Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 270, 2000 г.

Х. Ренельт

НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ВОСПРОИЗВОДЯЩИМИ СВОЙСТВАМИ

§1. Основная конструкция

Пусть $\mathbb{G}$ – ограниченная односвязная область, и пусть $\alpha \in \mathbb{G}$ (пока будем считать точку α фиксированной). Пусть $w(\cdot, \alpha)$ – взаимно однозначное отображение области $\mathbb{G}$ на единичный круг $\mathbb{K}$ такое, что $w(\alpha, \alpha) = 0$. Предполагается, что частные производные первого порядка функций $w(\cdot, \alpha)$ и обратной функции $z(\cdot)$ непрерывны и ограничены, соответственно, в $\mathbb{G}$ или $\mathbb{K}$. Далее, пусть S_r – образ положительно ориентированной окружности

$$K_r = \{w : |w| = r < 1\}$$

при отображении $z(\cdot)$.

Нам понадобятся еще функции F, H, P, про которые предполагается следующее:

(a) F и H определены и непрерывны в $\mathbb{G} \setminus \{\alpha\}$,

(b) $P \in L_\infty([0,1])$, $P(r) \geqslant 0$ при п.в. r из $[0,1]$ и $P(r) > 0$ на подмножестве положительной меры Лебега,

(c) $P(|w(z,\alpha)|)F(z)\dfrac{\partial |w|^2}{\partial z}, P(|w(z,\alpha)|)H(z)\dfrac{\partial |w|^2}{\partial z} \in L_1(\mathbb{G})$.

По таким F и H построим функцию

$$A(\alpha, r) := \operatorname{Re} \oint\limits_{S_r} F dz + H d\bar{z}. \tag{1}$$

Используя параметрическое представление $z(re^{i\varphi})$ кривой S_r, можем написать

$$A(\alpha, r) =$$

$$= \operatorname{Re}\ i \int\limits_0^{2\pi} [(F \circ z(w) z_w + H \circ z(w) \overline{z_{\bar{w}}}) w - (F \circ z(w) z_{\bar{w}} + H \circ z(w) \overline{z_w}) \bar{w}] d\varphi.$$

Положив

$$I(P) := \int_0^1 rP(r)dr = \frac{1}{2\pi} \int_{|w|<1} P(|w|)d\sigma_w,$$

определим

$$A(\alpha) := \frac{1}{I(P)} \int_0^1 rP(r)A(\alpha, r)dr. \tag{2}$$

Простое вычисление (одновременно доказывающее существование интеграла в (2)) дает

$$A(\alpha) = \mathrm{Re}\ \frac{i}{I(P)} \int_{\mathbb{G}} (F + \bar{H}) \frac{\partial |w(z,\alpha)|^2}{\partial \bar{z}} P(|w(z,\alpha)|)d\sigma_z. \tag{3}$$

§2. Воспроизводящие ядра для (ν, μ)-решений

В области $\mathbb{G}$ рассмотрим (ν, μ)-систему, т.е. равномерно эллиптическую систему

$$f_{\bar{z}} = \nu f_z + \mu \overline{f_z}. \tag{4}$$

Без потери общности считаем, что функции ν, μ определены на всей плоскости $\mathbb{C}$ и равны нулю вблизи точки ∞. Условие равномерной эллиптичности означает, что

$$\| |\nu| + |\mu| \|_{L_\infty} =: k < 1\,. \tag{5}$$

Вдобавок мы предполагаем, что функции ν, μ непрерывны по Гёльдеру в $\mathbb{G}$.

Пусть $f(z)$ – решение системы (4) в области $\mathbb{G}$. Предположим, что

$$f(z) \cdot P(|w(z,\alpha)|) \in L_2(\mathbb{G}), \tag{6}$$

где функция P удовлетворяет условию (b).

Обозначим через $M(z, \alpha)$ фундаментальное решение $(\nu, \overline{\mu})$-системы (см. [4, с. 87]; такие фундаментальные решения были вычислены явно К. Рёделем в [9] для некоторых классов (ν, μ)-систем, в частности, в случае, когда $\nu \equiv 0$ в $\mathbb{C}$, а функция μ аналитична или антианалитична в некотором круге и равна нулю в его дополнении).

Далее, пусть $r(\cdot)$ – произвольное $(\nu, \overline{\mu})$-решение в $\mathbb{G}$ (оно может зависеть от α), и пусть

$$m(z, \alpha) = M(z, \alpha) + r(z). \tag{7}$$

Тогда функции

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} f(z) m_z(z, \alpha), \quad H(z) = \frac{1}{2\pi i} f(z) m_{\bar{z}}(z, \alpha) \tag{8}$$

удовлетворяют условиям (a) (ибо ν, μ непрерывны по Гёльдеру в $\mathbb{G}$) и (c) (в силу (6) и включения

$$m_z(z, \alpha) \frac{\partial |w(z, \alpha)|^2}{\partial \bar{z}} \in L_2(\mathbb{G});$$

по поводу свойств функций $M(z, \alpha)$ см. [4, с. 87 и теорема II.5.2]).

Интегральная формула и интегральная теорема Коши для (ν, μ)-решений (см. [4, с. 93 и 96]) показывают, что для каждого $r \in (0, 1)$ справедлива формула

$$A(\alpha, r) = \mathrm{Re}\ \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{S_r} f(z) dm(z, \alpha) = \mathrm{Re}\ f(\alpha).$$

Следовательно, в силу (2) и (3) получаем

$$\mathrm{Re}\ f(\alpha) = \frac{1}{2\pi I} \mathrm{Re} \int\limits_{\mathbb{G}} f(z) \left[m_z \frac{\partial |w|^2}{\partial \bar{z}} - m_{\bar{z}} \frac{\partial |w|^2}{\partial z} \right] P(|w|) d\sigma_z, \tag{9}$$

где $w = w(z, \alpha)$, $m = m(z, \alpha)$, $I = I(P)$.

