Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 270, 2000 г.

М. Ф. Гамаль

О РЕГУЛЯРНЫХ ФАКТОРИЗАЦИЯХ СКАЛЯРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

§1. Введение

Пусть $\mathbb{D}$ – открытый единичный круг комплексной плоскости, $\mathbb{T}$ – единичная окружность, $L^p = L^p(\mathbb{T})$, $H^p = H^p(\mathbb{D})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, – класс Харди, если X – гильбертово пространство, то символом X_2 будем обозначать прямую сумму двух экземпляров пространства X, рассматриваемую в виде столбца: $X_2 = \binom{X}{X} = X \oplus X$.

Пусть $\Theta \in H^\infty(\mathbb{D})$, $\|\Theta\|_\infty \leqslant 1$, $\Delta = \sqrt{1-|\Theta|^2}$ п.в. на $\mathbb{T}$. Модельный оператор M_Θ с характеристической функцией Θ – это оператор, действующий в пространстве

$$K_\Theta = \begin{pmatrix} H^2 \\ \operatorname{clos}\Delta L^2 \end{pmatrix} \ominus \begin{pmatrix} \Theta \\ \Delta \end{pmatrix} H^2$$

по формуле

$$M_\Theta f = P_\Theta z f, \quad f \in K_\Theta,$$

где P_Θ – ортогональный проектор из пространства $\binom{H^2}{L^2}$ на пространство K_Θ.

Рассмотрим факторизацию функции Θ вида $\Theta = \Theta_2\Theta_1$, где Θ_2 и Θ_1 – аналитические сжимающие оператор-функции, Θ_1 и Θ_2 действуют из $\mathbb{C}$ в E и из E в $\mathbb{C}$, соответственно, E – вспомогательное гильбертово пространство: $\Theta_1 \in H^\infty(\mathbb{C} \to E)$, $\Theta_2 \in H^\infty(E \to \mathbb{C})$, $\|\Theta_1\|_\infty \leqslant 1$, $\|\Theta_2\|_\infty \leqslant 1$. Определим оператор-функции Δ_1, Δ_2 и Z следующим образом: $\Delta_i = (I - \Theta_i^*\Theta_i)^{\frac{1}{2}}$, $i = 1, 2$,

$$Z\Delta = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2\Theta_1 \end{pmatrix}.$$

Факторизация $\Theta = \Theta_2\Theta_1$ называется регулярной, если Z – унитарный оператор из пространства $\operatorname{clos}\Delta L^2$ в прямую сумму $\operatorname{clos}\Delta_1 L^2 \oplus \operatorname{clos}\Delta_2 L^2(E)$.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 98-01-00312, ФЦП “Интеграция” рег.номер 326.53 и гранта “Научные школы” № 00-15-96-022.

Между регулярными факторизациями характеристической функции Θ и инвариантными подпространствами модельного оператора M_Θ существует взаимно-однозначное соответствие. Инвариантное подпространство, отвечающее регулярной факторизации $\Theta = \Theta_2\Theta_1$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} \Theta_2 \\ Z_2^*\Delta_2 \end{pmatrix} H^2(E) \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ Z_1^* \end{pmatrix} \operatorname{clos}\Delta_1 L^2 \ominus \begin{pmatrix} \Theta \\ \Delta \end{pmatrix} H^2.$$

О модельных операторах, регулярных факторизациях и инвариантных подпространствах см. [5, 6, 8].

Для скалярных функций Θ, $\Theta \not\equiv 0$, регулярность факторизации $\Theta = \Theta_2\Theta_1$ равносильна условию $\operatorname{rank}\Delta(\zeta) = \operatorname{rank}\Delta_1(\zeta) + \operatorname{rank}\Delta_2(\zeta)$ п.в. $\zeta \in \mathbb{T}$, поэтому $\dim E \leqslant 2$. Из условия $\Theta \not\equiv 0$ видно, что $\dim E \geqslant 1$. При $\dim E = 1$ функции Θ_1 и Θ_2 имеют вид $\Theta_1 = \vartheta_1\theta_\sigma$, $\Theta_2 = \vartheta_2\theta_{\mathbb{T}\setminus\sigma}$, где σ – измеримое подмножество окружности $\mathbb{T}$, ϑ и θ – внутренняя и внешняя части функции Θ, ϑ_1, ϑ_2 – внутренние функции, $\vartheta = \vartheta_1\vartheta_2$, θ_σ и $\theta_{\mathbb{T}\setminus\sigma}$ – внешние функции, такие, что $|\theta_\sigma(\zeta)| = |\theta(\zeta)|$ п.в. $\zeta \in \sigma$, $|\theta_\sigma(\zeta)| = 1$ п.в. $\zeta \in \mathbb{T}\setminus\sigma$, $|\theta_{\mathbb{T}\setminus\sigma}(\zeta)| = |\theta(\zeta)|$ п.в. $\zeta \in \mathbb{T}\setminus\sigma$, $|\theta_{\mathbb{T}\setminus\sigma}(\zeta)| = 1$ п.в. $\zeta \in \sigma$.

Регулярные факторизации с $\dim E = 2$ существуют только у таких функций Θ, для которых $|\Theta(\zeta)| < 1$ п.в. $\zeta \in \mathbb{T}$. Факторизация вида $\Theta = \Theta_2\Theta_1$, где $\Theta_1 \in H^\infty(\mathbb{C} \to \mathbb{C}^2)$, $\Theta_1 = \left(\begin{smallmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{smallmatrix}\right)$, $\Theta_2 \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C})$, $\Theta_2 = (\theta_{21}, \theta_{22})$, $\theta_{ij} \in H^\infty$, $i, j = 1, 2$, является регулярной тогда и только тогда, когда Θ_1 является внутренней функцией: $\Theta_1^*\Theta_1 = 1$, а Θ_2 является ковнутренней функцией: $\Theta_2\Theta_2^* = 1$. В терминах функций θ_{ij}, $i, j = 1, 2$, регулярность факторизации равносильна выполнению следующих условий: $|\theta_{11}|^2 + |\theta_{12}|^2 = 1$ п.в. на $\mathbb{T}$, $|\theta_{21}|^2 + |\theta_{22}|^2 = 1$ п.в. на $\mathbb{T}$ (см. [5, 6, 8]).

В работе изучаются регулярные факторизации этого последнего вида, то есть регулярные факторизации размера $(1 \times 2) \times (2 \times 1)$.

§2. Необходимые сведения о пространствах Харди и оператор-функциях

В этом параграфе приведены обозначения и формулировки известных утверждений, которые используются в настоящей работе.

Обозначения: $C(\mathbb{T})$ – пространство непрерывных функций на окружности $\mathbb{T}$, $H^2_- = L^2 \ominus H^2$, P_+ и P_- – ортогональные проекторы из L^2 на H^2 и H^2_-, соответственно.

Пусть $\vartheta, \varphi \in H^\infty$, ϑ – внутренняя функция. Модельный оператор M_ϑ и функции от него определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} &M_\vartheta x = P_\vartheta z x, \quad x \in K_\vartheta, \\ &\varphi(M_\vartheta) x = P_\vartheta \varphi x, \quad x \in K_\vartheta, \\ &K_\vartheta = H^2 \ominus \vartheta H^2, \end{aligned}$$

P_ϑ – ортогональный проектор из H^2 на K_ϑ.

Утверждение 1 [1, гл. II, п. 4; 4, добавление 2]**.** *Пусть h – измеримая положительная функция на окружности $\mathbb{T}$. Следующие утверждения равносильны:*

1) *существует такая функция f, аналитическая в круге $\mathbb{D}$, что f имеет угловые граничные значения $f(\zeta)$ для п.в. $\zeta \in \mathbb{T}$, и $|f(\zeta)| = h(\zeta)$ п.в. $\zeta \in \mathbb{T}$;*

2) $\log h \in L^1$.

При этом $f \in H^p$ тогда и только тогда, когда $h \in L^p$.

Утверждение 2 [1, гл. IV, теор. 1.3 и 4.3; 4, гл. VIII; 10, п. 2 и теор. 3.1]**.** *Пусть $\vartheta, \varphi \in H^\infty$, ϑ – внутренняя функция.*

1) $\mathrm{dist}(\varphi, \vartheta H^\infty) = \mathrm{dist}(\overline{\vartheta}\varphi, H^\infty) = \|\varphi(M_\vartheta)\|$;

2) *если* $\mathrm{dist}(\varphi, \vartheta H^\infty) < 1$, *то множество $\varphi + \vartheta H^\infty$ содержит внутреннюю функцию;*

3) *если множество $\varphi + \vartheta H^\infty$ содержит внутреннюю функцию, то* $\mathrm{dist}(\varphi, \vartheta H^\infty) \leqslant 1$.

