Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 270, 2000 г.

В. Л. Олейник

МЕТОД ПРИБЛИЖЕНИЯ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ НА ЛЕМНИСКАТЕ

1. Введение

Задача описания отрицательного спектра периодического самосопряженного (дифференциального или разностного) оператора Шредингера популярна в квантовой механике и известна как метод приближения сильной связи [1]. В данной работе мы показываем, что основные аспекты теории могут быть проиллюстрированы на простом примере возмущенного оператора сдвига.

Точнее, мы рассматриваем линейное однородное рекуррентное соотношение первого порядка с периодическим коэффициентом и комплексным параметром

$$f(n+1)+a(n)f(n)=zf(n), \quad n\in\mathbb{Z}. \tag{1}$$

Известно [10], что уравнение (1) имеет нетривиальное ограниченное решение тогда и только тогда, когда спектральный параметр z принадлежит лемнискате l_a, которая определяется конечным множеством значений коэффициента $a(n)$ (см. теорему 1).

Предположим, что мы изменили значение функции $a(n)$ при $n=0$ на $b\neq a(0)$. Таким образом мы получим новую функцию a', а число b можно выбрать так, что уравнение (1) с функцией a' вместо a и при $z=b$ будет иметь решение $f(n;b)$ из $l^2(\mathbb{Z})$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|f(n;b)|^2<\infty.$$

При этом соответствующая лемниската останется прежней (см. следствие 1). Заметим, что решение $f(n;b)$ тождественно равно нулю при $n\geqslant 1$.

Наконец, для произвольного целого числа $N\gg 1$ построим новую периодическую функцию $c(n)$ так, что $c(kN)=b$, $k\in\mathbb{Z}$ и $c(n)=a(n)$, $n\in\mathbb{Z}$, $n\neq kN$. На этом пути мы получим новую лемнискату l_c. Основной вопрос теории заключается в описании трансформации l_c в пару (l_a,b) с ростом N.

С физической точки зрения мы имеем дело с периодической решеткой $a(n)$ идентичных атомов и получаем энергетические зоны, т.е. связные компоненты лемнискаты l_a. В случае самосопряженного периодического оператора Шредингера энергетический спектр состоит из набора отрезков вещественной оси (зон проводимости), разделенных лакунами (запрещенными зонами). Затем в решетку помещается один инородный атом "b" и при этом возникает одно собственное значение (примесный энергетический уровень) $z_0 = b$. Наконец, примеси располагаются периодическим образом, и мы получаем суперрешетку с набором зон l_c. Одна из компонент лемнискаты l_c (примесная энергетическая зона) содержит внутри себя точку z_0. Мы покажем, что асимптотически эта компонента будет окружностью с экспоненциально малым радиусом и центром в точке z_0, когда период примеси N стремится к бесконечности.

Основные результаты этой статьи были получены в Хельсинском университете [11], и автор искренне благодарен факультету математики за прекрасные условия для работы. Считаю приятным долгом поблагодарить M. Vuorinen за полезные замечания. Данная работа частично поддержана грантом Международной Соросовской Программы Образования в Области Точных Наук (грант ISSEP, No. d98-387).

1.1. Лемниската

Начнем с геометрического определения лемнискаты.

Определение. *<u>Лемнискатой</u> называется геометрическое место точек $z \in \mathbb{C}$, для которых произведение расстояний до конечного набора фиксированных точек $\{z_1, z_2, \dots, z_N\} \in \mathbb{C}^N$ равно заданному положительному числу r^N. Точки z_k называются фокусами лемнискаты, а число r ее радиусом.*

Например, если $N = 1$ или все точки z_k совпадают, т.е. $z_1 = z_2 = \dots = z_N$, то мы получаем окружность с центром в точке z_1 и радиусом r. Лемнискаты с двумя различными фокусами называются овалами Кассини. Ясно, что эти кривые состоят из двух компонент связности, когда радиус меньше половины расстояния между полюсами, и из одной компоненты в противном случае. Если радиус равен половине расстояния между полюсами, то средняя между ними точка лежит на лемнискате и, следовательно, является точкой самопересечения кривой. Такая кривая называется лемнискатой Бернулли и выглядит подобно символу бесконечности, т.е. ∞.

Аналитически условие, определяющее лемнискату, можно переписать в виде

$$|(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_N)| = r^N > 0. \tag{2}$$

Пример овалов Кассини дает уравнение $|z^2-1| = r^2$. Здесь при $r = 1$ мы получаем лемнискату Бернулли.

Из принципа максимума модуля для аналитической функции вытекают некоторые свойства лемнискаты (2):

1) лемниската (2) отделяет каждый полюс z_k от бесконечности;
2) внутренность жордановой кривой, целиком состоящей из точек (2), не содержит точек лемнискаты (2);
3) всякая такая жорданова кривая содержит внутри себя по крайней мере один полюс z_k;
4) лемниската (2) состоит из конечного набора ограниченных жордановых кривых.

Другие основные свойства лемнискат содержатся в монографиях [6, 12, 13].

Для большого числа фокусов N мы можем строить лемнискаты (2) достаточно причудливой формы. В действительности, граница произвольной односвязной ограниченной области хорошо аппроксимируется лемнискатами (см. [4], [6] стр. 315).

Теорема (D. Hilbert, 1897). *Для произвольной односвязной ограниченной области $D \subset \mathbb{C}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует связная лемниската $l \subset D$ такая, что граница ∂D области D лежит в ε-окрестности кривой l, и ε-окрестность границы ∂D содержит лемнискату l, т.е.*

$$\partial D \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, l) < \varepsilon\},$$

$$l \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, \partial D) < \varepsilon\}.$$

Обобщение теоремы Гильберта на общий случай неограниченной многосвязной области с компактным дополнением можно найти в книгах [12, 13].

