Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 270, 2000 г.

**Ю. В. Крашенинникова, Н. А. Широков**

# АППРОКСИМАЦИЯ ПОЛИНОМАМИ В МЕТРИКЕ $L^p$ НА ДИЗЪЮНКТНЫХ ОТРЕЗКАХ

## Введение

Класс функций $f$, определенных на отрезке $[-1,1]$ и удовлетворяющих условию $f' \in L^p(-1,1)$, $1 < p < \infty$, в терминах скорости полиномиальной аппроксимации в метрике $L^p$ впервые был описан В. П. Моторным [1]. Конструктивное описание подобных классов функций, определенных на дизъюнктных отрезках, до сих пор отсутствовало.

В данной статье мы приводим подобное описание для конечного множества отрезков.

В дальнейшем $E = \bigcup\limits_{k=1}^{m} s_k$ – объединение конечного числа попарно не пересекающихся отрезков $s_k = [a_k, b_k]$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Пусть на $E$ задана непрерывная функция $f(\zeta)$. Определим производную функции $f$ на отрезке $s_k$ естественным образом, именно, пусть

$$f'(\zeta) = \lim_{r \to 0} \frac{f(\zeta + re^{i\theta_k}) - f(\zeta)}{re^{i\theta_k}},$$

где

$$\theta_k = \arg(b_k - a_k).$$

Далее мы считаем, что

$$f'(\zeta) \in L^{p_k}(s_k), \quad \text{где} \quad 1 < p_k < \infty, \quad k = 1, \dots, m. \tag{1}$$

Пусть $G(\zeta)$ – функция Грина области $\mathbb{C} \setminus E$ с полюсом в бесконечности;

$$\mathcal{L}_h = \{\zeta : \zeta \in \mathbb{C} \setminus E,\ G(\zeta) = \ln(1+h)\},$$

где $h > 0$, – линии уровня множества $E$;

$$\rho_h(\zeta) = \operatorname{dist}(\zeta, \mathcal{L}_h), \quad \zeta \in E. \tag{2}$$

Основным результатом данной работы является следующая аппроксимационная теорема, которая приводится здесь в сокращенной формулировке.

**Теорема.** *Пусть функция $f(\zeta)$ непрерывна на множестве $E$ и удовлетворяет условию $f'(\zeta) \in L^{p_k}(s_k)$, $1 < p_k < \infty$, $k = 1, \dots, m$. Тогда для некоторой последовательности $P_n(\zeta)$ полиномов степени не выше $n$, $n = 1, 2, \dots$,*

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{s_k} \left| \frac{f(\zeta) - P_n(\zeta)}{\rho_{1/n}(\zeta)} \right|^{p_k} |d\zeta| \leqslant c,$$

*где постоянная $c$ зависит от функции $f(\zeta)$, множества $E$ и не зависит от $n$.*

Построение приближающего полинома является новым по сравнению с работами В. П. Моторного [1] или М. К. Потапова [2] даже для случая одного отрезка, который рассматривался в [1, 2]. Отметим, что для $\zeta \in s_k = [a_k, b_k]$ при $0 < h \leqslant 1$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &C_1 h\left(h + \sqrt{|\zeta - a_k|\,|\zeta - b_k|}\right) < \rho_h(\zeta) < \\ &< C_2 h\left(h + \sqrt{|\zeta - a_k|\,|\zeta - b_k|}\right), \end{aligned} \tag{3}$$

где постоянные $C_1$ и $C_2$ не зависят от $h$ и $\zeta$. Поэтому в доказываемой теореме утверждается существование последовательности полиномов, которые на каждом отрезке $s_k$ приближают в метрике $L^{p_k}(s_k)$ свою функцию $f\big|_{s_k} = f_k$ именно с теми весами, которые рассматривались в [1].

В §1 данной работы приводятся необходимые вспомогательные результаты, в том числе дано построение специального семейства континуумов $M$ (п. 4), указан выбор вспомогательного приближающего полинома $P_n(f; M; \zeta)$, зависящего от конкретного континуума из семейства $M$ (п. 5), получена оценка приближения функции $f$ этим полиномом (п. 9).

§2 посвящен доказательству основной аппроксимационной теоремы. В п. 1 при помощи вспомогательного полинома $P_n(f; M; \zeta)$ строится приближающий полином $P_n(f; E; \zeta)$, а в п. 2 получена оценка приближения функции $f$ полиномом $P_n(f; E; \zeta)$.

## §1. Предварительные сведения

### 1.1. Основные обозначения.

В дальнейшем считаем, что множество $E$ лежит в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$. Ниже рассматриваем евклидово движение $w = g_k(\zeta)$, $k = 1, \dots, m$, где

$$g_k(\zeta) = \zeta e^{-i\theta_k} + d_k, \tag{4}$$

$\theta_k = \arg(b_k - a_k)$, а комплексная постоянная $d_k$ выбрана таким образом, что отрезок $g_k(s_k)$ лежит на вещественной оси. Пусть $g_k^{-1}(w)$ – обратное отображение.

Мы будем пользоваться известными понятиями слабой эквивалентности $a \asymp b$ и слабого неравенства $a \preccurlyeq b$ (см., например, [3, гл. 2 и 3]. Величины $a$ и $b$, зависящие от некоторых параметров, связаны соотношением $a \asymp b$ (соответственно, $a \preccurlyeq b$), если существуют постоянные $C_1$ и $C_2$, $0 < C_1 < C_2 < \infty$ (соответственно, $C > 0$) такие, что при всех рассматриваемых значениях параметров $C_1 b < a < C_2 b$ (соответственно, $a \leqslant Cb$).

Через $c_i$ обозначаем положительные постоянные, зависящие от свойств исходной функции $f(\zeta)$, геометрических характеристик рассматриваемых множеств и не зависящие от $n$.

### 1.2. Специальное продолжение функции $f$.

Ниже нам потребуется непрерывное продолжении функции $f$, заданной на множестве $E$, до некоторой функции $f_0$ с компактным носителем на $\mathbb{C}$.

С этой целью для каждого $k$ рассмотрим замкнутые прямоугольники $\Pi_{k,1}$ и $\Pi_{k,2}$, противоположные стороны которых параллельны отрезку $s_k$, и такие, что

$$s_k \subset \Pi_{k,1} \subset \Pi_{k,2} \quad \text{при} \quad k = 1, \dots, m,$$
$$\Pi_{i,2} \cap \Pi_{j,2} = \varnothing \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Положим

$$U = \bigcup_{k=1}^{m} \Pi_{k,2}.$$

Продолжим функцию $f$ на прямоугольник $\Pi_{k,1}$ следующим образом. Пусть $t_k$ – прямая, содержащая отрезок $s_k$. Положим $f_0(\zeta) \equiv f(b_k)$ (соответственно, $f_0(\zeta) \equiv f(a_k)$) на том из двух промежутков $(t_k \cap \Pi_{k,1}) \setminus s_k$, который содержит точку $b_k$ (соответственно, точку

$a_k$). Далее, полагаем $f_0(\zeta) \equiv f_0(\zeta_0)$ на отрезке, лежащем в $\Pi_{k,1}$ и ортогональном прямой $t_k$, где $\zeta_0$ – точка пересечения указанного отрезка с прямой $t_k$. Теперь линейно продолжим функцию $f_0(\zeta)$ на $\Pi_{k,2}$, полагая $f_0(\zeta) \equiv 0$ на $\partial\Pi_{k,2}$. Проведем аналогичные построения для каждого $k$, $k = 1, \ldots, m$, и пусть $f_0(\zeta) \equiv 0$ вне компакта $U$. Ясно, что $f_0(\zeta)$ – непрерывное продолжение функции $f(\zeta)$ на $\mathbb{C}$.

**1.3. Формула Коши–Грина для функции $f_0$.**

Убедимся в справедливости формулы Коши–Грина для функции $f_0(\zeta)$. Для этого проверим, что интеграл

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} \left| \frac{\partial f_0(\zeta)}{\partial \overline{\zeta}} \right| \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|}, \quad z \in E, \tag{5}$$

ограничен постоянной, не зависящей от $z$. Так как $f_0(\zeta) \equiv 0$ при $\zeta \in \mathbb{C} \setminus U$, то

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} \left| \frac{\partial f_0(\zeta)}{\partial \overline{\zeta}} \right| \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|} = \sum_{k=1}^{m} \iint\limits_{\Pi_{k,2}} \left| \frac{\partial f_0(\zeta)}{\partial \overline{\zeta}} \right| \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|}. \tag{6}$$

Поэтому достаточно показать, что каждый из интегралов в правой части (6) ограничен постоянной, не зависящей от $z$. Для этого применим преобразование $w = g_k(\zeta)$, $w = x + iy$ (см. (4)), к функциям $f(\zeta)$, $f_0(\zeta)$, отрезку $s_k$ и прямоугольникам $\Pi_{k,1}$ и $\Pi_{k,2}$.

