Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 270, 2000 г.

С. В. Кисляков

ПРОДОЛЖЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ, ЗАДАННЫХ НА РЕФЛЕКСИВНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ В L^1 ИЛИ $L^1/\ H_0^1$

§0. Введение

Типичным примером теорем о продолжении, составляющих предмет этой статьи, является следующий результат Ж. Бургейна (см. обзоры [1, 2]). Обозначим через $\mathbb{T}$ единичную окружность с нормированной мерой Лебега m. Под "оператором" мы всегда будем понимать линейный ограниченный оператор.

Теорема А. *Пусть X – это либо $L^1(\mu)$, либо $L^1(\mathbb{T})/H_0^1$, и пусть E – рефлексивное подпространство в X. Тогда всякий оператор $T : E \to H^\infty$ допускает продолжение до оператора, действующего из X в H^∞.*

Эта теорема была доказана в связи с установленным несколько ранее (см. [3]) аналогом теоремы Гротендика для пространства $L^1(\mathbb{T})/H_0^1$ и переформулировкой утверждения теоремы Гротендика в терминах продолжения операторов (см. теорему В ниже). Напомним вкратце, о чем идет речь. Теорема Гротендика гласит, что всякий оператор из $L^1(\mu)$ в l^2 является 1-суммирующим (см., например, [4] по поводу определений и свойств p-суммирующих операторов). Любое пространство Y, на которой переносится это свойство пространства $L^1(\mu)$, называется GT-пространством. Напомним еще определение пространств котипа 2: это – ровно те, в которых для любых векторов $x_1, \dots, x_n$ выполняется неравенство

$$\Big(\sum \|x_i\|^2\Big)^{1/2} \leqslant c \int_0^1 \Big\|\sum x_i r_i(t)\Big\|\, dt,$$

где $\{r_i\}$ – функции Радемахера, а постоянная c не зависит ни

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 99-01-00103), ФЦП интеграция (рег. № 326.53) и Шведской Королевской Академии наук.

от векторов x_i, ни от их числа. Подпространство в $L^1[0,1]$, натянутое на функции Радемахера, будем обозначать через R. В силу неравенства Хинчина это подпространство изоморфно пространству l^2 (в частности, рефлексивно). Следующий факт был установлен в [5] (см. также [6]).

Теорема B. *Для того, чтобы банахово пространство Y было GT-пространством котипа 2, необходимо и достаточно, чтобы всякий оператор $T : R \to Y^*$ допускал продолжение до оператора, действующего из $L^1[0,1]$ в Y^*.*

Из приведенной формулировки видно, что теорема A содержит в качестве довольно частного случая утверждение о том, что $Y = L^1(\mathbb{T})/H^1_0$ – (GT)-пространство котипа 2. Действительно, $Y^* = H^\infty$, и достаточно применить теорему A к подпространству R в $L^1[0,1]$.

В этой статье мы приследуем две цели. Во-первых, будет описан общий подход к доказательству теорем о продолжении указанного выше вида (см. §2). Вот как выглядит этот подход в ситуации теоремы B. На пространстве R эквивалентны нормы всех пространств $L^p[0,1]$ с $1 \leqslant p < \infty$ (неравенство Хинчина). Более того, при $p > 1$ пространство R дополняемо в $L^p[0,1]$, поэтому расширение на L^p $(p > 1)$ любого оператора $T : R \to Y^*$ не встречает никаких препятствий. Как мы увидим, при некоторых условиях отсюда *с помощью интерполяционных соображений* можно вывести и продолжимость любого оператора $T : R \to Y^*$ на L^1. В ситуации теоремы A дело обстоит похожим образом: продолжение оператора на $L^p(\mu)$ (или $L^p(\mathbb{T})/H^p_0$) с некоторым $p > 1$ тоже оказывается относительно легкой задачей, а затем вступают в игру такие же интерполяционные соображения.

Во-вторых (см. §§3, 4), мы займемся вопросом о том, до какой степени теорему B можно в тех или иных конкретных случаях обобщить в духе теоремы A. Именно, пусть Y – GT-пространство котипа 2. Для каких рефлексивных подпространств E в $L^1(\mu)$ (или в $L^1(\mathbb{T})/H^1_0$) всякий оператор $T : E \to Y^*$ продолжается на $L^1(\mu)$ (соответственно, на $L^1(\mathbb{T})/H^1_0$)? Когда это так для произвольного рефлексивного E?

В классическом случае, когда $Y = L^1(\nu)$, ответ хорошо известен: операторы со значениями в $Y^* = L^\infty(\nu)$ и заданные где угодно продолжаются куда угодно. Исторически первым примером GT-пространств, отличных от $L^1(\nu)$, были факторпространства $L^1(\nu)/F$, где F рефлексивно и бесконечномерно (см. [7, 8] и монографию [6]). Эти факторпространства обладают и котипом 2. Как мы увидим, для них имеется практически исчерпывающий ответ на поставленные вопросы. Упомянутое продолжение возможно с любого рефлексивного подпространства E (неважно, в $L^1(\mu)$ или в $L^1(\mathbb{T})/H_0^1$) тогда и только тогда, когда пространство F – гильбертово и для каждого $p \in (1, 2]$ после надлежащей замены плотности становится дополняемым подпространством в L^p (точная формулировка дана в §4). Аналогичные результаты верны и для факторпространств пространства $L^1(\mathbb{T})/H_0^1$ по его рефлексивным подпространствам. Такие факторы действительно являются GT-пространствами котипа 2 в силу [6, Глава 6, d]. Впрочем, подход настоящей статьи позволяет проверить это независимым образом (см. следствие 1 к теореме 1, §3).

Во всех этих рассмотрениях общая теорема о продолжении из §2 будет играть весьма заметную роль.

§1. Предварительные сведения

1.1. Константы $k_p(X)$. Напомним, что по теореме Пича оператор $T : X \to Y$ является p-суммирующим тогда и только тогда, когда он допускает факторизацию вида

$$T : X \xrightarrow{A} U \xrightarrow{I_{p,\mu}} V \xrightarrow{B} Y,$$

где μ – некоторая конечномерная мера, $I_{p,\mu}$: $L^\infty(\mu) \to L^p(\mu)$ – оператор тождественного вложения, а U, V – некоторые подпространства, соответственно, в $L^\infty(\mu)$ и $L^p(\mu)$ такие, что $I_{p,\mu}(U) \subset V$. Для наших целей это свойство можно принять за определение. Норма $\pi_p(T)$ оператора T в классе p-суммирующих операторов вычисляется по формуле $\pi_p(T) = \inf \|A\| \, \|\mu\|^{1/p} \|B\|$, где нижняя грань берется по всем факторизациям.

Далее, пусть $\varkappa_Y : Y \to Y^{**}$ – каноническое вложение. Оператор $T : X \to Y$ называется p-интегральным, если композиция $\varkappa_Y T$ допускает факторизацию вида

$$\varkappa_Y T : X \xrightarrow{A} L^\infty(\mu) \xrightarrow{I_{p,\mu}} L^p(\mu) \xrightarrow{B} Y^{**};$$

p-интегральная норма оператора T вычисляется по формуле $i_p(T) = \inf \|A\| \, \|\mu\|^{1/p} \|B\|$ (нижняя грань снова берется по всем факторизациям).