1.2. Оператор сдвига

Обозначим через S *оператор сдвига*, который действует на двусторонних последовательностях $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ по правилу

$$(Sf)(n) = f(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Сдвиг S – *унитарный* оператор на пространстве

$$l^2(\mathbb{Z}) := \Big\{ f : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|^2 < \infty \Big\},$$

т.е. $\|Sf\|_{l^2(\mathbb{Z})} = \|f\|_{l^2(\mathbb{Z})}$ для любого $f \in l^2(\mathbb{Z})$.

Для произвольной последовательности $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ и некоторого положительного числа $\alpha > 0$ мы будем рассматривать *возмущенный сдвиг*

$$T_{\alpha,a} := \alpha S + a.$$

Положим $T_a := T_{1,a}$. Заметим, что оператор $T_{\alpha,a}$ ограничен на пространстве $l^2(\mathbb{Z})$ тогда и только тогда, когда ограничена последовательность $a(n)$, т.е. $|a| := \sup_n |a(n)| < \infty$. В дальнейшем будем предполагать, что $a(n)$ ограничена. В каноническом базисе на пространстве последовательностей оператор $T_{\alpha,a}$ представляется двухдиагональной, бесконечной в обе стороны, матрицей $\{t_{nm}, (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$, с числами $a(n)$ на главной диагонали и α на соседней диагонали, т.е. $t_{nn} = a(n)$, $t_{n(n+1)} = \alpha$ и $t_{nm} = 0$ для $m < n$ или $m > n + 1$.

1.3. Спектр (множество устойчивости)

Определение. *Мы говорим, что комплексное число z принадлежит спектру $s(T_{\alpha,a})$ оператора $T_{\alpha,a}$ тогда и только тогда, когда разностное уравнение*

$$\alpha S f + a f = z f,$$

$$\alpha f(n+1) + a(n) f(n) = z f(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

имеет нетривиальное[1] *ограниченное решение $f = f(n) = f(n;z)$.*

Совокупность всех чисел z, для которых $f(n;z) \in l^2(\mathbb{Z})$, называется дискретным спектром $s_d(T_{\alpha,a})$, а множество $s_c(T_{\alpha,a}) :=$ $\operatorname{clos}(s(T_{\alpha,a}) \setminus s_d(T_{\alpha,a}))$ – непрерывным спектром оператора $T_{\alpha,a}$.

Предположим, что $z \notin \{a(n) : n \leqslant 0\}$, тогда решение уравнения (3) можно нормировать условием $f(1) = 1$, и это решение

[1] Это означает, что $\inf\{n : a(n) = z\} > -\infty$.

представимо в явном виде

$$f(n+1) = \begin{cases} \alpha^{-n} \prod_{k=1}^{n} (z - a(k)), & n \geqslant 1, \\ 1, \ n = 0, \\ \alpha^{|n|} \prod_{k=0}^{|n+1|} (z - a(-k))^{-1}, & n \leqslant -1. \end{cases} \tag{4}$$

Напротив, если положить $z = a(n_0)$, то всякое решение f уравнения (3) тождественно равно нулю начиная с n_0+1, т.е. $f(n) \equiv 0$, $n > n_0$.

Замечания. **1.** Для фиксированного числа $\alpha > 0$ множество $s(T_{\alpha,a})$ *трансляционно-инвариантно*, т.е. для любого целого числа $m \in \mathbb{Z}$ спектры оператора $T_{\alpha,a}$ и оператора $T_{\alpha,a'}$ с функцией $a'(n) := a(n+m)$, $n \in \mathbb{Z}$, совпадают $(s(T_{\alpha,a}) = s(T_{\alpha,a'}))$. Следовательно, мы можем считать, что $a(n) \notin s(T_{\alpha,a})$ для $n \leqslant 0$ (ср. со сноской[1]).

2. Спектр $s(T_{\alpha,a})$ совпадает с множеством *устойчивости* уравнения (3) (см. [2], теорема 5.4.1).

3. Для *стационарной* последовательности $a_0 := a(0) = a(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, из представления (4) для решения уравнения (3) следует, что $s(T_{\alpha,a}) = s_c(T_{\alpha,a})$ – окружность радиуса α с центром в точке a_0.

1.4. Периодический случай

В дальнейшем мы будем рассматривать оператор $T_{\alpha,a}$ с функцией $a = a(n)$, построенной специальным образом. В частности, в рассмотрение будут включены все периодические функции, т.е. такие последовательности $a(n)$, что $a(n+N) = a(n)$ для некоторого целого числа $N \geqslant 1$ и всех $n \in \mathbb{Z}$.

Итак, для фиксированного натурального числа $N \geqslant 1$ рассмотрим упорядоченное множество из N комплексных чисел $\vec{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_N\} \in \mathbb{C}^N$ и произвольную последовательность π *перестановок* π_n множества индексов $\vec{N} = \{1, 2, \dots, N\}$, $\pi_n \in \mathcal{S}(\vec{N})$, $n \in \mathbb{Z}$, т.е. $\pi : \mathbb{Z} \to \mathcal{S}(\vec{N})$ (см. [5], стр.77). Для выбранных таким образом $\vec{a}$ и π мы конструируем функцию $a_{\pi,\vec{a}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ так, что для $n = kN + m$ при $k \in \mathbb{Z}$ и m из множества $\{1, 2, \dots, N\}$

$$a_{\pi,\vec{a}}(n) = a_{\pi,\vec{a}}(kN + m) = a_{\pi_k(m)}. \tag{5}$$

Например, для стационарной последовательности перестановок $\pi = \{\pi_0\} : \pi_n = \pi_0$, $n \in \mathbb{Z}$, мы получаем периодическую функцию $a(n) = a_{\pi,\vec{a}}(n)$ с периодом $N_0 \leqslant N$. Если при этом все числа множества $\vec{a}$ различные, то $N_0 = N$ для любого $\pi_0 \in \mathcal{S}(\vec{N})$. Выбирая в качестве π_0 единичный элемент e группы перестановок $\mathcal{S}(\vec{N})$, т.е. $\pi = \{e\} : \pi_n = e$, $n \in \mathbb{Z}$, мы получим периодическую функцию $a_{\vec{a}} := a_{\{e\},\vec{a}}$, значения которой на множестве $\vec{N} \subset \mathbb{Z}$ совпадают с $\vec{a}$, т.е.