Пусть

$$f^*(w) = f\Big(g_k^{-1}(w)\Big), \quad f_0^*(w) = f_0\Big(g_k^{-1}(w)\Big);$$

$$s_k^* = g_k(s_k) = \big\{w : a_k^* \leqslant x \leqslant b_k^*, y = 0\big\},$$

и пусть числа $h_k$ и $l_k$ определены условиями

$$\Pi_{k,1}^* = g_k(\Pi_{k,1}) = \big\{w : a_k^* - h_k \leqslant x \leqslant b_k^* + h_k,\ |y| \leqslant h_k\big\},$$

$$\Pi_{k,2}^* = g_k(\Pi_{k,2}) = \big\{w : a_k^* - h_k - l_k \leqslant x \leqslant b_k^* + h_k + l_k,\ |y| \leqslant h_k + l_k\big\}.$$

Для дальнейшего нам потребуется оценить модуль комплексной производной

$$\frac{\partial f_0^*(w)}{\partial \overline{w}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_0^*(w)}{\partial x} + i\frac{\partial f_0^*(w)}{\partial y}\right).$$

С этой целью рассматриваем непрерывное продолжение $f_0^*(w)$ функции $f^*(w)$ на прямоугольник $\Pi_{k,2}^*$, предварительно разбив его на области $\Omega_{k,j}$, в каждой из которых $f_0^*(w)$ имеет разный вид. При этом оказывается, что каждая из областей $\Omega_{k,j}$ принадлежит к одной из четырех групп, характеризующихся тем свойством, что во всех областях одной и той же группы для $\left|\frac{\partial f_0^*(w)}{\partial \overline{w}}\right|$ имеет место одна и та же оценка.

Именно, справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\partial f_0^*(w)}{\partial \overline{w}} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial f^*(x)}{\partial x} \quad \text{для} \quad w \in \bigl\{w : a_k^* \leqslant x \leqslant b_k^*,\ |y| \leqslant h_k\bigr\}; \tag{7}$$

$$\frac{\partial f_0^*(w)}{\partial \overline{w}} \equiv 0$$

$$\text{для} \quad w \in \bigl\{w : x \in \bigl(b_k^*, b_k^* + h_k\bigr] \cup \bigl[a_k^* - h_k, a_k^*\bigr),\ |y| \leqslant h_k\bigr\}; \tag{8}$$

$$\left|\frac{\partial f_0^*(w)}{\partial \overline{w}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{\partial f^*(x)}{\partial x}\right| + c_1$$

$$\text{для} \quad w \in \bigl\{w : a_k^* \leqslant x \leqslant b_k^*,\ h_k < |y| \leqslant h_k + l_k\bigr\}; \tag{9}$$

$$\frac{\partial f_0^*(w)}{\partial \overline{w}} \leqslant c_1 \quad \text{для всех остальных} \quad w \in \Pi_{k,2}^*. \tag{10}$$

Пусть $z \in s_k$ и $z^* = g_k(z)$, $x^* = \operatorname{Re} z^*$. Используя соотношения (7)–(10) и очевидное равенство

$$\left|\frac{\partial f_0(\zeta)}{\partial \overline{\zeta}}\right| = \left|\frac{\partial f_0^*(w)}{\partial \overline{w}}\right|, \tag{11}$$

получаем

$$\iint\limits_{\Pi_{k,2}} \left|\frac{\partial f_0(\zeta)}{\partial \overline{\zeta}}\right| \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|} = \iint\limits_{\Pi_{k,2}^*} \left|\frac{\partial f_0^*(w)}{\partial \overline{w}}\right| \frac{dxdy}{|w - z^*|} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \iint\limits_{\Pi_{k,2}^*\setminus\Pi_{k,1}^*} \frac{dxdy}{|w - z^*|} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{-h_k-l_k}^{h_k+l_k} \int\limits_{a_k^*}^{b_k^*} \left|\frac{\partial f^*(x)}{\partial x}\right| \frac{dxdy}{\sqrt{(x - x^*)^2 + y^2}}. \tag{12}$$

Первое слагаемое в правой части (12) ограничено постоянной $c_2 = \frac{c_1}{h_k}\sigma(\Pi_{k,2}^* \setminus \Pi_{k,1}^*)$, где $\sigma(\mathcal{K})$ – площадь $\mathcal{K}$.

Рассмотрим второе слагаемое. Используя неравенство

$$\int\limits_{-h_k-l_k}^{h_k+l_k} \frac{dy}{\sqrt{(x-x^*)^2+y^2}} \leqslant 2\ln\frac{(b_k^*-a_k^*)+2(h_k+l_k)}{|x-x^*|},$$

которое получается элементарными преобразованиями, и неравенство Гельдера, находим:

$$\int\limits_{a_k^*}^{b_k^*} \left|\frac{\partial f^*(x)}{\partial x}\right| \int\limits_{-h_k-l_k}^{h_k+l_k} \frac{dy}{\sqrt{(x-x^*)^2+y^2}}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\biggl(\int\limits_{a_k^*}^{b_k^*} \left|\frac{\partial f^*(x)}{\partial x}\right|^{p_k} dx\biggr)^{1/p_k} \biggl(\int\limits_{a_k^*}^{b_k^*} \left[\ln\frac{(b_k^*-a_k^*)+2(h_k+l_k)}{|x-x^*|}\right]^{q_k} dx\biggr)^{1/q_k}, \tag{13}$$

где $\frac{1}{p_k}+\frac{1}{q_k}=1$.

Применяя преобразование $g_k^{-1}(w)$ к первому сомножителю в правой части (13) и учитывая условие (1), получаем

$$\biggl(\int\limits_{a_k^*}^{b_k^*} \left|\frac{\partial f^*(x)}{\partial x}\right|^{p_k} dx\biggr)^{1/p_k} = \biggl(\int\limits_{s_k} |f'(\zeta)|^{p_k}\,|d\zeta|\biggr)^{1/p_k} < c_3.$$

Обратимся ко второму сомножителю в правой части (13). Интегрируя по частям, находим, что этот сомножитель ограничен постоянной $c_4$, не зависящей от выбора точки $z$ на отрезке $s_k$.

Пусть теперь $z\in s_j$, $j\neq k$. Используя оценку $|\zeta-z|\geqslant h_j+l_j$, нетрудно показать, что каждый из интегралов в правой части (6) ограничен и в этом случае.

Теперь из формулы Коши–Грина в силу свойств функции $f_0(\zeta)$ получаем

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\partial f_0(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z} \quad \text{при} \quad z\in E. \tag{14}$$

**1.4. Специальное семейство континуумов.**

Достроим множество $E$ до кусочно-гладкого континуума

$$M = M(E, z_1, \dots, z_m) = E \cup \left\{ \bigcup_{k=1}^{m} \big(\tau_k \cup \gamma_k\big) \right\},$$

где $\tau_k$, $k = 1, \dots, m$, – попарно не пересекающиеся отрезки, удовлетворяющие условиям: отрезки $\tau_k$ и $s_k$ ортогональны и пересекаются в точке $z_k \in s'_k$, где

$$s'_k = \left[\frac{1}{4}(3a_k + b_k), \frac{1}{4}(a_k + 3b_k)\right]; \tag{15}$$

концы отрезка $\tau_k$ лежат вне прямоугольника $\Pi_{k,2}$; $\tau_k \cap \Pi_{j,2} = \varnothing$ при $k \neq j$; отрезки $\tau_k$ продолжаются гладкими дугами $\gamma_k$, лежащими вне $U$ и сходящимися в некоторой точке $O$, причем дуги $\gamma_k$, $k = 1, \dots, m$, попарно не имеют общих точек кроме точки $O$.

Кроме того, будем считать, что расстояние от любой точки $\zeta \in \Pi_{k,2}$ до точек $a_k$, $b_k$, $z_k$ меньше, чем до остальных угловых точек континуума $M$.

