\varkappa_1 c_6) =$$

$$= \rho_0\left(\frac{\varkappa_1-\varkappa}{\varkappa+1}|s| - \frac{\varkappa_1+1}{\varkappa+1}\delta\xi^2\right) + c_9\xi^2(c_5-\varkappa_1 c_6).$$

Таким образом, в любом случае при достаточно малых $\varkappa_1 > \varkappa$ и δ мы имеем:

$$\operatorname{Re} M + \varkappa_1|\operatorname{Im} M| \geqslant c_{10}(|s|+\xi^2),$$

откуда следует левая часть неравенства (2.9). Оценка $|M|$ сверху очевидна.

Необходимое неравенство для функции

$$M(s,\zeta) = \rho_0 s + \frac{4\mu(\mu+\mu')}{2\mu+\mu'}\langle\,\zeta\,\rangle^2\frac{r(s,\zeta)}{r(s,\zeta)+r_1(s,\zeta)},$$

где

$$r(s,\zeta) = \sqrt{\frac{s}{\nu} + \langle\,\zeta\,\rangle^2}, \quad r_1(s,\zeta) = \sqrt{\frac{s}{2\nu+\nu'} + \langle\,\zeta\,\rangle^2}, \quad \langle\,\zeta\,\rangle = \sqrt{\zeta_1^2+\zeta_2^2},$$

вытекает при достаточно малом δ_1 из (2.9) и из оценки

$$|M(s,\zeta) - M(s,\xi)| \leqslant c_{11}|\eta|\,|\xi| \leqslant c_{12}\delta_1|\xi|^2.$$

$\square$

Лемма 2.2. *Для* $\forall\, s \in \mathbb{C}$ *такого, что*

$$\operatorname{Re} s + \varkappa|\operatorname{Im} s| \geqslant a \gg \tau^2$$

и любых $\zeta_\beta = \xi_\beta + \mathrm{i}\eta_\beta$, $\xi_\beta, \eta_\beta \in \mathbb{R}$, $\beta = 1, 2$, *удовлетворяющих* (2.10), *выражение*

$$P^{(\tau)}(s,\zeta) = sM(s,\zeta) + \sigma\tau r_1(s,\zeta)\langle\,\zeta\,\rangle^2$$

подчиняется неравенствам

$$c_{13}(|s|(|s| + \xi^2) + \tau|r_1|\xi^2) \leqslant |P^{(\tau)}(s,\zeta)| \leqslant c_{14}(|s|(|s| + \xi^2) + \tau|r_1|\xi^2), \tag{2.11}$$

$$c_{15}(|s|(|s| + \xi^2) + \tau|r_1|\xi^2) \leqslant$$
$$\leqslant |P^{(\tau)}(s - \delta_2\langle\,\zeta\,\rangle, \zeta)| \leqslant c_{16}(|s|(|s| + \xi^2) + \tau|r_1|\xi^2), \tag{2.12}$$

если $\varkappa$, $\frac{\delta_2}{\tau}$ *и* $\frac{\tau}{\sqrt{a}}$ *– достаточно малы. Здесь константы* c_{13}*–*c_{16} *не зависят от* τ.

Доказательство. Оценим модуль отношения

$$\frac{P^{(\tau)}(s,\xi)}{M(s,\xi)} = s + \frac{\tau\sigma r_1\xi^2}{M} = s + \tau\sigma\xi^2\frac{r_1\overline{M}}{|M|^2} = s + \frac{\tau\sigma\xi^2 r_1\rho_0}{|M|^2}(\overline{s} + \overline{Q}),$$

где

$$Q = \frac{4\nu(\mu + \mu')\xi^2}{2\mu + \mu'}\,\frac{r}{r + r_1}.$$

С этой целью рассмотрим сумму

$$\operatorname{Re}\frac{P^{(\tau)}}{M} + \varkappa_1\left|\operatorname{Im}\frac{P^{(\tau)}}{M}\right| = \operatorname{Re} s + \frac{\sigma\xi^2\tau}{|M|^2}(\operatorname{Re} r_1 \operatorname{Re} M +$$
$$+ \operatorname{Im} r_1 \operatorname{Im} M) + \varkappa_1\left|\operatorname{Im} s + \frac{\sigma\xi^2\tau}{|M|^2}\operatorname{Im}(r_1\overline{M})\right|$$

с $\varkappa_1 > \varkappa$. Поскольку $\operatorname{Im} r_1 \operatorname{Im} M = \rho_0(\operatorname{Im} r_1 \operatorname{Im} s + \operatorname{Im} r_1 \operatorname{Im} Q) \geqslant 0$, то

$$\operatorname{Re}\frac{P^{(\tau)}}{M} + \varkappa_1\left|\operatorname{Im}\frac{P^{(\tau)}}{M}\right| \geqslant \operatorname{Re} s + \frac{\tau\sigma\xi^2 \operatorname{Re} r_1\rho_0}{|M|^2}[\operatorname{Re} s + \operatorname{Re} Q] + \varkappa_1|\operatorname{Im} s| -$$
$$-\varkappa_1\frac{\sigma\xi^2\tau}{|M|^2}|\operatorname{Im}(r_1\overline{M})| \geqslant$$
$$\geqslant \operatorname{Re} s(1 + R) + \varkappa_1|\operatorname{Im} s|(1 - R) - \varkappa_1 R|\operatorname{Im} Q| +$$

$$+R\operatorname{Re}Q-\varkappa_1\frac{\tau\sigma\xi^2\rho_0}{|M|^2}|\operatorname{Im}r_1|(|\operatorname{Re}s|+\operatorname{Re}Q), \tag{2.13}$$

где $R=\frac{\tau\sigma\xi^2\operatorname{Re}r_1\rho_0}{|M|^2}$.