$$a_{\vec{a}}(n + kN) = a_n, \quad n \in \vec{N}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Положительное число $\alpha > 0$ и упорядоченное множество $\vec{a}$ однозначно задают лемнискату $l_{\alpha,\vec{a}}$ как геометрическое место точек комплексной плоскости, произведение расстояний которых до точек $\vec{a}$ есть постоянная величина, равная α^N. Другими словами, лемниската $l_{\alpha,\vec{a}}$ определяется уравнением

$$l_{\alpha,\vec{a}} := \{z \in \mathbb{C} : |P_{\vec{a}}(z)| = \alpha^N\},$$

где

$$P_{\vec{a}}(z) := (z - a_1)(z - a_2)\dots(z - a_N).$$

Заметим, что полином $P_{\vec{a}}(z)$ и лемниската $l_{\alpha,\vec{a}}$ инвариантны относительно перенумерации чисел множества $\vec{a}$. В препринте [10] показано, что следствием этого факта является

Теорема 1. *Для любого положительного числа α, любого упорядоченного набора N комплексных чисел $\vec{a}$ и любой последовательности $\pi = \{\pi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ перестановок π_n множества $\vec{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ имеем*

$$s(T_{\alpha,a}) = s_c(T_{\alpha,a}) = l_{\alpha,\vec{a}},$$

где $a = a_{\pi,\vec{a}}$.

Таким образом, в условиях теоремы 1 независимо от выбора последовательности перестановок π спектр оператора $T_{\alpha,a}$ является непрерывным и заполняет лемнискату $l_{\alpha,\vec{a}}$. Более того, для любого $\alpha > 0$ и любой периодической функции a множество $s(T_{\alpha,a})$ будет лемнискатой, и каждая лемниската (2) совпадает с множеством $s(T_{r,a'})$ для периодической функции $a' := a_{\vec{a'}}$, где $\vec{a'} := \{z_1, z_2, \dots, z_N\}$.

С другой стороны, благодаря теореме Гильберта, для любого множества Γ, которое является границей некоторой ограниченной односвязной области D (т.е. $\Gamma = \partial D$), существует периодическая функция a и положительное число α такие, что аналитическая кривая $s(T_{\alpha,a})$ аппроксимирует Γ. В действительности, используя обобщение теоремы Гильберта на случай неограниченной многосвязной области с ограниченным дополнением, мы можем приблизить границу произвольного множества со связным дополнением некоторой лемнискатой, следовательно, и спектром оператора $T_{\alpha,a}$ с периодической функцией a.

В работе [10] дано обобщение теоремы 1 на случай последовательностей кватернионов $\mathbb{H}$ и чисел Кэли $\mathbb{K}$ (см. [3, 4]). Следует отметить, что доказательство теоремы 1 существенно опирается на правило вычисления модуля произведения комплексных чисел: $|zw| = |z||w|$. Известно, что имеются только четыре неизоморфные конечномерные алгебры ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ и $\mathbb{K}$) над полем вещественных чисел с единицей и таким правилом для модуля произведения. При этом произведение в $\mathbb{H}$ некоммутативно, а в $\mathbb{K}$ оно даже неассоциативно.

2. Асимптотика спектра

2.1. Инвариантные подпространства

В этом пункте мы рассмотрим дискретный спектр и соответствующие инвариантные подпространства оператора $T = T_{\alpha,a}$.

Рассмотрим последовательность $a = a_{\pi,\vec{a}}$, определенную равенством (5) в пункте 1.4. Пусть $\vec{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_{N_0}\}$ – некоторое упорядоченное множество комплексных чисел, $N_0 \geqslant 1$. Разместим множество $\vec{b}$ в последовательности a между числами $a(0)$ и $a(1)$. Точнее, рассмотрим новую функцию a' такую, что

$$a'(n) = \begin{cases} a(n) & \text{при} \quad n \leqslant 0, \\ b_n & \text{при} \quad 1 \leqslant n \leqslant N_0, \\ a(n - N_0) & \text{при} \quad n \geqslant N_0 + 1. \end{cases} \tag{6}$$

Покажем, что после этой процедуры непрерывный спектр сохранится, а дискретный спектр будет состоять из точек множества $\vec{b}$, которые лежат вне лемнискаты $l_{\alpha,\vec{a}}$.

Теорема 2. *Пусть последовательности a и a' определены равенствами (5) и (6) соответственно. Тогда для любого $\alpha > 0$ имеем:*

1)
$$s_c(T_{\alpha,a'}) = s_c(T_{\alpha,a}) = l_{\alpha,\vec{a}}, \tag{7}$$

2)
$$s_d(T_{\alpha,a'}) = \Big\{ z \in \vec{b}: \ |P_{\vec{a}}(z)| > \alpha^N \Big\}. \tag{8}$$

Доказательство. При описании спектра $s(T)$ мы рассматриваем только те значения параметра z, для которых $f(n;z) \not\equiv 0$. Это означает, что $z \notin \vec{a}$.

Выберем произвольную точку $z_0 \notin \vec{a}$. При $n \leqslant 0$ функции a и a' совпадают, поэтому из представления (4) для решения $f(n) = f(n;z_0)$ уравнения (3) с $z = z_0$ для любого натурального числа k имеем
$$f(1-kN) = \left(\frac{\alpha^N}{P_{\vec{a}}(z_0)}\right)^k f(1), \quad k > 0.$$
Поскольку число k произвольное, из условия ограниченности решения $|f| < \infty$ следует неравенство $|P_{\vec{a}}(z_0)| \geqslant \alpha^N$. Равенство $|P_{\vec{a}}(z_0)| = \alpha^N$ означает, что точка z_0 лежит на лемнискате $l_{\alpha,\vec{a}}$, но тогда $|f(1-kN)| = |f(1)| \neq 0$, поэтому $f \notin l^2(\mathbb{Z})$.