Пусть $\varphi(\zeta) : \mathbb{C} \setminus M \to \mathbb{C} \setminus \overline{D}$; $\varphi(\infty) = \infty$, $\varphi'(\infty) > 0$, – конформное отображение области $\mathbb{C} \setminus M$ на внешность единичного круга $\overline{D}$; $\psi$ – отображение, обратное к $\varphi$.

При $h > 0$ пусть

$$L_h = \big\{\zeta : \zeta \in \mathbb{C} \setminus M,\ |\varphi(\zeta)| = 1 + h\big\}$$

– линия уровня континуума $M$;

$$\rho_h(M; \zeta) = \rho_h(z_1, \dots, z_m, \zeta) = \operatorname{dist}(\zeta, L_h), \quad \zeta \in M. \tag{16}$$

Конформный сдвиг $\zeta_h$ и конформный поворот-сдвиг $\zeta_{h,\theta}$ определяются формулами

$$\zeta_h = \psi\big[(1 + h)\varphi(\zeta)\big], \tag{17}$$

$$\zeta_{h,\theta} = \psi\big[(1 + h)\varphi(\zeta)e^{-i\theta}\big]. \tag{18}$$

Если $\zeta \in M$, то $\zeta_h, \zeta_{h,\theta} \in L_h$.

Проведенное выше построение континуума $M$ позволяет использовать свойства множеств с кусочно-гладкой границей и ненулевыми внешними углами (см. [3, гл. 9]). В частности, для $\zeta \in U$ справедливо соотношение

$$|\zeta - \zeta_h| \asymp h\big[\,|\zeta - \zeta_j|^{1/\alpha_j} + h\big]^{\alpha_j - 1}, \tag{19}$$

где $\zeta_j$ – ближайшая к $\zeta$ угловая точка $M$, $\alpha_j \pi \neq 0$ – величина внешнего угла в точке $\zeta_j$.

Поэтому для $\zeta \in \Pi_{k,2}$ выполняется:

$$|\zeta - \zeta_h| \asymp \frac{h}{|\zeta - z_k| + \sqrt{h}}, \tag{20}$$

если $z_k$ – ближайшая к $\zeta$ угловая точка из точек $z_k$, $b_k$ и $a_k$;

$$|\zeta - \zeta_h| \asymp h\bigl[\,|\zeta - b_k|^{1/2} + h\bigr], \tag{21}$$

если $b_k$ – ближайшая к $\zeta$ из точек $b_k$, $z_k$ и $a_k$. Полностью аналогичное соотношение справедливо в том случае, если $a_k$ – ближайшая к $\zeta$ из точек $b_k$, $z_k$ и $a_k$.

Так как

$$\rho_h(M;\zeta) \asymp |\zeta - \zeta_h| \quad \text{при} \quad \zeta \in M,$$

то соотношения (20) и (21) имеют место и для расстояния $\rho_h(M;\zeta)$.

Используя соотношения (3), (20), (21) и учитывая, что $z_k \in s'_k$ (см. (15)), можно показать, что для любой точки $\zeta \in s_k$ справедливо слабое неравенство

$$\rho_h(M;\zeta) \preccurlyeq \frac{\rho_h(\zeta)}{|\zeta - z_k|}. \tag{22}$$

**1.5. Приближающий полином для континуума $M$.**

В качестве вспомогательного приближающего полинома, зависящего от конкретного континуума из семейства $M(E, z_1, \dots, z_m)$ и функции $f(\zeta)$, возьмем полином (см. [4, 5]):

$$P_n(M;z) = P_n\bigl(f; E; z_1, \dots, z_m, z\bigr) \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\partial f_0(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \left( \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_{n,s}(\theta) \sum_{j=1}^{l} \frac{(\zeta_{1/n,\theta} - \zeta)^{j-1}}{(\zeta_{1/n,\theta} - z)^j}\, d\theta \right) d\xi\, d\eta, \tag{23}$$

здесь $J_{n,s}(\theta)$ – ядро типа Джексона порядка $n$ (см. [3, гл. 2]):

$$J_{n,s}(\theta) = \frac{1}{\lambda_{n,s}} \left( \frac{\sin\, n\theta/2}{\sin\theta/2} \right)^{2s},$$

где

$$\lambda_{n,s} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin\, n\theta/2}{\sin\theta/2}\right)^{2s} d\theta, \quad s = 1, \dots; \quad n = 1, \dots, l, \dots,$$

а точки $\zeta_{1/n,\theta}$ определены в (18).

Как известно (см. [4]), степень полинома $P_n(M; z)$ не превосходит $n$. В ходе последующих оценок окажется, что можно взять $l = 4$, $s = 17$.

**1.6. Покрытие множества $E$ системой интервалов.**

Пусть $k$ – фиксировано, $1 \leqslant k \leqslant m$. Покроем $s_k$ системой интервалов. Для этого, отправляясь от точки $a_k$, будем выбирать на отрезке $s_k$ точки $\alpha_{k,\nu}$ следующим образом:

$$\alpha_{k,0} = a_k; \quad \alpha_{k,\nu} = \alpha_{k,\nu-1} + \rho_{1/n}(M; \alpha_{k,\nu-1}), \quad \nu = 1, 2, \dots.$$

Пусть $\alpha_{k,N-1}$ – последняя из точек $\alpha_{k,\nu}$, попадающая на отрезок $s_k$. Положим $\alpha_{k,N} = b_k$. Тогда интервалы

$$I_{k,\nu} = \left[\alpha_{k,\nu-1}, \alpha_{k,\nu}\right], \quad \nu = 1, \dots, N \tag{24}$$

покрывают отрезок $s_k$.

Из соотношения (19) для любой точки $\zeta \in I_{k,\nu}$ можно заключить, что

$$\rho_{1/n}(M; \zeta) \asymp |I_{k,\nu}|. \tag{25}$$

Здесь и ниже $|I|$ – длина интервала $I$. Кроме того, используя соотношение (25) и слабое неравенство

$$\rho_{1/n}(M; \zeta) \succcurlyeq \frac{1}{n^2}, \quad \zeta \in s_k,$$

вытекающее из соотношений (20) и (21), нетрудно оценить число $N(s_k)$ интервалов $I_{k,\nu}$, покрывающих отрезок $s_k$:

$$N(s_k) \preccurlyeq n^2. \tag{26}$$

**1.7. Метрическое свойство построенных интервалов.**

Интервал $2I = \left[\frac{3a-b}{2}, \frac{3b-a}{2}\right]$ будем называть концентрическим интервалом для $I = [a, b]$.

Для дальнейшего оказывается важной следующая лемма, использующая метрическое свойство интервалов $I_{k,\nu}$.

**Лемма 1.** *Пусть функция* $m(\zeta)$ *интегрируема на отрезке* $s_k$, $m(\zeta) \geqslant 0$ *при* $\zeta \in s_k$ *и* $m(\zeta) \equiv 0$ *при* $\zeta \in \left\{\bigcup_\nu 2I_{k,\nu}\right\} \setminus s_k$, *где* $\{I_{k,\nu}\}$ *– построенное выше покрытие отрезка* $s_k$ *интервалами. Тогда существует такая постоянная* $c'$, *не зависящая от функции* $m(\zeta)$ *и от* $n$, *что справедливо неравенство*

$$\sum_\nu \int\limits_{2I_{k,\nu}} m(\zeta)\,|d\zeta| \leqslant c' \int\limits_{s_k} m(\zeta)\,|d\zeta|. \tag{27}$$

**Доказательство.** Пусть $\zeta_0$ – произвольная точка отрезка $s_k$, а $T$ – число интервалов $I_{k,\nu}$ таких, что $\zeta_0 \in 2I_{k,\nu}$. Ясно, что постоянная $c' = T$ удовлетворяет неравенству (27) и не зависит от функции $m(\zeta)$. Покажем, что постоянная $c' = T$ не зависит от $n$. Для этого положим

$$T = T^+ + T^-,$$

где $T^+$ (соответственно, $T^-$) – число интервалов $I_{k,\nu}$ (см. (24)) таких, что $\zeta_0 \in 2I_{k,\nu}$ и $|a_k - \zeta_0| < |a_k - \alpha_{k,\nu-1}|$ (соответственно, $|a_k - \zeta_0| \geqslant |a_k - \alpha_{k,\nu-1}|$).