Наконец, для банахова пространства X определим величину $k_p(X)$: считаем ее бесконечной, если на X существует p-суммирующий, но не p-интегральный оператор (с какой угодно областью значений); в противном же случае положим $k_p(X) = \sup(i_p(T)/\pi_p(T))$, где верхняя грань берется по всевозможным ненулевым p-суммирующим операторам $T : X \to Y$ и всевозможным пространствам Y.

Константы $k_p(X)$ были введены в [9]. Напомним некоторые их свойства, ограничившись случаем, когда $1 < p < \infty$; см. [10] по поводу доказательств. Наиболее существенно следующее утверждение: $k_p(X) < \infty$ тогда и только тогда, когда для всякого подпространства E в $L^{p'}(\lambda)$ всякий оператор $T : E \to X$ допускает продолжение $\widetilde{T} : L^{p'}(\lambda) \to X^{**}$ (более аккуратно было бы говорить о продолжении оператора $\varkappa_X T$; здесь и ниже p' – показатель, сопряженный с p). При этом $k_p(X) = \sup\{\inf \|\widetilde{T}\| : \|T\| = 1\}$, где верхняя грань берется по всем E и T, а нижняя грань в фигурных скобках – по всем продолжениям $\widetilde{T}$. Далее, если $2 \leqslant r \leqslant p$ или $p \leqslant r \leqslant 2$, то $k_r(X) \leqslant k_p(X)$. Наконец, $k_p(H^\infty) \asymp \max\{p, p'\}$; поскольку H^∞ – сопряженное пространство, отсюда следует, что всякий оператор, заданный на подпространстве в L^p $(1 < p < \infty)$ и принимающий значений в H^∞, продолжается на всё L^p.

Подчеркнем, что, хотя полное доказательство упомянутых свойств пространства H^∞ не очень коротко, оно почти целиком проводится "мягкими" ("soft") методами функционального анализа. Из классического анализа берется лишь одно несложное рассуждение, использующее непрерывность проектора Рисса в $L^p(\mathbb{T})$ при $1 < p < \infty$ и конструкцию внешней функции. См. [9] и [10].

1.2. Рефлексивные пространства в $L^1(\mu)$. Меру μ мы будем считать конечной и не чисто дискретной (и часто – вероятностной). Доказательства большинства приведенных ниже утверждений можно найти, например, в [10].

Пространство $E \subset L^1(\mu)$ рефлексивно тогда и только тогда, когда оно изоморфно подпространству в L^p с некоторым $p \in (1, 2]$. В бо́льших подробностях дело обстоит так. Обозначим через $t(E)$ верхнюю грань таких чисел q, что для любых векторов $\{x_j\} \subset E$, для которых $\sum \|x_j\|^q = 1$, величина

$$\int_0^1 \left\| \sum r_j(t) x_j \right\| dt$$

конечна (так называемый "показатель радемахерова типа пространства E"). Всегда $1 \leqslant t(E) \leqslant 2$, если $E \subset L^1(\mu)$, то рефлексивность пространства E эквивалентна неравенству $t(E) > 1$.

Плотностью назовем любую положительную функцию a из $L^1(\mu)$. Отображение $f \mapsto f/a$ является изометрией пространства $L^1(\mu)$ на $L^1(a\mu)$. Оказывается, что если E рефлексивно, то для любого $p \in (1, t(E))$ можно найти плотность a такую, что нормы пространств $L^1(a\mu)$ и $L^p(a\mu)$ будут эквивалентны на образе пространства E под действием описанной изометрии. (Иными словами, вложение в L^p достигается заменой плотности). В таком случае будем называть меру $a\mu$ *p-допустимой* для E. Если $t(E) = 2$, то в приведенном утверждении можно взять $p = 2$ (таким образом, существуют 2-допустимые меры и E гильбертово). Обратно, $t(H) = 2$ для любого гильбертова пространства H.

Имеется язык, позволяющий не упоминать явно замену плотности в этих вопросах. Именно, реализуем $L^\infty(\mu)$ как пространство $C(K)$. Тогда $L^1(\mu)$ вкладывается естественным образом в пространство $C(K^*) = M(K)$, поэтому E можно рассматривать как некое пространство мер на K. Для $\nu \in M(K)$ мы будем писать $E \subset L^1(\nu)$ если все меры из E абсолютно непрерывны относительно ν. Такую меру ν считаем p-допустимой для E, если нормы пространств $L^1(\nu)$ и $L^p(\nu)$ эквивалентны на E.

Наконец, отметим следующий факт.

Лемма 1. *Пусть E – дополняемое подпространство в $L^r(\mu)$ ($1 < r \leqslant 2$), причем нормы пространств $L^r(\mu)$ и $L^1(\mu)$ эквивалентны на E. Тогда E изоморфно гильбертову пространству.*

Доказательство. При $r = 2$ доказывать нечего. Пусть $r < 2$. Очевидно, что сопряженное E^* изоморфно некоторому подпространству U в $L^{r'}(\mu)$. Согласно результатам статьи [12], если U не изоморфно гильбертову пространству, то в U имеется дополняемое подпространство, изоморфное $l^{r'}$. Следовательно, в E имеется дополняемое подпространство, изоморфное l^r. Однако на таком пространстве нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_r$ не могут быть эквивалентны, см., например, [11]. $\square$

Замечание. Вместо [12] можно воспользоваться результатами статьи [13] – они дают лучшее представление о взаимозависимости некоторых количественных характеристик, скрывающихся за качественной формулировкой леммы.

1.3. Рефлексивные подпространства в $L^1(\mathbb{T})/H_0^1$. Пусть $\pi : L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T})/H_0^1$ – каноническое факторотображение.

Теорема (Бургейн, [3, следствие 2.13]). *Если E – рефлексивное подпространство в $L^1(\mathbb{T})/H_0^1$, то существует такой оператор $i : E \to L^1(\mathbb{T})$, что $(\pi i)e = e$, $e \in E$.*

Обозначим $F = i(E)$, тогда F – рефлексивное подпространство в $L^1(\mathbb{T})$, причем π изоморфно отображает F на E. Напомним, что нормированная мера Лебега на $\mathbb{T}$ обозначается через m. Плотность a называется *p-допустимой* для E ($p > 1$), если мера am p-допустима для F. Увеличив слегка функцию a (при увеличении плотности она остается p-допустимой), мы можем считать, что $\log a \in L^1(\mathbb{T})$. (Можно даже обеспечить включение $\log a \in BMO$, см., например, обзор [14]. Это понадобится в дальнейшем.) Пусть A – внешняя функция, для которой $|A| = a$: $A = \exp(\log a + i\mathcal{H}(\log a))$, где $\mathcal{H}$ – оператор гармонического сопряжения. Отображение $f \mapsto f/A$ есть изометрия пространства L^1 на $L^1(am)$, переводящая H_0^1 на $H_0^1(am)$. Образ F_1 пространства F при этой изометрии лежит в $L^p(am)$. Обозначим через E_1 естественную проекцию пространства F_1 в факторпространство $L^p(am)/H_0^p(am)$. Тогда естественная инъекция $j : L^p(am)/H_0^p(am) \to L^1(am)/H_0^1(am)$, очевидно, будет изоморфно отображать E_1 на $A^{-1} \cdot E$.