Утверждение 3 [1, гл. IV, теор. 1.7; 4, гл. VIII; 10, следствие 2.5 и теор. 3.5]**.** *Пусть $\vartheta, \varphi \in H^\infty$, ϑ – внутренняя функция, и пусть существует такая функция f, что $f \in H^\infty + C(\mathbb{T})$ и $f \in \overline{\vartheta}\varphi + H^\infty$.*

Следующие утверждения равносильны:

1) *множество $\varphi + \vartheta H^\infty$ содержит внутреннюю функцию;*

2) $\mathrm{dist}(\varphi, \vartheta H^\infty) \leqslant 1$.

Утверждение 4 [1, гл. IV, п. 4.2]**.** *Пусть $I \subset \mathbb{T}$, I – открытая дуга, f – такая функция, что $f, \frac{1}{f} \in H^\infty$, $\|f\|_\infty = 1$, $|f| \not\equiv 1$ на $\mathbb{T}$, $|f| = 1$ п.в. на I. Пусть $z_j \in \mathbb{D}$, $j = 1, 2, \ldots$, B – произведение Бляшке с нулями в z_j и $z_j \underset{j}{\to} \zeta_0$, $\zeta_0 \in I$. Тогда* $\mathrm{dist}(f, BH^\infty) = 1$

и $\{h \in H^\infty : h \in f + BH^\infty, \|h\|_\infty = 1\} = \{f\}$; *таким образом, множество* $f + BH^\infty$ *не содержит внутренних функций.*

Утверждение 5 [4, гл. I, п. 6]**.**

1) *Пусть* $\Phi \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2)$ *и* $\det \Phi = \vartheta\theta$, ϑ *– внутренняя функция,* θ *– внешняя функция и* $\det \Phi \not\equiv 0$. *Тогда внешне-внутренняя факторизация матрицы-функции* Φ *имеет вид* $\Phi = \Omega G$, *где* Ω, $G \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2)$, Ω *– внутренняя,* G *– внешняя,* $\det \Omega = \vartheta$, $\det G = \theta$, $\operatorname{clos} \Phi H^2_2 = \Omega H^2_2$, $\Omega H^2_2 \supset \vartheta H^2_2$ *и* $\begin{pmatrix} P_\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Omega H^2_2 = \Omega H^2_2 \ominus \begin{pmatrix} \vartheta H^2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2) *Пусть* $\Phi \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2)$ *и* $\|\Phi\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}} \|\Phi(z)\|_{2\times 2}$, *где* $\| \, \|_{2\times 2}$ *– норма матрицы размера* 2×2 *как оператора из* $\mathbb{C}^2$ *в* $\mathbb{C}^2$.

Если $\|\Phi\|_\infty \leqslant 1$ *и* $\det \Phi$ *– внутренняя функция, то* Φ *– внутренняя матрица-функция.*

§3. Основные леммы

В этом параграфе собраны утверждения, описывающие простые, но интересные свойства регулярных факторизаций, которые, к тому же, будут использованы в дальнейшем.

В лемме 1 показано, как при построении регулярных факторизаций вместо оператор-функции Θ_2 можно использовать некоторую скалярную функцию $\varkappa$. Лемма 2 носит вспомогательный характер. В теореме 1 по заданной регулярной факторизации функции Θ (описывающей инвариантное подпространство L оператора M_Θ) строятся регулярные факторизации, которые описывают все инвариантные подпространства оператора M_Θ, содержащие L. С помощью замечания к лемме 1 и теоремы 1 можно построить все факторизации, описывающие инвариантные подпространства, содержащиеся в L (см. также §5). В теореме 2 регулярные факторизации функции Θ выражаются через факторизации ее внутренней и внешней частей.

Пусть задана скалярная функция $\Theta \in H^\infty$, $|\Theta(\zeta)| < 1$ п.в. $\zeta \in \mathbb{T}$, $\Theta \not\equiv 0$, $\Delta(\zeta) = \sqrt{1 - |\Theta(\zeta)|^2}$, $\zeta \in \mathbb{T}$. Через A^T, A^* и $\operatorname{trace} A$ будем обозначать соответственно транспонированную матрицу, сопряженную матрицу и след матрицы A. Положим

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и выпишем свойства матрицы J:

1) $JJ^* = J^*J = I$, $J^2 = -I$, $J^* = J^T = -J$;

2) если a – строка размера 1×2, то $aJa^T=0$;

3) если A – матрица размера 2×2, то $(\operatorname{trace} A)I = A - JA^TJ$ и $(\det A)I = -JA^TJA = -AJA^TJ$.

Лемма 1. *Пусть $\Theta_1\in H^\infty(\mathbb{C}\to\mathbb{C}^2)$, Θ_1 – внутренняя функция. Следующие утверждения равносильны:*

(a) *Θ имеет регулярную факторизацию вида $\Theta=\Theta_2\Theta_1$;*

(b) *существует такая функция $\varkappa\in L^\infty$, что $|\varkappa|=\Delta$ п.в. на $\mathbb{T}$ и матрица-функция $(\Theta\ \varkappa)\begin{pmatrix}\Theta_1^*\\ \Theta_1^TJ\end{pmatrix}$ является аналитической.*

При этом $\Theta_2=(\Theta\ \varkappa)\begin{pmatrix}\Theta_1^*\\ \Theta_1^TJ\end{pmatrix}$ и $\varkappa=\Theta_1^*J\Theta_2^T$.

Доказательство. (a) $\Longrightarrow$ (b). Положим $\varkappa=\Theta_1^*J\Theta_2^T$, тогда $|\varkappa|^2+|\Theta|^2=\varkappa\varkappa^*+\Theta^*\Theta=\Theta_1^*(J\Theta_2^T\Theta_2^{T*}J^*+\Theta_2^*\Theta_2)\Theta_1=\Theta_1^*(J(\Theta_2^*\Theta_2)^TJ^*+\Theta_2^*\Theta_2)\Theta_1=\Theta_1^*(\operatorname{trace}\Theta_2^*\Theta_2)\Theta_1=1$, то есть $|\varkappa|=\Delta$.

Далее,

$$(\Theta\ \varkappa)\begin{pmatrix}\Theta_1^*\\ \Theta_1^TJ\end{pmatrix}=\Theta\Theta_1^*+\varkappa^T\Theta_1^TJ=\Theta\Theta_1^*+\Theta_2J^*\Theta_1^{*T}\Theta_1^TJ=$$

$$=\Theta_2(\Theta_1\Theta_1^*+J^*(\Theta_1\Theta_1^*)^TJ)=\Theta_2\operatorname{trace}\Theta_1\Theta_1^*=\Theta_2,$$

следовательно, матрица-функция $(\Theta\ \varkappa)\begin{pmatrix}\Theta_1^*\\ \Theta_1^TJ\end{pmatrix}$ является аналитической.

(b) $\Longrightarrow$ (a). Положим $\Theta_2=(\Theta\ \varkappa)\begin{pmatrix}\Theta_1^*\\ \Theta_1^TJ\end{pmatrix}$, тогда Θ_2 – аналитическая ограниченная матрица-функция размера 1×2, покажем, что $\Theta_2\Theta_2^*=1$ и $\Theta=\Theta_2\Theta_1$.

Имеем

$$\Theta_2\Theta_2^*=(\Theta\ \varkappa)\begin{pmatrix}\Theta_1^*\\ \Theta_1^TJ\end{pmatrix}(\Theta_1\quad J^*\Theta_1^{T*})\begin{pmatrix}\Theta^*\\ \varkappa^*\end{pmatrix}=$$

$$=(\Theta\ \varkappa)\begin{pmatrix}\Theta_1^*\Theta_1 & \Theta_1^*J^*\Theta_1^{T*}\\ \Theta_1^TJ\Theta_1 & \Theta_1^T\Theta_1^{T*}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Theta^*\\ \varkappa^*\end{pmatrix}=$$

$$=(\Theta\ \varkappa)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Theta^*\\ \varkappa^*\end{pmatrix}=1,$$

$$\Theta_2\Theta_1=(\Theta\ \varkappa)\begin{pmatrix}\Theta_1^*\Theta_1\\ \Theta_1^TJ\Theta_1\end{pmatrix}=(\Theta\ \varkappa)\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\Theta.$$

Мы получили, что $\Theta=\Theta_2\Theta_1$ и эта факторизация регулярна. $\square$

Замечание. Пусть $\Theta = \Theta_2\Theta_1$ – регулярная факторизация функции Θ размера $(1\times 2)\times(2\times 1)$. Тогда $\Theta = \Theta_1^T\Theta_2^T$ – также регулярная факторизация функции Θ. Пусть $\varkappa$ и $\varkappa_T$ – функции из леммы 1, построенные по факторизациям $\Theta = \Theta_2\Theta_1$ и $\Theta = \Theta_1^T\Theta_2^T$, соответственно. Тогда $\varkappa_T = \overline{\varkappa}$.