Оценим выражение $\operatorname{Re}s+\varkappa_1|\operatorname{Im}s|$ снизу через $|s|$. Если $\operatorname{Re}s\geqslant 0$, то при $\varkappa_1\leqslant 1$ $\operatorname{Re}s+\varkappa_1|\operatorname{Im}s|\geqslant\varkappa_1|s|$. Теперь допустим, что $\operatorname{Re}s<0$. Тогда $|\arg s|>\pi/2$ и

$$|\operatorname{Im}s|=\cos(|\arg s|-\pi/2)|s|\geqslant\cos\beta\,|s|=\frac{|s|}{\sqrt{1+\varkappa^2}},$$

$$\operatorname{Re}s=-\sin(|\arg s|-\pi/2)|s|\geqslant-\sin\beta\,|s|=-\frac{\varkappa}{\sqrt{1+\varkappa^2}}|s|,$$

где $\beta=\operatorname{arctg}\varkappa$. Значит, $\operatorname{Re}s+\varkappa_1|\operatorname{Im}s|\geqslant\frac{\varkappa_1-\varkappa}{\sqrt{1+\varkappa^2}}|s|$ для любого s из условия леммы.

Далее,

$$\frac{|\operatorname{Im}r_1|}{\operatorname{Re}r_1}\leqslant\operatorname{tg}\left(\frac12|\arg s|\right)\leqslant\operatorname{tg}\left(\frac12\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\right)=\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}=$$

$$=\sqrt{1+\varkappa^2}+\varkappa\leqslant 2\quad\text{при малом }\varkappa.$$

Следовательно,

$$|\operatorname{Im}r_1|\leqslant 2\operatorname{Re}r_1.$$

Такое же неравенство верно для r и для Q.

С учетом вышеизложенного неравенство (2.13) можно продолжить следующим образом:

$$\operatorname{Re}\frac{P^{(\tau)}}{M}+\varkappa_1\left|\operatorname{Im}\frac{P^{(\tau)}}{M}\right|\geqslant\frac{(1-R)(\varkappa_1-\varkappa)}{\sqrt{1+\varkappa^2}}|s|+$$

$$+R(\operatorname{Re}Q-\varkappa_1|\operatorname{Im}Q|)-2\varkappa_1R(|\operatorname{Re}s|+\operatorname{Re}Q)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\varkappa_1-\varkappa}{\sqrt{1+\varkappa^2}}(1-R)|s|-2R\varkappa_1|s|+R(1-4\varkappa_1)\operatorname{Re}Q\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\varkappa_1}{2\sqrt{1+\varkappa^2}}(1-6R)|s|+R(1-4\varkappa_1)\operatorname{Re}Q\geqslant$$

$$\geqslant c_{17}(|s|+R|\xi|^2)\geqslant\frac{6}{7}c_{17}(|s|+R(|s|+\xi^2))$$

при $2\varkappa \leqslant \varkappa_1 < \frac{1}{4}$. В двух последних соотношениях мы использовали оценку для R:

$$R \leqslant \frac{\tau\sigma\sqrt{|s|}\,\operatorname{Re} r_1 \xi^2 \rho_0}{\min\sqrt{|s|}\,|M|^2} \leqslant c_4 \frac{(1+\varkappa^2)^{1/4}}{\sqrt{a}} \frac{\tau\sigma\sqrt{|s|}(|s|+|\xi|^2)^{1/2}|\xi|^2\rho_0}{c_7^2(|s|+|\xi|^2)^2} \leqslant \frac{1}{7},$$

если $\frac{\tau}{\sqrt{a}} \leqslant \frac{c_7^2}{7\rho_0 c_4 (1+\varkappa^2)^{1/4}\sigma}$. Здесь мы учли, что $\min|s| = \frac{a}{\sqrt{1+\varkappa^2}}$ (Он достигается в точке $\operatorname{Re} s = a - \varkappa|\operatorname{Im} s|$, $\operatorname{Im} s = \frac{\varkappa a}{1+\varkappa^2}$).

Итак,

$$\operatorname{Re}\frac{P^{(\tau)}(s,\xi)}{M(s,\xi)} + \varkappa_1 \left|\operatorname{Im}\frac{P^{(\tau)}(s,\xi)}{M(s,\xi)}\right| \geqslant c_{18}\left(|s| + \frac{\tau|r_1||\xi|^2}{|M|}\right),$$

откуда вытекает, что

$$\left|\frac{P^{(\tau)}(s,\xi)}{M(s,\xi)}\right| \geqslant \frac{c_{18}}{\varkappa_1+1}\left(|s| + \frac{\tau|r_1|\,|\xi|^2}{|M|}\right),$$

а, значит,

$$|P^{(\tau)}(s,\xi)| \geqslant c_{13}(|s|(|s|+\xi^2) + \tau|r_1|\xi^2).$$

Ввиду того, что оценка $|P^{(\tau)}(s,\xi)|$ сверху очевидна, (2.11) доказано для $P^{(\tau)}(s,\xi)$. На этом основании выводится оценка и для $P^{(\tau)}(s,\zeta)$ при малом δ_1, поскольку

$$|P^{(\tau)}(s,\zeta) - P^{(\tau)}(s,\xi)| \leqslant c|\eta|(|s|\,|\xi| + \tau|r_1|\,|\xi| + \tau|\xi|^2) \leqslant$$
$$\leqslant c\delta_1(|s|\xi^2 + \tau|r_1|\xi^2).$$