Чтобы получить соответствующую формулу для $\mathrm{Im}\ f(\alpha)$, положим

$$F(z) = \frac{-1}{2\pi} f(z) n_z(z, \alpha)\ , \quad H(z) = \frac{-1}{2\pi} f(z) n_{\bar{z}}(z, \alpha), \tag{10}$$

где

$$n(z, \alpha) = N(z, \alpha) + s(z), \tag{11}$$

$N(z, \alpha)$ – фундаментальное решение $(\nu, -\overline{\mu})$-системы (снова как в [4, с. 87]), а $s(z)$ – произвольное $(\nu, -\overline{\mu})$-решение в $\mathbb{G}$, для которого $s_z \in L_2(\mathbb{G})$.

Теперь, снова в силу интегральной формулы и интегральной теоремы Коши, получаем

$$\operatorname{Im} f(\alpha) =$$
$$= \operatorname{Im} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{S_r} f(z) dn(z,\alpha) = \operatorname{Re} \oint\limits_{S_r} f(z) \frac{-1}{2\pi} [n_z dz + n_{\bar z} d\bar z]. \quad (12)$$

Следовательно, в силу (2) и (3),

$$\operatorname{Im} f(\alpha) = \frac{-1}{2\pi I} \operatorname{Re} \int\limits_{\mathbb{G}} i f(z) \left[n_z \frac{\partial |w|^2}{\partial \bar z} - n_{\bar z} \frac{\partial |w|^2}{\partial z} \right] P(|w|) d\sigma_z$$
$$= \frac{1}{2\pi I} \operatorname{Im} \int\limits_{\mathbb{G}} f(z) \left[n_z \frac{\partial |w|^2}{\partial \bar z} - n_{\bar z} \frac{\partial |w|^2}{\partial z} \right] P(|w|) d\sigma_z. \quad (13)$$

Положив

$$k(z,\alpha) = m_z(z,\alpha) \frac{\partial |w|^2}{\partial \bar z} - m_{\bar z}(z,\alpha) \frac{\partial |w|^2}{\partial z},$$
$$l(z,\alpha) = n_z(z,\alpha) \frac{\partial |w|^2}{\partial \bar z} - n_{\bar z}(z,\alpha) \frac{\partial |w|^2}{\partial z}$$

и

$$\mathfrak{A}(z,\alpha) = \frac{P(|w(z,\alpha)|)}{2\pi I(P)} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\ k(z,\alpha) & -\operatorname{Im}\ k(z,\alpha) \\ \operatorname{Im}\ l(z,\alpha) & \operatorname{Re}\ l(z,\alpha) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

приходим к следующей формуле для $u = \operatorname{Re}\ f$, $v = \operatorname{Im}\ f$

$$\begin{pmatrix} u(\alpha) \\ v(\alpha) \end{pmatrix} = \int\limits_{\mathbb{G}} \mathfrak{A}(z,\alpha) \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} d\sigma_z. \quad (15)$$

Итак, если для каждой точки $\alpha \in \mathbb{G}$ найдется функция $w(z,\alpha)$, удовлетворяющая условиям, перечисленным в §1, то соответствующая функция $\mathfrak{A}(z,\alpha)$ есть воспроизводящее ядро для (ν,μ)-решений f, для которых выполнено соотношение (6).

Если граница области $\mathbb{G}$ достаточно гладкая, то в качестве $w(\cdot,\alpha)$ можно взять, например, конформное отображение области $\mathbb{G}$ на $\mathbb{K}$ такое, что $w(\alpha,\alpha) = 0$.

Разумеется, условия, наложенные выше, можно изменить, потребовав вместо ограниченности производных w_z и $w_{\bar z}$ в $\mathbb{G}$, чтобы, например, они лежали в $L_2(\mathbb{G})$. Более того, в (15) можно последовательно исключить гёльдерово условие на ν и μ с помощью аппроксимаций, как в [7, 8].

§3. Операторы дифференцирования для (ν,μ)-решений

Теперь мы хотим построить такие ядра, что соответствующие им интегральные преобразования переводят каждое (ν,μ)-решение $f(z)$ (из того или иного класса), например, в $f_z(z)$. Снова прибегнем к основной конструкции, только теперь будем использовать формулы для *производных* (ν,μ)-решений [6].

Пусть $Q(z,\alpha)$ – (-1)-ая обобщенная степень $(\nu,\overline{\mu})$-системы, а именно,

$$Q(z,\alpha) = [c_1(z-\alpha)^{-1}]_{\nu,\overline{\mu}} \quad \text{с} \quad c_1 = \frac{1-\mathfrak{b}\bar{b}}{1-|b|^2} \tag{16}$$

где $b=\omega(\kappa)$, $\mathfrak{b}=\omega(\sigma)$, $\kappa = -\mu(\alpha)/(1+|\mu(\alpha)|^2-|\nu(\alpha)|^2)$, $\sigma = \nu(\alpha)/(1+|\nu(\alpha)|^2-|\mu(\alpha)|^2)$ и $\omega(z) = 2z/(1+\sqrt{1-4|z|^2})$, см. [4, с. 73]. Пусть, далее, $t(z)$ – произвольное $(\nu,\overline{\mu})$-решение в $\mathbb{G}$, для которого $t_z \in L_2(\mathbb{G})$. Положим

$$q(z,\alpha) = Q(z,\alpha) + t(z). \tag{17}$$

На коэффициенты ν, μ наложим условия из §2, а на $w(z,\alpha)$ – из §1. Пусть функция $P(\cdot)$ удовлетворяет условию (b), а $f(\cdot)$ – (ν,μ)-решение, удовлетворяющие либо условию

$$f(z)\cdot P(|w(z,\alpha)|) \in L_\infty(\mathbb{G}), \tag{18}$$

либо

$$f \in L_2(\mathbb{G}) \quad \text{и} \quad \frac{P(r)}{r} \in L_\infty([0,1]). \tag{19}$$