Лемма 2. *Пусть $F \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C})$, $\alpha \in H^\infty$, α – внутренняя функция. Тогда существует такая матрица-функция $A \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2)$, что $\det A = \alpha$ и $FA^* \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C})$.*

Доказательство. 1) Пусть $\alpha = b_\lambda$, где $\lambda \in \mathbb{D}$, $b_\lambda(z) = \dfrac{|\lambda|}{\lambda}\dfrac{\lambda - z}{1-\overline{\lambda}z}$, $z \in \mathbb{D}$, – множитель Бляшке, и пусть $F = (f, g)$, где $f, g \in H^\infty$. Если $f(\lambda) \neq 0$ и $g(\lambda) \neq 0$, то положим $c = \frac{|f(\lambda)|}{\sqrt{|f(\lambda)|^2+|g(\lambda)|^2}}$,

$$\varepsilon = \frac{f(\lambda)}{|f(\lambda)|}\frac{|g(\lambda)|}{g(\lambda)} \quad \text{и} \quad C = \begin{pmatrix} c & \overline{\varepsilon}\sqrt{1-c^2} \\ -\varepsilon\sqrt{1-c^2} & c \end{pmatrix}.$$

Если $f(\lambda) = 0$ или $g(\lambda) = 0$, положим $C = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ или $C = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Наконец, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b_\lambda \end{smallmatrix}\right) C$ – искомая матрица-функция.

2) Предположим, что лемма 2 верна для конечных произведений Бляшке α ранга N, докажем лемму для произведения Бляшке ранга $N+1$. Пусть $\lambda \in \mathbb{D}$, α – произведение Бляшке ранга N, $A \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2)$, A – внутренняя, $\det A = \alpha$ и $FA^* \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C})$. По доказанному в пункте 1) найдется такая матрица-функция $A_\lambda \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2)$, что $\det A_\lambda = b_\lambda$ и $(FA^*)A_\lambda^* \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C})$. Положим $A_1 = A_\lambda A$, ясно, что A_1 удовлетворяет заключению леммы для функции αb_λ, и мы получили, что лемма 2 доказана для произведений Бляшке ранга $N+1$.

3) Пусть $\{\alpha_n\}_n$ – такая последовательность внутренних функций из H^∞, что для α_n верна лемма 2, и пусть $\alpha \in H^\infty$, α – внутренняя, $\alpha_n(z) \underset{n}{\to} \alpha(z)$ для любого $z \in \mathbb{D}$. Покажем, что лемма 2 верна для α. Пусть $A_n \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2)$, A_n – внутренние, $\det A_n = \alpha_n$ и $FA_n^* \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C})$. Пусть $F = (f, g)$ и $FA_n^* = (\varphi_n, \psi_n)$, тогда $f, g, \varphi_n, \psi_n \in H^\infty$, $(f, g) = (\varphi_n, \psi_n)A_n$ и $\|\varphi_n\|_\infty, \|\psi_n\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Следовательно (см. [2, гл. I, §2, теор. 1]), существуют такие функции $\varphi, \psi \in H^\infty$, $A \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2)$ и подпоследовательность $\{n_j\}_j$, что $\varphi_{n_j}(z) \underset{j}{\to} \varphi(z)$, $\psi_{n_j}(z) \underset{j}{\to} \psi(z)$

для всех $z \in \mathbb{D}$, и последовательности элементов матриц A_{n_j} сходятся к элементам матрицы A поточечно в $\mathbb{D}$. Ясно, что $\det A = \alpha$. Покажем, что A – внутренняя. Для этого достаточно показать, что $\|A\|_\infty \leqslant 1$ (см. часть 2) утверждения 5). Так как A_{n_j} – внутренние матрицы-функции, $\|A_{n_j}\|_\infty = 1$ для всех j, а из определения нормы $\| \, \|_\infty$ и принципа максимума модуля для аналитических ограниченных функций ясно, что при предельном переходе норма не возрастает. Таким образом, $\|A\|_\infty \leqslant 1$ и A – искомая матрица-функция.

4) Для завершения доказательства леммы 2 осталось применить теорему Шура ([4, гл. II, п. 2], см. также [1, гл. I, теор. 2.1]): любая внутренняя функция может быть приближена последовательностью конечных произведений Бляшке относительно поточечной сходимости в $\mathbb{D}$. Таким образом, лемма 2 верна для любой внутренней функции. $\square$

Непосредственно из леммы 2 вытекает

Теорема 1. *Пусть $\Theta \in H^\infty$, $|\Theta| < 1$ п.в. на $\mathbb{T}$, $\Theta \not\equiv 0$, пусть $\Theta = \Theta_2\Theta_1$ – регулярная факторизация функции Θ, $\Theta_1 \in H^\infty(\mathbb{C} \to \mathbb{C}^2)$, $\Theta_2 \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C})$, $\alpha \in H^\infty$, α – внутренняя. Тогда существует такая матрица-функция $A \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2)$, что $\det A = \alpha$ и $\Theta_2 A^* \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C})$ и, следовательно, факторизация $\Theta = (\Theta_2 A^*)(A\Theta_1)$ будет регулярной. Пусть $\varkappa$ и $\varkappa_1$ – функции из леммы 1, построенные по факторизациям $\Theta = \Theta_2\Theta_1$ и $\Theta = (\Theta_2 A^*) \cdot (A\Theta_1)$, соответственно. Тогда $\varkappa_1 = \overline{\alpha}\varkappa$.*

Теорема 2. *Пусть $\Theta \in H^\infty$, $|\Theta| < 1$ п.в. на $\mathbb{T}$, $\Theta \not\equiv 0$, $\Theta = \vartheta\theta$, ϑ – внутренняя функция, θ – внешняя функция. Пусть матрицы-функции Ξ_1, Ξ_2, Ψ_1, Ψ_2 таковы, что*

$$\begin{gathered} \Xi_1, \Xi_2 \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2), \quad \Xi_1, \Xi_2 \quad \text{– внутренние}, \\ \Xi_2\Xi_1 = \vartheta I, \quad \Psi_1 \in H^\infty(\mathbb{C} \to \mathbb{C}^2), \quad \Psi_2 \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}), \\ \theta = \Psi_2\Psi_1 \quad \text{– регулярная факторизация.} \end{gathered} \tag{1}$$

(a) *Положим $\Theta_1 = \Xi_1\Psi_1$, $\Theta_2 = \Psi_2\Xi_2$. Тогда $\Theta = \Theta_2\Theta_1$ и эта факторизация является регулярной.*

(b) *Любая регулярная факторизация функции Θ размера $(1 \times 2) \times (2 \times 1)$ имеет вид $\Theta = \Theta_2\Theta_1$, где $\Theta_1 = \Xi_1\Psi_1$, $\Theta_2 = \Psi_2\Xi_2$, $\Xi_1, \Xi_2, \Psi_1, \Psi_2$ удовлетворяют* (1).

Доказательство. Утверждение a) теоремы очевидно. Докажем утверждение b). Пусть $\Theta = \Theta_2\Theta_1$ – регулярная факторизация функции Θ размера $(1 \times 2) \times (2 \times 1)$, $\Theta_2 = (\theta_{21}, \theta_{22})$, $\Theta_1 = \begin{pmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{pmatrix}$, $\theta_{ij} \in H^\infty$, $i, j = 1, 2$. Обозначим через ϑ_1 и ϑ_2 наибольшие общие делители внутренних частей функций θ_{11} и θ_{12}, θ_{21} и θ_{22}, соответственно, и положим $\widetilde{\Theta}_1 = \overline{\vartheta}_1 \Theta_1$, $\widetilde{\Theta}_2 = \overline{\vartheta}_2 \Theta_2$. Тогда $\vartheta = \vartheta_0 \vartheta_1 \vartheta_2$, $\vartheta_0 \in H^\infty$, ϑ_0 – внутренняя функция, $\widetilde{\Theta}_1$ и $\widetilde{\Theta}_2$ – аналитические матрицы-функции. Положим

$$\Psi = (\widetilde{\Theta}_1, -J\,\widetilde{\Theta}_2^T),$$

покажем, что $\det \Psi = \vartheta_0 \theta$ (применяем свойства J из §2):

$$(\det \Psi) I = -J \Psi^T J \Psi = -J \begin{pmatrix} \widetilde{\Theta}_1^T \\ \widetilde{\Theta}_2 J \end{pmatrix} (J\widetilde{\Theta}_1, \widetilde{\Theta}_2^T) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{\Theta}_2\widetilde{\Theta}_1 \\ -\widetilde{\Theta}_2\widetilde{\Theta}_1 & 0 \end{pmatrix} = \widetilde{\Theta}_2\widetilde{\Theta}_1 I = \overline{\vartheta}_1\overline{\vartheta}_2 \Theta I = \vartheta_0 \theta I.$$

Пусть $\Psi = \Xi G$ – внешне-внутренняя факторизация матрицы-функции Ψ, где Ξ, $G \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2)$, Ξ – внутренняя, G – внешняя, $\det \Xi = \vartheta_0$, $\det G = \theta$. Запишем G в виде $G = (\Psi_1, -J\Psi_2^T)$, где $\Psi_1 \in H^\infty(\mathbb{C} \to \mathbb{C}^2)$, $\Psi_2 \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C})$, и положим $\Xi_1 = \vartheta_1 \Xi$, $\Xi_2 = -\vartheta_2 J \Xi^T J$. Покажем, что $\Xi_1, \Xi_2, \Psi_1, \Psi_2$ удовлетворяют заключению теоремы.