Чтобы доказать (2.12), оценим разность

$$P^{(\tau)}(s-\delta_2\langle\zeta\rangle,\zeta) - P^{(\tau)}(s,\zeta) = -\delta_2\langle\zeta\rangle\int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}P^{(\tau)}(s-\delta_2\lambda\langle\zeta\rangle,\zeta)\mathrm{d}\lambda =$$

$$= -\delta_2\langle\zeta\rangle\int_0^1\left[M(s-\delta_2\lambda\langle\zeta\rangle,\zeta) + (s-\delta_2\lambda\langle\zeta\rangle)\frac{\partial M(s-\delta_2\lambda\langle\zeta\rangle,\zeta)}{\partial s}\right]\mathrm{d}\lambda -$$

$$-\delta_2\langle\zeta\rangle\sigma\tau\langle\zeta\rangle^2\int_0^1\frac{\partial r_1(s-\delta_2\lambda\langle\zeta\rangle,\zeta)}{\partial s}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Так как

$$\operatorname{Re}(s-\delta_2\lambda\langle\zeta\rangle) + \varkappa\left|\operatorname{Im}(s-\delta_2\lambda\langle\zeta\rangle)\right| \geqslant a - c_{19}\delta_2|\xi| \geqslant$$

$$\geqslant -\delta|\xi|^2 + a - \frac{c_{19}^2\delta_2^2}{4\delta} \geqslant -\delta|\xi|^2$$

при $\frac{\delta_2}{\sqrt{a}} \leqslant \frac{2\sqrt{\delta}}{c_{19}}$, то функции $r(s-\delta_2\lambda\langle\zeta\rangle,\zeta)$, $r_1(s-\delta_2\lambda\langle\zeta\rangle,\zeta)$ и $M(s-\delta_2\lambda\langle\zeta\rangle,\zeta)$ удовлетворяют неравенствам (2.8), (2.9). Следовательно,

$$|P^{(\tau)}(s-\delta_2\langle\zeta\rangle,\zeta) - P^{(\tau)}(s,\zeta)| \leqslant c_{20}\delta_2|\xi|(|s|+|\xi|+|\xi|^2+$$

$$+\tau|\xi|) \leqslant c_{20}\left[\frac{\delta_2|s|^{3/2}|\xi|}{\min|s|^{1/2}} + \frac{\delta_2|s|\,|\xi|^2}{\min|s|} + \frac{\delta_2}{\tau}\,\tau|r_1|\,|\xi|^2 + \frac{\delta_2\tau|\xi|^2|r_1|}{\min|r_1|}\right] \leqslant$$

$$\leqslant c_{21}\max\left(\frac{\delta_2}{a},\frac{\delta_2}{\tau},\frac{\delta_2\sqrt{\nu}}{\sqrt{a}}\right)(|s|(|s|+\xi^2)+\tau|r_1|\,|\xi|^2),$$

откуда вытекает (2.12), если $\max(\dots)$ – малая величина. □

Вернемся к выражению $\widetilde{a}_j$ через $\widetilde{b}_j$ и $\widetilde{B}$. После обратного к (2.5) преобразования Фурье–Лапласа

$$(FL)^{-1}\widetilde{u} \equiv u(t,x',x_3) = \frac{1}{(2\pi)^3\mathrm{i}}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x'\cdot\xi}\int\limits_{\operatorname{Re}s=a} \mathrm{e}^{st}\widetilde{u}(s,\xi,x_3)\mathrm{d}s\mathrm{d}\xi, \quad a>0, \qquad (2.14)$$

соотношение (2.7) можно записать так

$$a_3(t,x') = b_3(t,x') + \sum_{\beta=1}^{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^2} W_\beta(t-\tau,x'-y')\frac{\partial b_3}{\partial y_\beta}(\tau,y')\mathrm{d}y'\mathrm{d}\tau +$$

$$+\sum_{\beta=1}^{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^2} W_3(t-\tau,x'-y')\frac{\partial b_\beta(\tau,y')}{\partial y_\beta}\mathrm{d}y'\mathrm{d}\tau +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^2} W_4(t-\tau,x'-y')B(\tau,y')\mathrm{d}y'\mathrm{d}\tau. \qquad (2.15)$$

Здесь

$$W_\beta = (FL)^{-1}\frac{\sigma\mathrm{i}\xi_\beta r_1}{P}, \quad \beta=1,2,$$

$$W_3 = (FL)^{-1}\frac{\sigma\xi^2}{P}\left[1 - \frac{2(\nu+\nu')}{2\nu+\nu'}\,\frac{r}{r+r_1}\right] \quad W_4 = (FL)^{-1}\frac{M}{P}.$$

Для оценки ядер W_j и их производных применим следующую лемму.

Лемма 2.3. *Для функций*

$$V_{1,k}(t,x') = (FL)^{-1}\frac{r_1(s,\xi)p_{k-1}(\xi)}{P(s,\xi)}, \quad k \geqslant 2,$$

$$V_{2,k}(t,x') = (FL)^{-1}\frac{q(r,r_1)p_k(\xi)}{P(s,\xi)}, \quad k \geqslant 1,$$

$$V_{3,k}(t,x') = (FL)^{-1}\frac{M(s,\xi)p_{k-2}(\xi)}{P(s,\xi)}, \quad k \geqslant 2,$$

где $p_k(\xi)$ – однородный полином порядка k по ξ_j, $|\xi|$, а $q(r,r_1)$ – однородная функция нулевого порядка по r, r_1, верны неравенства

$$|\mathcal{D}^{\mathbf{j}}_{x'}V_{\beta,k}(t,x')| \leqslant \frac{c_{22}(t)t^{\theta/2}}{(|x'|+t)^{k+\theta+|\mathbf{j}|}}, \quad \beta=1,2, \quad \theta\in[0,1], \tag{2.16}$$

$$|\mathcal{D}^{\mathbf{j}}_{x'}V_{3,k}(t,x')| \leqslant c_{23}(t)(|x'|+t)^{-(k+|\mathbf{j}|)},$$

$$|\mathcal{D}_t V_{\beta,k}(t,x')| \leqslant \frac{c_{24}(t)}{t^{1-\frac{\theta}{2}}(|x'|+t)^{k+\theta}} \quad \theta\in[0,1], \quad \beta=1,2 \tag{2.17}$$

при $t>0$. Здесь $c_{22}(t)-c_{24}(t)$ – возрастающие функции t. Если $t<0$, то все $V_{i,k}=0$.

Доказательство. Пусть $t>0$. Поскольку k может быть произвольно большим, а производная по x_β, $\beta=1,2$, даёт множитель $i\xi_\beta$, то (2.16) достаточно доказать только при $j=0$.