В силу интегральной формулы Коши для производных [6] и интегральной теоремы Коши получаем

$$\operatorname{Re}\ f_z(\alpha) = \operatorname{Re}\ \frac{-1}{2\pi i}\oint_{S_r} f(z)dq(z,\alpha) \quad \forall r\in(0,1). \tag{20}$$

Если положить

$$F(z) = \frac{-1}{2\pi i} f(z) q_z(z,\alpha)\ , \quad H(z) = \frac{-1}{2\pi i} f(z) q_{\bar{z}}(z,\alpha), \tag{21}$$

то для соответствующей функции $A(\alpha,r)$ будет

$$A(\alpha,r) = \operatorname{Re}\ f_z(\alpha) \quad \forall r\in(0,1)$$

откуда

$$\operatorname{Re}\ f_z(\alpha) = \frac{1}{2\pi I}\operatorname{Re}\int_{\mathbb{G}} f(z)\left[q_z\frac{\partial|w|^2}{\partial\bar{z}} - q_{\bar{z}}\frac{\partial|w|^2}{\partial z}\right]P(|w|)d\sigma_z, \tag{22}$$

где $w = w(z,\alpha)$, $q = q(z,\alpha)$, $I = I(P)$. Условие (a) выполнено снова в силу непрерывности по Гёльдеру функций ν, μ в $\mathbb{G}$, а (c) вытекает из того, что в существенном (т.е. с точностью до ограниченных множителей и до слагаемых из $L_2(\mathbb{G})$) выражение в квадратных скобках под знаком интеграла ведет себя как

$$\frac{\chi_z(z)}{z-\alpha}. \tag{23}$$

Здесь χ_z – производная некоторого $\frac{1+k}{1-k}$-квазиконформного отображения плоскости $\mathbb{C}$ на себя (так что, в частности, $\chi_z \in L_p(\mathbb{G})$ при некоторых $p > 2$). Действительно, по теореме о представлении или в силу свойств обобщенных степеней (см. [5, следствие 2.3]) справедлива формула

$$Q(z,\alpha) = \frac{1}{\chi(z)},$$

где $\chi(z)$ – $\frac{1+k}{1-k}$-квазиконформное отображение плоскости $\mathbb{C}$ на себя, причем $\chi(\alpha) = 0$. Поэтому

$$Q_z(z,\alpha) = \frac{-\chi_z(z)}{(\chi(z))^2} = -\chi_z(z)(Q(z,\alpha))^2.$$

Более того, в силу гёльдеровости функций ν, μ при любом $\alpha \in \mathbb{G}$, имеем

$$Q(z,\alpha) = O(|z-\alpha|^{-1}),$$

см. [4, с. 72]. Следовательно, $q_z \dfrac{\partial |w|^2}{\partial \bar{z}}$ ведет себя как в (23), откуда вытекает (c) как в случае условия (18), так и в случае условия (19).

Чтобы получить подобное соотношение для $\operatorname{Im}\, f_z(\alpha)$, положим

$$R(z,\alpha) = [c_2(z-\alpha)^{-1}]_{\nu,-\overline{\mu}} \quad \text{с} \quad c_2 = \frac{1+\mathfrak{b}\bar{b}}{1-|b|^2}, \tag{24}$$

где b, $\mathfrak{b}$ – такие, как в (16). Пусть $\tau(z)$ – $(\nu, -\overline{\mu})$-решение в $\mathbb{G}$, причем $\tau_z \in L_2(\mathbb{G})$. Положим

$$\varrho(z,\alpha) = R(z,\alpha) + \tau(z). \tag{25}$$

Тогда

$$\operatorname{Im} f_z(\alpha) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{S_r} f(z)\, d\varrho(z,\alpha). \tag{26}$$

После этого основная конструкция с

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} f(z) \varrho_z(z,\alpha) \ , \quad H(z) = \frac{1}{2\pi} f(z) \varrho_{\bar{z}}(z,\alpha) \tag{27}$$

дает

$$\mathrm{Im}\ f_z(\alpha) = \frac{-1}{2\pi I} \mathrm{Im} \int\limits_{\mathbb{G}} f(z) \left[\varrho_z \frac{\partial |w|^2}{\partial \bar{z}} - \varrho_{\bar{z}} \frac{\partial |w|^2}{\partial z} \right] P(|w|) d\sigma_z. \tag{28}$$

Теперь положим

$$\kappa(z,\alpha) = q_z(z,\alpha) \frac{\partial |w|^2}{\partial \bar{z}} - q_{\bar{z}}(z,\alpha) \frac{\partial |w|^2}{\partial z},$$

$$\lambda(z,\alpha) = \varrho_z(z,\alpha) \frac{\partial |w|^2}{\partial \bar{z}} - \varrho_{\bar{z}}(z,\alpha) \frac{\partial |w|^2}{\partial z}$$

и

$$\mathfrak{B}(z,\alpha) = \frac{-P(|w(z,\alpha)|)}{2\pi I(P)} \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\ \kappa(z,\alpha) & -\mathrm{Im}\ \kappa(z,\alpha) \\ \mathrm{Im}\ \lambda(z,\alpha) & \mathrm{Re}\ \lambda(z,\alpha) \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Тогда для каждого (ν,μ)-решения f в области $\mathbb{G}$, которое удовлетворяет условиям (18) или (19) (для $P(\cdot)$ должно быть выполнено (b)), получаем

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\ f_z(\alpha) \\ \mathrm{Im}\ f_z(\alpha) \end{pmatrix} = \int\limits_{\mathbb{G}} \mathfrak{B}(z,\alpha) \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} d\sigma_z. \tag{30}$$