Ясно, что $\Xi_2 \Xi_1 = -\vartheta_1\vartheta_2 J \Xi^T J \Xi = \vartheta_1 \vartheta_2 (\det \Xi) I = \vartheta I$ и $\Psi = (\widetilde{\Theta}_1, -J\widetilde{\Theta}_2^T) = (\Xi\Psi_1, -\Xi J \Psi_2^T)$, откуда $\widetilde{\Theta}_1 = \Xi \Psi_1$ и $\widetilde{\Theta}_2 = -\Psi_2 J \Xi^T J$, поэтому $\Theta_1 = \vartheta_1 \Xi \Psi_1 = \Xi_1 \Psi_1$ и $\Theta_2 = \vartheta_2 \widetilde{\Theta}_2 = -\Psi_2 \vartheta_2 J \Xi^T J = \Psi_2 \Xi_2$. Далее,

$$(\det G) I = -J G^T J\, G = -J \begin{pmatrix} \Psi_1^T \\ \Psi_2 J \end{pmatrix} (J\Psi_1, \Psi_2^T) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Psi_2\Psi_1 \\ -\Psi_2\Psi_1 & 0 \end{pmatrix} = \Psi_2 \Psi_1 I,$$

поэтому $\theta I = (\det G) I = (\Psi_2 \Psi_1) I$ и $\theta = \Psi_2 \Psi_1$.

Осталось показать, что факторизация $\theta = \Psi_2 \Psi_1$ регулярна. Покажем, что $\Psi_1^* \Psi_1 = 1$, $\Psi_2 \Psi_2^* = 1$ (см. §1). Мы знаем, что $\widetilde{\Theta}_1^* \widetilde{\Theta}_1 = 1$, $\widetilde{\Theta}_2 \widetilde{\Theta}_2^* = 1$, $\Xi^* \Xi = I$. Имеем:

$$1 = \widetilde{\Theta}_1^* \widetilde{\Theta}_1 = \Psi_1^* \Xi^* \Xi \Psi_1 = \Psi_1^* \Psi_1,$$
$$1 = \widetilde{\Theta}_2 \widetilde{\Theta}_2^* = \Psi_2 J \Xi^T J J \Xi^{T*} J \Psi_2^* = -\Psi_2 J (\Xi^* \Xi)^T J \Psi_2^* = \Psi_2 \Psi_2^*.$$

Теорема доказана. □

§4. О регулярных факторизациях с сомножителем заданного вида

В этом параграфе речь пойдет о регулярных факторизациях, в которых $\Theta_1 = \begin{pmatrix} c\vartheta_1 \\ \sqrt{1-c^2}\vartheta_2 \end{pmatrix}$, где $c \in [0,1]$, ϑ_1, ϑ_2 – скалярные внутренние функции.

Пусть, как и раньше, $\Theta \in H^\infty$, $|\Theta| < 1$ п.в. на $\mathbb{T}$, $\Theta \not\equiv 0$, $\Delta(\zeta) = \sqrt{1-|\Theta(\zeta)|^2}$, $\zeta \in \mathbb{T}$. Функция Θ может иметь регулярную факторизацию с сомножителем Θ_1 указанного вида, только если $\log\Delta \in L^1 = L^1(\mathbb{T})$. Сформулируем этот факт в виде леммы.

Лемма 3. *Пусть $c \in [0,1]$, $\vartheta_1, \vartheta_2 \in H^\infty$, ϑ_1, ϑ_2 – внутренние функции, и пусть Θ имеет регулярную факторизацию вида $\Theta = \Theta_2 \begin{pmatrix} c\vartheta_1 \\ \sqrt{1-c^2}\vartheta_2 \end{pmatrix}$.*

Тогда $\log\Delta \in L^1$.

Доказательство. Как и в лемме 1, положим $\varkappa = \Theta_1^* J \Theta_2^T = (c\overline{\vartheta}_1, \sqrt{1-c^2}\,\overline{\vartheta}_2) J \Theta_2^T$, тогда $\vartheta_1\vartheta_2\varkappa = (c\vartheta_2, \sqrt{1-c^2}\,\vartheta_1) J\Theta_2^T$, поэтому $\vartheta_1\vartheta_2\varkappa$ является аналитической в $\mathbb{D}$ функцией. По лемме 1 $|\vartheta_1\vartheta_2\varkappa| = \Delta$ п.в. на $\mathbb{T}$. Применяя утверждение 1, получаем, что $\log\Delta \in L^1$. $\square$

Ввиду леммы 3 мы будем рассматривать такие функции Θ, для которых $\log\Delta \in L^1$. Через ω будем обозначать внешнюю функцию, такую, что $|\omega| = \Delta$ п.в. на $\mathbb{T}$. Отметим, что произвольная аналитическая функция, равная по модулю Δ на окружности $\mathbb{T}$, имеет вид $\alpha\omega$, где α – произвольная внутренняя функция.

Переформулируем лемму 1 для рассматриваемого случая.

Лемма 4. *Пусть $\log\Delta \in L^1$, ω – внешняя функция, $|\omega| = \Delta$ п.в. на $\mathbb{T}$, $c \in [0,1]$, ϑ_1, ϑ_2 – внутренние функции.*

Следующие утверждения равносильны:

(a) *Θ имеет регулярную факторизацию вида $\Theta = \Theta_2 \begin{pmatrix} c\vartheta_1 \\ \sqrt{1-c^2}\vartheta_2 \end{pmatrix}$;*

(b) *существует такая внутренняя функция α, что*

$$\begin{aligned} &c\,\Theta - \sqrt{1-c^2}\,\alpha\omega \in \vartheta_1 H^\infty, \\ &\sqrt{1-c^2}\,\Theta + c\alpha\omega \in \vartheta_2 H^\infty. \end{aligned} \tag{2}$$

При этом $\varkappa = \Theta_1^* J \Theta_2^T = \overline{\vartheta}_1\overline{\vartheta}_2\alpha\omega$.

Доказательство. По лемме 1 Θ имеет регулярную факторизацию вида $\Theta = \Theta_2\Theta_1$ тогда и только тогда, когда существует такая функция $\varkappa \in L^\infty$, что $|\varkappa| = \Delta$ п.в. на $\mathbb{T}$ и матрица-функция $\Theta_2 = (\Theta, \varkappa)\begin{pmatrix}\Theta_1^* \\ \Theta_1^T J\end{pmatrix}$ является аналитической. Положим $\alpha = \frac{\vartheta_1\vartheta_2\varkappa}{\omega}$, тогда $|\alpha| = 1$ п.в. на $\mathbb{T}$, и перепишем условие аналитичности Θ_2 следующим образом: $\vartheta_1\vartheta_2\Theta_2 \in \vartheta_1\vartheta_2 H_2^\infty$. Имеем

$$\vartheta_1\vartheta_2\Theta_2 = (\Theta, \vartheta_1\vartheta_2\varkappa)\begin{pmatrix}\vartheta_1\vartheta_2\Theta_1^* \\ \Theta_1^T J\end{pmatrix} =$$

$$= (\Theta, \alpha\omega)\begin{pmatrix} c\vartheta_2 & \sqrt{1-c^2}\,\vartheta_1 \\ -\sqrt{1-c^2}\,\vartheta_2 & c\vartheta_1\end{pmatrix} =$$

$$(\vartheta_2(c\,\Theta - \sqrt{1-c^2}\,\alpha\omega),\ \vartheta_1(\sqrt{1-c^2}\,\Theta + c\alpha\omega)),$$

и $\vartheta_1\vartheta_2\Theta_2 \in \vartheta_1\vartheta_2 H_2^\infty$ тогда и только тогда, когда

$$c\,\Theta - \sqrt{1-c^2}\,\alpha\omega \in \vartheta_1 H^\infty, \quad \sqrt{1-c^2}\,\Theta + c\alpha\omega \in \vartheta_2 H^\infty. \qquad (2')$$

Итак, утверждение (a) леммы 4 равносильно следующему утверждению: существует такая функция $\alpha \in L^\infty$, что $|\alpha| = 1$ п.в. на $\mathbb{T}$ и α удовлетворяет условиям $(2')$. Но функция α может удовлетворять условию $(2')$ только если она будет аналитической, и, так как $|\alpha| = 1$ п.в на $\mathbb{T}$, это и означает, что α – внутренняя. Лемма доказана. □