Оценим величину $T^+$. Для интервала $I_{k,\nu}$, лежащего правее точки $\zeta_0$ на $s_k$, условие $\zeta_0 \in 2I_{k,\nu}$ можно записать в виде

$$|\zeta_0 - \alpha_{k,\nu-1}| \leqslant \frac{1}{2}|I_{k,\nu}| = \frac{1}{2}\rho_{1/n}(M; \alpha_{k,\nu-1}). \tag{28}$$

По построению континуума $M$,

$$\frac{1}{4}|b_k - a_k| \leqslant |b_k - z_k| \leqslant \frac{3}{4}|b_k - a_k|,$$

$$\frac{1}{4}|b_k - a_k| \leqslant |z_k - a_k| \leqslant \frac{3}{4}|b_k - a_k|.$$

Очевидно, что если $|\zeta_0 - \alpha_{k,\nu-1}|$ достаточно велико по сравнению с $1/n$, условие (28) заведомо не выполняется. Поэтому полагаем, что

$$n \geqslant 10 \max_k |b_k - a_k|^{-1}$$

и

$$|\zeta_0 - \alpha_{k,\nu-1}| \leqslant \frac{1}{10}|b_k - a_k|.$$

Аналогично доказательству утверждения (1) в [7], можно показать, что для континуумов, имеющих конечное число угловых точек с внешними углами, равными $\pi/2$ или $2\pi$, при $\zeta,\ z \in \Pi_{k,2}$ и таких, что $|\zeta - z| \leqslant 1/10|b_k - a_k|$, справедливо неравенство

$$|\zeta - \zeta_{1/n}| \leqslant c_5\sqrt{|z - z_{1/n}|}\sqrt{|\zeta - z| + |z - z_{1/n}|}. \qquad (29)$$

Неравенство (29) позволяет оценить длину интервала $I_{k,\nu}$, удовлетворяющего условию $\zeta_0 \in 2I_{k,\nu}$, сверху и снизу. Действительно, в силу (28),

$$\rho_{1/n}(M;\alpha_{k,\nu-1}) \leqslant c_5\sqrt{\rho_{1/n}(M;\zeta_0)}\sqrt{|\zeta_0 - \alpha_{k,\nu-1}| + \rho_{1/n}(M;\zeta_0)} \leqslant$$
$$\leqslant c_5\sqrt{\rho_{1/n}(M;\zeta_0)}\sqrt{\frac{1}{2}\rho_{1/n}(M;\alpha_{k,\nu-1}) + \rho_{1/n}(M;\zeta_0)}.$$

Из последнего неравенства получаем

$$\rho_{1/n}(M;\alpha_{k,\nu-1}) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{4}\left(c_5^2 + \sqrt{c_5^4 + 16c_5^2}\right)\rho_{1/n}(M;\zeta_0) = c_6\rho_{1/n}(M;\zeta_0). \qquad (30)$$

С другой стороны,

$$\rho_{1/n}(M;\zeta_0) \leqslant c_5\sqrt{\rho_{1/n}(M;\alpha_{k,\nu-1})}\sqrt{|\zeta_0 - \alpha_{k,\nu-1}| + \rho_{1/n}(M;\alpha_{k,\nu-1})} \leqslant$$
$$\leqslant c_7\rho_{1/n}(M;\alpha_{k,\nu-1}). \qquad (31)$$

В силу оценки (31), для любого интервала $I_{k,\nu}$, лежащего правее точки $\zeta_0$ и удовлетворяющего условию $\zeta_0 \in 2I_{k,\nu}$, справедливо неравенство

$$|I_{k,\nu}| \geqslant \frac{1}{c_7}\rho_{1/n}(M;\zeta_0). \qquad (32)$$

Кроме того, если интервал $I_{k,\mu}$ такой, что

$$|a_k - \zeta_0| < |a_k - \alpha_{k,\mu-1}|, \quad \zeta_0 \in 2I_{k,\mu} \quad \text{и} \quad \zeta_0 \neq 2I_{k,\mu+1},$$

то, используя неравенство (30), получаем

$$|\zeta_0 - \alpha_{k,\mu}| \leqslant \frac{3}{2}|I_{k,\mu}| \leqslant \frac{3}{2}c_6\rho_{1/n}(M;\zeta_0). \qquad (33)$$

Из (32), (33) окончательно находим,

$$T^+ \leqslant \frac{3}{2}c_6c_7.$$

Аналогичные рассуждения показывают, что число интервалов $T^-$ также ограничено сверху постоянной, не зависящей от $n$. Этим лемма 1 доказана.

**1.8. Некоторые классические результаты.**

Пусть $F(x)$ – функция класса $L^p(a,b)$, $I\subset[a,b]$. Рассмотрим максимальную функцию Харди–Литтлвуда (см. [8, гл. 1])

$$v(x)=\mathcal{M}F(x)=\sup_{I\ni x}\frac{1}{|I|}\int\limits_I |F(t)|\,dt,\quad x\in[a,b],\tag{34}$$

и максимальное преобразование Гильберта (см. [8, гл. 2])

$$u(x)=\mathcal{H}F(x)=\sup_{|y|>0,I\ni x}\left|\int\limits_{2I}\frac{F(t)}{x-(t+iy)}\,dt\right|,\quad x\in[a,b].\tag{35}$$

Везде далее считаем, что

$$F(x)=F_k(x)=\frac{\partial f^*(x)}{\partial x}\in L^{p_k}(s_k^*),\tag{36}$$

при $s_k^*=g_k(s_k)\subset\mathbb{R}$ и $f^*(x)=f^*(w)=f\big(g_k^{-1}(w)\big)$ при $x\in s_k^*$.

Напомним некоторые свойства ядра типа Джексона (см. [3, гл. 2]):

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}J_{n,s}(\theta)\,d\theta=1;\tag{37}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}J_{n,s}(\theta)|\theta|^i\,d\theta\asymp\frac{1}{n^i}\quad\text{при}\quad i\leqslant 2s-2,\quad i\in\mathbb{N}.\tag{38}$$

Кроме того, нам потребуется следующий результат.

**Лемма 2** (В. И. Белый [6]). *Пусть $\mathfrak{M}$ – континуум без внутренних точек,* $\operatorname{diam}\mathfrak{M}=1$. *Тогда для $z\in\mathfrak{M}$ и $\zeta\in\mathbb{C}\backslash\mathfrak{M}$,* $\operatorname{dist}(\zeta,\mathfrak{M})\leqslant 1$, *имеют место неравенства*

$$|\zeta_{h,\theta}-z|\leqslant c_{\text{абс}}\left(\frac{|\theta|}{h}+1\right)^4|\zeta_h-z|,\tag{39}$$

$$|\zeta_{h,\theta}-\zeta|\leqslant c_{\text{абс}}\left(\frac{|\theta|}{h}+1\right)^4|\zeta_h-\zeta|,\tag{40}$$

*где точки $\zeta_{h,\theta}$, $\zeta_h$ определены соответственно в* (18) *и* (17), $0 < h \leqslant 1$.

Отметим, что из неравенства (39) вытекает соотношение

$$|\zeta_{h,\theta} - z| \geqslant c_{\text{абс}}^{-1} \left(\frac{|\theta|}{h} + 1\right)^{-4} |\zeta_h - z|. \tag{41}$$

**1.9. Основная лемма.**

Докажем лемму, которая позволяет получить оценки приближения функции полиномами, зависящими от конкретного континуума из семейства $M(E, z_1, \ldots, z_m)$.