Обозначим $x = \mathrm{Re}\ z$, $y = \mathrm{Im}\ z$ и перепишем систему (4) в вещественных обозначениях:

$$\begin{aligned} v_x &= - C(x,y) u_x - D(x,y) u_y \\ v_y &= A(x,y) u_x + B(x,y) u_y \end{aligned} \tag{31}$$

(о том, как связаны ν, μ с A, B, C, D, см., например, [4, с. 44]). Из (30) сразу получается интегральное преобразование, переводящее вещественное решение (u,v) системы (31), например, в $\mathrm{grad}\ u$. Именно, переписав левую часть формулы (30) с помощью (31), получим

$$\int\limits_{\mathbb{G}} \mathfrak{B}(z,\alpha) \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} d\sigma_z = \mathfrak{D}(\alpha) \begin{pmatrix} u_x(\alpha) \\ u_y(\alpha) \end{pmatrix},$$

где
$$\mathfrak{D}(\alpha) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + A(\alpha) & B(\alpha) \\ -C(\alpha) & -(1 + D(\alpha)) \end{pmatrix}.$$

Условие (5), в частности, гарантирует, что в каждой точке $\alpha \in \mathbb{C}$ матрица $\mathfrak{D}(\alpha)$ имеет обратную $\mathfrak{D}^{-1}(\alpha)$, элементы которой ограничены в $\mathbb{C}$. Положив
$$\mathfrak{C}(z, \alpha) := \mathfrak{D}^{-1}(\alpha)\mathfrak{B}(z, \alpha),$$
получаем:
$$(\operatorname{grad} u)(\alpha) = \int\limits_{\mathbb{G}} \mathfrak{C}(z, \alpha) \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} d\sigma_z. \tag{32}$$

Подобная формула верна и для grad v.

§4. Один класс ограниченных отображений в $L_2(\mathbb{K})$

Пусть теперь $\mathbb{G} = \mathbb{K}$, а f – аналитическая функция в $\mathbb{K}$. В качестве $w(z, \alpha)$ можно взять, например,
$$w(z, \alpha) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}, \quad \alpha \in \mathbb{K}. \tag{33}$$

Предположим, что $P(\cdot)$ удовлетворяет условию (b), а на f наложено условие (6). Функция $m(z, \alpha)$, упомянутая в (7), в нашем случае ($\nu = \mu \equiv 0$) принимает вид
$$m(z, \alpha) = \log(z - \alpha) + r(z), \tag{34}$$
где $r(\cdot)$ – любая аналитическая в $\mathbb{K}$ функция, для которой $r'(\cdot) \in L_2(\mathbb{K})$.

Функцию $s(z)$ в (11) возьмем равной $r(z)$. Тогда
$$m(z, \alpha) = n(z, \alpha), \tag{35}$$
а (15) для $f(z) = u(z) + iv(z)$ принимает вид
$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi I(P)} \int\limits_{\mathbb{K}} f(z) \left[\frac{1}{z - \alpha} + r'(z) \right] w(z, \alpha)\overline{w'(z, \alpha)} P(|w(z, \alpha)|) d\sigma_z. \tag{36}$$

(Разумеется, $r'(\cdot)$ может зависеть от α.) Простое вычисление показывает, что

$$\left[\frac{1}{z-\alpha}+r'(z)\right] w(z,\alpha)\overline{w'(z,\alpha)} = \frac{1-|\alpha|^2}{1-\overline{\alpha}z}(1+(z-\alpha)r'(z))\frac{1}{(1-\alpha\bar{z})^2}$$
$$=: h(z,\alpha)\frac{1}{(1-\alpha\bar{z})^2}. \quad (37)$$

Функция $h(z,\alpha)$, определенная этим уравнением, характеризуется следующими свойствами:

(I) $h(\cdot,\alpha) \in A_2(\mathbb{K}) := \{f : f$ аналитична в $\mathbb{K}$, $f \in L_2(\mathbb{K})\}$ для каждого фиксированного $\alpha \in \mathbb{K}$.

(II) $h(\alpha,\alpha) = 1$ $\forall\alpha \in \mathbb{K}$.

Для любой такой функции $h(\cdot,\alpha)$ справедлива формула

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi I(P)}\int\limits_{\mathbb{K}} \frac{h(z,\alpha)}{(1-\alpha\bar{z})^2}f(z)P(|w(z,\alpha)|)d\sigma_z, \quad (38)$$

где f – произвольная функция, аналитическая в $\mathbb{K}$ и такая, что $f(z)P(|w(z,\alpha)|) \in L_2(\mathbb{K})$.

Пусть теперь $P(r) \equiv 1$ $\forall r \in [0,1]$. Тогда $I(P) = \frac{1}{2}$, поэтому

$$f(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{K}} \frac{h(z,\alpha)}{(1-\alpha\bar{z})^2}f(z)d\sigma_z \quad \forall f \in A_2(\mathbb{K}). \quad (39)$$

В силу (I), (II), это – просто воспроизводящее свойство ядра Бергмана $(1-\overline{\alpha}z)^{-2}$ для единичного круга, см., например, [2]. Кроме того, если $h(\cdot,\alpha) \in L_\infty(\mathbb{K})$, то, в силу (37), соответствующая функция $r'(\cdot)$ лежит в $L_\infty(\mathbb{K})$, и даже условие (c) из §1 выполняется, если лишь $f \in L_1(\mathbb{K})$. Значит, тогда формула (39) верна для $f \in A_1(\mathbb{K})$.

Теперь мы хотим интерпретировать (39) не только как известное тождество в $A_2(\mathbb{K})$ или $A_1(\mathbb{K})$, но и как отображение, заданное на всем пространстве $L_2(\mathbb{K})$.

Мы интересуемся условиями, достаточными для того, чтобы выражение

$$T(h)f(\alpha) := \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{K}} \frac{h(z,\alpha)}{(1-\alpha\bar{z})^2}f(z)d\sigma_z \quad (40)$$

определяло ограниченный оператор пространства $L_2(\mathbb{K})$ в себя.