Если мы хотим найти решение $f(n;z_0)$ из пространства $l^2(\mathbb{Z})$, то следует предположить, что $|P_{\vec{a}}(z_0)| > \alpha^N$. Однако, для положительных n решение будет расти, так как
$$f(N_0 + kN + 1) = \alpha^{-N_0} P_{\vec{b}}(z_0) \left(\frac{P_{\vec{a}}(z_0)}{\alpha^N}\right)^k f(1), \quad k \geqslant 0,$$
и мы должны потребовать, чтобы $f(n;z_0) = 0$ при $n > N_0$. Последнее означает, что $z_0 \in \vec{b}$. Таким образом, утверждение (8) доказано.

С другой стороны, из ограниченности полинома $P_{\vec{b}}$ на лемнискате $l_{\alpha,\vec{a}}$ следует ограниченность решения $f(n;z_0)$ при $z_0 \in l_{\alpha,\vec{a}}$. Это доказывает утверждение (7). □

Традиционно функцию a возмущают аддитивным образом, прибавляя к ней другую малую в каком-то смысле функцию. Покажем, что если эта добавка с финитным носителем, то такое возмущение укладывается в нашу процедуру построения функции a'.

Следствие 1. *Пусть $a = a(n)$ – периодическая функция с периодом N и $a_1 = a_1(n)$ – финитная функция, т.е. $a_1(n) = 0$ при $n \leqslant 0$ и при $n > N_0 \geqslant 1$. Положим $\vec{a} := \{a(1), a(2), \dots, a(N)\}$ и $c = c(n) := a(n) + a_1(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда для любого положительного α имеем*
1)
$$s_c(T_{\alpha,c}) = s_c(T_{\alpha,a}) = l_{\alpha,\vec{a}},$$
2)
$$s_d(T_{\alpha,c}) = \{c(n), \quad n = 1, 2, \dots, N_0 : \ |P_{\vec{a}}(c(n))| > \alpha^N\}.$$

Доказательство. Пусть носитель функции a_1, т.е. множество $\vec{N}_0 := \{1, 2, \dots, N_0\} \subset \mathbb{Z}$, покрывается $k \geqslant 1$ периодами функции a. Тогда мы имеем неравенства $(k-1)N < N_0 \leqslant kN$. Поэтому утверждения следствия 1 вытекают из теоремы 2, если положить $\vec{b} := \{c(1), c(2), \dots, c(kN)\}$. $\square$

Каждая точка z_0 из множества $s_d(T)$ оказывается простым *собственным значением* оператора T, а соответствующее единственное решение $f_0(n) := f(n; z_0)$, $f_0(1) = 1$, уравнения (3) с $z = z_0$ будет *собственной функцией*. Пусть $\{f_k\}_{k \geqslant 1} \subset l^2(\mathbb{Z})$ – полная система линейно независимых присоединенных функций, т.е.

$$Tf_k - z_0 f_k = f_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

или подробно

$$\alpha f_k(n+1) + (a(n) - z_0) f_k(n) = f_{k-1}(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{9}$$

Тогда подпространство $\mathcal{I}_{z_0} \subset l^2(\mathbb{Z})$, которое построено как линейная оболочка системы $\{f_k\}_{k \geqslant 0}$, будет *инвариантным подпространством*, отвечающим собственному значению z_0.

Покажем, что в периодическом случае для финитных возмущений $\vec{b}$ или a_1 (см. теорему 2 и следствие 1) инвариантное подпространство $\mathcal{I}_{z_0}$ имеет конечную размерность.

Теорема 3. *Пусть условия теоремы 2 выполнены. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *z_0 – корень кратности m полинома $P_{\vec{b}}(z)$ и $z_0 \in s_d(T_{\alpha,a'})$;*

2) *$\dim \mathcal{I}_{z_0} = m$.*

Доказательство. 1) => 2). Без ограничения общности предполагаем, что $z_0 = b_1 = b_2 = \ldots = b_m$ и $\alpha = 1$. Прежде всего заметим, что $z_0 = b_1 \notin \vec{a}$ и, следовательно, собственная функция

$f_0(n) = f(n; z_0)$ тождественно равна нулю при $n \geqslant 2$, но $f_0(1) = 1$. Далее, непосредственно проверяется, что для любого решения системы (9) с функцией a' вместо a выполнены соотношения:

$$f_k(k+1) = 1, \quad f_k(k+2) = 0, \quad f_k \in l^2(\mathbb{Z}), \quad 1 \leqslant k < m \leqslant N_0,$$

$$f_k(n) \neq 0 \quad (n \in \mathbb{Z}), \text{ поэтому } f_k \notin l^2(\mathbb{Z}),\ k \geqslant m.$$

Построенный набор m векторов $\{f_k\}_{k=0}^{m-1}$ образует базис в подпространстве $\mathcal{I}_{z_0}$.

2) => 1). Так как $z_0 \in s_d(T_{\alpha,a'})$, то z_0 – корень полинома $P_{\vec{b}}(z)$, и по доказанному его кратность равна размерности подпространства $\mathcal{I}_{z_0}$. $\square$

Подобное утверждение имеет место и для аддитивного финитного возмущения.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия следствия* 1. *Положим* $\vec{c} := \{c(1), c(2), \ldots, c(N_0)\}$. *Если число* z_0 *– корень полинома* $P_{\vec{c}}(z)$ *кратности* m *и при этом* $|P_{\vec{a}}(z_0)| > \alpha^N$, *то* $\dim \mathcal{I}_{z_0} = m$.