**Лемма 3.** *Пусть $I$ – один из интервалов покрытия отрезка $s_k^*$ и пусть $z^*$ – любая точка $I$. Пусть функция $f^*(z^*)$ и полином $P_n^*(M; z^*)$ получены применением к формулам* (14) *и* (23) *и к континууму $M$ преобразования $g_k(\zeta)$ (см.* (4)*):*

$$f^*(z^*) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\partial f_0^*(w)}{\partial \overline{w}} \, \frac{dx\,dy}{w - z^*},$$

$$P_n^*(M; z^*) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\partial f_0^*(w)}{\partial \overline{w}} \left( \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_{n,s}(\theta) \sum_{j=1}^{l} \frac{(w_{1/n,\theta} - w)^{j-1}}{(w_{1/n,\theta} - z^*)^j} \, d\theta \right) dx\,dy.$$

*Тогда при $l \geqslant 4$ и $s \geqslant 4l + 1$ справедливо слабое неравенство*

$$\bigl|f^*(z^*) - P_n^*(M; z^*)\bigr| \preccurlyeq |I| \bigl[u(x^*) + v(x^*)\bigr] + \frac{1}{n^2}, \tag{42}$$

*где $x^* = \operatorname{Re} z^*$.*

**Доказательство.** Доказательство леммы проведем в несколько этапов.

1) Используя свойство (37) ядра типа Джексона, в результате несложных преобразований получаем

$$f^*(z^*) - P_n^*(M; z^*) = A + B + C,$$

где

$$A = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{2\square_I} \frac{\partial f_0^*(w)}{\partial \overline{w}} \, \frac{dx\,dy}{w - z^*},$$

$$B=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{2\square_I}\frac{\partial f_0^*(w)}{\partial\overline{w}}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}J_{n,s}(\theta)\sum_{j=1}^{l}\frac{(w_{1/n,\theta}-w)^{j-1}}{(w_{1/n,\theta}-z^*)^j}\,d\theta\right)dxdy,$$

$$C=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{C}\setminus 2\square_I}\frac{\partial f_0^*(w)}{\partial\overline{w}}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}J_{n,s}(\theta)\left[\frac{1}{w-z^*}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{j=1}^{l}\frac{(w_{1/n,\theta}-w)^{j-1}}{(w_{1/n,\theta}-z^*)^j}\right]d\theta\right)dxdy=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{C}\setminus 2\square_I}\frac{\partial f_0^*(w)}{\partial\overline{w}}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}J_{n,s}(\theta)\sum_{j=1}^{l}\frac{(w_{1/n,\theta}-w)^{l}}{(w_{1/n,\theta}-z^*)^l}\,d\theta\right)\frac{dxdy}{w-z^*};$$

здесь и ниже

$$2\square_I=\bigl\{w: x\in 2I,\ |y|\leqslant |I|\bigr\}.$$

Будем предполагать, что при достаточно больших $n$, для любого $\nu$

$$2\square_{I_{k,\nu}}\subset\Pi_{k,1}.$$

Так как $I=I^*_{k,\nu}=g_k(I_{k,\nu})$ при некотором $\nu$, то

$$2\square_I\subset\Pi^*_{k,1}. \tag{43}$$

2) Оценим интегралы $A$, $B$, $C$. Пусть функции $u(x^*)$ и $v(x^*)$ определены в (35) и (34).

**Предложение 1.** *Имеет место слабое неравенство*

$$|A|\preccurlyeq |I|u(x^*).$$

**Доказательство.** Учитывая условие (43), из равенств (7), (8), (36) и определения (35) сразу получаем

$$A=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-|I|}^{|I|}\left(\int\limits_{2I}\frac{\partial f^*(x)}{\partial x}\,\frac{dx}{(x-x^*)+iy}\right)dy,$$

и поэтому

$$A \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-|I|}^{|I|} \left| \int\limits_{2I} \frac{\partial f^*(x)}{\partial x} \, \frac{dx}{(x-x^*)+iy} \right| dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-|I|}^{|I|} u(x^*) dy \preccurlyeq |I| u(x^*).$$

Заметим, что если $2I \setminus s_k \neq \varnothing$, то можно считать, что $\frac{\partial f^*(x)}{\partial x} \equiv 0$ при $x \in 2I \setminus s_k$.

**Предложение 2.** *При $s \geqslant 4l-1$ имеем слабое неравенство*

$$|B| \preccurlyeq |I| \, v(x^*).$$

**Доказательство.** Из неравенств (40), (41) и свойств (37) и (38) ядра типа Джексона при $s \geqslant 4l-1$ имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} J_{n,s}(\theta) \sum_{j=1}^{l} \frac{|w_{1/n,\theta} - w|^{j-1}}{|w_{1/n,\theta} - z^*|^j} \, d\theta \preccurlyeq$$

$$\preccurlyeq \sum_{j=1}^{l} \frac{|w_{1/n} - w|^{j-1}}{|w_{1/n} - z^*|^j} \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_{n,s}(\theta) \big(|\theta| n + 1\big)^{8l-4} \, d\theta \asymp$$

$$\asymp \sum_{j=1}^{l} \frac{|w_{1/n} - w|^{j-1}}{|w_{1/n} - z^*|^j}.$$

Поэтому

$$|B| \preccurlyeq \frac{1}{\pi} \iint\limits_{2\square_I} \left| \frac{\partial f_0^*(w)}{\partial \overline{w}} \right| \sum_{j=1}^{l} \frac{|w_{1/n} - w|^{j-1}}{|w_{1/n} - z^*|^j} \, dx dy. \tag{44}$$

Далее, так как по условию леммы $z^* \in I$, то для $w \in 2\square_I$, используя соотношения (25) и (29), получаем

$$|w_{1/n} - z^*| \geqslant \rho_{1/n}(M; z^*) \asymp |I|, \tag{45}$$

$$\begin{aligned} |w_{1/n} - w| &\preccurlyeq \sqrt{\rho_{1/n}(M; z^*)} \sqrt{|w - z^*| + \rho_{1/n}(M; z^*)} \preccurlyeq \\ &\preccurlyeq \rho_{1/n}(M; z^*) \asymp |I|. \end{aligned} \tag{46}$$

В силу соотношений (44)–(46), равенств (7), (8), (36) и определения (34) имеем

$$|B| \preccurlyeq \sum_{j=1}^{l} \iint\limits_{2\square_I} \frac{1}{|I|} \left| \frac{\partial f_0^*(w)}{\partial \overline{w}} \right| dxdy =$$

$$= \sum_{j=1}^{l} \int\limits_{-|I|}^{|I|} \left( \frac{1}{2|I|} \int\limits_{2I} \left| \frac{\partial f^*(x)}{\partial x} \right| dx \right) dy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{l} \int\limits_{-|I|}^{|I|} v(x^*)\, dy \preccurlyeq |I|\, v(x^*).$$

**Предложение 3.** *При $l \geqslant 4$ и $s \geqslant 4l+1$ имеем слабое неравенство*

$$|C| \preccurlyeq |I|\, v(x^*) + \frac{1}{n^{l/2}}.$$

**Доказательство.** Доказательство разобьем на ряд пунктов.

(i) Как и при доказательстве предложения 2, из неравенств (40), (41) и свойств (37) и (38) ядра типа Джексона при $s \geqslant 4l+1$ сразу получаем

$$|C| \preccurlyeq \iint\limits_{\mathbb{C}\setminus 2\square_I} \left| \frac{\partial f_0^*(w)}{\partial \overline{w}} \right| \frac{|w_{1/n} - w|^l}{|w_{1/n} - z^*|^l} \frac{dx\, dy}{|w - z^*|}. \tag{47}$$

Далее, покажем, что при любом $w \notin 2\square_I$

$$|w_{1/n} - z^*| \asymp |w - z^*|. \tag{48}$$

При $|w - z^*| > 1/10|b_k^* - a_k^*|$ соотношение (48) очевидно. Пусть $|w - z^*| \leqslant 1/10|b_k^* - a_k^*|$. Так как $w \notin 2\square_I$, то

$$|w - z^*| \succcurlyeq \rho_{1/n}(M; z^*),$$

откуда получаем

$$|w_{1/n} - z^*| \leqslant |w - z^*| + |w_{1/n} - w| \preccurlyeq |w - z^*| +$$

$$+ \sqrt{\rho_{1/n}(M; z^*)}\, \sqrt{|w - z^*| + \rho_{1/n}(M; z^*)} \preccurlyeq |w - z^*|.$$

Обратно, пусть $|w-z^*| \geqslant D\,\rho_{1/n}(M;z^*)$, где постоянная $D$ такова, что $|w_{1/n}-w| \leqslant 1/2|w-z^*|$, и легко определяется с помощью соотношения (29). Тогда из условия $|w_{1/n}-w| \leqslant 1/2|w-z^*|$ сразу получаем

$$|w-z^*| \preccurlyeq |w_{1/n}-z^*|.$$

Если же $|w-z^*| \leqslant D\,\rho_{1/n}(M;z^*)$, то

$$|w_{1/n}-z^*| \geqslant \rho_{1/n}(M;z^*) \succcurlyeq |w-z^*|.$$

В силу соотношений (47) и (48),

$$|C| \preccurlyeq \iint\limits_{\mathbb{C}\setminus 2\square_I} \left|\frac{\partial f_0^*(w)}{\partial \overline{w}}\right| \frac{|w_{1/n}-w|^l}{|w-z^*|^{l+1}}\,dx\,dy.$$