Для начала заметим, что формула

$$T(1)f(\alpha) := \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{K}} \frac{1}{(1-\alpha\bar{z})^2} f(z)d\sigma_z \ , \quad f \in L_2(\mathbb{K}),$$

после замены $z = \frac{1}{\overline{\zeta}}$ переходит в

$$T(1)f(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\backslash\mathbb{K}} \frac{f\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right)\overline{\zeta}^{-2}}{(\zeta-\alpha)^2} d\sigma_\zeta = T\left[-f\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right)\overline{\zeta}^{-2}\chi_{\backslash\mathbb{K}}(\zeta)\right](\alpha) \qquad (41)$$

для всех $\alpha \in \mathbb{K}$, где T – комплексное преобразование Гильберта, а $\chi_{\backslash\mathbb{K}}(\cdot)$ – характеристическая функция дополнения круга $\mathbb{K}$. В силу (41), функция $T(1)f(\alpha)$ определена для п.в. $\alpha \in \mathbb{C}$, а так как T – изометрия в $L_2(\mathbb{C})$, мы получаем

$$\|T(1)f\|_{L_2(\mathbb{K})} \leqslant \|T(1)f\|_{L_2(\mathbb{C})} = \\ = \|f\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right)\overline{\zeta}^{-2}\chi_{\backslash\mathbb{K}}(\zeta)\|_{L_2(\mathbb{C})} = \|f\|_{L_2(\mathbb{K})}. \qquad (42)$$

Иногда $T(1)$ рассматривается как оператор из $L_2(\mathbb{K})$ в $L_2(\mathbb{K})$, а иногда – как оператор из $L_2(\mathbb{K})$ в $L_2(\mathbb{C})$. Если конкретный смысл не ясен из контекста, мы используем обозначения $T(1)_{\mathbb{K}}$ или $T(1)_{\mathbb{C}}$ соответственно. Подобное же соглашение применяется к $T(h)$. В силу (42) и того, что $T(1)f = f$ при $f \in A_2(\mathbb{K})$, получаем

$$\|T(1)_{\mathbb{K}}\| = \|T(1)_{\mathbb{C}}\| = 1, \qquad (43)$$

$$T(1)f(\alpha) = \chi_{\mathbb{K}}(\alpha)f(\alpha) \quad \forall f \in A_2(\mathbb{K}); \qquad (44)$$

последнее верно при всех $\alpha \in \mathbb{K}$ и п.в. $\alpha \in \backslash\mathbb{K}$ (произведение здесь и во всей статье считается равным нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю).

Предположим теперь, вдобавок к (I), (II), что функция h удовлетворяет условию:

(III) $h(z,\alpha)$ аналитична в $\mathbb{K}\times\mathbb{K}$.

Тогда $h(z,\alpha)$ раскладывается в степенной ряд

$$h(z,\alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j(z)\alpha^j \quad \forall (z,\alpha) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K}, \qquad (45)$$

где функции $h_j(\cdot)$ определены однозначно. Предположим еще, что

$$\text{(IV)} \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \|h_j(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{K})} =: C(h) < \infty \ .$$

Из условий (III) и (IV), разумеется, вытекает (I). Кроме того, они влекут следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $h(\cdot,\cdot)$ *удовлетворяет условиям* (III) *и* (IV). *Тогда оператор* $T(h)$, *определенный формулой* (40), *ограничен из* $L_2(\mathbb{K})$ *в* $A_2(\mathbb{K})$. *Если выполнено еще и* (II), *то* $T(h)$ *оставляет на месте все элементы пространства* $A_2(\mathbb{K})$.

Доказательство. Последнее утверждение верно благодаря формуле (39). Аналитичность функции $T(h)f(\alpha)$ в $\mathbb{K}$ получается мгновенно – заметим, например, что

$$\left|\frac{\partial h(z,\alpha)}{\partial \alpha}\right| = \left|\sum_{j=0}^{\infty} j h_j(z)\alpha^{j-1}\right| \leqslant \frac{C(h)}{(1-|\alpha|)^2} \quad \forall (z,\alpha) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K} \ .$$

Далее,

$$\|T(h)f\|_{L_2(\mathbb{K})} = \| \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j T\left(-h_j\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right) f\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right)\overline{\zeta}^{-2}\chi_{\setminus\mathbb{K}}(\zeta)\right)(\alpha)\|_{L_2(\mathbb{K})} \leqslant$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|T\left(h_j\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right) f\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right)\overline{\zeta}^{-2}\chi_{\setminus\mathbb{K}}\right)\|_{L_2(\mathbb{K})} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \|T\left(h_j\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right) f\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right)\overline{\zeta}^{-2}\chi_{\setminus\mathbb{K}}\right)\|_{L_2(\mathbb{C})}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \|h_j f\|_{L_2(\mathbb{K})} \leqslant C(h)\|f\|_{L_2(\mathbb{K})},$$

откуда следует ограниченность оператора $T(h)$.