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть $c \in [0,1]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{D}$, $\lambda \neq \mu$, b_λ, b_μ – множители Бляшке ($b_\zeta(z) = \dfrac{|\zeta|}{\zeta}\dfrac{\zeta - z}{1-\overline{\zeta}z}$, $z \in \mathbb{D}$, $\zeta \in \mathbb{D}$), и $\Theta_1 = \begin{pmatrix}\frac{cb_\lambda}{\sqrt{1-c^2}\,b_\mu}\end{pmatrix}$. По лемме 4, Θ имеет регулярную факторизацию вида $\Theta = \Theta_2\begin{pmatrix}\frac{cb_\lambda}{\sqrt{1-c^2}\,b_\mu}\end{pmatrix}$, если и только если найдется такая внутренняя функция α, для которой

$$c\,\Theta - \sqrt{1-c^2}\,\alpha\omega \in b_\lambda H^\infty, \quad \sqrt{1-c^2}\,\Theta + c\alpha\omega \in b_\mu H^\infty. \qquad (3)$$

Условия (3) означают следующее:

$$c\,\Theta(\lambda) - \sqrt{1-c^2}\,\alpha(\lambda)\omega(\lambda) = 0, \quad \sqrt{1-c^2}\,\Theta(\mu) + c\alpha(\mu)\omega(\mu) = 0. \quad (4)$$

Если $c = 1$, то равенства (4) будут выполнены для функции α тогда и только тогда, когда $\Theta(\lambda) = 0$ и $\alpha(\mu) = 0$; факторизация будет иметь вид $\Theta = (\overline{b}_\lambda\Theta, \overline{b}_\mu b_\mu \beta\omega)\begin{pmatrix} b_\lambda \\ 0 \end{pmatrix} = (\overline{b}_\lambda\Theta, \beta\omega)\begin{pmatrix} b_\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$, где β – произвольная внутренняя функция. Такой же вид (с заменой λ на μ) будет иметь факторизация при $c = 0$.

Если $c \in (0,1)$, то равенства (4) можно переписать следующим образом:

$$\alpha(\lambda) = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\,\frac{\Theta(\lambda)}{\omega(\lambda)}, \quad \alpha(\mu) = -\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\,\frac{\Theta(\mu)}{\omega(\mu)}. \tag{5}$$

Положим

$$\psi(z) = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\,\frac{\Theta(\lambda)}{\omega(\lambda)}\,\frac{z-\mu}{\lambda-\mu} - \frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\,\frac{\Theta(\mu)}{\omega(\mu)}\,\frac{z-\lambda}{\mu-\lambda}, \tag{6}$$

тогда $\alpha(\lambda) = \psi(\lambda)$, $\alpha(\mu) = \psi(\mu)$, то есть $\alpha \in \psi + b_\lambda b_\mu H^\infty$. Итак, мы получили, что функция Θ имеет регулярную факторизацию вида $\Theta = \Theta_2\begin{pmatrix} cb_\lambda \\ \sqrt{1-c^2}\,b_\mu \end{pmatrix}$ тогда и только тогда, когда множество $\psi + b_\lambda b_\mu H^\infty$ содержит внутреннюю функцию.

Положим $\varphi = \psi$, $\vartheta = b_\lambda b_\mu$ и $f = \overline{b}_\lambda \overline{b}_\mu \psi$; ясно, что $f \in C(\mathbb{T})$. Применяя утверждение 3, получаем, что множество $\psi + b_\lambda b_\mu H^\infty$ содержит внутреннюю функцию тогда и только тогда, когда $\operatorname{dist}(\psi, b_\lambda b_\mu H^\infty) \leqslant 1$.

Окончательно получаем, что функция Θ имеет регулярную факторизацию вида $\Theta = \Theta_2\begin{pmatrix} cb_\lambda \\ \sqrt{1-c^2}\,b_\mu \end{pmatrix}$, $c \in (0,1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{D}$, $\lambda \neq \mu$, если и только если $\operatorname{dist}(\psi, b_\lambda b_\mu H^\infty) \leqslant 1$, где функция ψ определена равенством (6).

Пример 2. Пусть $c \in (0,1)$, $\lambda_j \in \mathbb{D}$, $\lambda_j \neq \lambda_i$ при $j \neq i$, $B_1 = \prod_{j=1}^{m_1} b_{\lambda_j}^{k_j}$, $B_2 = \prod_{j=m_1+1}^{m} b_{\lambda_j}^{k_j}$ – конечные произведения Бляшке. Ясно, что найдется такая функция $\psi \in H^\infty \cap C(\mathbb{T})$, что

$$\psi^{(k)}(\lambda_j) = a_{jk} =$$

$$= \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\left(\frac{\Theta}{\omega}\right)^{(k)}(\lambda_j), & j = 1, \dots, m_1, \\ -\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\left(\frac{\Theta}{\omega}\right)^{(k)}(\lambda_j), & j = m_1+1, \dots, m, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, k_j - 1.$$

Рассуждая так же, как и в примере 1, получаем, что функция Θ имеет регулярную факторизацию вида $\Theta = \Theta_2\begin{pmatrix} cB_1 \\ \sqrt{1-c^2}\,B_2 \end{pmatrix}$, если и только если $\operatorname{dist}(\psi, B_1 B_2 H^\infty) \leqslant 1$.

Заметим, что $\operatorname{dist}(\psi, B_1 B_2 H^\infty)$ зависит только от чисел a_{jk} и λ_j и условие $\operatorname{dist}(\psi, B_1 B_2 H^\infty) \leqslant 1$ эквивалентно хорошо известным условиям на конечномерную матрицу, элементы которой построены по числам a_{jk} и λ_j. Так, при $m = 1$ и $\lambda = 0$ это интерполяционная задача Каратеодори–Фейера, при $k_j = 1$, $j = 1, \dots, m$, – интерполяционная задача Неванлинны–Пика (см. [1, гл. I, теор. 2.2; 4, гл. VIII, п. 1].

Пример 3. Пусть $I \subset \mathbb{T}$, I – открытая дуга, $0 < a_2 < a_1 < 1$, Θ – внешняя функция, $|\Theta| = a_1$ п.в. на I, $|\Theta| = a_2$ п.в. на $\mathbb{T}\backslash I$, ω – внешняя функция, $|\omega| = \sqrt{1 - |\Theta|^2}$ п.в. на $\mathbb{T}$. Пусть $z_j \in \mathbb{D}$, $j = 1, 2, \dots$, B – произведение Бляшке с нулями в z_j и $z_j \underset{j}{\to} \zeta_0$, $\zeta_0 \in I$. Положим $\Theta_c = \left(\begin{smallmatrix} c \\ \sqrt{1-c^2}\,B \end{smallmatrix}\right)$, $c \in [0,1]$. Функция Θ имеет регулярную факторизацию вида $\Theta = \Theta_2 \Theta_c$ тогда и только тогда, когда $1 \geqslant c > a_1$.

Доказательство. Применим лемму 4; получим, что функция Θ имеет регулярную факторизацию указанного вида тогда и только тогда, когда найдется такая внутренняя функция α, для которой

$$\sqrt{1 - c^2}\,\Theta + c\alpha\omega \in BH^\infty. \tag{7}$$

Так как $\frac{1}{\omega} \in H^\infty$, условие (7) можно переписать в эквивалентной форме

$$\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\,\frac{\Theta}{\omega} + \alpha \in BH^\infty.$$

Положим $f_c = \frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\frac{\Theta}{\omega}$ и получим, что функция Θ имеет регулярную факторизацию $\Theta = \Theta_2 \Theta_c$ тогда и только тогда, когда множество $f_c + BH^\infty$ содержит внутреннюю функцию. Вычислим $\operatorname{dist}(f_c, BH^\infty)$. Легко видеть, что f_{a_1} удовлетворяет условиям утверждения 4, поэтому $\operatorname{dist}(f_{a_1}, BH^\infty) = 1$ и $\operatorname{dist}(f_c, BH^\infty) = \frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1^2}}$. Применяя утверждение 2, получаем, что множество $f_c + BH^\infty$ содержит внутреннюю функцию при $a_1 < c$ и не содержит внутренней функции при $a_1 > c$. Применяя утверждение 4, получаем, что множество $f_{a_1} + BH^\infty$ не содержит внутренней функции. Разбирая этот пример, мы считали $c \neq 0$, но ясно, что при $c = 0$ факторизация имела бы вид $\Theta = \Theta_2 \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ B \end{smallmatrix}\right)$, что невозможно, так как Θ – внешняя функция, а B – внутренняя, и Θ не представима в виде $\Theta = fB$ ни для какой аналитической функции f. $\square$

Сформулируем леммы, которые представляют собой обобщения рассмотренных примеров и доказательство которых ведется тем же способом.