Иными словами, мы пришли к картине, аналогичной той, что была в случае школы L^p.

Если $\log a \in BMO$, то из интерполяционных соображений (K-замкнутость в шкале $H_0^s(a)$, см., например, [14]) следует, что и при $\alpha < 1$ пространства $H_0^\alpha(a)$ и F_1 образуют прямое разложение их векторной суммы в $L^\alpha(a)$.

Отметим еще, что при $p > 1$ факторпространство $L^p(a)/H_0^p(a)$ изоморфно пространству $L^p(\mathbb{T})$.

1.4. Пространства векторнозначных функций. Мы свободно пользуемся понятием проективного (гротендиковского) тензорного произведения $A\widehat{\otimes}B$ двух банаховых пространств. Напомним каноническое отождествление $L^1(\mu)\widehat{\otimes}B = L^1(B, \mu)$.

Пусть E – подпространство в $L^1(\mu)$. Через $E\otimes_1 B$ мы обозначаем замкнутое подпространство в $L^1(B,\mu)$, порожденное элементами вида $e\otimes b$, где $e\in E$, $b\in B$. Если $G=E^\perp\subset L^\infty(\mu)$, то через $G\boxtimes B^*$ обозначим аннулятор пространства $E\otimes_1 B$ в $L^1(B,\mu)^*$. Легко видеть, что $G\boxtimes B^*=((L^1(\mu)/E)\widehat{\otimes}B)^*$. Поэтому $G\boxtimes B^*$ отождествляется с пространством ограниченных билинейных форм на $(L^1(\mu)/E)\times B$, т.е. с пространством операторов из B в G. По определению, положим $L^\infty(B^*,\mu)=L^1(B,\mu)^*=(L^1(\mu)\widehat{\otimes}B)^*$. Часто (и практически во всех случаях, которые нам встретятся) пространства $L^\infty(B^*,\mu)$ можно рассматривать как пространство B^*-значных w^*-измеримых ограниченных функций.

§2. Продолжение и интерполяция

В этом параграфе мы докажем одно общее утверждение технического характера о продолжении операторов.

Пусть (U_0,U_1) – совместимая пара банаховых пространств (термин “совместимая” означает, что U_0 и U_1 линейно и непрерывно вложены в некое объемлющее линейно-топологическое пространство). Пусть V_0, V_1 – замкнутые подпространства в U_0 и U_1 соответственно. Пара (V_0,V_1) называется *K-замкнутой* в (U_0,U_1), если для всякого элемента $v\in V_0+V_1$ и всякого разложения $v=u_0+u_1$, где $u_i\in U_i$ $(i=0,1)$, существует другое разложение $v=v_0+v_1$, где $v_i\in V_i$ и $\|v_i\|_{U_i}\leqslant C\|u_i\|_{U_i}$ $(i=0,1$; постоянная C не зависит от участвующих векторов).

Полезно отметить, что проверять это свойство достаточно для векторов v, пробегающих какое-нибудь плотное подмножество суммы V_0+V_1.

Пусть U – промежуточное пространство для пары (U_0,U_1) (т.е. $U_0\cap U_1\subset U\subset U_0+U_1$), и пусть $0<\theta<1$. Говорят, что U– *пространство интерполяционного типа* θ, если

$$\|x\|_U\leqslant C\|x\|_{U_0}^{1-\theta}\|x\|_{U_1}^{\theta},\quad x\in U_0\cap U_1.$$

Положим $V=\mathrm{clos}_U(V_0\cap V_1)$. Доказательство следующей известной леммы приводится лишь ради полноты.

Лемма 2. *Если пара (V_0,V_1) K-замкнута в (U_0,U_1), а U – пространство интерполяционного типа θ для (U_0,U_1), то U/V есть пространство интерполяционного типа θ для пары $(U_0/V_0,U_1/V_1)$.*

Доказательство. Чтобы превратить пару $(U_0/V_0, U_1/V_1)$ в совместимую, достаточно вложить естественным образом пространства U_0/V_0 и U_1/V_1 в $(U_0+U_1)/(V_0+V_1)$. (Из K-замкнутости следует, что подпространство V_0+V_1 замкнуто в сумме U_0+U_1, и что оба упомянутых вложения – инъекции.) Тогда U/V легко интерпретировать как промежуточное пространство для пары $(U_0/V_0, U_1/V_1)$. Обозначим нормы в пространствах U/V, U_0/V_0 и U_1/V_1 через $|||\cdot|||$, $|||\cdot|||_0$ и $|||\cdot|||_1$ соответственно.

Пусть $x \in U_0 \cap U_1$. Найдем векторы $v_0 \in V_0$ и $v_1 \in V_1$ так, чтобы $|||x|||_i \leqslant 2\|x-v_i\|_{U_i}$ ($i=0,1$; в левой части неравенства имеются в виду нормы фактор-классов, порожденных вектором x). Тогда $v_0-v_1=(v_0-x)-(v_1-x)$, и из K-замкнутости следует, что $v_0-v_1=w_0-w_1$, где $w_i \in V_i$ и $\|w_i\|_i \leqslant C\|x-v_i\|_i$ ($i=0,1$). Обозначим $u=x-v_0+w_0=x-v_1+w_1$. Тогда

$$|||x||| \leqslant \|u\|_U \leqslant C\|u\|_0^{1-\theta}\|u\|_1^{\theta} = C\|x-v_0+w_0\|_0^{1-\theta}\|x-v_1+w_1\|_1^{\theta} \leqslant$$
$$\leqslant C'|||x|||_0^{1-\theta}|||x|||_1^{0}. \quad \square$$

Сформулируем теперь основное утверждение этого параграфа. Пусть (X_0, X_1) – совместимая пара банаховых пространств, причем пересечение $X_0 \cap X_1$ плотно как в X_0, так и в X_1. Операторы, подлежащие продолжению, будут принимать значения в некотором w^*-замкнутом подпространстве G пространства $L^\infty(\mu)$, где μ – конечная мера. Положим $E = G^\perp \subset L^1(\mu)$. Потребуем еще, чтобы множество $E \otimes (X_0 \cap X_1)$ было плотно в $(E \otimes_1 X_0) \cap (E \otimes_1 X_1)$ по норме пересечения. Это техническое условие выполнено почти всегда, но в общем случае оно, вероятно, связано с условиями аппроксимации в участвующих пространствах. Однако, если пространство X_1 непрерывно вложено в X_0 – а так будет во всех приложениях в этой статье, – указанное требование выполняется очевидным образом.

Предложение 1. *Пусть Y – замкнутое подпространство в $X_0 \cap X_1$ такое, что нормы $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_1$ эквивалентны на Y. Пусть еще Z – некоторое промежуточное пространство интерполяционного типа θ для пары (X_0, X_1) ($\theta \in (0,1)$). Предположим, что пара $(E \otimes_1 X_0, E \otimes_1 X_1)$ K-замкнута в $(L^1(X_0,\mu), L^1(X_1,\mu))$.*

Если всякий оператор $T : Y \to G$ продолжается до оператора из Z в G, то всякий такой оператор T продолжается до оператора из X_0 в G.