Всякой функции h, удовлетворяющей условиям (II), (III) и (IV), отвечает разложение пространства $L_2(\mathbb{K})$ в прямую сумму, $L_2(\mathbb{K}) = \mathcal{A}\oplus\mathcal{B}$. Действительно, положим $f_{\mathcal{A}} = T(h)f$, $f_{\mathcal{B}} = f - T(h)f$ и

$$\mathcal{A} = \{f_{\mathcal{A}} :\ f \in L_2(\mathbb{K})\} \ , \quad \mathcal{B} = \{f_{\mathcal{B}} :\ f \in L_2(\mathbb{K})\} \ .$$

В силу теоремы 1 $\mathcal{A} = A_2(\mathbb{K})$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{0\}$ и

$$\|f_{\mathcal{A}}\|_{L_2(\mathbb{K})} \leqslant C(h)\|f\|_{L_2(\mathbb{K})}. \qquad (46)$$

Введем теперь новое скалярное произведение в $L_2(\mathbb{K})$:

$$(f,g)_h = (f_{\mathcal{A}}, g_{\mathcal{A}}) + (f_{\mathcal{B}}, g_{\mathcal{B}}), \qquad (47)$$

где $(\cdot,\cdot)$ – обычное скалярное произведение

$$(f,g) = \int\limits_{\mathbb{K}} f\bar{g}\,d\sigma$$

в $L_2(\mathbb{K})$. Для $(\cdot,\cdot)_h$ выполнено неравенство Коши–Шварца: $|(f,g)_h|^2 \leqslant (f,f)_h \cdot (g,g)_h$. Поэтому функция $\|f\|_h := \sqrt{(f,f)_h}$ – норма в $L_2(\mathbb{K})$, эквивалентная (в силу (46)) стандартной.

По отношению к скалярному произведению $(\cdot,\cdot)_h$ пространства $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ ортогональны. Далее,

$$(f, T(h)g)_h = (T(h)f, T(h)g) = (T(h)f, g)_h,$$

(в частности, $(T(h)f,f)_h \geqslant 0$). Это означает, что, если снабдить $L_2(\mathbb{K})$ скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_h$, оператор $T(h)$ становится самосопряженным и положительным.

Если $h(z,\alpha) \equiv 1$ в $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$, то $(\cdot,\cdot)_1 = (\cdot,\cdot)$. Действительно,

$$(T(1)f,g) = \int\limits_{\mathbb{K}} \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{K}} \frac{f(t)}{(1-z\bar{t})^2} d\sigma_t \right) \overline{g(z)} d\sigma_z =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{K}} \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{K}} \frac{\overline{g(z)} f(t)}{(1-z\bar{t})^2} d\sigma_z d\sigma_t = (f, T(1)g) \quad \forall f,g \in L_2(\mathbb{K}).$$

Значит,

$$(T(1)f, g - T(1)g) = (T(1)f,g) - (T(1)f, T(1)g) = 0 \quad \forall f,g \in L_2(\mathbb{K})$$

(заметим, что $T(h)^2 = T(h)$ в $L_2(\mathbb{K})$).

Таким образом, в разложении $L_2(\mathbb{K}) = A_2(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{B}(1)$, порожденном функцией 1, пространство $\mathcal{B}(1)$ – обычное ортогональное дополнение пространства $A_2(\mathbb{K})$ в $L_2(\mathbb{K})$. Однако так будет только в этом случае, ибо

если $\mathcal{B}(h_1) = \mathcal{B}(h_2)$, *то* $h_1(z,\alpha) = h_2(z,\alpha)$ *в* $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$.

Доказательство. Если для каждой функции $f \in L_2(\mathbb{K})$ существует функция $g \in L_2(\mathbb{K})$ такая, что $f - T(h_1)f = g - T(h_2)g$, то

$$f - g = T(h_1 - h_2)f + T(h_2)(f - g),$$

поэтому $f - g \in A_2(\mathbb{K})$. Значит, $T(h_1 - h_2)f \equiv 0$ при всех f из $L_2(\mathbb{K})$, что возможно лишь, если $h_1 \equiv h_2$ в $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$.

§5. Обратимость

Разумеется, в пространстве $L_2(\mathbb{K})$ операторы $T(h)$ необратимы, ибо имеют ненулевые (даже бесконечномерные) ядра $\mathcal{B}(h)$. Если, однако, рассмотреть их как отображения пространства $L_2(\mathbb{K})$ в $L_2(\mathbb{C})$, они оказываются взаимно однозначными по крайней мере для некоторых h, удовлетворяющих условиям (II), (III) и (IV), что мы собираемся сейчас показать.

Для начала, пусть $h(z, \alpha)$ удовлетворяет условиям (II), (III) и распадается в произведение: $h(z, \alpha) = \Lambda(z) \cdot \Xi(\alpha)$. В силу (II) можем написать

(V) $h(z, \alpha) = \dfrac{\Lambda(z)}{\Lambda(\alpha)}$, где $\Lambda(\cdot) \in A_2(\mathbb{K})$, $\Lambda(z) \neq 0$ в $\mathbb{K}$.

Если выполнено еще и условие (IV), то существуют положительные постоянные $d(\Lambda)$, $D(\Lambda)$ такие, что

(IV$'$) $\quad d(\Lambda) \leqslant |\Lambda(z)| \leqslant D(\Lambda) \quad \forall z \in \mathbb{K}$.

Без потери общности можно считать, что $d(\Lambda) = 1$. Легко видеть, что при условии (V) теорема 1 остается справедливой, если заменить условие (IV) условием (IV$'$) (в оценках для норм в доказательстве теоремы 1 и в (46) при этом надо заменить $C(h)$ на $D(\Lambda)$).

Чтобы интерпретировать $T(h)f$ как элемент пространства $L_2(\mathbb{C})$, нужно, чтобы функция $\Lambda(\cdot)$ была продолжена на $\setminus\mathbb{K}$. Мы предположим, что

(VI) $\quad \Lambda(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{C})$, $\quad 1 \leqslant |\Lambda(z)| \leqslant D(\Lambda)$ п.в. в $\mathbb{C}$

(например, так будет, если положить $\Lambda(z) \equiv 1$ в $\setminus\mathbb{K}$). Тогда

$$T(h)f(\alpha) = \frac{-1}{\Lambda(\alpha)} T\left(\Lambda\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right) f\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right) \overline{\zeta}^{-2} \chi_{\setminus\mathbb{K}}(\zeta)\right)(\alpha) \tag{48}$$

есть элемент пространства $L_2(\mathbb{C})$; его сужение на $\mathbb{K}$ совпадает с $T(h)f(\alpha)$ из формулы (40), и

$$\|T(h)f\|_{L_2(\mathbb{K})} \leqslant \|T(h)f\|_{L_2(\mathbb{C})} \leqslant D(\Lambda)\|f\|_{L_2(\mathbb{K})}. \tag{49}$$