Учитывая (43), последнюю оценку можно записать в виде

$$|C| \preccurlyeq J_1+J_2+J_3,$$

где

$$J_1 = \sum_{i\neq k} \iint\limits_{g_k(\Pi_{i,2})} \left|\frac{\partial f_0^*(w)}{\partial \overline{w}}\right| \frac{|w_{1/n}-w|^l}{|w-z^*|^{l+1}}\,dx\,dy,$$

$$J_2 = \iint\limits_{\Pi_{k,2}^*\setminus\Pi_{k,1}^*} \left|\frac{\partial f_0^*(w)}{\partial \overline{w}}\right| \frac{|w_{1/n}-w|^l}{|w-z^*|^{l+1}}\,dx\,dy,$$

$$J_3 = \iint\limits_{\Pi_{k,1}^*\setminus 2\square_I} \left|\frac{\partial f_0^*(w)}{\partial \overline{w}}\right| \frac{|w_{1/n}-w|^l}{|w-z^*|^{l+1}}\,dx\,dy.$$

Оценим каждый из этих трех интегралов.

(ii) Оценить интегралы $J_1$ и $J_2$ не составляет труда. Предварительно заметим, что благодаря инвариантности величины $\left|\dfrac{\partial f_0(\zeta)}{\partial \overline{\zeta}}\right|$ относительно линейного преобразования плоскости (см. (11)) в интеграле $J_1$ можно положить $w \in \bigcup\limits_{i\neq k} \Pi_{i,2}^*$.

В силу соотношений (7)–(10), условия (1), неравенств

$$|w-z^*| \geqslant \begin{cases} h_k+l_k, & w\in\Pi_{i,2}^*, \quad i\neq k,\\ h_k, & w\in\Pi_{i,2}^*\setminus\Pi_{k,1}^* \end{cases}$$

и слабого неравенства

$$|w_{1/n} - w| \preccurlyeq \frac{1}{n^{1/2}} \quad \text{для} \quad w \in \Pi^*_{k,2}, \qquad k = 1, \dots, m,$$

имеем

$$J_1 \preccurlyeq \frac{1}{n^{l/2}(h_k + l_k)^{l+1}} \sum_{i \neq k} \iint\limits_{\Pi^*_{k,2}} \left| \frac{\partial f_0^*(w)}{\partial \overline{w}} \right| dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n^{l/2}(h_k + l_k)^{l+1}} \sum_{i \neq k} \left[ h_i \int\limits_{a_i^*}^{b_i^*} \left| \frac{\partial f^*(x)}{\partial x} \right| dx + \right.$$

$$\left. + \sqrt{2}\, l_i \int\limits_{a_i^*}^{b_i^*} \left| \frac{\partial f^*(x)}{\partial x} \right| dx + c_1 \sigma \left( \Pi^*_{i,2} \setminus \Pi^*_{i,1} \right) \right] \preccurlyeq \frac{1}{n^{l/2}}.$$

Аналогично,

$$J_2 \preccurlyeq \frac{1}{n^{l/2}\, h_k^{l+1}} \iint\limits_{\Pi^*_{k,2} \setminus \Pi^*_{k,1}} \left| \frac{\partial f_0^*(w)}{\partial \overline{w}} \right| dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n^{l/2}\, h_k^{l+1}} \left[ \sqrt{2}\, l_k \int\limits_{a_k^*}^{b_k^*} \left| \frac{\partial f^*(x)}{\partial x} \right| dx + c_1 \sigma \left( \Pi^*_{k,2} \setminus \Pi^*_{k,1} \right) \right] \preccurlyeq \frac{1}{n^{l/2}}.$$

(iii) Оценим интеграл $J_3$.
Если $|w - z^*| > 1/10 |b_k^* - a_k^*|$, то сразу получаем

$$J_3 \preccurlyeq \frac{h_k}{n^{l/2} |b_k^* - a_k^*|^{l+1}} \int\limits_{a_k^*}^{b_k^*} \left| \frac{\partial f^*(x)}{\partial x} \right| dx \preccurlyeq \frac{1}{n^{l/2}}.$$

В противном случае легко видеть, что при $w \notin 2\square_I$

$$|w_{1/n} - w| \preccurlyeq \sqrt{\rho_{1/n}(M; z^*)}\, \sqrt{|w - z^*| + \rho_{1/n}(M; z^*)} \preccurlyeq$$

$$\preccurlyeq \sqrt{\rho_{1/n}(M; z^*)}\, \sqrt{|w - z^*|} \asymp |I| \sqrt{|w - z^*|},$$

следовательно,

$$J_3 \preccurlyeq \iint\limits_{\Pi^*_{k,1}\setminus 2\Box_I} \left|\frac{\partial f^*_0(w)}{\partial \overline{w}}\right| \frac{|I|^{l/2}}{|w-z^*|^{l/2+1}}\, dxdy.$$

Полагая $I=[a,a+|I|]$ и учитывая соотношение (8), разобьем область

$$\{w: a^*_k \leqslant x \leqslant b^*_k,\ |y|\leqslant h_k\}\setminus 2\Box_I,$$

в случае $2I\subset s_k$, на подобласти $\Delta_i$, $i=1,\dots,8$,

$$\Delta_1=\{w: x\in 2I,\ \ |I|\leqslant y\leqslant h_k\},$$
$$\Delta_2=\left\{w: a+\frac{3}{2}|I|\leqslant x\leqslant b^*_k,\ \ |y|\leqslant |I|\right\},$$
$$\Delta_3=\left\{w: a+\frac{3}{2}|I|\leqslant x\leqslant b^*_k,\ \ |I|<|y|\leqslant h_k\right\}.$$

Области $\Delta_4$ и $\Delta_1$ симметричны относительно вещественной оси, области $\Delta_5$ и $\Delta_2$ симметричны относительно прямой $x=a+\frac{|I|}{2}$, а $\Delta_6$, $\Delta_7$, $\Delta_8$ – остающиеся угловые области.

Тогда

$$J_3 \preccurlyeq \sum_{i=1}^{8} J_{3,i},$$

где

$$J_{3,i}=\iint\limits_{\Delta_i} \left|\frac{\partial f^*_0(w)}{\partial \overline{w}}\right| \frac{|I|^{l/2}}{|w-z^*|^{l/2+1}}\, dxdy. \qquad (49)$$

В силу соотношения (7), равенств (49), (36) и определения (34), имеем

$$J_{3,1}\leqslant \frac{|I|^{l/2}}{2}\int\limits_{2I}\left|\frac{\partial f^*(x)}{\partial x}\right|\Bigg(\int\limits_{|I|}^{h_k}\frac{dy}{y^{l/2+1}}\Bigg)\,dx\leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{l}\,\frac{1}{2|I|}\int\limits_{2I}\left|\frac{\partial f^*(x)}{\partial x}\right|dx \preccurlyeq |I|\,v(x^*).$$

Пусть $w\in\Delta_2$. Так как $x-x^*\geqslant \frac{1}{2}|I|$, то при $l\geqslant 2$

$$\left[\frac{|I|}{2(x-x^*)}\right]^{l/2}\leqslant \frac{|I|}{2(x-x^*)}.$$

Очевидно

$$\frac{|I|^{l/2}}{(x-x^*)^{l/2+1}} \preccurlyeq \frac{|I|}{(x-x^*)^2} \preccurlyeq \frac{|I|}{(x-x^*)^2+|I|^2}. \tag{50}$$

Тогда из соотношений (7), (50) и равенства (49) вытекает

$$J_{3,2} \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{-|I|}^{|I|} dy \int\limits_{x^*+|I|/2}^{b_k^*} \left|\frac{\partial f^*(x)}{\partial x}\right| \frac{|I|^{l/2}}{(x-x^*)^{l/2+1}}\,dx \preccurlyeq$$

$$\preccurlyeq |I| \int\limits_{a_k^*}^{b_k^*} \left|\frac{\partial f^*(x)}{\partial x}\right| \frac{|I|}{(x-x^*)^2+|I|^2}\,dx.$$

