Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 270, 2000 г.

О. И. Рейнов

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА AP_s И p-ЯДЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ (СЛУЧАЙ $0 < s \leqslant 1$)

Мы придерживаемся стандартных обозначений геометрической теории операторов в банаховых пространствах. Классический справочник по теории операторных идеалов – монография А. Пича [7]. Обозначения и терминологию, которые мы используем, можно найти, например, в [7, 8, 10, 11]. Напомним лишь, что, если X, Y – пара банаховых пространств и $p > 0$, то через $N_p(X,Y)$ обозначается пространство всех p-ядерных операторов из X в Y, а через $X^*\widehat{\otimes}_p Y$ – ассоциированное с ним p-проективное тензорное произведение. Если J – некоторый операторный идеал, то $J^{\mathrm{reg}}(X,Y)$ обозначает пространство всех операторов T из X в Y, для которых $\pi_Y T \in J(X,Y^{**})$, где через π_Y обозначается каноническое изометрическое вложение пространства Y в его второе сопряженное Y^{**}.

В этой заметке нас, в основном, будут интересовать следующие два вопроса:

1) При каких условиях на банаховы пространства X, Y каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_p Y \to N_p(X,Y)$ взаимно однозначно?
2) При каких условиях на банаховы пространства X, Y и на положительные числа s, r, $N_s^{\mathrm{reg}}(X,Y) \subset N_r(X,Y)$?

Оба эти вопроса весьма подробно изучались, например, в работах [10, 11]. Вопрос 2) рассматривался также в [2] при $r = s = 1$ и в [8] при $r = s > 1$. При некоторых других значениях параметров p, r, s оба эти вопроса исследовались в работе [3]. Так, известная теорема А. Гротендика о 2/3 утверждает, что всегда $N_{2/3}^{\mathrm{reg}} \subset N_1$ (доказательство этого утверждения можно будет увидеть в замечании 2 ниже).

Работа выполнена при частичной поддержке Министерства общего и профессионального образования России (грант номер 97-0-1.7-36) и ФЦП "Интеграция", рег. номер 326.53

В качестве примеров отметим еще следующие факты:

a) если X, Y – произвольные банаховы пространства, то каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_{2/3}Y \to L(X,Y)$ всегда взаимно однозначно (см. [3, 9], а также следствие $1'$ ниже);

b) если каждое конечномерное подпространство E пространства Y $C(\dim E)^{\alpha}$-дополняемо в Y (где $0 < \alpha \leqslant 1/2$), то для s, $1/s = 1+\alpha$, и для каждого банахова пространства X каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_s Y \to L(X,Y)$ взаимно однозначно (см. [10]);

c) если $0 < s \leqslant 1$ и $1/s = 1/2 + 1/r$, то $N_s^{\rm reg}(X,Y) \subset N_r(X,Y)$ для любых банаховых пространств X, Y (см. [3]);

d) если $p \geqslant 1$ и $X^* \in \mathrm{AP}$, то $N_p^{\rm reg}(X,Y) \subset N_p(X,Y)$ для любого банахова пространства Y (см. [3] относительно случая $p=1$; что касается случая $p>1$, то здесь доказательство проводится по той же схеме, что и в [3], поэтому мы не станем повторяться).

Замечание 1. Аналог утверждения d) в предположении, что $Y^{**} \in \mathrm{AP}$ (вместо X^*), был сформулирован в [3] для $p=1$ и в [5] для $p>1$. Ниже мы увидим, что эти последние факты неверны (впрочем, относительно случая $p=1$ см. работу [6]).

В [10], среди прочего, показано, что утверждения (a)–(c) не могут быть улучшены "в шкале пространств l_p". Ниже мы уточним утверждения (a)–(c) для "шкалы пространств Лоренца"[1], и покажем, что полученные новые утверждения неулучшаемы и здесь.

Мы увидим также (и это, пожалуй, основное в работе), что все "отрицательные" результаты работ [8, 10], соответствующие утверждениям (a)–(d), имеют место в намного более сильных вариантах. Первый пример подобного рода "усиленного" контрпримера можно найти в статье [6], где установлено, что существует банахово пространство Z со специальными свойствами: (i) Z^{**} сепарабельно и имеет базис (а Z^{***} без свойства аппроксимации);

(ii) $N_1^{\rm reg}(Z^{**},Z) \not\subset N_1(Z^{**},Z)$.

Это – пример, показывающий, что вторая часть утверждения А. Гротендика [3] (гл.1, с. 86, предложение 15) неверна. Ниже мы

[1] Но не в самой полной общности; по существу, нас дополнительно будет интересовать лишь пространство $l_{s,\infty}$ при $s<1$; но и при рассмотрении этого случая возникают не совсем очевидные обобщения; см. например, теорему 4 ниже.

распространим указанный контрпример на случай показателей ядерности p, больших единицы и меньших двойки (но, конечно, отличных от двойки; соответствующие контрпримеры для $p > 2$ – тема последующей статьи); см. теорему 5 и ее следствие.

Ниже мы часто будем использовать следующие два факта, установленные в работе [4], – первый из них есть в точности теорема 1 в [4], а второй – следствие 1 там же (существование базиса в пространстве Z^{**} в лемме 2 вытекает из определения пространства Z в доказательстве этого следствия в [4]).