Нас интересует образ пространства $L_2(\mathbb{K})$ при таком отображении $T(h)$. Так как при $p > 1$ оператор $\bar{T}$, определенный формулой

$$\bar{T}w(\cdot)(z) := \overline{T(\overline{w(\cdot)})(z)} \quad \forall w(\cdot) \in L_p(\mathbb{C}),$$

является обратным к оператору T в $L_p(\mathbb{C})$, а также в силу формулы (48), функция $g := T(h)f$ удовлетворяет равенству

$$-\bar{T}(\Lambda g)(\zeta) = \Lambda\left(\frac{1}{\overline{\overline{\zeta}}}\right) f\left(\frac{1}{\overline{\overline{\zeta}}}\right) \overline{\zeta}^{-2} \chi_{\setminus\mathbb{K}}(\zeta) \tag{50}$$

для п.в. $\zeta \in \mathbb{C}$, т.е.

$$\bar{T}(\Lambda g)(\zeta) = 0 \quad \text{для п.в. } \zeta \in \mathbb{K} \tag{51}$$

и, разумеется,

$$g(\cdot)|_{\mathbb{K}} \in A_2(\mathbb{K}) \ . \tag{52}$$

Далее, для каждой функции w из $L_2(\mathbb{C})$ аналитичной на $\mathbb{K}$ имеем

$$T\bar{w}(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{|z|>1} \frac{\overline{w(z)}}{(z-\zeta)^2} d\sigma_z \quad \forall \zeta \in \mathbb{K}.$$

Действительно,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\mathbb{D}_\varepsilon(\zeta)} \frac{\overline{w(z)}}{(z-\zeta)^2} d\sigma_z = 0$$

для $\zeta \in \mathbb{K}$, где $\mathbb{D}_\varepsilon(\zeta) = \{z : \ |z| < 1, \ |z-\zeta| > \varepsilon\}$. Значит, если g удовлетворяет условию (52), а функция Λ – условиям (IV$'$) и (V), то формула (51) эквивалентна формуле

$$\int \overline{\Lambda(z) g(z)} \chi_{\setminus\mathbb{K}}(z) \frac{1}{(z-\zeta)^2} d\sigma_z = 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{K} \tag{53}$$

(интеграл в (53) есть аналитическая функция от $\zeta \in \mathbb{K}$). В свою очередь, (53) означает, что в $L_2(\mathbb{C})$ функция Λg ортогональна функциям $\frac{\chi_{\setminus\mathbb{K}}(z)}{z^{k+1}}$, $k = 1, 2, \cdots$, т.е.

$$\int\limits_{|z|>1} \Lambda(z) g(z) \frac{1}{\bar{z}^{k+1}} d\sigma_z = 0 \quad \forall k = 1, 2, \cdots \ . \tag{54}$$

Пусть

$$L_2^{(\Lambda)} = \{g:\ g \in L_2(\mathbb{C}),\ g \ \text{ удовлетворяет (52) и (54)}\}.$$

Снабдим это пространство нормой из $L_2(\mathbb{C})$. Разумеется, $L_2^{(\Lambda)}$ замкнуто в $L^2(\mathbb{C})$, а образ пространства $L_2(\mathbb{K})$ при отображении $T(h)$ во всяком случае содержится в $L_2^{(\Lambda)}$. Но и всякая функция $g \in L_2^{(\Lambda)}$ есть образ некоторой функции $f \in L_2(\mathbb{K})$ при отображении $T(h)$, причем f однозначно определяется формулой (50).

Обратное отображение пространства $L_2^{(\Lambda)}$ в $L_2(\mathbb{K})$ тоже ограничено. В частности, из (VI) и (50) вытекает, что

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{K})} \leqslant \|\Lambda f\|_{L_2(\mathbb{K})} = \|\bar{T}\Lambda g\|_{L_2(\mathbb{C})} = \|\Lambda g\|_{L_2(\mathbb{C})} \leqslant D(\Lambda)\|g\|_{L_2(\mathbb{C})},$$

откуда (принимая во внимание (49)) получаем

$$\|T(h)\| \leqslant D(\Lambda), \quad \|T(h)^{-1}\| \leqslant D(\Lambda).$$

Разложение $L_2(\mathbb{K}) = A_2(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{B}(h)$, порожденное оператором $T(h)_{\mathbb{K}}$, переносится оператором $T(h)_{\mathbb{C}}$ в $L_2^{(\Lambda)}$, т.е.

$$L_2^{(\Lambda)} = T(h)_{\mathbb{C}} A_2(\mathbb{K}) \oplus T(h)_{\mathbb{C}} \mathcal{B}(h)\ .$$

Из специального вида функции h, свойств функции Λ, и формулы (44) получаем

$$T(h)_{\mathbb{C}} A_2(\mathbb{K}) = \{g\chi_{\mathbb{K}}:\ g \in L_2^{(\Lambda)}\},\ T(h)_{\mathbb{C}}\mathcal{B}(h) = \{g\chi_{\setminus\mathbb{K}}:\ g \in L_2^{(\Lambda)}\}\ .$$

§6. Замечание об условии Гёльдера

Условие гёльдеровости, наложенное в §§2, 3, можно было бы заменить условием $\nu, \mu \in HL_p(\mathbb{G}, \mathbb{G})$ при некотором $p > 2$ (см. [4, с. 57]), что на первый взгляд мягче. Однако в существенном оба условия оказываются эквивалентными (для открытых множеств $\mathbb{G}$), даже во всех размерностях, начиная с 2. Чтобы увидеть это, сначала расширим определение из [4, с. 57].