Доказательство. Как и выше, выберем целое число $k \geqslant 1$ из условия $(k-1)N < N_0 \leqslant kN$. Исходя из данной функции a и подставляя в определении (6) $\vec{b} = \{c(1), c(2), \ldots, c(kN)\}$, мы придем к функции a'. Заметим, что число z_0 будет корнем кратности m полинома $P_{\vec{b}}(z)$ и, кроме того, $z_0 \in s_d(T_{\alpha,a'})$. Таким образом, мы пришли к условиям теоремы 3. $\square$

2.2. Решетка и суперрешетка

В дальнейшем без ограничения общности мы будем полагать $\alpha = 1$. Начнем с периодической функции a в определении оператора $T = T_a = T_{1,a}$. Другими словами, мы имеем дело с *решеткой*, которая порождается функцией a. Спектр такого оператора непрерывный и заполняет некоторую лемнискату.

Далее мы возмущаем оператор T, вставляя в решетку a конечное множество $\vec{b}$ (см. определение (6)). Спектр нового оператора $T' = T_{a'} := T_{1,a'}$ состоит из двух дизъюнктных множеств $s(T') = s_c(T') \cup s_d(T')$. При этом непрерывный спектр возмущенного оператора T' совпадает с лемнискатой, которая является спектром невозмущенного оператора T. Однако, у оператора T' может появиться дискретный спектр. Здесь просматривается аналогия с квантовой теорией твердого тела. В решетку мы внедряем один инородный объект $\vec{b}$, отличный от всех других идентичных $\vec{a} = \{a(1), a(2), \dots, a(N)\}$, где N – период решетки. Тот факт, что $s_d(T') \neq \emptyset$, очень похож на появление связанных состояний в периодической квантовой системе с конечным числом примесей.

Определим теперь суперрешетку. Выберем целое число $k \geqslant 1$. Для любых двух упорядоченных множеств $\vec{b} := \{b_n\}_{n=1}^{N_0}$ и $\vec{a} := \{a_n\}_{n=1}^{N}$ построим новое упорядоченное множество $\vec{c} = \vec{c}^{(k)} := \{c_n\}_{n=1}^{N_0+kN}$, которое состоит из $\vec{b}$ на первом месте и затем k идентичных блоков $\vec{a}$, т.е.

$$c_n = b_n, \quad 1 \leqslant n \leqslant N_0,$$

$$c_{N_0+mN+n} = a_n, \quad m = 0, 1, \dots, k-1, \text{ и } 1 \leqslant n \leqslant N.$$

Наконец, тем же способом, как и в пункте 1.4, мы строим периодическую функцию $c = c_{\vec{c}}^{(k)}$ с периодом $M = M^{(k)} := N_0 + kN$.

В дальнейшем мы опускаем индекс "k" в обозначениях, пока не возникнет в нем необходимость.

В наших рассмотрениях предполагается, что число M достаточно велико. Кроме того, как пояснялось выше, сумму двух периодических функций $a + a_1$ с периодами N и M можно описать в терминах $\vec{b}$, k и $\vec{a}$. Поэтому *суперрешеткой* $c = c(n)$ мы будем называть сумму двух периодических функций с периодами $N \ll M$.

Спектр оператора T_c будет непрерывным и заполняет лемнискату

$$l_{\vec{c}} = l_{1,\vec{c}} := \{z \in \mathbb{C} : \ |P_{\vec{c}}(z)| = 1\}. \tag{10}$$

Замечание. По теореме 1 для любой последовательности перестановок π множества $\vec{M} := \{1, 2, \dots, M\}$ спектр сохраняется, т.е.

$$s(T_{c_\pi}) = s(T_c) = l_{\vec{c}},$$

где $c_\pi := c_{\pi,\vec{c}}$.

Поскольку $P_{\vec{c}} = P_{\vec{b}} P_{\vec{a}}^k$, не удивительно, что $l_{\vec{c}} \to l_{\vec{a}}$, и дискретный спектр проявляется, когда степень k неограниченно возрастает. Мы обсудим это явление в следующих разделах.

2.3. Основные леммы

Наша ближайшая задача – показать, что лемниската $l_{\vec{c}}$ (т.е. спектр $s(T_c)$) для достаточно больших k распадается на две непересекающиеся компоненты l_{cont} и l_{discr}, $l_{\text{cont}} \cap l_{\text{discr}} = \emptyset$. Первая из них – l_{cont} – порождается спектром исходного периодического оператора T_a, а вторая часть l_{discr} соответствует дискретному спектру возмущенного оператора $T' = T_{a'}$. Это означает, что все точки множества $\vec{a}$ лежат внутри кривой l_{cont}, $\vec{a} \subset \operatorname{Int} l_{\text{cont}}$, и $s_d(T') \subset \operatorname{Int} l_{\text{discr}}$. Поэтому мы должны различать точки возмущения $\vec{b}$ в зависимости от их принадлежности дискретному спектру, т.е. $b_n \in s_d(T')$ или нет.

Доказательства этих свойств спектра основываются на следующих трех леммах. Введем необходимые обозначения: $Q(z)$ и $R(z)$ – полиномы; для $d > 0$ через γ_d обозначим линию уровня модуля полинома $R(z)$, т.е.

$$\gamma_d := \{z \in \mathbb{C} : \ |R(z)| = d\};$$

q – множество нулей полинома $Q(z)$; q_0 – множество нулей полинома $Q(z)$ лежащих вне контура γ_1, т.е. $q_0 := \{z \in q : \ |R(z)| > 1\}$; для положительного числа $k > 0$ положим

$$F_k(z) := |Q(z)|\,|R(z)|^k \quad \text{и} \quad V_k := \{z \in \mathbb{C} : \ F_k(z) \leqslant 1\}.$$

Лемма 1. *Пусть хотя бы один корень полинома $Q(z)$ лежит вне кривой γ_1, т.е. $q_0 \neq \emptyset$, и $d_0 := \max_{z \in q_0} |R(z)| > 1$. Выберем произвольное число $d \in (1, d_0)$ так, чтобы линия уровня γ_d не содержала нулей полинома $Q(z)$, т.е. $\gamma_d \cap q_0 = \emptyset$. Тогда существует положительное число k_0 такое, что для всех чисел $k \geqslant k_0$ кривая γ_d разделяет множество V_k.*