Лемма 1. *Для всякого сепарабельного банахова пространства X существуют сепарабельное банахово пространство E и линейный гомоморфизм $\psi : E^* \to X$ такие, что E^* имеет базис и $E^{**} = \psi^*(X^*) \oplus \pi_E(E)$.*

Лемма 2. *Для всякого сепарабельного банахова пространства Y существуют сепарабельное банахово пространство Z и линейный гомоморфизм $\varphi : Z^{**} \to Y$ такие, что Z^{**} имеет базис (и, следовательно, сепарабельно) и ядро гомоморфизма φ есть $\pi_Z(Z)$.*

Следствие 1. *Для всякого сепарабельного банахова пространства Y существуют сепарабельное банахово пространство Z такое, что Z^{**} имеет базис, $Z^{**}/\pi_Z(Z)$ изоморфно пространству Y, $\pi_Z(Z)^\perp$ дополняемо в Z^{***} и выполняются следующие условия:*

(a) *для любого $p \in (0,1]$ и всякого банахова пространства E тензорное произведение $E^*\widehat{\otimes}_p Y$ изоморфно пространству $E^*\widehat{\otimes}_p(Z^{**}/\pi_Z(Z))$, которое, в свою очередь, изоморфно фактор-пространству*

$$N_p\left(E, Z^{**}\right) / \left[N_p^{\mathrm{reg}}\left(E, \pi_Z(Z)\right) \bigcap \left(N_1(E, \pi_Z(Z))\right)\right];$$

(b) *для любого $p \in (0,1]$ и всякого банахова пространства E пространство $N_p(E,Y)$ изоморфно пространству $N_p\left(E, Z^{**}/\pi_Z(Z)\right)$, которое, в свою очередь, изоморфно фактор-пространству*

$$N_p\left(E, Z^{**}\right) / N_p^{\mathrm{reg}}\left(E, \pi_Z(Z)\right).$$

При этом все изоморфизмы в утверждениях (a) *и* (b) *“канонические”, то есть порождаются заданным гомоморфизмом $Z^{**} \to Z^{**}/\pi_Z(Z) \to Y$* (подробности – в доказательстве).

Доказательство. Пусть Z – из леммы 2. Обозначим для простоты $Z^{**}/\pi_Z(Z)$ через F.

Факторотображение $\psi : Z^{**} \to Z^{**}/\pi_Z(Z) = F$ индуцирует естественным образом отображение $\Psi : N_p(E, Z^{**}) \to E^*\widehat{\otimes}_p F$, $\Psi(T) := \psi \circ T$. Так как $p \leqslant 1$, то понятно, что это отображение Ψ есть отображение "на". Посмотрим, что из себя представляет ядро этого отображения.

Пусть $U \in \operatorname{Ker}\Psi$. Это означает, что для любого $A \in L(F, E^{**})$ след $\operatorname{trace} A \circ \psi \circ U$ равен нулю; или, что для любого $B \in L(Z^{**}, E^{**})$ такого, что $B|_{\pi_Z(Z)} = 0$, след $\operatorname{trace} B \circ U$ равен нулю. Отсюда вытекает, что $U(E) \subset \pi_Z(Z)$ (в противном случае найдется такой одномерный оператор $R \in L(Z^{**}, E^{**})$, что $R|\pi_Z(Z) = 0$ и $\operatorname{trace} R \circ U \neq 0$).

Итак, $U \in N_p^{\mathrm{reg}}(E, \pi_Z(Z))$. Нам надо уточнить это включение: докажем, что на самом деле $U \in N_1(E, \pi_Z(Z))$. Предположим, что $U \notin N_1(E, \pi_Z(Z))$. Тогда найдется такой оператор $B \in L(Z^{**}, E^{**})$, что $\operatorname{trace} B \circ U = 1$, но $\operatorname{trace} B \circ T = 0$ для любого $T \in N_1(E, \pi_Z(Z))$. Так как $\pi_Z(Z)$ обладает свойством аппроксимации Гротендика, то из последнего вытекает, что $B|_{\pi_Z(Z)} = 0$, что противоречит выбору и свойствам U. Итак, $U \in N_1(E, \pi_Z(Z))$. С другой стороны, очевидно, что для любых $V \in N_1(E, \pi_Z(Z))$ и $B \in L(Z^{**}, E^{**})$, где $B|_{\pi_Z(Z)} = 0$, имеем: $\operatorname{trace} B \circ V = 0$. Поэтому $\operatorname{Ker}\Psi = N_p^{\mathrm{reg}}(E, \pi_Z(Z)) \cap (N_1(E, \pi_Z(Z)))$. Отсюда вытекает утверждение (a).

Рассмотрим теперь факторотображение

$$\Psi_0 : N_p(E, Z^{**}) \xrightarrow{\Psi} E^*\widehat{\otimes}_p F \xrightarrow{j} N_p(E, F),$$

где j – каноническое факторотображение. Ядро $\operatorname{Ker}\Psi_0$ состоит из всех тех операторов $U \in N_p(E, Z^{**})$, которые превращаются в тождественный нуль после действия факторизации $\psi : Z^{**} \to F$, то есть из тех U, для которых $U(E) \subset \operatorname{Ker}\psi = \pi_Z(Z)$. Это и означает, что $\operatorname{Ker}\Psi_0 = N_p^{\mathrm{reg}}(E, \pi_Z(Z))$. ■

Отметим любопытный "побочный" эффект наших рассуждений (это, конечно, "выстрел из пушки по воробьям").