Лемма 5. *Пусть* $\log\Delta \in L^1$, ω *– внешняя функция,* $|\omega| = \Delta$ *п.в. на* $\mathbb{T}$, $c \in (0,1)$, ϑ_1, ϑ_2 *– внутренние функции,* ϑ_1 *и* ϑ_2 *взаимно просты. Положим* $\mathcal{K}_1 = \vartheta_2 P_{\vartheta_1}\omega H^2$, $\mathcal{K}_2 = \vartheta_1 P_{\vartheta_2}\omega H^2$, *тогда* $K_{\vartheta_1\vartheta_2} = \operatorname{clos}(\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)$ *и* $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = \{0\}$. *Рассмотрим линейные (не обязательно ограниченные) отображения* T_1, T_2 *и* T, *заданные формулами*

$$T_1 : \mathcal{K}_1 \to \vartheta_2 K_{\vartheta_1}, \quad T_2 : \mathcal{K}_2 \to \vartheta_1 K_{\vartheta_2},$$

$$T_1 \vartheta_2 P_{\vartheta_1}\omega h = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\,\vartheta_2 P_{\vartheta_1}\Theta h,$$

$$T_2 \vartheta_1 P_{\vartheta_2}\omega h = -\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\,\vartheta_1 P_{\vartheta_2}\Theta h, \quad h \in H^2,$$

$$T : \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 \to K_{\vartheta_1\vartheta_2}, \quad T = T_1 + T_2.$$

(a) *Если* Θ *имеет регулярную факторизацию вида*

$$\Theta = \Theta_2 \begin{pmatrix} c\vartheta_1 \\ \sqrt{1-c^2}\,\vartheta_2 \end{pmatrix},$$

то отображение T *является ограниченным и* $\|T\| \leqslant 1$.

(b) *Если* T *является ограниченным отображением и* $\|T\| < 1$, *то* Θ *имеет регулярную факторизацию вида* $\Theta = \Theta_2 \begin{pmatrix} c\vartheta_1 \\ \sqrt{1-c^2}\,\vartheta_2 \end{pmatrix}$.

Замечание 1. Положим $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2$, ясно, что $M_{\vartheta_1\vartheta_2}\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ и $TM_{\vartheta_1\vartheta_2}\big|_{\mathcal{K}} = M_{\vartheta_1\vartheta_2}T\big|_{\mathcal{K}}$. Если T является ограниченным отображением, то, по теореме о подъеме коммутанта [4, гл. VIII, п. 1; 5, п. 20 и 36; 6, гл. VI, следствие 3.7; 8, п. 4.18; 10, теор. 3.1] существует такая функция $\psi \in H^\infty$, что $T = \psi(M_{\vartheta_1\vartheta_2})$.

Доказательство леммы 5. (a) Пусть Θ имеет регулярную факторизацию указанного вида. По лемме 3 существует внутренняя функция $\alpha \in H^\infty$, для которой выполнены условия (2). Покажем, что $\alpha(M_{\vartheta_1\vartheta_2})\big|_{\mathcal{K}} = T$. Тогда часть (a) леммы будет доказана.

Пусть $h \in H^2$, тогда

$$\alpha(M_{\vartheta_1\vartheta_2})\vartheta_2 P_{\vartheta_1}\omega h = \vartheta_2\vartheta_1 P_-\overline{\vartheta}_1\overline{\vartheta}_2\alpha\vartheta_2 P_{\vartheta_1}\omega h =$$

$$= \vartheta_2 P_{\vartheta_1} \alpha P_{\vartheta_1} \omega h = \vartheta_2 P_{\vartheta_1} \alpha\omega h = \vartheta_2 P_{\vartheta_1} \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\, \Theta h = T_1 \vartheta_2 P_{\vartheta_1} \omega h$$

(воспользовались первым равенством из (2), которое можно записать так: $\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\,\Theta - \alpha\omega \in \vartheta_1 H^\infty$, поэтому $P_{\vartheta_1}\alpha\omega h = P_{\vartheta_1}\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\,\Theta h$ для любой функции $h \in H^2$). Аналогично получаем, что

$$\alpha(M_{\vartheta_1\vartheta_2})\vartheta_1 P_{\vartheta_2}\omega h = T_2 \vartheta_1 P_{\vartheta_2} \omega h$$

для любой $h \in H^2$. Итак, $\alpha(M_{\vartheta_1\vartheta_2})\big|_{\mathcal{K}_1} = T_1$ и $\alpha(M_{\vartheta_1\vartheta_2})\big|_{\mathcal{K}_2} = T_2$, поэтому $\alpha(M_{\vartheta_1\vartheta_2})\big|_{\mathcal{K}} = T$ и часть (a) леммы доказана.

(b) Пусть T является ограниченным отображением. По замечанию 1 существует такая функция $\psi \in H^\infty$, что $T = \psi(M_{\vartheta_1\vartheta_2})$. Так как $\|\psi(M_{\vartheta_1\vartheta_2})\| = \|T\| < 1$, по утверждению 2 множество $\psi + \vartheta_1\vartheta_2 H^\infty$ содержит внутреннюю функцию α. Покажем, что α удовлетворяет условиям (2).

Ясно, что $\psi(M_{\vartheta_1\vartheta_2}) = \alpha(M_{\vartheta_1\vartheta_2})$, поэтому $T = \alpha(M_{\vartheta_1\vartheta_2})$. Пусть $h \in H^2$, тогда

$$\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\, \vartheta_2 P_{\vartheta_1}\Theta h = T_1 \vartheta_2 P_{\vartheta_1}\omega h = \alpha(M_{\vartheta_1\vartheta_2})\vartheta_2 P_{\vartheta_1}\omega h = \vartheta_2 P_{\vartheta_1}\alpha\omega h,$$

откуда видно, что $P_{\vartheta_1}\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\,\Theta h = P_{\vartheta_1}\alpha\omega h$ для всех $h \in H^2$. Поэтому $\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\,\Theta - \alpha\omega \in \vartheta_1 H^\infty$, и мы получили первое равенство из (2). Таким же образом из равенства $T_2\vartheta_1 P_{\vartheta_2}\omega h = \alpha(M_{\vartheta_1\vartheta_2})\vartheta_1 P_{\vartheta_2}\omega h$, $h \in H^2$, получается второе равенство из (2). Для завершения доказательства осталось применить лемму 3. □

Замечание 2. Пусть в условиях леммы 5 функции ω и $\vartheta_1\vartheta_2$ таковы, что $\inf_{\mathbb{D}}(|\omega| + |\vartheta_1\vartheta_2|) > 0$. Тогда найдется такое число $\varepsilon > 0$, что $\inf_{\mathcal{U}} |\omega| > \varepsilon$, где $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{D} : |\vartheta_1\vartheta_2(z)| \leqslant \varepsilon\}$. Положим также $\mathcal{U}_i = \{z \in \mathbb{D} : |\vartheta_i(z)| \leqslant \varepsilon\}$, $i = 1, 2$.

Следующие утверждения равносильны:

a) T ограничено;

b) существует такая функция $\psi \in H^\infty$, что $\psi - \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\frac{\Theta}{\omega} \in \vartheta_1 H^\infty(\mathcal{U}_1)$ и $\psi + \frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\frac{\Theta}{\omega} \in \vartheta_2 H^\infty(\mathcal{U}_2)$;

c) существуют такие функции $h_1, h_2 \in H^\infty(\mathcal{U})$, что

$$\frac{1}{c\sqrt{1-c^2}}\,\frac{\Theta}{\omega} - (\vartheta_1 h_1 + \vartheta_2 h_2) \in \vartheta_1\vartheta_2 H^\infty(\mathcal{U}).$$

Доказательство. Отметим, что $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}$ и $\frac{1}{\omega} \in H^\infty(\mathcal{U})$. Будет использоваться расширение функционального исчисления

$f \mapsto f(M_\vartheta)$ с алгебры H^∞ на алгебру $H^\infty(\mathcal{W})$, где ϑ – внутренняя функция, $\mathcal{W} = \{z \in \mathbb{D} : |\vartheta(z)| \leqslant \varepsilon\}$, $H^\infty(\mathcal{W})$ – алгебра всех аналитических ограниченных функций на $\mathcal{W}$ (см. [5, п. 43 и 45; 8, п. 4.23]). Именно, для любой функции $\varphi \in H^\infty(\mathcal{W})$ можно определить оператор $\varphi(M_\vartheta)$, действующий в K_ϑ, при этом найдется такая функция $f \in H^\infty$, что $f(M_\vartheta) = \varphi(M_\vartheta)$ и $f - \varphi \in \vartheta H^\infty(\mathcal{W})$, и отображение $\varphi \mapsto \varphi(M_\vartheta)$ мультипликативно.

a) $\Longrightarrow$ b). По замечанию 1 существует такая функция $\psi \in H^\infty$, что $\psi(M_{\vartheta_1\vartheta_2}) = T$. Действуя так же, как и в доказательстве части b) леммы 5, получаем, что $\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\,\Theta - \psi\omega \in \vartheta_1 H^\infty$ и $\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\,\Theta + \psi\omega \in \vartheta_2 H^\infty$. Но, по условию, $\frac{1}{\omega} \in H^\infty(\mathcal{U}_i)$, $i = 1, 2$, и, домножив обе части включений на $\frac{1}{\omega}$, получаем условие b) замечания 2.