Доказательство. Считаем, что $E \neq L^1(\mu)$ (иначе доказывать нечего). Кроме того, можно считать, что $X_0 \cap X_1$ плотно в Z (если нет, заменим пространство Z замыканием в нем пересечения $X_0 \cap X_1$). Существует такая постоянная a, что всякий оператор $T : Y \to G$ допускает продолжение $\widetilde{T} : Z \to G$ с оценкой $\|\widetilde{T}\| \leqslant a\|T\|$. Отсюда, в частности, следует, что на Y норма пространства Z эквивалентна нормам $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_1$. В дальнейшем считаем, что пространство Y наделено нормой, индуцированной из Z.

Из неравенства Гёльдера легко следует, что $L^1(Z,\mu)$ – пространство интерполяционного типа θ для пары $(L^1(X_0,\mu), L^1(X_1,\mu))$. Из леммы 2 вытекает, что $L^1(Z,\mu)/(E \otimes_1 Z)$ есть пространство интерполяционного типа θ для пары $(L^1(X_0,\mu)/(E \otimes_1 X_0), L^1(X_1,\mu)/(E \otimes_1 X_1))$. Действительно, в нашей ситуации пространство V, фигурирующее в лемме 2, совпадает с $E \otimes_1 Z$: включение $V \subset E \otimes_1 Z$ вытекает из предположения о плотности множества $E \otimes (X_0 \cap X_1)$ в $(E \otimes_1 X_0) \cap (E \otimes_1 X_1)$, а обратное включение – из плотности пересечения $X_0 \cap X_1$ в Z. Та же плотность и стандартное применение двойственности показывают, что тогда $G \boxtimes Z^* \subset (G \boxtimes X_0^*, G \boxtimes X_1^*)_{\theta,\infty}$, т.е. любой элемент Φ из единичного шара пространства $G \boxtimes Z^*$ для любого $t > 0$ допускает представление вида

$$\begin{gathered} \Phi = \Phi_0 + \Phi_1, \quad \text{где} \quad \Phi_0 \in G \boxtimes X_0^*, \quad \Phi_1 \in G \boxtimes X_1^*, \\ \|\Phi_0\|_{G \boxtimes X_0^*} \leqslant ct^{\theta}, \quad \|\Phi_1\|_{G \boxtimes X_1^*} \leqslant ct^{\theta-1}. \end{gathered} \tag{1}$$

Пусть $T : Y \to G$ – оператор с нормой не выше $1/a$. Продолжим его до оператора из Z в G с нормой не выше 1 и разложим соответствующий элемент Φ пространства $G \boxtimes Z^*$ как в (1) (число t будет выбрано несколькими строками ниже). Оператор, соответствующий элементу Φ_0, действует из X_0 в G и имеет норму не выше ct^{θ}. Рассмотрим оператор из X_1 в G, соответствующий элементу Φ_1, и обозначим через T_1 его сужение на Y. Ясно, что $\|T_1\| \leqslant C' t^{\theta-1} \leqslant 1/(2a)$, если число t зафиксировано достаточно большим.

Доказательство завершается стандартными итерациями: применяем ту же конструкцию к T_1 и т.д. $\square$

Замечание. В предложении 1 K-замкнутость пары $(E \otimes_1 X_0, E \otimes_1 X_1)$ в $(L^1(X_0,\mu), L^1(X_1,\mu))$ равносильна K-замкнутости пары $(G \boxtimes X_0^*, G \boxtimes X_1^*)$ в $(L^\infty(X_0^*,\mu), L^\infty(X_1^*,\mu))$, см. [14, 15].

§3. K-замкнутость

В этом параграфе мы приведем конкретный набор ситуаций, в которых применимо предложение 1. Нетривиальным для проверки является условие K-замкнутости.

В качестве E у нас будет фигурировать подпространство любого из следующих типов в $L^1(\mu)$:

(a) E рефлексивно;
(b) $\mu = m$, а $E = H_0^1 \oplus F$, где F рефлексивно.

Теорема 1. *Пусть E – такое, как выше, а $t = t(E)$ в случае* (a) *и $t = t(F)$ в случае* (b). *Тогда пара $(E \otimes_1 X_0, E \otimes_1 X_1)$ K-замкнута в $(L^1(X_0, \mu), L^1(X_1, \mu))$, если*

(i) *$X_0 = L^1(\lambda), X_1 = L^r(\lambda)$, где λ – конечная мера и $1 < r < t$;*
(ii) *$X_0 = L^1(w)/H_0^1(w)$, $X_1 = L^r(w)/H_0^r(w)$, где $1 < r < t$, а плотность w на окружности такова, что $\log w \in BMO$.*

Отложим ненадолго доказательство и приведем два следствия (другие применения будут даны в §4).

Следствие 1. *Если E – пространство одного из указанных выше типов (a), (b), то $L^1(\mu)/E$ – GT-пространство котипа 2.*

Как уже отмечалось, этот факт не нов – его новое доказательство приводится лишь как иллюстрация. В предложении 1 положим $X_0 = L^1(0,1)$, $X_1 = L^r(0,1)$ (r – как в теореме 1), $Z = L^s(0,1)$ с $1 < s < r$, а в качестве Y возьмем пространство, натянутое на функции Радемахера. В силу утверждения (i) теоремы 1 и того, что Y дополняемо в Z, все условия предложения 1 выполнены, так что всякий оператор из Y в $G = (L^1(\mu)/E)^* = E^\perp$ продолжается до оператора из $L^1(0,1)$ в G. Остается сослаться на теорему B. $\square$

Следствие 2. *Пусть E – как выше, а $G = E^\perp \subset L^\infty(\mu)$. Следующие* *условия эквивалентны.*

1) *Для всякого рефлексивного подпространства K в $L^1(\lambda)$ (λ – не чисто атомная конечная мера) всякий оператор $T : K \to G$ продолжается до оператора из $L^1(\lambda)$ в G.*
2) *То же, с заменой пространства $L^1(\lambda)$ на $L^1(\mathbb{T})/H^1_0$.*
3) *$k_q(G) < \infty$ для всех $q \geqslant 2$.*

Доказательство. Утверждение 3) следует как из 1), так и из 2) – в силу описания констант k_p в терминах продолжения операторов в п. 1.1 достаточно заметить, что $L^{q'}$ вкладывается изоморфно как в $L^1(\lambda)$, так и в $L^1(\mathbb{T})/H^1_0$. Докажем обратные импликации. Пусть выполнено условие 3), и пусть K – рефлексивное подпространство в $L^1(\lambda)$. Согласно п. 1.2, меру λ можно считать p-допустимой для некоторого $p > 1$. В силу материала п. 1.1, всякий оператор $T : K \to G$ продолжается на $L^r(\lambda)$ при всяком фиксированном $r \in (1, p]$. Осталось сослаться на теорему 1 и предложение 1.

Случай, когда K – рефлексивное подпространство в $L^1(\mathbb{T})/H^1_0$, рассматривается так же, но с использованием п. 1.3. Надо заметить только, что при $1 < r < \infty$ пространство $L^r(wm)/H^r(wm)$ изоморфно пространству $L^r(\mathbb{T})$. $\square$

Пусть E – такое, как в п. (b) выше. Если $F = 0$, получаем $G = H^\infty$. Так как $k_q(H^\infty) < \infty$ при $1 < q < \infty$ (см. ссылки в п. 1.1), из следствия 2 выводится теорема А из Введения.