Применяя свойство максимальной функции Харди–Литтлвуда (см. [8, гл. 1])

$$\int\limits_a^b \frac{y}{y^2+(t-x)^2}|F(t)|\,dt \leqslant c'_{\text{абс}}\,v(x), \qquad x\in[a,b],$$

с учетом равенства (36) получаем

$$J_{3,2} \preccurlyeq |I|\,v(x^*).$$

Пусть теперь $w\in\Delta_3$. Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, и учитывая, что при $l\geqslant 4$

$$\left[\frac{|I|}{2(x-x^*)}\right]^{l/2-1} \leqslant \frac{|I|}{2(x-x^*)},$$

находим

$$J_{3,3} \leqslant \frac{|I|^{l/2}}{2} \int\limits_{x^*+|I|/2}^{b_k^*} \left|\frac{\partial f^*(x)}{\partial x}\right| \biggl(\int\limits_{|I|}^{h_k} \frac{dy}{(x-x^*+y)^{l/2+1}}\biggr)\,dx \preccurlyeq$$

$$\preccurlyeq \int\limits_{x^*+|I|/2}^{b_k^*} \left|\frac{\partial f^*(x)}{\partial x}\right| \frac{|I|^{l/2}}{(x-x^*+|I|)^{l/2}}\,dx \preccurlyeq$$

$$\preccurlyeq |I| \int\limits_{a_k^*}^{b_k^*} \left|\frac{\partial f^*(x)}{\partial x}\right| \frac{|I|}{(x-x^*)^2+|I|^2}\,dx \preccurlyeq |I|\,v(x^*).$$

Такие же оценки справедливы и в оставшихся областях. Случай, когда $2I \setminus s_k \neq \varnothing$, отличается от рассмотренного выше лишь тем, что число областей $\Delta_i$ равно 5.

Окончательно получаем:

$$J_3 \preccurlyeq |I|\, v(x^*).$$

Этим предложение 3 доказано.

3) Из предложений 1–3 и условия $l \geqslant 4$ сразу следует слабое неравенство (42), что и доказывает лемму 3.

## §2. Основная теорема

**2.1. Построение приближающего полинома.**

В качестве приближающего полинома рассмотрим полином вида

$$P_n(\zeta) = P_n(f;E;\zeta) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{s'_1} \ldots \int\limits_{s'_m} (-1)^m \pi(\zeta, z_1, \ldots, z_m) \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{m} \varphi_k(z_k) P_n(M;\zeta) |dz_1| \ldots |dz_m|, \tag{51}$$

где

$$\pi(\zeta, z_1, \ldots, z_m) = \prod_{k=1}^{m} (\zeta - z_k), \tag{52}$$

$\varphi_k(z_k)$ – линейная функция, определенная на отрезке $s'_k$ (см. (15)), $k = 1, \ldots, m$, условиями

$$\begin{cases} \displaystyle\int\limits_{s'_k} \varphi_k(z_k)\,|dz_k| = 0, \\ \displaystyle\int\limits_{s'_k} z_k\, \varphi_k(z_k)\,|dz_k| = 1, \end{cases} \tag{53}$$

и $P_n(M;\zeta)$ – вспомогательный полином степени не выше $n$, определенный при $l \geqslant 4$ и $s \geqslant 4l + 1$ равенством (23).

**2.2. Подробная формулировка основной теоремы и завершение ее доказательства.**

**Теорема.** *Пусть функция $f$ непрерывна на множестве $E = \bigcup_{k=1}^{m} s_k$ и удовлетворяет условию $f' \in L^{p_k}(s_k)$, $1 < p_k < \infty$, $k = 1, \dots, m$, и пусть полиномы $P_n(f;E;\zeta)$ построены для множества $E$ и функции $f$ в формуле (51), $\rho_h(\zeta)$ – расстояние до линий уровня $E$, введенное в соотношении (2). Тогда существует постоянная $c$, не зависящая от $n$, для которой при $n = 1, 2, \dots$ справедливы неравенства*

$$\sum_{k=1}^{m} \int\limits_{s_k} \left| \frac{f(\zeta) - P_n(f;E;\zeta)}{\rho_{1/n}(\zeta)} \right|^{p_k} |d\zeta| \leqslant c. \tag{54}$$

**Доказательство.** 1) Сначала докажем справедливость оценки

$$W = \int\limits_{s_k} \left| \frac{f(\zeta) - P_n(M;\zeta)}{\rho_{1/n}(M;\zeta)} \right|^{p_k} |d\zeta| \leqslant c'', \tag{55}$$

где $P_n(M;\zeta)$ – вспомогательный полином степени не выше $n$, определенный при $l \geqslant 4$ и $s \geqslant 4l+1$ равенством (23), расстояние $\rho_{1/n}(M;\zeta)$ определено в (16), а постоянная $c''$ не зависит от $n$ и выбора точек $z_1, \dots, z_m$.

Действительно, в силу леммы 3 и соотношения (25) имеем

$$\begin{aligned}
W &= \sum_{\nu} \int\limits_{I_{k,\nu}} \left| \frac{f(\zeta) - P_n(M;\zeta)}{\rho_{1/n}(M;\zeta)} \right|^{p_k} |d\zeta| \asymp \\
&\asymp \sum_{\nu} \frac{1}{|I_{k,\nu}|^{p_k}} \int\limits_{I_{k,\nu}} \bigl| f(\zeta) - P_n(M;\zeta) \bigr|^{p_k} |d\zeta| = \\
&= \sum_{\nu} \frac{1}{|I^*_{k,\nu}|^{p_k}} \int\limits_{I^*_{k,\nu}} \bigl| f^*(w) - P^*_n(M;w) \bigr|^{p_k} |dw| \preccurlyeq \\
&\preccurlyeq \sum_{\nu} \frac{1}{|I^*_{k,\nu}|^{p_k}} \int\limits_{I^*_{k,\nu}} \left( \bigl|I^*_{k,\nu}\bigr| \bigl[u(x) + v(x)\bigr] + \frac{1}{n^2} \right)^{p_k} dx \asymp \\
&\asymp \sum_{\nu} \int\limits_{I^*_{k,\nu}} \bigl[u(x)\bigr]^{p_k} dx + \sum_{\nu} \int\limits_{I^*_{k,\nu}} \bigl[v(x)\bigr]^{p_k} dx + \sum_{\nu} \frac{1}{|I^*_{k,\nu}|^{p_k - 1}\, n^{2p_k}}.
\end{aligned}$$

Отсюда и из свойств функций $u(x)$ и $v(x)$:

$$\int\limits_{I}\big[u(x)\big]^{p_k}\,dx \leqslant c_p \int\limits_{2I}|F(x)|^p\,dx, \quad \int\limits_{a}^{b}\big[v(x)\big]^{p_k}\,dx \leqslant c_p' \int\limits_{a}^{b}|F(x)|^p\,dx,$$

где $I\subset[a,b]$ и $1<p<\infty$, с учетом равенства (36), получаем

$$W \preccurlyeq \sum_{\nu}\int\limits_{2I^*_{k,\nu}}\left|\frac{\partial f^*(x)}{\partial x}\right|^{p_k}dx + \int\limits_{a_k^*}^{b_k^*}\left|\frac{\partial f^*(x)}{\partial x}\right|^{p_k}dx + \sum_{\nu}\frac{1}{|I^*_{k,\nu}|^{p_k-1}n^{2p_k}}.$$

Наконец, используя условие (1), неравенства (26), (27) и $|I^*_{k,\nu}| \succcurlyeq \frac{1}{n^2}$, справедливое для любого $\nu$, находим

$$\begin{aligned} W &\preccurlyeq \int\limits_{a_k^*}^{b_k^*}\left|\frac{\partial f^*(x)}{\partial x}\right|^{p_k}dx + \sum_{\nu}\frac{1}{n^2} \preccurlyeq \\ &\preccurlyeq \int\limits_{a_k^*}^{b_k^*}\left|\frac{\partial f^*(x)}{\partial x}\right|^{p_k}dx + 1 = \int\limits_{s_k}\big|f'(\zeta)\big|^{p_k}\,|d\zeta| + 1 \leqslant c''. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства теоремы существенна независимость полученной оценки $c''$ интеграла $W$ от конкретного континуума из семейства $M(E,z_1,\ldots,z_m)$. Если проанализировать, от чего зависят постоянные, полученные в утверждениях предыдущих пунктов, то окажется, что первоначально постоянные, формально зависящие от $M$, появляются в соотношениях (20) и (21). Все постоянные из (20) и (21) могут быть выбраны независимыми от конкретного континуума из $M$, исходя из следующих соображений. Пусть $c_j(z_1,\ldots,z_m)$ – любая из упомянутых в (20), (21) констант. Пусть $(z_1^{(0)},\ldots,z_m^{(0)})$ – фиксированная точка множества $s_1'\times\ldots\times s_m'$. Для любой последовательности точек

$$(z_1^{(\nu)},\ldots,z_m^{(\nu)}),\ \ z_i^{(\nu)}\in s_i', \quad \text{такой, что} \quad z_1^{(\nu)}\to z_1^{(0)},\ldots,z_m^{(\nu)}\to z_m^{(0)},$$