Рассмотрим для начала $V_{1,k}$. По определению

$$V_{1,k}(t,x') = \frac{1}{(2\pi)^3\mathrm{i}}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x'\cdot\xi}p_{k-1}(\xi)\int\limits_{\mathrm{Re}\,s=a}\mathrm{e}^{st}\frac{r_1(s,\xi)\mathrm{d}s}{P(x,\xi)}\,\mathrm{d}\xi. \tag{2.18}$$

Пусть a – достаточно большое положительное число. Тогда в силу неравенства (2.11) внутренний интеграл в (2.18) сходится абсолютно, более того, рассуждая, как при доказательстве леммы Жордана, не трудно показать, что значение его не изменится при замене контура интегрирования $\{\mathrm{Re}\,s=a\}$ на $l(a_1)=\{\mathrm{Re}\,s+\varkappa|\mathrm{Im}\,s|=a_1\}$ с малым $\varkappa$ и достаточно большим $a_1>0$. Имея в виду (2.12), мы можем положить $a_1=a-\delta_3|\xi|$ при достаточно малом δ_2 и показать, что

$$\int\limits_{l(a)}\mathrm{e}^{st}\frac{r_1(s,\xi)}{P(s,\xi)}\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{-\delta_3|\xi|t}\int\limits_{l(a)}\mathrm{e}^{st}\frac{r_1(s-\delta_3|\xi|,\xi)}{P(s-\delta_3|\xi|,\xi)}\,\mathrm{d}s.$$

Отсюда вытекает, что внутренний интеграл в (2.18) экспоненциально убывает при $|\xi| \to \infty$ и, следовательно, внешний интеграл сходится.

Учитывая вышесказанное, введём в (2.18) новые переменные интегрирования $s' = st$, $\xi' = \sqrt{t}\xi$, а затем опустим штрих. Это даст

$$V_{1,k}(t,x') = \frac{1}{(2\pi)^3 \mathrm{i} t^{k/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i} y\cdot\xi - \delta_3\tau|\xi|} p_{k-1}(\xi) \int\limits_{l(a)} \frac{r_1(s-\delta_3\tau|\xi|,\xi)\mathrm{e}^s}{P^{(\tau)}(s-\delta_3\tau|\xi|,\xi)}\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\xi,$$

где $y = \frac{x'}{\sqrt{t}}$, $\tau = \sqrt{t}$. Фиксируем число a так, что

$$a(t) = 1 + Kt, \qquad K \gg 1.$$

Далее, сделаем такую замену координат

$$\xi' = \mathcal{C}(y)\xi$$

с ортогональной матрицей $\mathcal{C}$, чтобы точка $\frac{y}{|y|} = \frac{(y_1,y_2)}{|y|}$ перешла в $\frac{(1,1)}{\sqrt{2}}$. Тогда $y\cdot\xi = y\cdot\mathcal{C}^T\xi' = \mathcal{C}y\cdot\xi' = \frac{|y|}{\sqrt{2}}\sum\limits_{\beta}\xi'_\beta$ и

$$V_{1,k}(t,x') = \frac{1}{(2\pi)^3 \mathrm{i} t^{k/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}|y|}{\sqrt{2}}(\xi'_1+\xi'_2) - \delta_3\tau|\xi'|} p_{k-1}(\mathcal{C}^{-1}\xi')\times$$
$$\times \int\limits_{l(a(t))} \mathrm{e}^s \frac{r_1(s-\delta_3\tau|\xi'|,\mathcal{C}^{-1}\xi')}{P^{(\tau)}(s-\delta_3\tau|\xi'|,\mathcal{C}^{-1}\xi')}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\xi'.$$

Наконец, мы деформируем контуры интегрирования по ξ'_β, переводя вещественную ось $\{-\infty < \xi'_\beta < \infty\}$ в контур $\{\zeta_\beta | \operatorname{Im}\zeta_\beta = \delta_4|\operatorname{Re}\zeta_\beta|,\ -\infty < \operatorname{Re}\zeta_\beta < \infty\}$, $\beta = 1,2$. Так как дифференциал преобразования, распрямляющего этот контур снова в вещественную ось, равен

$$\mathrm{d}\zeta_\beta = \left[\begin{array}{ll} (1+\mathrm{i}\,\delta_4)\mathrm{d}\xi_\beta, & \xi_\beta \equiv \operatorname{Re}\zeta_\beta > 0, \\ (1-\mathrm{i}\,\delta_4)\mathrm{d}\xi_\beta, & \xi_\beta \equiv \operatorname{Re}\zeta_\beta < 0, \end{array}\right.$$

то мы имеем

$$V_{1,k}(t,x') = \frac{1}{(2\pi)^3 \mathrm{i} t^{k/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}|y|}{\sqrt{2}}\sum\limits_{\beta}\xi_\beta - \frac{\delta_4|y|}{\sqrt{2}}\sum\limits_{\beta}|\xi_\beta| - \delta_3\tau\langle\zeta\rangle} p_{k-1}(\mathcal{C}^{-1}\zeta)\times$$

$$\times f(\xi) \int\limits_{l(a(t))} \mathrm{e}^s \frac{r_1(s-\delta_3\tau\langle\zeta\rangle, \mathcal{C}^{-1}\zeta)}{P^{(\tau)}(s-\delta_3\tau\langle\zeta\rangle, \mathcal{C}^{-1}\zeta)}\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}\xi, \qquad (2.19)$$

где $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$, $\zeta_\beta = \xi_\beta + \mathrm{i}\,\delta_4|\xi_\beta|$, $\langle\zeta\rangle = \sqrt{\zeta_1^2+\zeta_2^2}$, $\arg\langle\zeta\rangle \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(\xi) = (1+\mathrm{i}\,\delta_4 \operatorname{sign}\xi_1)(1+\mathrm{i}\,\delta_4\operatorname{sign}\xi_2)$. Ясно, что при малом δ_4 $\operatorname{Re}\langle\zeta\rangle \geqslant c|\xi|$.