Отметим еще, что, согласно п. 1.3, пространства вида $L^1(m)/E$, где E – такое, как в (b), – это в точности все факторы пространства $L^1(m)/H^1_0$ по его рефлексивным подпространствам.

Приступаем к доказательству теоремы 1. Разобьем его на пункты в соответствии с двумя возможностями для пространства E ((a) и (b)) и двумя – для пары (X_0, X_1) ((i) и (ii)).

(ia) Можно считать, что мера μ r-допустима для E. Воспользуемся тем, что при проверке K-замкнутости можно ограничиться векторами из плотного подмножества суммы соответствующих пространств. Пусть функция f из $E \otimes L^1(\lambda) + E \otimes L^r(\lambda)$ представлена в виде $f = g + h$, где $g \in L^1(L^1(\lambda), \mu)$, $h \in L^1(L^r(\lambda), \mu)$. Обозначим нормы функций g и h в их пространствах через a и b.

Далее, положим

$$\varphi(t)=\int|g(u,t)|d\mu(u),\quad \psi(t)=\int|h(u,t)|d\mu(u).$$

Тогда $\int|f(u,t)|d\mu(u)\leqslant\varphi(t)+\psi(t)$. Утверждается, что функции $\alpha=f\varphi/(\varphi+\psi)$ и $\beta=f\psi/(\varphi+\psi)$ составляют требуемое разложение функции f.

Действительно, обе функции представляют собой конечные суммы вида $\sum e_j(u)x_j(t)$, где $e_j\in E$. Поэтому достаточно оценить нормы. Так как $\int|\alpha(u,t)|d\mu(u)\leqslant\varphi(t)$, то $\|\alpha\|_{L^1(L^1(\lambda),\mu)}\leqslant a$. Что касается функции β, то согласно неравенству Гёльдера

$$\int\left(\int|\beta(u,t)|^r d\lambda(t)\right)^{1/r}d\mu(u)\leqslant\left(\iint|\beta(u,t)|^r d\mu(u)d\lambda(t)\right)^{1/r}.$$

Так как $\beta(\cdot,t)\in E$ при п.в. t, а мера μ r-допустима для E, то внутренний интеграл справа не превосходит числа

$$C^r\left(\int|\beta(u,t)|d\mu(u)\right)^r\leqslant C^r\psi(t)^r.$$

В результате получаем

$$\|\beta\|_{L^1(L^r(\lambda),\mu)}\leqslant C\left(\int\psi(t)^r d\lambda(t)\right)^{1/r}=C\left\|\int|h(u,\cdot)|d\mu(u)\right\|_{L^r(\lambda)}\leqslant$$

$$C\int\|h(u,\cdot)\|_{L^r(\lambda)}d\mu(u)=C\,b.\quad\square$$

(ib) На это раз $E=H_0^1\oplus F$, где пространство F рефлексивно. Пусть v – r-допустимый вес для F. После замены плотности можно считать, что мы имеем дело с пространством $E=H_0^1(vm)\oplus F\subset L^1(vm)$, где нормы пространств $L^1(vm)$ и $L^r(vm)$ эквивалентны на F. Пусть снова функция f из $E\otimes L^1(\lambda)+E\otimes L^r(\lambda)$ представлена в виде $f=g+h$ (как и в предыдущем пункте); по-прежнему обозначаем нормы слагаемых через a и b. Обозначим через P проектор из E на F вдоль $H_0^1(vm)$. Определим φ и ψ ровно теми же формулами, что и в предыдущем случае. Положим

$$\alpha=\frac{(Pf)\varphi}{\varphi+\psi},\quad \beta=\frac{(Pf)\psi}{\varphi+\psi}$$

(проектор P действует по первой переменной). Так как функции φ и ψ зависят лишь от второй переменной, легко видеть, что

$$\int |\alpha(u,\cdot)|v(u)dm(u) \leqslant \frac{\varphi}{\varphi+\psi}\int |(Pf)(u,\cdot)|v(u)dm(u) \leqslant \|P\|\varphi(\cdot)$$

и аналогично

$$\int |\beta(u,\cdot)|v(u)dm(u) \leqslant \|P\|\psi(\cdot).$$

Из первой оценки сразу следует, что $\|\alpha\|_{L^1(vm\otimes\lambda)} \leqslant a$. Далее, действуя как в пункте (ia) и используя вторую оценку, находим:

$$\int \left(\int |\beta(u,t)|^r d\lambda(t)\right)^{1/r} v(u)dm(u) \leqslant$$

$$\leqslant C\int\left(\left(\int |\beta(u,t)|v(u)dm(u)\right)^r d\lambda(t)\right)^{1/r} \leqslant$$

$$\leqslant C\|P\|\left(\int \psi^r d\lambda\right)^{1/r} \leqslant C'b.$$

Итак, $\alpha \in F\otimes L^1(\lambda)$, $\beta \in F\otimes L^r(\lambda)$, и нормы этих функций в указанных пространствах имеют порядок a и b соответственно. Функция $f_1 = f-\alpha-\beta$ лежит в $H_0^1(v)\otimes L^1(\lambda)+H_0^1(v)\otimes L^r(\lambda)$, и в ее разложении $f_1=(g-\alpha)+(h-\beta)$ слагаемые тоже порядка a и b. Осталось сослаться на K-замкнутость пары $(H_0^1(v)\otimes_1 L^1(\lambda)$, $H_0^1(v)\otimes_1 L^r(\lambda))$ в $(L^1(L^1(\lambda),v),\ L^1(L^r(\lambda),v))$, см., например, обзор [14]. (В последнем утверждении вес v не играет большой роли, ибо от него можно избавиться обратной заменой плотности.) $\square$

(iia) Считаем, что мера μ r-допустима для E. Пусть снова $f=g+h$, где $f\in E\otimes X_0+E\otimes X_1$, а $g\in L^1(X_0,\mu)$, $h\in L^1(X_1,\mu)$. Сохраним обозначения a и b для соответствующих норм. Поднимаясь из факторов X_0 и X_1 в пространства $L^1(w)$ и $L^r(w)$, приходим к разложению

$$F(u,t)+\eta(u,t) = G(u,t)+H(u,t),$$

где $\|G\|_{L^1(\mu\otimes wm)} \leqslant 2a$, $\|H\|_{L^1(L^r(\mu),wm)} \leqslant 2b$, $F\in E\otimes L^1(wm)+E\otimes L^r(wm)$, а

$$\eta(u,\cdot)\in H_0^1(w)+H_0^r(w) \quad \text{для п.в. } u. \tag{2}$$

Нам нужно заметить функции G и H функциями G_1 и H_1 с нормами того же порядка, но лежащими в $E\otimes_1 L^1(wm)$ и $E\otimes_1 L^r(wm)$ соответственно; функция η может при такой замене измениться, но так, чтобы сохранилось соотношение (2).