Следствие $1'$ (А. Гротендик [3]). *Если $p \in (0, 2/3]$, то $G^*\widehat{\otimes}_p Y = N_p(G, Y)$ для любых банаховых пространств G и Y (то есть факторизации при каноническом фактор-отображении $G^*\widehat{\otimes}_p Y \to N_p(G, Y)$ не происходит).*

Доказательство. Ясно, что можно ограничиться рассмотрением лишь сепарабельных пространств[2]. Если $p \leqslant 2/3$, то всякий оператор $U \in N_p^{\mathrm{reg}}(G, \pi_Z(Z))$, где Z – из леммы 2 (или, что то же самое, из следствия 1), факторизуется через ядерный диагональный оператор (см. ниже замечание 2) и, следовательно, сам является ядерным. Поэтому $N_p^{\mathrm{reg}}(G, \pi_Z(Z)) \cap (N_1(G, \pi_Z(Z))) = N_p^{\mathrm{reg}}(G, \pi_Z(Z))$, и применимо следствие 1. ■

Напомним, что банахово пространство X обладает свойством аппроксимации порядка p, $p \in (0, +\infty]$, (коротко, $X \in \mathrm{AP}_p$), если для каждого банахова пространства Z каноническое отображение $Z^* \widehat{\otimes}_p X \to L(Z, X)$ является взаимно однозначным (см., например, [8, 10]). Для пары пространств X, Y и числа $s \in (0,1)$ обозначим через $Y^* \widehat{\otimes}_{s,\infty} X$ линейное пространство, состоящее из тензоров $z \in Y^* \widehat{\otimes}_1 X$ (проективное тензорное произведение), допускающих представление вида

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \, y_k' \otimes x_k, \quad \text{где} \quad \lambda_k \searrow, \, \lambda_k^s = o(1/k), \quad \|y_k'\| \, \|x_k\| = 1.$$

Определение 1. *Банахово пространство обладает свойством* $\mathrm{AP}_{s,\infty}$, *где* $s \in (0,1]$, *если для любого банахова пространства* Z *каноническое отображение* $Z^* \widehat{\otimes}_{s,\infty} X \to L(Z, X)$ *взаимно однозначно (иными словами,* $Z^* \widehat{\otimes}_{s,\infty} X = N_{s,\infty}(Z, X)$; *мы опускаем очевидное определение операторного пространства справа).*

Отметим, что пространство X обладает свойством $\mathrm{AP}_{s,\infty}$ тогда и только тогда, когда взаимно однозначным является каноническое отображение $X^* \widehat{\otimes}_{s,\infty} X \to L(X, X)$; в этом случае $X^* \widehat{\otimes}_{s,\infty} X = N_{s,\infty}(X, X)$.

Теорема 1. 1) *Пусть* $\alpha \in (0, 1/2]$, $C > 0$, *и* X – *банахово пространство. Если каждое конечномерное подпространство* E *пространства* X $C(\dim E)^{\alpha}$-*дополняемо в* X, *то* $X \in \mathrm{AP}_{s,\infty}$, *где* $1/s = 1 + \alpha$. *В частности* (надо взять $\alpha = 1/2$), *всякое банахово пространство обладает свойством* $\mathrm{AP}_{2/3,\infty}$, *а если* X *является подпространством или факторпространством некоторого пространства* $L^p(\mu)$, *где* $p \in (1, +\infty)$, $p \neq 2$, *то* $X \in \mathrm{AP}_{s,\infty}$ $(1/s = 1 + |1/p - 1/2|)$.

[2] Для всякого сепарабельного $H \subset G^*$ существует такое сепарабельное $G_0 \subset G$, что для тождественного вложения $j : G_0 \to G$ оператор $j^*\big|_H \to G_0^*$ есть изометрическое вложение.

2) *Для каждого* $s \in [2/3, 1)$ *существует такое сепарабельное рефлексивное пространство* Y, *что* $Y \in \mathrm{AP}_{s,\infty}$, *но* $Y \notin \mathrm{AP}_r$ *каково бы ни было* $r \in (s, 1]$.

Доказательство части 2) теоремы совершенно аналогично доказательству утверждений 1) и 2) теоремы 5.4 в [10]; доказательство этой последней дословно переносится на наш случай, только вместо леммы 5.1 из [10] надо использовать такое усиление части 1 нашей теоремы 1.

Предложение 1. *Пусть* $\alpha \in (0, 1/2]$, $C > 0$, *и* X *– банахово пространство. Предположим, что для каждого конечномерного подпространства* E *пространства* X *найдется такое конечномерное подпространство* E, $E \subset F \subset X$, *что* F *является* $C(\dim E)^{\alpha}$*-дополняемым в* X. *Тогда* $X \in \mathrm{AP}_{s,\infty}$, *где* $1/s = 1 + \alpha$.

Здесь снова достаточно сослаться на статью [10]. Наше предложение 1, по существу, доказано в работе [10], лемма 5.1: нетрудно увидеть, что основное, что использовалось в этом доказательстве, – это принадлежность соответствующего тензора z проективному тензорному произведению (в настоящей работе все тензоры таковы) и оценка $\lambda_j^s = o(j^{-1})$ для коэффициентов z из доказательства упомянутой леммы 5.1. Мы отсылаем читателя за подробностями к работе [10].

Теорема 2. 1) *Пусть* $s \in (0, 1)$. *Если* $X^* \in \mathrm{AP}_{s,\infty}$ *или* $Y^{***} \in \mathrm{AP}_{s,\infty}$, *то* $N_{s,\infty}^{\mathrm{reg}}(X, Y) \subset N_1(X, Y)$. *В частности, для любых банаховых пространств* X *и* Y *имеем:* $N_{2/3,\infty}^{\mathrm{reg}}(X, Y) \subset N_1(X, Y)$.

2) *Существует банахово пространство* Z, *обладающее следующими свойствами:*

(i) Z^{**} *имеет базис (следовательно,* $Z^{**} \in \mathrm{AP}$*);*

(ii) *для каждого* $s \in (2/3, 1]$ *имеем* $N_s^{\mathrm{reg}}(Z^{**}, Z) \not\subset N_1(Z^{**}, Z)$.