Перейдем теперь к оценкам $V_{1,k}(t,x')$. Учитывая неравенства

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{|y|}{\sqrt{2}}\sum\xi_\beta - \delta_4\frac{|y|}{\sqrt{2}}\sum|\xi_\beta| - \delta_3\tau\langle\zeta\rangle}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-c(\delta_3,\delta_4)(|y|+\sqrt{t})|\xi|},$$

$$\frac{|f(\xi)|\left|p_{k-1}(\mathcal{C}^{-1}\zeta)\right|\left|(r_1(s-\delta_3\tau\langle\zeta\rangle, \mathcal{C}^{-1}\zeta)\right|}{\left|P^{(\tau)}(s-\delta_3\tau\langle\zeta\rangle, \mathcal{C}^{-1}\zeta)\right|} \leqslant \frac{c|\xi|^{k-1}(|s|+|\xi|^2)^{1/2}}{|s|(|s|+|\xi|^2)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c|\xi|^{k-1}}{\min\limits_s |s|^{1+\frac{\theta}{2}}|\xi|^{1-\theta}} \leqslant c|\xi|^{k-2+\theta}, \quad \forall\,\theta\in[0,1], \qquad (2.20)$$

$$|\mathrm{e}^s| \leqslant \mathrm{e}^{a(t)-\varkappa|\operatorname{Im}s|},$$

получаем

$$\left|V_{1,k}(t,x')\right| \leqslant \frac{c}{t^{k/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-c(|y|+\sqrt{t})|\xi|}\, |\xi|^{k-2+\theta} \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{a(t)-\varkappa\rho}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c\,\mathrm{e}^{1+Kt}}{t^{k/2}(|y|+\sqrt{t})^{k+\theta}} \leqslant \frac{c(t)t^{\theta/2}}{(|x'|+t)^{k+\theta}}.$$

Для функций $V_{2,k}$ неравенство (2.16) доказывается совершенно аналогично, если учесть оценку, полученную, как и (2.20), на основании (2.12) и неравенства Юнга

$$\frac{|p_k|\,|q(r,r_1)|}{|P^{(\tau)}|} \leqslant \frac{c|\xi|^k}{\min\limits_s |s|^{1+\theta/2}|\xi|^{2-\theta}} \leqslant c|\xi|^{k-2+\theta}, \quad \forall\,\theta\in[0,2].$$

Что касается функций $V_{3,k}$, то для них неравенство (2.16) верно только при $\theta = 0$. Это следует из оценки

$$\frac{|M|}{|P^{(\tau)}|} \leqslant \frac{c}{|s|} \leqslant c.$$

Производная по t от $V_{i,k}$, $i=1,2$, даёт дополнительный множитель $s-\delta_3\tau\langle\zeta\rangle$ к подынтегральным функциям в равенствах типа (2.19). Поэтому, используя вместо (2.20) неравенства

$$\frac{|s-\delta_3\tau\langle\zeta\rangle|\,|f|\,|p_{k-1}|\,|r_1|}{|P^{(\tau)}|}\leqslant$$
$$\leqslant c|\xi|^{k-1}\left(\frac{|s|\,|r_1|}{|s|(|s|+\xi^2)^{1/2}\min|s|^{1/2}}+\frac{\tau|\xi|\,|r_1|}{(|s|+\xi^2)^{1/2}|\xi|\min|s|}\right)\leqslant$$
$$\leqslant c(1+\sqrt{t})|\xi|^{k-1}$$

и

$$\frac{|s-\delta_3\tau\langle\zeta\rangle|\,|f|\,|p_{k-1}|\,|r_1|}{|P^{(\tau)}|}\leqslant$$
$$\leqslant c|\xi|^{k-1}\left(\frac{|s|\,|r_1|}{|s|(|s|+\xi^2)^{1/2}|\xi|}+\frac{\tau|\xi|\,|r_1|}{\tau|r_1|\xi^2}\right)\leqslant c|\xi|^{k-2},$$

для $\mathcal{D}_t\,V_{1,k}$ имеем

$$|\mathcal{D}_t\,V_{1,k}(t,x')|\leqslant\frac{c(t,\theta)}{t^{\frac{k}{2}+1}}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{-c(|y|+\sqrt{t})|\xi|}|\xi|^{k-2+\theta}\int\limits_0^\infty\mathrm{e}^{a(t)-\varkappa\rho}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\xi\leqslant$$
$$\leqslant\frac{c_{24}(t)}{t^{1-\theta/2}(|x'|+t)^{k+\theta}},$$

где $\theta\in[0,1]$.

Точно таким же образом неравенство (2.17) получается и для $\mathcal{D}_t\,V_{2,k}$.

Если же $t<0$, то по лемме Жордана внутренний интеграл в (2.18) равен нулю. Значит, $V_{1,k}(t,x')=0$. Из этих же соображений и $V_{2,k}=V_{3,k}=0$ при $t<0$. $\square$

Следствие 2.1. *Функции $V_{i,2}(t,x')$, $i=1,2,3$, удовлетворяют неравенствам*

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Delta_\beta^m(h)V_{i,2}(\tau,x')\mathrm{d}x'\mathrm{d}\tau\leqslant c(t)h,\quad m>1. \tag{2.21}$$

Здесь

$$\Delta_\beta^m(h)V_{i,2}(\tau,x')=\sum_{j=0}^m(-1)^{m-j}C_m^jV_{i,2}(\tau,x'+e_\beta jh)$$

– конечная разность от $V_{i,2}$ m*-го порядка по переменной* x_β, $\beta = 1, 2$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$.

Неравенство (2.21) следует из (2.16) при $\theta = 0$ (см. [3]).