в силу построения семейства континуумов $M$, области

$$\mathbb{C}\setminus M(E,z_1^{(\nu)},\ldots,z_m^{(\nu)})$$

сходятся к области

$$\mathbb{C}\setminus M(E, z_1^{(0)}, \dots, z_m^{(0)})$$

как к ядру относительно точки $\infty$ (см. [9, гл. 2]). Тогда по теореме о сходимости для однолистного отображения последовательности областей (см. [9, гл. 5]) в силу существования постоянной $c_j(z_1^{(0)}, \dots, z_m^{(0)})$ получаем, что $c_j(z_1^{(\nu)}, \dots, z_m^{(\nu)})$ ограничена сверху (или соответственно, отделена от нуля, если $c_j$ выступает в роли постоянной в оценке снизу) в некоторой окрестности $U_0$ точки $(z_1^{(0)}, \dots, z_m^{(0)})$. Выбирая из покрытия компакта $s_1' \times \dots \times s_m'$ открытыми множествами $U_0$ конечное подпокрытие, приходим к наличию постоянной $c_j^*$, большей любой $c_j(z_1, \dots, z_m)$ (или, соответственно, положительной и меньшей любой $c_j(z_1, \dots, z_m)$) при любом выборе $z_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, что и доказывает требуемое утверждение.

Учитывая теперь, что все фигурирующие в работе постоянные не зависят от $n$, окончательно получаем, что $c''$ может быть выбрана не зависящей от $n$ и точек $z_1, \dots, z_m$.

2) Перейдем непосредственно к доказательству утверждения теоремы.

Пусть, как и выше, $\varphi_k(z_k)$ – линейная функция, определенная на $s_k'$ условиями (53), а $\pi(\zeta, z_1, \dots, z_m)$ – полином (52).

Тогда

$$\int\limits_{s_1'} \dots \int\limits_{s_m'} (-1)^m \pi(\zeta, z_1, \dots, z_m) \prod_{k=1}^m \varphi_k(z_k) |dz_1| \dots |dz_m| =$$
$$= \int\limits_{s_1'} \dots \int\limits_{s_m'} \prod_{k=1}^m z_k\, \varphi_k(z_k) |dz_1| \dots |dz_m| = 1,$$

следовательно, функция $f(\zeta)$ может быть представлена в виде

$$f(\zeta) = \int\limits_{s_1'} \dots \int\limits_{s_m'} (-1)^m \pi(\zeta, z_1, \dots, z_m) \times$$
$$\times \prod_{k=1}^m \varphi_k(z_k)\, f(\zeta) |dz_1| \dots |dz_m|. \tag{56}$$

Пусть $P_n(\zeta) = P_n(f; E; \zeta)$.

В силу равенств (51), (56), слабого неравенства (22) и ограниченности $|\zeta - z_i|$ при $i \neq k$, имеем

$$\sum_{k=1}^{m} \int\limits_{s_k} \left| \frac{f(\zeta) - P_n(\zeta)}{\rho_{1/n}(\zeta)} \right|^{p_k} |d\zeta| =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{s_k} \Bigg| \int\limits_{s_1'} \ldots \int\limits_{s_m'} (-1)^m \pi(\zeta, z_1, \ldots, z_m) \prod_{k=1}^{m} \varphi_k(z_k) \times$$

$$\times \big[f(\zeta) - P_n(M;\zeta)\big] \rho_{1/n}^{-1}(\zeta) |dz_1| \ldots |dz_m| \Bigg|^{p_k} |d\zeta| \preccurlyeq$$

$$\preccurlyeq \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{s_k} \Bigg( \int\limits_{s_1'} \ldots \int\limits_{s_m'} \frac{|f(\zeta) - P_n(M;\zeta)|\,|\zeta - z_k|}{\rho_{1/n}(\zeta)} |dz_1| \ldots |dz_m| \Bigg)^{p_k} |d\zeta| \preccurlyeq$$

$$\preccurlyeq \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{s_k} \Bigg( \int\limits_{s_1'} \ldots \int\limits_{s_m'} \frac{|f(\zeta) - P_n(M;\zeta)|}{\rho_{1/n}(M;\zeta)} |dz_1| \ldots |dz_m| \Bigg)^{p_k} |d\zeta|.$$

Отсюда, используя неравенство Гельдера и соотношение (55), окончательно получаем

$$\sum_{k=1}^{m} \int\limits_{s_k} \left| \frac{f(\zeta) - P_n(\zeta)}{\rho_{1/n}(\zeta)} \right|^{p_k} |d\zeta| \preccurlyeq$$

$$\preccurlyeq \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{s_1'} \ldots \int\limits_{s_m'} \Bigg( \int\limits_{s_k} \left| \frac{f(\zeta) - P_n(M;\zeta)}{\rho_{1/n}(M;\zeta)} \right|^{p_k} |d\zeta| \Bigg) |dz_1| \ldots |dz_m| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} c'' \int\limits_{s_1'} \ldots \int\limits_{s_m'} |dz_1| \ldots |dz_m| \leqslant c.$$

Заметим, что в приведенных выше выкладках, помимо соотношения (55), мы используем и слабое неравенство (22), в котором постоянная также не зависит от $z_1, \ldots, z_m$. Теорема полностью доказана.

**Замечание.** Степень полинома $P_n(f;E;\zeta)$ фактически не превосходит $n+m$. Можно считать, что $\deg P_n \leqslant n$, $n = 1, 2, \ldots$. Действительно, так как

$$\rho_{1/n}(\zeta) \asymp \rho_{1/(n+m)}(\zeta), \quad \zeta \in E,$$

то, обозначая $n' = m + n$ и полагая $P_{n'}(\zeta) = P_n(f; E; \zeta)$ при достаточно больших $n'$ и $P_{n'}(\zeta) \equiv 0$ во всех остальных случаях, получаем, что последовательность приближающих полиномов $\{P_{n'}(\zeta)\}$ удовлетворяет неравенству (54) с постоянной, возможно, большей, чем постоянная, получаемая при приближении функции $f(\zeta)$ только полиномами $P_n(f; E; \zeta)$.

## Литература


1. В. П. Моторный, *Приближение функций алгебраическими полиномами в метрике $L_p$.* — Изв. АН СССР, Сер. мат. **35,** No. 4 (1971), 874–899.
2. М. К. Потапов, *О структурных характеристиках классов функций с данным порядком наилучшего приближения.* — Труды МИАН **134** (1975), 260–277.
3. В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.* М., 1977.
4. Н. А. Лебедев, Н. А. Широков, *О равномерном приближении функций на замкнутых множествах, имеющих конечное число угловых точек с ненулевыми внешними углами.* — Изв. АН Арм. ССР, Сер. мат. **6**, No. 4 (1971), 311–341.
5. В. К. Дзядык, *О применении обобщенных полиномов Фабера к приближению интегралов типа Коши и функций класса $A^r$ в областях с гладкой и кусочно-гладкой границей.* — Укр. мат. журн. **24**, No. 1 (1972), 3–19.
6. В. И. Белый, *Конформные отображения и приближения функций в областях с квазиконформной границей.* — Мат. сб. **102**, No. 3 (1977), 331–361.
7. Н. А. Широков, *Конструктивные описания классов функций полиномиальными приближениями. I.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **254** (1998), 207–234.
8. Е. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* М., 1973.
9. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* 2-ое изд., М., 1966.



Krasheninnikova Yu. V. and Shirokov N. A. Polynomial approximation in the $L^p$-metric on disjoint segments.

The function Sobolev class on the union of a finite number of disjoint segments is described in terms of the rate of polynomial approximation.



Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена

С.-Петербургский государственный электротехнический университет


Поступило 14 февраля 2000 г.