Таким образом, аппроксимационные условия, наложенные на X *и* Y *в* 1), *существенны.*

Доказательство. 1) Предположим, что существует такой оператор $T \in L(X, Y)$, что $T \notin N_1(X, Y)$, но $\pi_Y T \in N_{s,\infty}(X, Y^{**})$. Так как либо X^*, либо Y^{**} обладает свойством $\mathrm{AP}_{s,\infty}$, то $N_{s,\infty}(X, Y^{**}) = X^* \widehat{\otimes}_{s,\infty} Y^{**}$. Следовательно, оператор $\pi_Y T$ можно отождествить с тензорным элементом $t \in X^* \widehat{\otimes}_{s,\infty} Y^{**} \subset X^* \widehat{\otimes}_1 Y^{**}$; при этом

$t \notin X^*\widehat{\otimes}_1 Y$ по выбору T (как обычно, $X^*\widehat{\otimes}_1 Y$ рассматривается как подпространство пространства $X^*\widehat{\otimes}_1 Y^{**}$). Следовательно, существует такой оператор $U \in L(Y^{**}, X^{**}) = \left(X^*\widehat{\otimes}_1 Y^{**}\right)^*$, что $\operatorname{trace} U \circ t = \operatorname{trace}(t^* \circ (U^*|_{X^*})) = 1$ и $\operatorname{trace} U \circ \pi_Y \circ z = 0$ для любого $z \in X^*\widehat{\otimes}_1 Y$. Из последнего вытекает, в частности, что $U\pi_Y = 0$ и $\pi_Y^* U^*|_{X^*} = 0$. Действительно, если $x' \in X^*$ и $y \in Y$, то

$$< U\pi_Y\, y, x' >=< y, \pi_Y^*\, U^*|_{X^*} x' >= \operatorname{trace}\, U \circ (x' \otimes \pi_Y(y)) = 0.$$

Очевидно, что тензорный элемент $U \circ t$ порождает оператор $U\pi_Y T$, который тождественно равен нулю.

Если $X^* \in \mathrm{AP}_{s,\infty}$, то $X^*\widehat{\otimes}_{s,\infty} Y^{**} = N_{s,\infty}(X, Y^{**})$ и, значит, этот тензорный элемент нулевой, что противоречит равенству $\operatorname{trace} U \circ t = 1$.

Пусть теперь $Y^{***} \in \mathrm{AP}_{s,\infty}$. В этом случае оператор

$$V := (U^*|_{X^*}) \circ T^* \circ \pi_Y^* : Y^{***} \to Y^* \to X^* \to Y^{***}$$

однозначно определяет некоторый тензорный элемент $t_0 \in Y^{****}\widehat{\otimes}_{s,\infty} Y^{***}$. Возьмем какое-либо представление $t = \sum x_n' \otimes y_n''$ для t как элемента пространства $X^*\widehat{\otimes}_{s,\infty} Y^{**}$. Обозначив для краткости оператор $U^*|_{X^*}$ через U_*, получаем:

$$V y''' = U_*\ (T^* \pi_Y^*\, y''') = U_*\ ((T^* \pi_Y^* \pi_{Y^*})\, \pi_Y^*\, y''') =$$

$$= U_*\ (((\pi_Y T)^*\, \pi_{Y^*})\, \pi_Y^*\, y''') =$$

$$= U_*\ \left(\left(\left(\sum y_n'' \otimes x_n'\right)\ \pi_{Y^*}\right)\ \pi_Y^*\, y'''\right) = U_*\ \left(\sum < y_n'', \pi_Y^*\, y''' >\ x_n'\right) =$$

$$= \sum < \pi_Y^{**} y_n'', y''' >\ U_* x_n'.$$

Итак, оператор V (или элемент t_0) имеет в пространстве $Y^{****}\widehat{\otimes}_{s,\infty} Y^{***}$ представление

$$V = \sum \pi_Y^{**}(y_n'') \otimes U_*(x_n').$$

Следовательно,

$$\operatorname{trace} t_0 = \operatorname{trace} V = \sum < \pi_Y^{**}(y_n''), U_*(x_n') >=$$

$$= \sum < y_n'', \pi_Y^*\, U_* x_n' >= \sum 0 = 0.$$

С другой стороны,

$$Vy''' = U_* \, (\pi_Y T)^* \, y''' = U_* \circ t^*(y''') =$$

$$= U_* \, \left(\sum < y_n'', y''' > \, x_n' \right) = \sum < y_n'', y''' > \, U_* x_n',$$

откуда $V = \sum y_n'' \otimes U_*(x_n')$. Поэтому

$$\operatorname{trace} t_0 = \operatorname{trace} V = \sum < y_n'', U_* x_n' > =$$

$$= \sum < U y_n'', x_n' > = \operatorname{trace} U \circ t = 1.$$

Полученное противоречие завершает доказательство первой части пункта 1). Случай $s = 3/2$ сводится к применению только что доказанного утверждения и первой части теоремы 1.