Теорема 2.1. *Пусть* $\alpha \in (0, 1)$, $T > 0$. *Предположим, что функции* $b_j \in \overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{R}^2_T)$, $j = 1, 2, 3$, *и* $B \in \overset{\circ}{C}{}^{\alpha, \alpha/2}(\mathbb{R}^2_T)$ *убывают степенным образом при* $|x'| \to \infty$ *вместе со своими производными, тогда система* (2.1) *имеет решение* $\mathbf{v} \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(D_T)$ *и норма его подчиняется неравенству*

$$\left|\mathbf{v}\right|^{(2+\alpha, \frac{1+\alpha}{2})}_{D_T} \leqslant C(T)\left\{ \sum_{j=1}^{3} \left\langle b_j \right\rangle^{(1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^2_T} + \left|B\right|^{(\alpha, \alpha/2)}_{\mathbb{R}^2_T} \right\}, \tag{2.22}$$

где $C(T)$ *– неубывающая функция* T.

Доказательство. Рассмотрим $\mathbf{v}$ как решение системы (2.2), (2.3) с краевыми функциями $a_\beta = b_\beta$, $\beta = 1, 2$, и a_3, задаваемой формулой (2.15). Очевидно, что ядра W_j в (2.15) удовлетворяют неравенствам (2.16) с $k = 2$, поэтому ввиду степенного убывания ∇b_j и B интегралы в (2.15) сходятся.

Пусть $m > 1$, $i > \alpha$ – целые числа. В силу (2.21)

$$\sup_{h>0} \; h^{-(1+\alpha)} \sup_{x' \in \mathbb{R}^2} \left| \Delta^{m+i}_\beta(h) a_3(t, x') \right| \leqslant$$

$$\leqslant c\left\{ \sup_{h>0} \; h^{-(1+\alpha)} \sup_{x' \in \mathbb{R}^2} \left| \Delta^{m+i}_\beta(h) b_3(t, x') \right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{3} \sup_{h>0} h^{-\alpha} \sup_{x' \in \mathbb{R}^2} \left| \Delta^{i}_\beta(h) \nabla b_j(t, x') \right| + \sup_{h>0} h^{-\alpha} \sup_{x' \in \mathbb{R}^2} \left| \Delta^{i}_\beta(h) B(t, x') \right| \right\},$$

а значит, по теореме об эквивалентности полунорм $\langle u \rangle^{(l)}_{\mathbb{R}^2}$ и $\sum\limits_{\beta=1}^{2} \sup\limits_{h>0} h^{-l} \sup\limits_{x' \in \mathbb{R}^2} |\Delta^i_\beta(h) u(x')|$ при $i > l$ (см. [5]), получаем

$$\left\langle \nabla_{x'} a_3 \right\rangle^{(\alpha)}_{x', \mathbb{R}^2_T} \leqslant c\left\{ \sum_{j=1}^{3} \left\langle \nabla_{x'} b_j \right\rangle^{(\alpha)}_{x', \mathbb{R}^2_T} + \left\langle B \right\rangle^{(\alpha)}_{x', \mathbb{R}^2_T} \right\}. \tag{2.23}$$

Перейдем к оценкам постоянной Гёльдера функции a_3 по t. Обозначим слагаемые в (2.5) через A_i, т.е.

$$a_3(t,x') = \sum_{i=1}^{4} A_i(t,x').$$

Начнем с рассмотрения A_2. Так как ядра W_β в A_2 являются производными по x_β, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} W_\beta(t-\tau, x'-y')\,\mathrm{d}y' = 0.$$

Поэтому

$$A_2(t+h,x') - A_2(t,x') =$$

$$= \sum_\beta \Bigg\{ \int\limits_0^{t+h}\int\limits_{\mathbb{R}^2} W_\beta(t+h-\tau, x'-y')\Big(\frac{\partial b_3(\tau,y')}{\partial y_\beta} - \frac{\partial b_3(\tau,x')}{\partial x_\beta}\Big)\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}\tau -$$

$$- \int\limits_0^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^2} W_\beta(t-\tau, x'-y')\Big(\frac{\partial b_3}{\partial y_\beta} - \frac{\partial b_3}{\partial x_\beta}\Big)\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}\tau \Bigg\} =$$

$$= \sum_\beta \Bigg\{ \int\limits_{t-h}^{t+h}\int\limits_{\mathbb{R}^2} W_\beta(t+h-\tau, x'-y')\Big(\frac{\partial b_3}{\partial y_\beta} - \frac{\partial b_3}{\partial x_\beta}\Big)\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}\tau -$$

$$- \int\limits_{t-h}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^2} W_\beta(t-\tau, x'-y')\Big(\frac{\partial b_3}{\partial y_\beta} - \frac{\partial b_3}{\partial x_\beta}\Big)\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}\tau +$$

$$+ \int\limits_0^{h}\int\limits_0^{t-h}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial W_\beta(t+\lambda-\tau, x'-y')}{\partial t}\Big(\frac{\partial b_3}{\partial y_\beta} - \frac{\partial b_3}{\partial x_\beta}\Big)\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\lambda \Bigg\}.$$

Отсюда при $\theta \in (\alpha,1)$ и $h<t$, $t+h<T$ выводим

$$|A_2(t+h,x') - A_2(t,x')| \leqslant c \sup_{\tau<t+h} \big\langle \nabla b_3(\tau,\,\cdot\,)\big\rangle^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^2} \times$$

$$\times \Bigg\{ \int\limits_{t-h}^{t+h} (t+h-\tau)^{\theta/2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|x'-y'|^\alpha\,\mathrm{d}y'}{(|x'-y'|+t+h-\tau)^{2+\theta}}\,\mathrm{d}\tau +$$

$$+\int\limits_{t-h}^{\tau}(t-\tau)^{\theta/2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{|x'-y'|^{\alpha}\mathrm{d}y'}{(|x'-y'|+t-\tau)^{2+\theta}}\,\mathrm{d}\tau+$$

$$+\int\limits_0^h\int\limits_0^{t-h}(t+\lambda-\tau)^{\theta/2-1}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{|x-y'|^{\alpha}\mathrm{d}y'}{(|x'-y'|+t+\lambda-\tau)^{2+\theta}}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\lambda\Bigg\}\leqslant$$

$$\leqslant C(T)\sup_{\tau<t+h}\big\langle\nabla b_3(\tau,\,\cdot)\big\rangle^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^2}h^{1+\alpha-\theta/2}\leqslant C_1(T)\big\langle\nabla b_3\big\rangle^{(\alpha)}_{x',\mathbb{R}^2_T}h^{\frac{1+\alpha}{2}}.$$