Определение. *Пусть G – область в $\mathbb{R}^n$, D – произвольное подмножество в G, а $p \geqslant n \geqslant 2$. Класс $HL_p(D, G)$ состоит из всех функций $f \in L_\infty(G)$, для которых*

(i) $\frac{f(x)-f(x_0)}{|x-x_0|} \in L_p(G)$ *(как функция переменной x) при любом $x_0 \in D$, и*

(ii) $\sup\{\|\frac{f(x)-f(x_0)}{|x-x_0|}\|_{L_p(G)}\ :\ x_0 \in D\ \} < \infty.$

С нормой

$$\|f\|_* := \|f\|_{L_\infty(G)} + \sup\{\|\tfrac{f(x)-f(x_0)}{|x-x_0|}\|_{L_p(G)} \ : \ x_0 \in D\}$$

$HL_p(D,G)$ становится банаховым пространством. Если $D=\{x_0\}$, $x_0\in G$, то из того, что $f\in HL_p(D,G)$, не вытекает, вообще говоря, существование предела $\lim_{x\to x_0} f(x)$; обратно, если такой предел существует и равен $f(x_0)$, то не обязательно $f\in HL_p(D,G)$. Но тривиальным образом сужение функций $f\in HL_p(D,G)$ на D непрерывно. Оно окажется даже непрерывным по Гёльдеру, если это условие на *произвольном* подмножестве $D\subseteq\mathbb{R}^n$ понимать как существование положительных постоянных K, α, $0<\alpha\leqslant 1$, таких, что

$$|f(z)-f(z')|\leqslant K|z-z'|^\alpha \quad \forall z,z'\in D\ .$$

Справедлива следующая теорема (соответствующая гипотеза была высказана в английском издании книги [4, с. 41]).

Теорема 2. *Пусть $p>n\geqslant 2$. Тогда каждая функция $f\in HL_p(D,G)$ непрерывна по Гёльдеру с показателем $\alpha=1-\frac{n}{p}$ на любом множестве $D'\subseteq D$, таком что $D'\subset\subset G$.*

Это доказывается так же, как теорема Кампанато в статье [1] (см. также Мейерс [3] и упрощенное доказательство в [10]). Именно, пусть D' – как в теореме 2, пусть $x_0\in D'$ и пусть $\mathbb{K}_r(x_0)$ – шар с центром x_0 и радиуса r, причем $0<r\leqslant\operatorname{dist}\{D',\partial G\}$. Для $f\in HL_p(D,G)$ неравенство Гёльдера дает

$$\int\limits_{\mathbb{K}_r(x_0)} |f(x)-f(x_0)|d\sigma \leqslant \|f\|_*\cdot\left(\int\limits_{\mathbb{K}_r(x_0)}|x-x_0|^q d\sigma\right)^{1/q} \quad \text{с } q=\frac{p}{p-1}\ .$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{K}_r(x_0)} |f(x)-f(x_0)|d\sigma \leqslant B r^{n+(1-\frac{n}{p})}\ , \tag{55}$$

где $B=\|f\|_*\omega_n^{1/q}\left(\frac{1}{q+n}\right)^{1/q}$, ω_n – площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$. Из (55) нужное утверждение следует как в [10] (см. доказательства теорем 1.4.1 и 1.4.2).

Литература

1. S. Campanato, *Proprietà di Hölderianità di alcune classi di funzioni.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **17** (1963), 175–188.
2. H. Meschkowski, *Hilbertsche Räume mit Kernfunktion.* Berlin, Göttingen, Heidelberg. Springer (1962).
3. N. G. Meyers, *Mean oscillation over cubes and Hölder continuity.* Proc. Amer. Math. Soc., **15** (1964), 717–721.
4. H. Renelt, *Quasikonforme Abbildungen und elliptische Systeme erster Ordnung in der Ebene.* Teubner-Texte zur Mathematik Bd. 46, Teubner Leipzig 1982 (Engl. translation Wiley 1988).
5. H. Renelt, *Generalized powers in the theory of* (ν, μ)*-solutions.* Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. **A 40** (1986), 217–235.
6. H. Renelt, *An integral formula for the derivatives of solutions of certain elliptic systems.* Ann. Polon. Math., **54** (1991), 45–57.
7. H. Renelt, *Smooth approximation of solutions of Cauchy–Riemann systems.* Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. **A 50** (1996), 191–199.
8. H. Renelt, *Mean value properties of solutions of Cauchy-Riemann systems.* Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. **A 50** (1996), 201–211.
9. K. Rödel, *Fundamentallösungen für Cauchy-Riemann-Systeme.* Preprint Nr. 07 (2000), Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Fachbereich Mathematik und Informatik, 2000.
10. F. Schulz, *Regularity Theory for Quasilinear Elliptic Systems and Monge-Ampère Equations in Two Dimensions.* Lect. Notes Math. 1445, Springer 1990.

Renelt H. Some integral transformations with reproducing properties.

By elementary considerations, families of integral transformations in certain spaces (e.g., in $L_2(\mathbb{K})$, where $\mathbb{K}$ is the unit disk) are constructed that map the elements of certain subspaces to themselves or to their derivatives, respectively. As a special case, a family of integral transformations is obtained, each of which generates a decomposition of $L_2(\mathbb{K})$ into a direct sum. By introducing appropriate new scalar products, these direct sums become orthogonal, and then the corresponding integral transformations become operators of $L_2(\mathbb{K})$ into itself that are self-adjoint and positive with respect to the new scalar products. In further special cases, these integral transformations possess bounded and injective extensions that map $L_2(\mathbb{K})$ onto certain subspaces of $L_2(\mathbb{C})$ defined explicitly. The latter is a consequence of the relationship of the above mappings with the complex Hilbert transformation.

Martin-Luther-Universität
Halle-Wittenberg, Fachbereich Mathematik und
Informatik, D-06099 Halle/S
renelt@cantor.mathematik.uni-halle.de

Поступило 28 марта 2000 г.