2) Хорошо известно, что существует сепарабельное рефлексивное банахово пространство X и ненулевой тензорный элемент $z \in X^* \widehat{\otimes}_1 X$ такие, что $z \in X^* \widehat{\otimes}_s X$ для всех $s > 2/3$, но ассоциированный оператор $\widetilde{z}$ есть тождественный нуль (см., например, [1], [7]). Таким образом, для любого $s \in (0, 1]$ $\;X^* \widehat{\otimes}_s X \neq N_s(X, X)$. По следствию 1, существуют сепарабельное Z и гомоморфизм $\varphi : Z^{**} \to X$ такие, что Z^{**} имеет базис, $\operatorname{Ker} \varphi = \pi_Z(Z)$, $\varphi^*(X^*)$ дополняемо в Z^{***} и $N_s^{\mathrm{reg}}(X, Z) \not\subset N_1(X, Z)$ при всех $s > 2/3$. Так как $\varphi^*(X^*)$ дополняемо в Z^{***}, то, очевидно, $N_s^{\mathrm{reg}}(Z^{**}, Z) \not\subset Z^{***} \widehat{\otimes}_1 Z = N_1(Z^{**}, Z)$ при любом $s > 2/3$. ■

Замечание 2. Совсем нетрудно показать, что $N_{2/3}^{\mathrm{reg}} \subset N_1$. Действительно, если оператор T действует из пространства E в пространство Z и является 2/3-ядерным как оператор из E в Z^{**}, то по определению 2/3-ядерного оператора мы можем разложить T в произведение:

$$T: \; E \xrightarrow{A} c_0 \xrightarrow{\Delta_1} l^1 \xrightarrow{j} l^2 \xrightarrow{\Delta_2} l^1 \xrightarrow{B} Z^{**},$$

где Δ_j – диагональные операторы (таким образом, Δ_1 – ядерный), а остальные операторы непрерывны. Спроектировав ортогонально в l^2 на замыкание образа оператора $j\,\Delta_1\,A$, и рассмотрев B только на этой проекции, мы получим в совокупности все тот же оператор $T : E \to Z$; следовательно, оператор T – ядерный из E в Z. В настоящий момент автору неясно, можно ли подобным способом непосредственно получить соответствующий результат из последней теоремы (то есть, для $N_{2/3,\infty}^{\mathrm{reg}}$).

Следствие 2. *Пусть X – такое рефлексивное банахово пространство, что каждое n-мерное подпространство в X Cn^{α}-дополняемо в X (здесь $C > 0$, $\alpha \in (0, 1/2)$ – некоторые постоянные, $n = 1, 2, \dots$). Тогда для любого банахова пространства Y справедливо включение $N_{s,\infty}^{\mathrm{reg}}(X, Y) \subset N_1(X, Y)$, где $1/s = 1 + \alpha$.*

В частности, если $X \subset L^p(\mu)$, $1 < p < +\infty$, $p \neq 2$ и $1/s = 1 + |1/2 - 1/p|$, то $N_{s,\infty}^{\mathrm{reg}}(X, Y) \subset N_1(X, Y)$ для каждого Y.

Для доказательства достаточно применить теорему 1, 1) и теорему 2, 1) и использовать тот факт, что любое n-мерное подпространство пространства $L^p(\mu)$ $Cn^{|1/2-1/p|}$-дополняемо в $L^p(\mu)$.

Замечание 3. В теореме 2, 1) и следствии 2 мы на самом деле получили формально более сильное включение $N_{s,\infty}^{\mathrm{reg}}(X, Y) \subset X^*\widehat{\otimes}_1 Y$. Его следует понимать таким образом: каждый оператор $T \in N_{s,\infty}^{\mathrm{reg}}(X, Y)$ (однозначно) порождается тензорным элементом из пространства $X^*\widehat{\otimes}_{s,\infty} Y^{**} \subset X^*\widehat{\otimes}_1 Y^{**}$; этот тензорный элемент, в свою очередь, принадлежит пространству $X^*\widehat{\otimes}_1 Y$, подпространству пространства $X^*\widehat{\otimes}_1 Y^{**}$; так что, если

$$
\begin{aligned}
&\sum x'_n \otimes y''_n && \text{– представление оператора } T \\
& && \text{в пространстве } X^*\widehat{\otimes}_{s,\infty} Y^{**}, \\
&\sum \tilde{x}'_n \otimes \tilde{y}''_n && \text{– в пространстве } X^*\widehat{\otimes}_1 Y^{**} \text{ и} \\
&\sum \tilde{\tilde{x}}'_n \otimes \tilde{\tilde{y}} && \text{– в пространстве } X^*\widehat{\otimes}_1 Y,
\end{aligned}
$$

то для всякого $U \in L(Y^{**}, X^{**})$ имеем

$$
\operatorname{trace} U \circ T = \sum \langle x'_n, U y''_n \rangle = \sum \langle \tilde{x}'_n, U \tilde{y}''_n \rangle = \sum \langle \tilde{\tilde{x}}'_n, U \tilde{\tilde{y}}_n \rangle
$$

(заметим, что след вполне определен, поскольку в теореме 2, 1) и в следствии 2 естественное отображение $N_{s,\infty}^{\mathrm{reg}}(X^*, Y^{**}) \to L(X, Y^{**})$ взаимно однозначно).

Тем же методом, что и при доказательстве теоремы 2, 1), устанавливается следующий факт.

Теорема 2$'$. *Пусть $s \in (0, 1]$. Если $X^* \in \mathrm{AP}_s$, или $Y^{***} \in \mathrm{AP}_s$, то $N_s^{\mathrm{reg}}(X, Y) \subset N_1(X, Y)$.*

Внимательно просмотрев доказательство пункта 2) теоремы 2 и следствия 1, нетрудно увидеть, что имеет место следующий более сильный факт.