b) $\Longrightarrow$ c). Положим $\psi_1 = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\,\frac{\Theta}{\omega}$, $\psi_2 = -\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\,\frac{\Theta}{\omega}$, тогда $\psi_1, \psi_2 \in H^\infty(\mathcal{U})$, $\psi - \psi_i \in \vartheta_i H^\infty(\mathcal{U}_i)$, $i = 1, 2$, и $\frac{1}{c\sqrt{1-c^2}}\,\frac{\Theta}{\omega} = \psi_1 - \psi_2$. Рассмотрим оператор $(\psi - \psi_1)(M_{\vartheta_1\vartheta_2})$, тогда существует функция $f \in H^\infty$, такая, что $f(M_{\vartheta_1\vartheta_2}) = (\psi - \psi_1)(M_{\vartheta_1\vartheta_2})$, и $\vartheta_2 K_{\vartheta_1} \subset \operatorname{Ker}(\psi - \psi_1)(M_{\vartheta_1\vartheta_2})$. Поэтому $\vartheta_2 K_{\vartheta_1} \subset \operatorname{Ker} f(M_{\vartheta_1\vartheta_2})$, откуда $f \in \vartheta_1 H^\infty$. Таким образом, $\psi - \psi_1 \in \vartheta_1 H^\infty(\mathcal{U})$. Аналогично и $\psi - \psi_2 \in \vartheta_2 H^\infty(\mathcal{U})$. Следовательно, существуют такие функции h_1, $h_2 \in H^\infty(\mathcal{U})$, что $\psi - \psi_1 = -\vartheta_1 h_1$ и $\psi - \psi_2 = \vartheta_2 h_2$, откуда $\psi_1 = \psi + \vartheta_1 h_1$, $\psi_2 = \psi - \vartheta_2 h_2$ и

$$\frac{1}{c\sqrt{1-c^2}}\,\frac{\Theta}{\omega} = \psi_1 - \psi_2 = \psi + \vartheta_1 h_1 - \psi + \vartheta_2 h_2 = \vartheta_1 h_1 + \vartheta_2 h_2,$$

то есть выполнено условие c).

c) $\Longrightarrow$ a). Положим $\varphi = \vartheta_2 c^2 h_2 + \vartheta_1(c^2 - 1)h_1$, тогда $\varphi \in H^\infty(\mathcal{U})$. Покажем, что $\varphi(M_{\vartheta_1\vartheta_2})\big|_{\mathcal{K}_1} = T_1$. Заметим, что для любой $f \in H^\infty$ и для любой $x \in K_{\vartheta_1}$ $f(M_{\vartheta_1\vartheta_2})\vartheta_2 x = \vartheta_2 f(M_{\vartheta_1})x$. С другой стороны, $\varphi - \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\,\frac{\Theta}{\omega} \in \vartheta_1 H^\infty(\mathcal{U}_1)$. Наконец,

$$\frac{1}{\omega}(M_{\vartheta_1})P_{\vartheta_1}\omega h = \frac{1}{\omega}(M_{\vartheta_1})P_{\vartheta_1}\omega P_{\vartheta_1} h = \frac{1}{\omega}(M_{\vartheta_1})\omega(M_{\vartheta_1})P_{\vartheta_1} h = P_{\vartheta_1} h$$

для любой $h \in H^2$. Поэтому для любой $h \in H^2$ имеем

$$\varphi(M_{\vartheta_1\vartheta_2})\vartheta_2 P_{\vartheta_1}\omega h = \vartheta_2\varphi(M_{\vartheta_1})P_{\vartheta_1}\omega h = \vartheta_2\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\,\frac{\Theta}{\omega}(M_{\vartheta_1})P_{\vartheta_1}\omega h =$$

$$= \vartheta_2\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\,\Theta(M_{\vartheta_1})P_{\vartheta_1} h = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\,\vartheta_2 P_{\vartheta_1}\Theta h = T_1\vartheta_2 P_{\vartheta_1}\omega h,$$

то есть $\varphi(M_{\vartheta_1\vartheta_2})\big|_{\mathcal{K}_1} = T_1$. Аналогично $\varphi(M_{\vartheta_1\vartheta_2})\big|_{\mathcal{K}_2} = T_2$.

Таким образом, $\varphi(M_{\vartheta_1\vartheta_2})\big|_{\mathcal{K}} = T$, поэтому T ограничен. $\square$

Все приведенные в работе примеры удовлетворяют условиям замечания 2.

Лемма 6. *Пусть* $\log\Delta \in L^1$, ω *– внешняя функция,* $|\omega| = \Delta$ *п.в. на* $\mathbb{T}$, ϑ *– внутренняя функция. Положим* $\mathcal{K} = P_\vartheta \omega H^2$, *тогда* $K_\vartheta = \operatorname{clos}\mathcal{K}$. *Рассмотрим линейное (не обязательно ограниченное) отображение* T, *заданное формулой*

$$T : \mathcal{K} \to K_\vartheta, \quad TP_\vartheta\omega h = P_\vartheta\Theta h, \quad h \in H^2.$$

Положим

$$c_0 = \frac{\|T\|}{\sqrt{1+\|T\|^2}}$$

(если T *не ограничен, то* $\|T\| = \infty$ *и* $c_0 = 1$*).*

a) *Если* $c \in (0,1)$ *и* Θ *имеет регулярную факторизацию вида* $\Theta = \Theta_2\left(\frac{c}{\sqrt{1-c^2}\vartheta}\right)$, *то* T *ограничен и* $c_0 \leqslant c$.

b) *Если* $c_0 < c \leqslant 1$, *то* Θ *имеет регулярную факторизацию вида* $\Theta = \Theta_2\left(\frac{c}{\sqrt{1-c^2}\vartheta}\right)$.

c) *Если* $0 < c < c_0$, *то* Θ *не имеет регулярной факторизации вида* $\Theta = \Theta_2\left(\frac{c}{\sqrt{1-c^2}\vartheta}\right)$.

Замечание 3. В условиях леммы 6 при $c = c_0$ требуются дополнительные предположения. Так, для постоянной функции Θ или для конечного произведения Бляшке ϑ при $c = c_0$ есть регулярная факторизация; пример 3 показывает, что при $c = c_0$ может не быть регулярной факторизации.

Доказательство. Лемма 6 является частным случаем леммы 5 ($\vartheta_1 = 1$, $\vartheta_2 = \vartheta$). Возьмем $c \in (0,1)$ и положим $T_c = -\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}T$. По лемме 5 Θ имеет регулярную факторизацию вида $\Theta = \Theta_2\left(\frac{c}{\sqrt{1-c^2}\vartheta}\right)$, если $\|T_c\| < 1$, и не имеет такой факторизации, если $\|T_c\| > 1$. Из равенства $\|T_c\| = \frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\|T\|$ получаем утверждение леммы 6. $\square$

§5. Регулярные факторизации и псевдоподобие

Напомним определение псевдоподобия [3].

Ограниченные линейные операторы T_1 и T_2, действующие в гильбертовых пространствах H_1 и, соответственно, H_2, называются псевдоподобными, если существуют сплетающие операторы X и Y, $X : H_1 \to H_2$, $Y : H_2 \to H_1$, $XT_1 = T_2X$, $T_1Y = YT_2$, такие, что слабо замкнутый идеал, порожденный оператором YX, совпадает со слабо замкнутой алгеброй, порожденной операторами T_1 и I_{H_1}, и слабо замкнутый идеал, порожденный оператором XY, совпадает со слабо замкнутой алгеброй, порожденной T_2 и I_{H_2}.

Псевдоподобие сохранает решетки инвариантных подпространств операторов T_1 и T_2 [3, лемма 1.3]: если $L_1 \in \operatorname{Lat} T_1$, то $\operatorname{clos} XL_1 \in \operatorname{Lat} T_2$, если $L_2 \in \operatorname{Lat} T_2$, то $\operatorname{clos} YL_2 \in \operatorname{Lat} T_1$.

Известно, что модельный оператор M_Θ со скалярной характеристической функцией Θ псевдоподобен оператору $M_\vartheta \oplus S_\Delta$, где ϑ – внутренняя часть функции Θ, S_Δ – оператор умножения на независимую переменную в пространстве $\operatorname{clos} \Delta L^2(\mathbb{T})$ [3, теор. 1.8]. Легко видеть, что инвариантное подпространство оператора M_Θ, задаваемое регулярной факторизацией $\Theta = \Theta_2\Theta_1$, $\Theta_1 = \vartheta_1\theta_\sigma$, $\Theta_2 = \vartheta_2\theta_{\mathbb{T}\setminus\sigma}$, переходит при псевдоподобии в пространство $\vartheta_2 K_{\vartheta_1} \oplus \chi_\sigma \operatorname{clos} \Delta L^2$, где ϑ_1, ϑ_2 – внутренние функции, $\vartheta = \vartheta_1\vartheta_2$, σ – измеримое подмножество окружности $\mathbb{T}$, θ_σ и $\theta_{\mathbb{T}\setminus\sigma}$ – внешние функции, $|\theta_\sigma| = |\Theta|$ п.в. на σ, $|\theta_\sigma| = 1$ п.в. на $\mathbb{T}\setminus\sigma$, $|\theta_{\mathbb{T}\setminus\sigma}| = |\Theta|$ п.в. на $\mathbb{T}\setminus\sigma$, $|\theta_{\mathbb{T}\setminus\sigma}| = 1$ п.в. на σ.