Доказательство. Положим $A := \min_{z \in \gamma_d} |Q(z)|$ и заметим, что $A > 0$ в соответствии с условием $q \cap \gamma_d = \emptyset$. Тогда на γ_d мы имеем оценку

$$F_k(z) \geqslant A|R(z)|^k = Ad^k, \quad z \in \gamma_d,$$

и поскольку $d > 1$, мы можем выбрать число $k_0 > 0$ так, что $A_0 := Ad^{k_0} > 1$. Следовательно, по принципу максимума для субгармонических функций F_k из условия $k \geqslant k_0$ следуют вложения

$$U_d := \{|R| < d\} \supset (\{F_k < A_0\} \cap U_d) \supset (V_k \cap U_d) \neq \emptyset.$$

С другой стороны, так как $d < d_0$, то вне контура γ_d лежит корень полинома $Q(z)$, а следовательно и функции $F_k(z)$ для всех $k > 0$. Поэтому $V_k \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{U_d}) \neq \emptyset$. $\square$

Замечание. Пусть z_1 и z_2 – два корня полинома $Q(z)$ такие, что $1 < |R(z_1)| < |R(z_2)|$. Тогда из леммы 1 следует, что они принадлежат различным континуумам множества V_k для достаточно больших k.

Лемма 2. *Для любого $\varepsilon \in (0,1)$ существует положительное число k_0 такое, что для всех $k \geqslant k_0$ выполнено вложение*

$$\{z \in \mathbb{C}: \ |R(z)| < 1-\varepsilon\} \subset V_k.$$

Доказательство. Положим $B := \max_{z\in\gamma_{(1-\varepsilon)}} |Q(z)|$. Тогда на линии уровня $\gamma_{(1-\varepsilon)}$ мы имеем оценку

$$F_k(z) = |Q(z)||R(z)|^k \leqslant B(1-\varepsilon)^k, \quad z \in \gamma_{(1-\varepsilon)}.$$

Выберем k_0 так, чтобы $B(1-\varepsilon)^{k_0} < 1$. Тогда $\gamma_{(1-\varepsilon)} \subset V_k$, если $k \geqslant k_0$. $\square$

Для формулировки следующего утверждения нам понадобится дополнительное обозначение. Пусть v_k – подмножество множества $V_k = \{F_k \leqslant 1\}$ такое, что каждая связная компонента v_k содержит по крайней мере один корень полинома $R(z)$. Из лемм 1–2 непосредственно вытекает

Следствие 3. *Пусть $q_0 \neq \emptyset$. Положим $d_1 := \min_{z\in q_0} |R(z)|$, при этом $d_1 > 1$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0,1) \cap (0, d_1 - 1)$ существует положительное число k_0 такое, что*

$$\partial v_k \subset \Big\{z \in \mathbb{C}: \ 1-\varepsilon < |R(z)| < 1+\varepsilon\Big\},$$

как только $k \geqslant k_0$.

Доказательство. Применим лемму 1 с $d = 1+\varepsilon$ и лемму 2. $\square$

Таким образом, граница ∂v_k части множества V_k, каждая компонента которой содержит корень полинома $R(z)$, стремится к лемнискате $\gamma_1 = \{|R| = 1\}$, когда k уходит на бесконечность.

Следующая лемма дает нам описание другой части множества V_k, именно, множества $u_k := V_k \setminus v_k$. Для достаточно больших k замкнутая область u_k не пуста и не содержит нулей полинома $R(z)$. Напротив, если $k \gg 1$, то область u_k содержит все те нули полинома $Q(z)$, которые не лежат в множестве v_k, т.е. $q \cap u_k = q_0$. Кроме того, для всех больших k каждому континууму множества u_k принадлежит только один корень полинома $Q(z)$.

Лемма 3. *Для любого ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 := \mathrm{dist}\,(q_0, \gamma_1)$ существует положительное число k_0 такое, что для всех $k \geqslant k_0$ область u_k содержится в ε-окрестности $q_0^{(\varepsilon)}$ подмножества q_0 корней полинома $Q(z)$, т.е.*

$$q_0^{(\varepsilon)} := \bigcup_{\zeta \in q_0} \{z \in \mathbb{C} : \ |z - \zeta| < \varepsilon\} \supset u_k.$$

Доказательство. Положим

$$A_1 := \min_{z \in \partial q_0^{(\varepsilon)}} |Q(z)|$$

и

$$d_2 := \min_{z \in \partial q_0^{(\varepsilon)}} |R(z)|.$$

Заметим, что $A_1 > 0$, поскольку $q \cap \partial q_0^{(\varepsilon)} = \emptyset$ и $d_2 > 1$, так как $\varepsilon < \varepsilon_0$. Поэтому на границе множества $q_0^{(\varepsilon)}$ мы получаем оценку

$$F(z) = |Q(z)||R(z)|^k \geqslant A_1 d_2^k, \quad z \in \partial q_0^{(\varepsilon)}.$$

Если выбрать k_0 так, чтобы $A_1 d_2^{k_0} > 1$, то множество $u_k = V_k \setminus v_k$ будет содержаться в множестве $q_0^{(\varepsilon)}$. $\square$

2.4. Локализация спектра

Обсудим теперь возможности использования лемм 1–3 для описания спектра оператора T_c с периодической функцией $c = c^{(k)}$, построенной в разделе 2.2. Как мы уже знаем, спектр $s(T_c)$ непрерывен и совпадает с лемнискатой $l_{\vec{c}} = \{|P_{\vec{c}}| = 1\}$. Пусть

$$V = V_k := l_{\vec{c}} \cup \mathrm{Int}\, l_{\vec{c}} = \{z \in \mathbb{C} : \ |P_{\vec{c}}| \leqslant 1\}$$