Предложение 2. *Существуют сепарабельное банахово пространство Z и оператор $A \in L(Z^{**}, Z)$ такие, что Z^{**} имеет базис, $\pi_Z A \in N_s(Z^{**}, Z^{**})$ для каждого $s > 2/3$, но $A \notin N_1(Z^{**}, Z)$.*

Теорема 3. *Для всякого $s \in [2/3, 1)$ существует такое сепарабельное банахово пространство Z, что*

(i) *Z^{**} имеет базис;*
(ii) *все пространства $Z, Z^*, Z^{**}, \ldots$ обладают свойством AP_s;*
(iii) *Z^{***} не обладает свойством AP_r, каково бы ни было $r \in (s, 1]$;*
(iv) *для всякого банахова пространства X*

$$N_{s,\infty}^{\mathrm{reg}}(X, Z) \subset N_1(X, Z) \quad \text{и} \quad N_{s,\infty}^{\mathrm{reg}}(Z^{**}, X) \subset N_1(Z^{**}, X);$$

(v) *для каждого $r \in (s, 1]$ $N_r^{\mathrm{reg}}(Z^{**}, Z) \not\subset N_1(Z^{**}, Z)$. Более того, существует такой оператор $U : Z^{**} \to Z$, что $U \in N_r^{\mathrm{reg}}(Z^{**}, Z)$ для всех $r \in (s, 1]$, но $U \notin N_1(Z^{**}, Z)$.*

Доказательство проводится по схеме, аналогичной доказательству пункта 2) теоремы 2 с использованием последовательно теоремы 1, 2), следствия 1 и теоремы 2, 1). Мы предоставляем (несложные) детали читателю.

Рассмотрим теперь вопрос о том, что можно получить в утверждениях наших теорем, если полностью отказаться от каких-либо аппроксимационных предположений относительно рассматриваемых пространств (как, например, в случае $s = 2/3$ из теоремы 2,1) – хотя там неявно подобные условия присутствуют, ведь каждое банахово пространство обладает свойством $\mathrm{AP}_{2/3,\infty}$). Сначала посмотрим, как будет выглядеть в этой ситуации часть 1) теоремы 2.

Предварительно сформулируем одно вспомогательное предложение, которое, по существу, доказано в [10] (теорема 2, 1, A). Нам удобно будет обозначать каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_{s,\infty} Y \to X^*\widehat{\otimes}_p Y$ через φ_{sp}^{∞}, а каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_p Y \to L(X, Y)$ — через j_p.

Предложение 3. *Если $s \leqslant 1$ и $p \geqslant 2s/(2-s)$, то отображение*

$$j_p : \varphi_{sp}^{\infty}\left(X^*\widehat{\otimes}_{s,\infty} Y\right) \to L(X, Y)$$

является взаимно однозначным.

См. доказательство пункта А теоремы 2.1 в [10] – оно почти дословно переносится на наш случай, рассматриваемый в предложении 3.

Приведем теперь усиление теоремы 3.1.A) из [10], где было показано, что в условиях предложения 3 имеет место включение $N_s^{\mathrm{reg}}(X,Y) \subset N_p(X,Y)$. Доказательство, однако, не будет столь элементарным, как в [10].

Теорема 4. *Если $2/3 \leqslant s < 1$ и $p = 2s/(2-s)$, то $N_{s,\infty}^{\mathrm{reg}}(X,Y) \subset N_p(X,Y)$, каковы бы ни были банаховы пространства X и Y.*

Доказательство. Пусть $T \in N_{s,\infty}^{\mathrm{reg}}$ и $T \neq 0$. Зафиксируем тензорный элемент $t = \sum \bar{x}'_n \otimes y''_n \in X^* \widehat{\otimes}_{s,\infty} Y^{**}$, порождающий оператор T (то есть, $\pi_Y T = \widetilde{t}$). Достаточно показать, что $t \in X^* \widehat{\otimes}_p Y$ (то есть, что образ $\varphi_{sp}^{\infty}(t) \in X^* \widehat{\otimes}_p Y^{**}$ лежит, на самом деле, в подпространстве $X^* \widehat{\otimes}_p Y$).

Предположим, что $t \notin X^* \widehat{\otimes}_p Y$. В этом случае найдется оператор $U \in \Pi_{p'}(Y^{**}, X^{**})$, для которого $\operatorname{trace} U \circ t = 0$ и, с другой стороны, $\operatorname{trace} U \circ z = 1$ для всех $z \in X^* \widetilde{\otimes}_p Y$. В дальнейшем удобно иметь перед глазами несколько диаграмм (с комментариями):

$$X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{\pi_Y} Y^{**} \xrightarrow{B} Z_{p'} \xrightarrow{S} X^{**} \xrightarrow{T^{**}} \pi_Y(Y)$$

($U = SB$; $\widetilde{t} = \pi_Y T$; $B\pi_Y = jB_0$; $A := \pi^{-1} T^{**} S$ (этот оператор появится позже); $U\pi_Y = 0$ и $Sj = 0$);

$$Y \xrightarrow{B_0} Y_{p'} \xrightarrow{j} Z_{p'} \xrightarrow{S} X^{**} \xrightarrow{T^{**}} \pi_Y(Y) \xrightarrow{\pi_Y^{-1}} Y \xrightarrow{B_0} Y_{p'}.$$

Здесь $Z_{p'} \subset L_{p'}(\mu)$ (для некоторой конечной меры μ); $B \in \Pi_{p'}(Y^{**}, Z_{p'})$ и $S \in L(Z_{p'}, X^{**})$ таковы, что $U = SB$; $Y_{p'} = B\pi_Y(Y)$; B_0 – оператор, индуцированный оператором B; j – тождественное вложение. Заметим, что $T^{**}(X^{**}) \subset \pi_Y(Y)$ в силу компактности оператора T. Кроме того, $U\pi = 0$ по предположению; следовательно, $Sj = 0$. Обозначим также оператор $\pi_Y^{-1} T^{**} S$ через A.