Если $h>t$, то сразу получаем

$$\big|A_2(t+h,x')-A_2(t,x')\big|\leqslant\big|A_2(t+h,x')\big|+\big|A_2(t,x')\big|\leqslant$$

$$\leqslant c\big\langle b_3\big\rangle^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)}_{\mathbb{R}^2_T}(t+h)^{\frac{1+\alpha}{2}}\leqslant ch^{\frac{1+\alpha}{2}}\big\langle b_3\big\rangle^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)}_{\mathbb{R}^2_T}.$$

Третье слагаемое в (2.15) оценивается так же, как A_2, если учесть, что $\xi^2=-\sum_{\beta=1}^2(\mathrm{i}\xi_\beta)^2$:

$$\big|A_3(t+h,x')-A_3(t,x')\big|\leqslant ch^{\frac{1+\alpha}{2}}\sum_{\beta=1}^{2}\big\langle b_3\big\rangle^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)}_{\mathbb{R}^2_T}.$$

Далее, поскольку

$$\frac{M}{P}=\frac{1}{s}\bigg(1-\frac{\sigma r_1\xi^2}{P}\bigg),$$

то

$$\frac{\partial A_4}{\partial t}(t,x')\equiv\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^2}W_4(t-\tau,x'-y')B(\tau,y')\,\mathrm{d}y'\mathrm{d}\tau=$$

$$=B(t,x')+\sum_{\beta=1}^{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\partial W_\beta}{\partial x_\beta}(t-\tau,x'-y')B(\tau,y')\,\mathrm{d}y'\mathrm{d}\tau$$

и

$$A_4(t+h,x')-A_4(t,x')=$$

$$=\int\limits_0^h\frac{\partial A_4(t+\rho,x')}{\partial t}\mathrm{d}\rho=\int\limits_0^h B(t+\rho,x')\mathrm{d}\rho+$$

$$+\sum_{\beta=1}^{2}\int\limits_0^h\int\limits_0^{t+\rho}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\partial W_\beta}{\partial x_\beta}(t+\rho-\tau,x'-y')[B(\tau,y')-B(\tau,x')]\,\mathrm{d}y'\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\rho.$$

Значит,

$$\big|A_4(t+h,x')-A_4(t,x')\big|\leqslant h\sup_{\tau<T}|B(\tau,x')|+$$

$$+c\int\limits_0^h\int\limits_0^{t+\rho}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{|x'-y'|^\alpha\mathrm{d}y'}{(|x'-y'|+t+\rho-\tau)^3}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\rho\big\langle B\big\rangle^{(\alpha)}_{x',\mathbb{R}^2_T}\leqslant$$

$$\leqslant C(T)|B|^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^2_T}h^{\frac{1+\alpha}{2}}.$$

A_1 оценивается тривиально. Таким образом, из оценок, полученных для A_i, следует неравенство

$$\big\langle a_3\big\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,\mathbb{R}^2_T}\leqslant c(T)\bigg\{\sum_{j=1}^{3}\big\langle b_j\big\rangle^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^2_T}+\big|B\big|^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^2_T}\bigg\},$$

которое вместе с (2.23) дает

$$\big\langle a_3\big\rangle^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^2_T}\leqslant c(T)\bigg\{\sum_{j=1}^{3}\big\langle b_j\big\rangle^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^2_T}+\big|B\big|^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^2_T}\bigg\}. \tag{2.24}$$

Здесь мы учли также эквивалентность полунормы $\big\langle a_3\big\rangle^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^2_T}$ сумме полунорм $\big\langle\nabla_{x'}a_3\big\rangle^{(\alpha)}_{x',\mathbb{R}^2_T}+\big\langle a_3\big\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,\mathbb{R}^2_T}$ (см. [6, лемма2]).

Поскольку $a_3\in\overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{R}^2_T)$, что следует из (2.15) и условий теоремы, полная норма $\big|a_3\big|^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^2_T}$ эквивалентна своей старшей части $\big\langle a_3\big\rangle^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^2_T}$. В последнем нетрудно убедиться, если учесть известные неравенства:

$$\big|\nabla a_3\big|_{\mathbb{R}^2_T}\leqslant c\Big(\big\langle\nabla\alpha_3\big\rangle^{(\alpha)}_{x',\mathbb{R}^2_T}+|a_3|_{\mathbb{R}^2_T}\Big),$$

$$|a_3|_{\mathbb{R}^2_T}\leqslant T^{\frac{1+\alpha}{2}}\big\langle a_3\big\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,\mathbb{R}^2_T}+\big|a_3\big|_{t=0}\big|_{\mathbb{R}^2}.$$

Таким образом, из неравенств (2.4) и (2.24) следует (2.22).

§3. Доказательство теоремы 1.1

Пусть теперь в системе (1.1) $\mathbf{w}_0 \neq 0$, $\mathbf{f} \neq 0$.