– замыкание внутренности лемнискаты $l_{\vec{c}}$; через U обозначим объединение всех связных компонент V, которые не содержат точек из $\vec{a}$. Таким образом, исходная кривая $l_{\vec{c}} = \partial V$ распадается на две непересекающиеся части $l_{\mathrm{discr}} = \partial U$ и $l_{\mathrm{cont}} = \partial(V \setminus U)$. Именно это разложение $l_{\vec{c}} = l_{\mathrm{discr}} \cup l_{\mathrm{cont}}$ обсуждалось в начале раздела 2.3. Из результатов предыдущего пункта при $Q = P_{\vec{b}}$, $R = P_{\vec{a}}$ и $F_k = |P_{\vec{c}}| = |Q|\,|R|^k$ вытекает следующая

Теорема 4. *С ростом k последовательно выполняются следующие утверждения:*

1) $U \neq \emptyset$;

2) $s_d(T_{a'}) = \{z \in \vec{b}: \ |P_{\vec{a}}(z)| > 1\} \subset U$;

3) *каждая связная компонента множества U содержит только одну точку дискретного множества $s_d(T_{a'})$;*

4) *если $l_{\vec{a}}$ без критических точек*[2]*, то аналитические кривые l_{cont} и $l_{\vec{a}}$ имеют одинаковое число компонент;*

5) *для любого $\varepsilon > 0$ мера Лебега $|U|$ множества U меньше этого ε и l_{cont} аппроксимирует $l_{\vec{a}}$, т.е.*

$$l_{\text{cont}} \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, l_{\vec{a}}) < \varepsilon\},$$

и

$$l_{\vec{a}} \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, l_{\text{cont}}) < \varepsilon\}.$$

Существует число $k_0(\varepsilon) > 0$ такое, что все утверждения 1–5 выполнены, как только $k \geqslant k_0(\varepsilon)$.

Таким образом, мы наблюдаем процесс локализации спектра оператора T_c на суперрешетке в любой окрестности спектра возмушенного оператора $T_{a'}$ при стремлении k к бесконечности.

Замечание. Следует отметить, что в соответствии с теоремой 1 множества l_{cont} и l_{discr} инвариантны относительно выбора последовательности перестановок множества индексов $\vec{M} := \{1, 2, \ldots, N_0 + kN\}$ при фиксированном k.

2.5. Спектральные асимптотики

Согласно теореме 4 спектр $s(T_c)$ располагается в окрестности лемнискаты $l_{\vec{a}}$ и в окрестности дискретной части спектра оператора $T_{a'}$, т.е. дискретного множества $s_d(T_{a'})$. Однако это неполная информация о поведении спектра с увеличением k. Например, было бы интересно проследить за отличием спектральных компонент для точек множества $s_d(T_{a'})$ с различными размерностями соответствующих инвариантных подпространств. Поэтому нам необходимо установить асимптотические формулы для компонент l_{discr}, когда k уходит на бесконечность. Прежде всего отметим, что имеет место следующая

[2]Т.е. $P'_{\vec{a}} \neq 0$ на $l_{\vec{a}}$ (ср. с лемнискатой Бернулли)

Лемма 4. *Пусть $Q(z)$ и $R(z)$ – полиномы. Пусть z_0 – точка, лежащая вне лемнискаты $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| = 1\}$ и не являющаеся корнем полинома Q, т.е. $R_0 := |R(z_0)| > 1$ и $Q_0 := |Q(z_0)| \neq 0$. Для целого числа $m \geqslant 1$ и положительного числа k рассмотрим кривую*

$$\Gamma_k := \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0|^m |Q(z)||R(z)|^k = 1\}.$$

Тогда при k, стремящемся к бесконечности, компонента $\Gamma_{k0} \subset \Gamma_k$, содержащая внутри себя точку z_0, имеет следующую асимптотику:

$$\Gamma_{k0} := \{z \in \mathbb{C} : \quad |z - z_0| = \Big(\frac{1}{Q_0 R_0^k}\Big)^{1/m} (1 + o(1))\}.$$

Доказательство. Положим d_0 равным половине расстояния от точки z_0 до кривой γ_1 и множества нулей q полинома $Q(z)$, т.е. $d_0 = \operatorname{dist}(z_0, \gamma_1 \cup q)/2$. Обозначим через D_0 замкнутый круг с центром в точке z_0 и радиусом d_0, т.е.

$$D_0 := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant d_0\}.$$

Из леммы 3 с полиномом $(z - z_0)^m Q(z)$ вместо $Q(z)$ следует, что для всех больших k компонента Γ_{k0} содержится в круге D_0. Следовательно, выполняется неравенство

$$p_k := \max_{z \in \Gamma_{k0}} |z - z_0| \leqslant (AB^k)^{-1/m},$$

где

$$A := \min_{z \in D_0} |Q(z)| > 0 \quad \text{и} \quad B := \min_{z \in D_0} |R(z)| > 1.$$

Поэтому, когда $k \to \infty$, то, во-первых, $kp_k \to 0$, и, кроме того, при $z \in \Gamma_{k0}$ мы имеем

$$|Q(z)| = Q_0(1 + O(p_k)) \to Q_0$$

и

$$|R(z)|^k = R_0^k(1 + O(kp_k)) = R_0^k(1 + o(1)).$$

Теперь мы можем переписать уравнение для Γ_{k0} в виде

$$|z - z_0| = \rho_k(1 + f(z)),$$

где $\rho_k := (Q_0 R_0^k)^{-1/m}$ и $f(z) = o(1)$ при $k \to \infty$. $\square$

Теорема 5. *Пусть $z_0 \in s_d(T_{a'})$ и $\dim \mathcal{I}_{z_0} = m$. Тогда компонента $l_0 \subset l_{\mathrm{discr}}$, которая внутри себя содержит точку z_0, имеет следующее асимптотическое представление:*

$$l_0 = \{z \in \mathbb{C}: \ |z - z_0|^m = \frac{m!}{|P^{(m)}_{\vec{b}}(z_0)||P_{\vec{a}}(z_0)|^k}(1 + o(1))\} \qquad (11)$$

при k, стремящемся к бесконечности.