Так как $Z_{p'} \subset L_{p'}(\mu)$ и $\pi_Y A \in N_{s,\infty}$, то, по теореме 1, 1), оператор $\pi_Y A$ однозначно определяется тензорным элементом из $Z_{p'}^* \widehat{\otimes}_{s,\infty} Y^{**}$, который мы снова будем обозначать через $\pi_Y A$. Ясно, что

$$\pi_Y A = T^{**} S = \sum S^* \left(\pi_{X^*}(\bar{x}'_n)\right) \otimes \bar{y}''_n.$$

По следствию 2 и замечанию после него, $A \in Z^*_{p'}\widehat{\otimes}_1 Y$, причем

$$\operatorname{trace} B(\pi_Y A) = \operatorname{trace}(B\pi_Y) \circ A = \sum < S^*\pi_{X^*}\bar{x}'_n,\, B\bar{y}''_n >=$$

$$= \sum < \bar{x}'_n,\, U\bar{y}''_n >= \operatorname{trace} U \circ t = 1.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что $\pi_Y a \neq 0$ (и $A \neq 0$).

Возьмем некоторое представление A вида $\sum z'_n \otimes y_n$ как элемента пространства $Z^*_{p'} \otimes_1 Y$; это также и представление тензорного элемента $\pi_Y A \in Z^*_{p'}\widehat{\otimes}_{s,\infty} Y^{**}$ (но в пространстве $\pi_Y A \in Z^*_{p'}\widehat{\otimes}_1 Y^{**}$). Имеем:

$$1 = \operatorname{trace}(B\pi_Y) \circ A = \operatorname{trace}(jB_0) \circ A =$$

$$= \operatorname{trace}(jB_0) \circ \left(\sum z'_n \otimes y_n\right) = \sum < z'_n,\, jB_0 y_n >=$$

$$= \sum < z'_n,\, jB_0^{**}\pi_Y y_n >= \operatorname{trace}\left(jB_0^{**}\right) \circ \left(\sum z'_n \otimes \pi_Y y_n\right) =$$

$$= \operatorname{trace}\left(jB_0^{**}\right) \circ (\pi_Y A) = \operatorname{trace}\left(jB_0^{**}\right) \circ \left(\sum S^*\left(\pi_{X^*}(\bar{x}'_n)\right) \otimes \bar{y}''_n\right) =$$

$$= \sum < S^*\pi_{X^*}\bar{x}'_n,\, jB_0^{**}\bar{y}''_n >= \operatorname{trace} B_0^{**} \circ \left(\sum \left((Sj)^*\, \pi_{X^*}\right) \otimes \bar{y}''_n\right).$$

Отсюда следует, что тензорный элемент $\alpha := \sum \left((Sj)^*\, \pi_{X^*}\right) \otimes \bar{y}''_n$, лежащий в пространстве $Y^*_{p'}\widehat{\otimes} Y^{**}$, не равен нулю. По теореме 1,1), не равен нулю и порождаемый им оператор $\widetilde{\alpha}$. Остается заметить, что $\widetilde{\alpha} = T^{**}Sj = 0$. ■

Замечание 4. Утверждение A′ теоремы 3.1 из [10] показывает, что наша теорема 4 точна. Аналогичное замечание можно отнести и к предложению 3. Следующий факт, однако, намного сильнее, чем часть A′ теоремы 3.1 из [10], в которой установлено существование двух банаховых пространств X и Y, для которых, в частности, $N_s^{\mathrm{reg}}(X,Y) \not\subset N_p(X,Y)$ и $Y \in$ AP. Под впечатлением неверного результата А. Гротендика, о котором шла речь выше (см. начало заметки – до определения 1), я написал в замечании к теореме 3.1 в [10], что Y "конечно, не обладает свойством ограниченной аппроксимации" BAP. Сейчас мы увидим, что последняя фраза была лишена оснований.

Теорема 5. *Пусть $r \in [2/3, 1)$ и $1/r = 1/2 + 1/p$. Существуют два сепарабельных банаховых пространства Z и W такие, что*

(i) *W и Z^{**} имеют базисы;*
(ii) *как W, так и все сопряженные к нему пространства W^*, $W^{**}, \ldots$, обладают свойством $\mathrm{AP}_{r,\infty}$;*
(iii) *W^* не обладает свойством AP_s ни при каком $s \in (r, 1]$;*
(iv) *для любого банахова пространства E справедливо включение $N^{\mathrm{reg}}_{r,\infty}(W, E) \subset N_1(W, E)$;*
(v) *$N^{\mathrm{reg}}_s(W, Z) \not\subset N_p(W, Z)$, каково бы ни было $s \in (r, 1]$.*

Доказательство. Достаточно показать, что для каждого s, $r < s < 1$, найдутся пространства $Z = Z_s$ и $W = W_s$ с указанными в формулировке теоремы свойствами, причем при данном фиксированном s в (iii) достаточно получить более слабое условие $W^* \notin \mathrm{AP}_{s,\infty}$ (поскольку s пробегает весь промежуток $(r, 1)$, а свойство AP_1 – самое сильное из всех аппроксимационных свойств). Если это будет сделано, то для $s_n \searrow r$ пространства $(\sum Z_{s_n})_{l_2}$ и $(\sum W_{s_n})_{l_2}$ уже полностью будут удовлетворять всем условиям теоремы.

Итак, пусть $s \in (r, 1)$, так что $p < 2s/(2-s)$. По теореме 2.1, A$'$), 1) из [10], существуют сепарабельные рефлексивные пространства X и Y, тензорный элемент $z \in X^* \widehat{\otimes}_s Y$ и оператор $U \in QN_{p'}(Y, X)$ (квази-p'-ядерный) такие, что $\operatorname{trace} U \circ z = 1$ и ассоциированный оператор $\widetilde{z}$ равен нулю, причем пространство X может быть выбрано как подпространство в $L_{p'}$ (последнее содержится в доказательстве указанной теоремы из [10]).