Положим

$$\varphi_0(t)=\int |G(\cdot,t)|d\mu,\quad \psi_0(t)=\int |H(\cdot,t)|d\mu.$$

Ясно, что $\|\varphi_0\|_{L^1(w)}\leqslant 2a$, $\|\psi_0\|_{L^r(w)}\leqslant 2b$. Воспользуемся тем, что пространства $L^1(w)$ и $L^r(w)$ BMO-регулярны (см., например, [14]), и найдем две функции φ и ψ, такие, что $\varphi\geqslant\varphi_0$, $\psi\geqslant\psi_0$, $\|\varphi\|_{L^1(w)}\leqslant Ca$, $\|\psi\|_{L^r(w)}\leqslant Cb$, $\|\log\varphi\|_{BMO}\leqslant C$, $\|\log\psi\|_{BMO}\leqslant C$ (постоянная C зависит лишь от r и величины $\|\log w\|_{BMO}$). Пусть Γ – внешняя функция, для которой $|\Gamma|=\varphi+\psi$ п.в. Из [14, §3] вытекает, что функция Γ допускает представление $\Gamma=\Phi+\Psi$, где Φ и Ψ – функции из класса Смирнова, на границе удовлетворяющие неравенствам $|\Phi|\leqslant c\varphi$, $|\Psi|\leqslant c\psi$ (c зависит от тех же параметров, что и C выше).

Пусть еще W – внешняя функция такая, что $|W|=w$. Обозначим через Q ортогональный проектор пространства $L^2(\mathbb{T})$ на $H_0^{2\perp}$. Наконец, положим

$$G_1=\frac{\Phi(F+\eta)}{\Gamma},\quad H_1(u,\cdot)=W(\cdot)^{-1/r}Q\left(W(\cdot)^{1/r}\frac{\Psi(\cdot)(F+\eta)(u,\cdot)}{\Gamma(\cdot)}\right).\tag{3}$$

Разность $F-G_1-H_1$ есть функция, аналитическая по второй переменной и образующаяся в ноль в центре круга. Поэтому достаточно оценить нормы функций G_1 и H_1. Так как $\int|F+\eta|d\mu\leqslant|\Gamma|$, то $\int|G_1|d\mu\leqslant|\Phi|$, поэтому

$$\iint|G_1(u,t)|w(t)dm(t)d\mu(u)\leqslant c\int\varphi(t)w(t)dt\leqslant c'a.$$

Что касается функции H_1, напишем

$$\int\left(\int|H_1(u,t)|^r w(t)dm(t)\right)^{1/r}d\mu(u)\leqslant$$

$$\leqslant\left(\iint|H_1(u,t)|^r d\mu(u)w(t)dm(t)\right)^{1/r}.$$

Учитывая, что $Q(W^{1/r}\eta\Psi\Gamma^{-1})=0$, видим, что при почти каждом t функция $H_1(\cdot,t)$ лежит в E. Зафиксируем $\alpha\in(0,1)$. Так как мера μ r-допустима для E, получаем оценку

$$\begin{gathered}\|H_1\|_{L^1(L^r(w),\mu)}\leqslant C\left\|\left(\int|H_1(u,\cdot)|^\alpha d\mu\right)^{1/\alpha}\right\|_{L^r(w)}=\\ =C\left\|\left(\int|Q[W^{1/r}\Gamma^{-1}\Psi(F+\eta)(u,\cdot)]|^\alpha d\mu(u)\right)^{1/\alpha}\right\|_{L^r(\mathbb{T})}.\end{gathered}\tag{4}$$

По теореме Бургейна (см. обзоры [1, 2]), оператор Q действует из $L^r(L^1(\mu),\mathbb{T})$ в $L^r(L^\alpha(\mu),\mathbb{T})$. Поэтому последнее выражение не превосходит числа

$$C'\|W^{1/r}\Psi\Gamma^{-1}[F+\eta]\|_{L^r(L^1(\mu),\mathbb{T})}\leqslant C''\|\psi\|_{L^r(w)}\leqslant C'''b$$

(ибо $\int|F+\eta|d\mu\leqslant|\Gamma|$). $\square$

(iib) Теперь снова $E=H^1_0\oplus F$, где F рефлексивно. После замены плотности (как в начале п. (ib)) можно считать, что $E=H^1_0(v)\oplus F\subset L^1(v)$, где v – r-допустимая плотность для F. Как объяснялось в §1, без потери общности мы можем предположить, что $\log v\in BMO$.

Зафиксируем $\alpha\in(0,1)$ и обозначим через P проектор из $H^\alpha_0(v)+F$ на F вдоль $H^\alpha_0(v)$. Далее действуем как в предыдущем пункте до формулы (3) включительно. Наряду с функциями G_1 и H_1 введем еще функцию $\widetilde{H}_1(\cdot,t)=PH_1(\cdot,t)$. Это определение корректно, поскольку, как и в п. (iia), $H_1(\cdot,t)\in E$ при п.в. t.

Оценка $\|G_1\|_{L^1(L^1(w),vm)}\leqslant ca$ получается ровно так же, как в (iia). Поскольку $\widetilde{H}_1(\cdot,t)\in F$ при п.в. t, вместо (4) можно написать

$$\begin{gathered}\|\widetilde{H}_1\|_{L^1(L^1(w),vm)}\leqslant C\left\|\left(\int|\widetilde{H}_1(u,\cdot)|^\alpha v(u)dm(u)\right)^{1/\alpha}\right\|_{L^r(w)}\leqslant\\ \leqslant C'\left\|\left(\int|H_1(u,\cdot)|^\alpha v(u)dm(u)\right)^{1/\alpha}\right\|_{L^r(w)},\end{gathered}$$

что, как и в (iia), ведет к оценке $\|H_1\|_{L^1(L^r(w),vm)}\leqslant C''b$.

Нетрудно убедиться в том, что $Y\overset{\text{def}}{=}F-G_1-\widetilde{H}_1\in H^1_0(v)\otimes_1 L^1(w)+L^1(v)\otimes_1 H^1_0(w)$. Вернемся к фактор-классам по модулю функций, аналитических по второй переменной и образующихся в нуль в центре круга (результат такой факторизации будем обозначать квадратными скобками). Из последнего соотношения вытекает, что $y \stackrel{\text{def}}{=} [Y] \in H_0^1(v) \otimes_1 X_0 = H_0^1(v) \otimes_1 X_0 + H_0^1(v) \otimes_1 X_1$. Кроме того,

$$y = g_1 + h_1, \quad \text{где} \quad g_1 = g - [G_1], \quad h_1 = h - [\theta_1],$$

так что слагаемые имеют нормы порядка a и b в пространствах $L^1(X_0, v)$ и $L^1(X_1, v)$ соответственно. Так как $\log w, \log v \in BMO$, из [16] следует, что в этом разложении функции g_1 и h_1 можно заменить функциями того же порядка, но лежащими в $H^1(v)\otimes_1 X_0$ и $H^1(v) \otimes_1 X_1$ соответственно. Это завершает доказательство. □

§4. Пространства с рефлексивным аннулятором

Обозначим через X либо $L^1(\mu)$, где μ – не чисто дискретная вероятностная мера, либо $L^1(\mathbb{T})/H_0^1$. Пусть F – рефлексивное подпространство в X. Тогда X/F – GT-пространство котипа 2 (см. ссылки во Ввведении или следствие 1 в §3). Положим $G = (X/F)^*$. Тогда о G можно думать как о произвольном w^*-замкнутом подпространстве в $L^\infty(\mu)$ или H^∞ с рефлексивным аннулятором. Нас интересует, когда утверждение, аналогичное теореме A, верно с заменой пространства H^∞ на G. В какой-то мере ответ содержится в следствии 2 в §3. Однако в действительности можно сказать гораздо больше.