Доказательство. Так как $\dim \mathcal{I}_{z_0} = m$, то z_0 – корень полинома $P_{\vec{b}}(z)$ кратности m, и утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 4, если положить $R(z) = P_{\vec{a}}(z)$ и $Q(z) = (z - z_0)^{-m} P_{\vec{b}}(z)$. $\square$

Итак, мы видим, что континуум l_0 асимптотически совпадает с окружностью экспоненциально малого радиуса, который определяется множеством $\vec{a}$ и размерностью инвариантного подпространства m. С другой стороны, от множества $\vec{b}$ зависит лишь множитель перед этой экспонентой.

Можно сказать, что для достаточно большого числа k компонента l_0, внутри которой лежит только одна точка z_0 дискретного спектра $s_d(T_{a'})$, порождается этой точкой. В соответствии с определением (6), функция a' содержит один блок $\vec{b}$ (один примесный элемент) и каждой точке $z_0 \in s_d(T_{a'})$ соответствует конечномерное инвариантное подпространство $\mathcal{I}_{z_0}$. Отметим, что функции из $\mathcal{I}_{z_0}$ локализованы вокруг носителя $\vec{b}$-части функции a'.

Но в случае периодического оператора T_c мы уже имеем бесконечный набор примесей и бесконечное множество линейно независимых ограниченных решений уравнения

$$f(n+1) + c(n)f(n) = zf(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

отвечающих части непрерывного спектра l_0. Каждое такое решение удовлетворяет условию квазипериодичности (т.е. $f(n+M) = e^{it}f(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $t \in (0, 2\pi)$) и в некотором смысле близко к линейной комбинации сдвигов элементов из инвариантного подпространства $\mathcal{I}_{z_0}$.

Обычно решается противоположная задача. Для данной собственной функции f_0 и собственного значения z_0 некоторого оператора (или уравнения) мы хотим описать непрерывный спектр соответствующего периодического оператора около точки z_0. Периодический оператор строится подобно тому, как от $T_{a'}$ мы пришли к оператору T_c.

Используя линейные комбинации типа

$$f_1(n,t) := \sum_{p\in\mathbb{Z}} f_0(n+pM)e^{-ipt}, \quad n\in\mathbb{Z}, \quad t\in(0,2\pi),$$

мы получим квазипериодическую функцию f_1, т.е. $f_1(n+M,t) = e^{it}f_1(n,t)$, которая аппроксимирует решение периодического уравнения для некоторого $z = z(t)$ вблизи z_0. Функция $z(t)$, $t \in (0,2\pi)$, вычисляется подстановкой $f_1(n,t)$ в это уравнение, и параметрически заданная кривая $l := \{z = z(t),\ t \in (0,2\pi)\}$ на плоскости $\mathbb{C}$ дает нам приближенную картину поведения исследуемой части спектра нашего периодического оператора при возрастании расстояния между примесями.

Этот метод исследования непрерывного спектра в окрестности собственного значения задачи с одной примесью, когда примесный период M стремится к бесконечности, в квантовой теории твердых тел называется *методом приближения сильной связи* [1]. Асимптотические формулы для дифференциального и разностного операторов Шредингера и широкого класса потенциалов получены автором и его аспирантом А. Л. Мироновым в работах [9], [7] и [8].

Литература

1. А. И. Ансельм, *Введение в теорию полупроводников.* Наука, М. (1978).
2. R. P. Agarwal, *Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods, and Applications.* Marcel Dekker (1992).
3. H.-D. Ebbinghaus et al., *Numbers.* Springer-Verlag (1991).
4. D. Hilbert, *Über die Entwickelung einer beliebigen analytischen Funktion einer Variabeln in eine unendliche nach ganzen rationalen Funktionen fortschreitende Reihe.* — Göttinger Nachrichten (1897), 63–70.
5. J. F. Humphreys, *A Course in Group Theory.* Oxford University Press (1996).
6. А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций.* Том I, издание второе, Наука, М. (1967).
7. A. L. Mironov and V. L. Oleinik, *The discrete tight binding approximation.* — J. Statist. Phys. **75**, No.1–2 (1994), 317–335.
8. А. Л. Миронов, В. Л. Олейник, *О границах применимости метода сильной связи.* — ТМФ **99**, No. 1 (1994), 103–120.
9. V. L. Oleinik, *Asymptotic behavior of energy band associated with a negative energy level.* — J. Statist. Phys. **59**, No. 3–4 (1990), 665–678.
10. V. L. Oleinik, B. S. Pavlov, *Hilbert theorem on lemniscates and the spectrum of perturbed shift.* Department of Mathematics, University of Auckland, New Zealand, report series **417** (1999), 1–11.

11. V. L. Oleinik, *Tight-binding approximation on the lemniscate*. Department of Mathematics, University of Helsinki, Finland, preprint **243** (1999), 1–13.
12. J. L. Walsh, *The location of critical points of analytic and harmonic functions*. American Mathematical Society (1950).
13. Дж. Л. Уолш, *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области*. Иностранная литература, М. (1961).
14. J. P. Ward, *Quaternions and Cayley Numbers*. Kluwer Academic Publishers (1997).

Oleinik V.L. Tight-binding approximation on the lemniscate.

In this paper, we consider a first order linear homogeneous difference equation with a periodic coefficient and a complex parameter, $f(n+1)+a(n)f(n) = zf(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. The set of stability s_a of the equation is known to coincide with a lemniscate which is determined by the finite set of values of the coefficient $a(n)$. The function $a(n)$ is composed of a sum of two periodic functions, $a(n) = a_1(n) + a_2(n)$, where a_1 is a fixed function and a_2 is a sum of shifts of a given finite function. By analogy with the quantum solid state theory, the asymptotic behavior of the set s_a is discussed as the period of the function a_2 tends to infinity.

С.-Петербургский
государственный
университет
Vladimir.Oleinik@pobox.spbu.ru

Поступило 12 апреля 2000 г.