Пусть Z – такое сепарабельное пространство, что Z^{**} имеет базис и существует гомоморфизм φ из Z^{**} на Y с ядром $\pi_Z(Z)$ (см. лемму 1). Поднимем (ядерный) тензорный элемент z, лежащий в $X^* \widehat{\otimes}_s Y$, до элемента $\alpha \in X^* \widehat{\otimes}_s Z^{**}$, так что $\varphi \circ \alpha = z$, и положим $V := U \circ \varphi$. Так как $\operatorname{trace} V \circ \alpha = \operatorname{trace} U \circ z = 1$ и Z^{**} обладает свойством аппроксимации (свойством AP_1), то $\widetilde{\alpha} = \alpha \neq 0$. Кроме того, оператор $\widetilde{\varphi \circ \alpha}$, ассоциированный с тензором $\varphi \circ \alpha$, равен нулю. Поэтому $\alpha(X) \subset \operatorname{Ker} \varphi = \pi_Z(Z)$, то есть оператор α действует из X в Z.

Если $\alpha \in X^* \widehat{\otimes}_p Z$, то для произвольного p-ядерного представления вида $\alpha = \sum x'_n \otimes z_n$ имеем: $\operatorname{trace} V \circ \alpha = \sum < x'_n, V z_n >= \sum 0 = 0$; следовательно, $\alpha \notin X^* \widehat{\otimes}_p Z$ (мы воспользовались тем, что $V \in \Pi_{p'}(Z, X)$). Таким образом, $N^{\mathrm{reg}}_s(X, Z) \not\subset N_p(X, Z)$.

Заметим, что X (и X^*) обладает свойством $\mathrm{AP}_{r,\infty}$ (теорема 1, 1) – вспомним, где лежит пространство X), но не обладает свойством $\mathrm{AP}_{s,\infty}$ (теорема 2,1)).

Рассмотрим теперь такое сепарабельное банахово пространство E, что E^* имеет базис и существует гомоморфизм ψ из E^* на X с тем свойством, что $E^{**} = \psi^*(X^*) \oplus \pi_E(E)$ (лемма 1). Положим $W = E^*$. Так как $E \in \mathrm{AP}_1$ и $X^* \in \mathrm{AP}_{r,\infty}$, то все сопряженные пространства W^*, $W^{**}, \ldots$ обладают свойством $\mathrm{AP}_{r,\infty}$; по теореме 2, 1), имеет место утверждение (iv), а по построению, – утверждение (v). Кроме того, $W^* \notin \mathrm{AP}_{s,\infty}$. ■

Из (i) и (v) предыдущей теоремы моментально вытекает следующее утверждение.

Следствие 3. *Существует пара сепарабельных банаховых пространств Z, W со следующими свойствами. Пространства Z^{**} и W имеют базисы (и, следовательно, обладают свойством аппроксимации), и для каждого p, $1 \leqslant p < 2$, найдется не p-ядерный оператор из W в Z с p-ядерным вторым сопряженным.*

Замечание 5. Подобного феномена не может быть, если либо W^*, либо Z^{***} обладает свойством аппроксимации. Вскользь об этом уже упоминалось выше (частный случай сформулирован в теореме $2'$). Случай $p > 2$ будет рассмотрен в последующей статье автора.

Литература

1. A. M. Davie, *The approximation problem for Banach spaces.* — Bull. London Math. Soc. **5** (1973), 261–266.
2. T. Figiel and W. B. Johnson, *The approximation property does not imply the bounded approximation property.* — Proc. Am. Math. Soc. **41** (1973), 197–200.
3. A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espases nucléaires.* — Mem. Am. Math. Soc. **16** (1955), 196–140.
4. J. Lindenstrauss, *On James' paper "Separable Conjugate Spaces".* — Israel J. Math. **9** (1971), 279–284.
5. Б. М. Макаров, В. Г. Самарский, *Слабая секвенциальная полнота и близкие к ней свойства некоторых пространств операторов.* — в кн: "Теория операторов и теория функций", том 1 (1983), 122-144, ЛГУ, Л.
6. E. Oja and O. I. Reinov, *Un contre-exemple à une affirmation de A. Grothendieck.* — C. R. Acad. Sc. Paris., Serie I **305** (1987), 121–122.
7. А. Пич, *Операторные идеалы.* Мир, М. (1982).
8. O. I. Reinov, *Approximation properties of order p and the existence of non-p-nuclear operators with p-nuclear second adjoints.* — Math. Nachr. **109** (1982), 125–134.

9. О. И. Рейнов, *Простое доказательство двух теорем А. Гротендика.* — Вестн. ЛГУ **7** (1983), 115–116.
10. О. И. Рейнов, *Исчезновение тензорных элементов в шкале p-ядерных операторов.* В кн. "Теория операторов и теория функций", ЛГУ, Л. (1983), с. 145-165.
11. O. I. Reinov, *Sur les operateurs p-nucléaires entre espaces de Banach avec bases.* — C. R. Acad. Sc. Paris., Serie I **316** (1993), 905–907.

Reinov O. I. Approximation properties AP_s and p-nuclear operators (the case where $0 < s < 1$).

Among other things, it is shown that there exist Banach spaces Z and W such that Z^{**} and W have bases, and for every $p \in [1, 2)$ there is an operator $T : W \to Z$ that is not p-nuclear but T^{**} is p-nuclear.

С.-Петербургский
государственный
университет
e-mail: orein@orein.usr.pu.ru

Поступило 12 июня 2000 г.