Теорема 2. *Пусть пространство G – такое, как указано выше. Следующие условия эквивалентны.*

(i) *Для всякого рефлексивного подпространства E в $L^1(\lambda)$ (λ – не чисто атомная вероятностная мера) всякий оператор $T : E \to G$ продолжается до оператора $\widetilde{T}$: $L^1(\lambda) \to G$.*

(ii) *То же, с заменой пространства $L^1(\lambda)$ на $L^1(\mathbb{T})/H_0^1$.*

(iii) *$k_p(G) < \infty$ для всякого $p \in [2, \infty)$.*

(iv) *Пространство $F = G_\perp \subset X$ гильбертово. Кроме того, если $1 < q \leqslant 2$ и ν – любая q-допустимая мера для F (соответственно, a – любая q-допустимая плотность для F, если $X = L^1(\mathbb{T})/H_0^1$), то F дополняемо в $L^q(\nu)$ (в $L^q(a)/H_0^q(a)$).*

(v) *Существуют* $q \in (1,2]$, *сколь угодно близкие к единице и такие, что для некоторого* $s \in (q,2]$ *пространство* F *обладает* s*-допустимой мерой* ν *(*s*-допустимой плотностью* a *такой, что* $\log a \in BMO$*), для которых* F *дополняемо в* $L^q(\nu)$ *(в* $L^q(a)/H_0^q(a)$*).*

В утверждениях (iv) и (v) допущена некоторая вольность – речь идет, разумеется, о дополняемости образа пространства F при замене плотности, см. §1.

Мы видим, что утверждения (i) и (ii) неверны всякий раз, когда F не является гильбертовым с точностью до перенормировки, а также во многих случаях, когда F является таковым.

Переходя к доказательству, отметим, что эквивалентности (i)$\Longleftrightarrow$(iii) составляют содержание следствия 2 в §3. Очевидно, что (iv)$\Longrightarrow$(v). Мы покажем, что (iii)$\Longrightarrow$(iv), (v)$\Longrightarrow$(i) и (v)$\Longrightarrow$(ii) (это завершит доказательство).

(iii)$\Longrightarrow$(iv) Рассмотрим сначала случай, когда G – подпространство в $L^\infty(\mu)$ с рефлексивным аннулятором F в $L^1(\mu)$. Будем считать саму меру μ q-допустимой для F для некоторого $q \in (1,2)$. Пусть p – показатель, сопряженный с q. Пусть i – тождественное вложение пространства G в его замыкание $G_{p,\mu}$ в $L^p(\mu)$. Реализуем $L^\infty(\mu)$ как пространство $C(K)$. Так как оператор i p-суммирующий и $k_p(G) < \infty$, то i является p-интегральным и потому включается в следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{\ i\ } & G_{p,\mu} & \xrightarrow{\ j\ } & L^p(\mu) \\ \big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle u} & & \\ C(K) & \xrightarrow{\ id\ } & L^p(\rho) & & \end{array} \tag{5}$$

Здесь id и j – тождественные вложения, а u – ограниченный оператор. Без потери общности считаем, что $\rho \geqslant \mu$ (и $\|\rho\| \leqslant 2$). Тогда $d\mu = b\,d\rho$, где $b \in L^1(\rho)$, $0 \leqslant b \leqslant 1$. Рассмотрим оператор $v = (ju)^*\colon L^q(\mu) \to L^q(\rho)$. Если $g \in C(K)$ и $\psi \in L^q(\mu)$, то

$$\int v(\psi) g\,d\rho = \int \psi (ju)(g)\,d\mu = \int \psi (ju)(g) b\,d\rho. \tag{6}$$

Заставив g пробегать пространство G (тогда $(ju)g = g$), мы видим, что мера $(b\psi - v(\psi))d\rho$ ортогональна пространству G, т.е. лежит в $F \subset L^1(\mu)$. В частности, все такие меры имеют нулевую вариацию на некотором борелевском носителе e сингулярной части меры ρ по отношению к μ. Следовательно,

$$\chi_{K\setminus e} b^{-1}(b\psi - v(\psi))d\mu \perp G,$$

так что оператор $Q : \psi \mapsto \chi_{K\setminus e} b^{-1}(b\psi - v(\psi))$ отображает пространство $L^q(\mu)$ в F. Так как образ оператора u лежит в $G_{p,\mu}$, из формулы (6) следует, что $v(\psi) = 0$, если $\psi \in F$. Значит, Q – проектор из $L^q(\mu)$ на F. Осталось сослаться на лемму 1 (п. 1.2).

Пусть теперь G – подппространство в H^∞ (так что $F \subset L^1(\mathbb{T})/H_0^1$). Обозначим через G_0 пересечение пространства G с диск-алгеброй C_A (если стандартным образом вложить пространство $L^1(\mathbb{T})/H_0^1$ в C_A^*, G_0 окажется аннулятором пространства F в C_A). Пространство G_0^{**} есть прямая сумма пространства G и некоторого L^∞-пространства, откуда видно (см. [9]), что $k_p(G^0) \leqslant k_p(G) < \infty$, $2 \leqslant p < \infty$.

Пусть $p > 2$, q – показатель, сопряженный с p, а a – q-допустимый вес для F. Сделав замену плотности как в п. 1.3, мы можем считать F подпространством в $L^1(a)/H_0^1(a)$; прообраз этого подпространства при факторотображении распадается в прямую сумму $H_0^1(a)\oplus F_1$, где на F_1 эквивалентны нормы пространств $L^1(a)$ и $L^q(a)$. Обозначим через P проектор из $H_0^1(a) + F_1$ на F_1 вдоль $H_0^1(a)$. Пусть A – внешняя функция, для которой $|A| = a$ п.в. Двойственность между $C(\mathbb{T})$ и $L^1(a)$ будем задавать с помощью билинейной формы $\langle f, g\rangle = \int fgAdm$. Тогда G_0 совпадет с аннулятором пространства $H_0^1(a) \oplus F_1 \subset L^1(a)$.

Пусть $G_{p,a}$ – замыкание пространства G_0 в $L^p(a)$, $i : G_0 \to G_{p,a}$ – тождественное вложение. Возникает диаграмма, аналогичная диаграмме (5):

$$\begin{tikzcd} G_0 \arrow[r, "i"] \arrow[d] & G_{p,a} \arrow[r, "j"] & L^p(a) \\ C(\mathbb{T}) \arrow[r] & L^p(\rho). \arrow[u, "u"'] & \end{tikzcd}$$

Как и ранее, здесь $\rho \geqslant am$. Выберем борелевскую функцию b, $0 \leqslant |b| \leqslant 1$, такую что $Am = b\rho$. Продолжая, как в предыдущем случае, придем к отображению $Q : \psi \mapsto \chi_{\mathbb{T}\setminus e} b^{-1}(b\psi - v(\psi))A$ пространства $L^q(a)$ в $H_0^1(am) \oplus F_1$. Легко видеть, что оператор PQ проектирует $L^q(a)$ на F_1 (и переводит в нуль пространство $H_0^2(a)$). Дальнейшее очевидно.