Доказательство теоремы 1.1. Продолжим вектор $\mathbf{w}_0$ в область $\mathbb{R}^3_-$, а вектор $\mathbf{f}$ в $\mathbb{R}^3_- \times (0,T)$ с сохранением гладкости, т.е. так, что продолженные вектора $\mathbf{w}'_0 \in \mathbf{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ и $\mathbf{f}' \in \mathbf{C}^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{R}^3_T)$, $\mathbb{R}^3_T = \mathbb{R}^3 \times (0,T)$, удовлетворяют неравенствам

$$\big|\mathbf{w}'_0\big|^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3} \leqslant c\big|\mathbf{w}_0\big|^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}, \qquad \big|\mathbf{f}'\big|^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3_T} \leqslant c\big|\mathbf{f}\big|^{(\alpha,\alpha/2)}_{D_T}. \tag{3.1}$$

Решение задачи (1.1) представим в виде суммы $\mathbf{w} = \mathbf{w}' + \mathbf{w}''$, где вектор $\mathbf{w}'$ является решением задачи Коши

$$\begin{gathered} \mathcal{D}_t\mathbf{w}' - (\nu+\nu')\nabla(\nabla\cdot\mathbf{w}') - \nu\Delta\mathbf{w}' = \mathbf{f}' \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{w}'\Big|_{t=0} = \mathbf{w}'_0, \end{gathered} \tag{3.2}$$

а $\mathbf{w}''$ – решением однородной задачи (2.1) с

$$\begin{aligned} & b_\beta = d_\beta + \mu\left(\frac{\partial w'_\beta}{\partial x_3} + \frac{\partial w'_3}{\partial x_\beta}\right), \quad \beta = 1,2, \\ & b_3 = d_3 - \mu'\nabla\cdot\mathbf{w}' - 2\mu\frac{\partial w'_3}{\partial x_3}, \\ & B = D - \Delta' w'_3. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Согласно теореме 4.10 из [4] задача (3.2) однозначно разрешима и норма ее решения $\mathbf{w}' \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mathbb{R}^3_T)$ подчиняется неравенству

$$\big|\mathbf{w}'\big|^{((2+\alpha,1+\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3_T} \leqslant c\Big(\big|\mathbf{f}'\big|^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3_T} + \big|\mathbf{w}'_0\big|^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3}\Big). \tag{3.4}$$

Для того, чтобы воспользоваться теоремой 2.1 для задачи (2.1), (3.3), надо показать, что функции b_j и B равны нулю при $t=0$. Для b_j, $j=1,2,3$, это следует из условий согласования (1.2). Что касается функции B, то она, в общем случае, не обращается в ноль, поэтому возьмем вместо нее $B' = B + \mathcal{D}_t A$, где $A \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mathbb{R}^2_T)$, $A\big|_{t=0} = 0$, $\mathcal{D}_t A\big|_{t=0} = -B\big|_{t=0} \equiv \Delta' w_{03} - D\big|_{t=0}$ и

$$\big|A\big|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{\mathbb{R}^2_+} \leqslant c\Big(\big|D\big|^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^2_T} + \big|\mathbf{w}_0\big|^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}\Big).$$

При этом b_3 перейдет в $b''_3 = b_3 - \sigma A \in \overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{R}^2_T)$. Теперь мы можем заключить, что решение задачи (2.1), (3.3) существует и для него верно неравенство

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathbf{w}''\right|_{D_T}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)} \leqslant \\
&\leqslant C(T)\left\{\sum_{\beta=1}^{2}\left\langle b_\beta\right\rangle_{\mathbb{R}_T^2}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}+\left\langle b_3''\right\rangle_{\mathbb{R}_T^2}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}+\left|B'\right|_{\mathbb{R}_T^2}^{(\alpha,\alpha/2)}\right\} \leqslant \qquad (3.5)\\
&\leqslant C\left\{\sum_{j=1}^{3}\left|d_j\right|_{\mathbb{R}_T^2}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}+\left|D\right|_{\mathbb{R}_T^2}^{(\alpha,\alpha/2)}+\left|\mathbf{w}_0\right|_{\mathbb{R}_+^3}^{(2+\alpha)}+\left|\mathbf{w}'\right|_{\mathbb{R}_T^3}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}\right\}.
\end{aligned}
$$

Суммируя неравенства (3.4), (3.5) и учитывая (3.1), получаем оценку (1.3).

Единственность решения $\mathbf{w}$ доказывается на основании тривиальности убывающего решения задачи (2.1) с однородными граничными условиями совершенно тем же путем, что и в случае несжимаемой жидкости [2].

Литература

1. V. A. Solonnikov, A. Tani, *Free boundary problem for a viscous compressible flow with surface tension.* In: Constantin Carathéodory: An International Tribute, edited by Ih. M. Rassias (1991), World Scientific Publ. Co, pp. 1270–1303.
2. И. Ш. Могилевский, В. А. Солонников, *Разрешимость одной некоэрцитивной начально-краевой задачи для системы Стокса в гёльдеровских классах функций.* — Z. Anal. Anwendungen **8**(4) (1989), 329–347.
3. V. A. Solonnikov, *On the justification of the quasistationary approximation in the problem of motion of a viscous capillary drop.* — Interfaces and Free Boundaries **1** (2) (1999), 125–173.
4. В. А. Солонников, *О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида.* — Труды МИАН СССР **83** (1965), 3–162.
5. К. К. Головкин, *Об эквивалентных нормировках дробных пространств.* — Труды Матем. ин-та АН СССР **66** (1962), 364–383.
6. В. А. Солонников, *Оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса.* — Труды МИАН СССР **70** (1964), 213–317.

Denisova I. V., Solonnikov V. A. Classical solvability of a model problem in a half-space related to the motion of an isolated mass of a compressible liquid.

The unique solvability of a linear half-space problem is obtained in the Hölder classes of functions in an arbitrary finite time interval. The problem arises as a result of the linearization of a free boundary problem for the Navier–Stokes system governing the unsteady motion of a finite compressible liquid mass. The boundary conditions in the linear problem is noncoercive because of the surface tension on the free boundary. This fact is the main difficulty in the study of the problem, the equation being a parabolic system in the sense of Petrovskii with respect to the components of the velocity vector field.

The principal idea of the investigation of the noncoercive linear problem is to reduce it to a parabolic problem corresponding to the zero surface tension and to analyze integral convolution operators arising in this reduction.

Институт проблем
машиноведения РАН

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 13 ноября 2000 г.