Для доказательства импликаций (v)$\Longrightarrow$(i) и (v)$\Longrightarrow$(ii) понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть любое из пространств X и Y – это либо $L^1(\mu)$ (μ – не чисто атомная вероятностная мера), либо $L^1(\mathbb{T})/H_0^1$, и пусть A и B – рефлексивные подпространства в X и Y. Рассмотрим аннуляторы $A^\perp$ и $B^\perp$ в X^* и Y^*, соответственно. Следующие утверждения эквивалентны.*

(a) *Всякий оператор $T : A \to B^\perp$ допускает продолжение $\widetilde{T} : X \to B^\perp$.*
(b) *Всякий оператор $T : B \to A^\perp$ допускает продолжение $\widetilde{T} : Y \to A^\perp$.*

Доказательство. Предположим, что верно утверждение (a). Рассмотрим оператор $T : B \to A^\perp$. Его можно продолжить ло оператора $S : Y \to X^*$ (это тривиально, если $X^* = L^\infty(\mu)$; если же $X^* = H^\infty$, нужно применить теорему A). Нам нужно изменить S так, чтобы значения нового оператора не выходили за пределы пространства $A^\perp$. Для этого рассмотрим факторотображение $\alpha : X^* \to X^*/A^\perp$ и заметим, что $\alpha S\,|_B = 0$. Следовательно (см. диаграмму), $\alpha S = S_1\beta$, где $\beta : Y \to Y/B$ – факторотображение, а S_1 – некоторый оператор.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\beta"] & X^* \arrow[d, "\alpha"] \\ Y/B \arrow[r, "S_1"] \arrow[ur, "S_2"] & X^*/A^\perp \end{tikzcd}$$

Утверждается, что S_1 можно поднять до оператора S_2 (как указано на диаграмме: $S_1 = \alpha S_2$). Если это установлено, положим $\widetilde{T} = S - S_2\beta$. Тогда $\widetilde{T}$ продолжает T (поскольку $S_2\beta\,|_B = 0$) и принимает значения в $A^\perp$ (поскольку $\alpha\widetilde{T} = \alpha S - \alpha S_2\beta = \alpha S - S_1\beta = 0$).

Чтобы построить S_2, перейдем к сопряженным операторам, учитывая, что пространство $X^*/A^\perp$ рефлексивно:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "R"'] \\ B^\perp & A \arrow[l, "S_1^*"] \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

Здесь j – тождественное вложение, а продолжение R существует в силу условия (a). Осталось положить $S_2 = R^* \mid_{(Y/B)}$.

Теперь импликации (v)$\Longrightarrow$(i) и (v)$\Longrightarrow$(ii) легко получаются: лемма показывает, что вместо того, чтобы продолжать на $L^1(\lambda)$ (или $L^1(\mathbb{T})\big/H_0^1$) все операторы, действующие из E в G, можно продолжать на $L^1(\nu)$ (на $L^1(\mathbb{T})\big/H_0^1$) на все операторы, действующие из F в $E^\perp$. Поскольку F дополняемо в $L^q(\nu)$ (в $L^q(a)\big/H_0^q(a)$), последнее возможно ввиду предложения 1.

Замечание. В случае $X = L^1(\mu)$ теорема 2 была опубликована в препринте [17]. Нетрудно сформулировать и доказать вариант теоремы 2, в котором условия (i) и (ii) выполнены лишь для подпространств E, удовлетворяющих требованию $t(E) > r$ (r – фиксированное число из отрезка $[1, 2]$), а прочие условия изменены соответствующим образом. Для случая $X = L^1(\mu)$ такая формулировка была дана в [17].

Литература

1. M. Déchamps-Gondim, *Analyse harmonique, analyse complexe, et géometrie des espaces de Banach (d'après Jean Bourgain).* Astérisque, **121–122** (1985), 171–195.
2. С. В. Кисляков, *Абсолютно суммирующие операторы на диск-алгебре.* Алгебра и Анализ, **3**, No. 4 (1991), 1–77.
3. J. Bourgain, *New Banach space properties of the disc algebra and H^∞.* Acta Math., **152** (1984), 1–46.
4. J. Diestel, H. Jarchow, and A. Tonge, *Absolutely summing operators.* Cambridge studies in advanced mathematics, v. 43. Cambridge University press, Cambridge, 1995.
5. G. Pisier, *Counterexamples to a conjecture of Grothendieck.* Acta Math., **151** (1983), 181–208.
6. G. Pisier, *Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces.* Reg. Conf. Ser. in Math., no. 60, Amer. Math. Soc., 1986.
7. G. Pisier, *Une nouvelle class des espaces de Banach vérifiants le théorème de Grothendieck.* Ann. Institut Fourier (Grenoble), **28**, No. 1 (1978), 69–90.
8. С. В. Кисляков, *О пространствах с "малым" аннулятором.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **65** (1976), 192–195.
9. A. Pełczyński, *Banach spaces of analytic functions and absolutely summning operators.* Conf. Board of Math. Sci., No. 30. Amer. Math. Soc., Providence, 1977.
10. С. В. Кисляков, *Два замечания по поводу равенства* $\Pi_p(X, \cdot) = I_p(X, \cdot)$. Зап. научн. семин. ЛОМИ, **113** (1981), 135–148.
11. B. Maurey, *Théorèmes de factorization pour les opérateurs linéares a valeurs dans les espaces* L_p. Astérisque, **11** (1974).
12. M. I. Kadec, A. Pełczyński, *Bases, locunary sequences and complemented subspaces in the spaces* L_p. Studia Math., **21** (1961/62), 161–176.

13. A. Pełczyński, H. P. Rosenthal, *Localization technique in L_p-spaces.* Studia Math., **52** (1974/75), 263–289.
14. S. V. Kisliakov, *Interpolation of H^p-spaces: some recent developments.* Israel Math. Conf. Proceedings, **13** (1999), 102–140.
15. G. Pisier, *Interpolation between H^p-spaces and noncommutative generalizations I.* Pacif. J. Math., **155** (1992), 341–368.
16. S. V. Kisliakov, *Interpolation involving bounded bianalytic functions.* In: Operator theory: advances and applications, Vol. 113, Birbhäuser Verlag, Basel, 2000.
17. S. V. Kisliakov, *Extension theorem for spaces with reflexive annihilator.* Department of Math., Chalmers University of Technology-Göteborg University, Preprint 2000:3.

Kislyakov S. V. Extension of operators defined on reflexive subspaces of L^1 and L^1/H^1.

Inperpolation theory is used to develop a general pattern for proving extension theorems mentioned in the title. In the case where the range space G is a w^*-closed subspace of L^∞ or H^∞ with reflexive annihilator F, a necessary and sufficient condition on G is found for such an extension to be always possible. Specifically, F must be Hilbertian and become complemented in L^p $(1 < p \leqslant 2)$ after a suitable change of density.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 28 июля 2000 г.