Пусть теперь $|\Theta| < 1$ п.в. на $\mathbb{T}$. Тогда оператор M_Θ псевдоподобен оператору $M_\vartheta \oplus S$, где ϑ – внутренняя часть функции Θ, S – оператор умножения на независимую переменную в пространстве $L^2 = L^2(\mathbb{T})$.

Возьмем какую-нибудь регулярную факторизацию функции Θ размера $(1 \times 2) \times (2 \times 1)$: $\Theta = \Theta_2\Theta_1$, $\Theta_1 \in H^\infty(\mathbb{C} \to \mathbb{C}^2)$, $\Theta_2 \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C})$, $\Theta_1^*\Theta_1 = 1$, $\Theta_2\Theta_2^* = 1$. Она описывает некоторое инвариантное подпространство оператора M_Θ. При псевдоподобии это подпространство перейдет в инвариантное подпространство оператора $M_\vartheta \oplus S$. Найдем это последнее подпространство.

Рассмотрим модель оператора M_Θ, которая в наиболее удобной форме представляет инвариантное подпространство L оператора M_Θ, соответствующее заданной факторизации $\Theta = \Theta_2\Theta_1$ [9]. Эта модель имеет вид

$$M_{1\Theta} : K_{1\Theta} \to K_{1\Theta},$$
$$K_{1\Theta} = L_2^2 \ominus (\Theta_2^* H_-^2 \oplus \Theta_1 H^2),$$
$$M_{1\Theta} f = P_{1\Theta} z f, \quad f \in K_{1\Theta},$$

$P_{1\Theta}$ – ортогональный проектор из L_2^2 на $K_{1\Theta}$,

$$L = H_2^2 \ominus \Theta_1 H^2.$$

Оператор V дает унитарную эквивалентность операторов $M_{1\Theta}$ и M_Θ:

$$V : K_{1\Theta} \to K_\Theta,$$
$$V = \begin{pmatrix} \Theta_2 \\ -\frac{\vartheta \varkappa}{\Delta} \Theta_2^{*T} J \end{pmatrix}$$

(определение $\varkappa$ и J см. в §3).
Оператор Z сплетает операторы M_Θ и $M_\vartheta \oplus S$:

$$Z : K_\Theta \to \begin{pmatrix} K_\vartheta \\ L^2 \end{pmatrix},$$
$$Z = \begin{pmatrix} P_\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Delta & -\theta \end{pmatrix},$$

где θ – внешняя часть функции Θ. Наконец, оператор ZV сплетает операторы $M_{1\Theta}$ и $M_\vartheta \oplus S$, и интересующее нас инвариантное подпространство оператора $M_\vartheta \oplus S$ равно $\operatorname{clos} ZVL$.

Сначала вычислим оператор ZV:

$$ZV = \begin{pmatrix} P_\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Delta & -\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_2 \\ -\frac{\vartheta \varkappa}{\Delta} \Theta_2^{*T} J \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} P_\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_2 \\ \Delta\Theta_2 + \frac{\Theta \varkappa}{\Delta} \Theta_2^{*T} J \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} P_\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\varkappa}{\Delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_2 \\ \overline{\varkappa}\Theta_2 + \Theta\Theta_2^{*T} J \end{pmatrix}$$

(использовали, что $|\varkappa| = \Delta$ п.в. на $\mathbb{T}$, поэтому $\frac{\Delta}{\varkappa} = \frac{\overline{\varkappa}}{\Delta}$). Далее,

$$\overline{\varkappa}\Theta_2 + \Theta\Theta_2^{*T} J = \Theta_1^T J \Theta_2^* \Theta_2 + \Theta_1^T \Theta_2^T \Theta_2^{*T} J =$$
$$= \Theta_1^T (J\Theta_2^*\Theta_2 - JJ(\Theta_2^*\Theta_2)^T J) = \Theta_1^T J(\Theta_2^*\Theta_2 - J(\Theta_2^*\Theta_2)^T J) = \Theta_1^T J$$

(см. свойство 3) матрицы J в §3).
Итак,

$$ZV = \begin{pmatrix} P_\vartheta & 0 \\ 0 & \frac{\varkappa}{\Delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_2 \\ \Theta_1^T J \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $ZV\Theta_1 H^2 = \{0\}$, поэтому $ZVL = ZV(H_2^2 \ominus \Theta_1 H^2) = ZVH_2^2$ и $\operatorname{clos} ZVL = \operatorname{clos} \left(\begin{smallmatrix} P_\vartheta & 0 \\ 0 & \frac{\varkappa}{\Delta} \end{smallmatrix}\right) \operatorname{clos} \left(\begin{smallmatrix} \Theta_2 \\ \Theta_1^T J \end{smallmatrix}\right) H_2^2$. Положим

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Theta_2 \\ \Theta_1^T J \end{pmatrix},$$

тогда $\Phi \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2)$ и $\det \Phi = \Theta$. Применим утверждение 5, пусть Ω – внутренняя часть функции Φ. Тогда $\operatorname{clos} \Phi H_2^2 = \Omega H_2^2$, $\det \Omega = \vartheta$ и $\operatorname{clos} \left(\begin{smallmatrix} P_\vartheta & 0 \\ 0 & \frac{\varkappa}{\Delta} \end{smallmatrix}\right) \operatorname{clos} \Phi H_2^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\varkappa}{\Delta} \end{smallmatrix}\right) \Omega H_2^2 \ominus \left(\begin{smallmatrix} \vartheta H^2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Сформулируем полученный результат.

Теорема 3. *Пусть $\Theta \in H^\infty$, $|\Theta| < 1$ п.в. на $\mathbb{T}$, $\Theta \not\equiv 0$, $\Theta = \vartheta\theta$, ϑ – внутренняя функция, θ – внешняя функция. Пусть $\Theta = \Theta_2\Theta_1$ – регулярная факторизация функции Θ, $\Theta_1 \in H^\infty(\mathbb{C} \to \mathbb{C}^2)$, $\Theta_2 \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C})$, Ω – внутренняя часть матрицы-функции $\left(\begin{smallmatrix} \Theta_2 \\ \Theta_1^T J \end{smallmatrix}\right)$, $\Omega \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2)$, $\det \Omega = \vartheta$, и $\varkappa = \Theta_1^* J \Theta_2^T$.*

Инвариантное подпространство оператора M_Θ, соответствующее факторизации $\Theta = \Theta_2\Theta_1$, переходит при псевдоподобии оператора M_Θ оператору $M_\vartheta \oplus S$ в пространство $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\varkappa}{\Delta} \end{smallmatrix}\right) \Omega H_2^2 \ominus \left(\begin{smallmatrix} \vartheta H^2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Обозначим через ϑ_1 и ϑ_2 наибольшие общие делители внутренних частей элементов матриц-функций Θ_1 и Θ_2, соответственно, и положим $\widetilde{\Theta}_1 = \overline{\vartheta}_1\Theta_1$, $\widetilde{\Theta}_2 = \overline{\vartheta}_2\Theta_2$. Пусть Ω_1 – внутренняя часть матрицы-функции $\left(\begin{smallmatrix} \widetilde{\Theta}_2 \\ \widetilde{\Theta}_1^T J \end{smallmatrix}\right)$ и $\varkappa_1 = \widetilde{\Theta}_1^* J \widetilde{\Theta}_2^T$.*

Тогда $\det \Omega_1 = \overline{\vartheta}_1\overline{\vartheta}_2\vartheta$, внутренние части элементов строк матрицы Ω_1 взаимно просты, $\Omega = \left(\begin{smallmatrix} \vartheta_2 & 0 \\ 0 & \vartheta_1 \end{smallmatrix}\right) \Omega_1$, $\varkappa = \overline{\vartheta}_1\vartheta_2\varkappa_1$, и соответствующее регулярной факторизации $\Theta = \Theta_2\Theta_1$ инвариантное подпространство оператора $M_\vartheta \oplus S$ равно

$$\vartheta_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\varkappa_1}{\Delta} \end{pmatrix} \Omega_1 H_2^2 \ominus \begin{pmatrix} \vartheta H^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следствие 2. *В условиях теоремы 3 следующие утверждения равносильны:*

a) *инвариантное подпространство оператора M_Θ, задаваемое факторизацией $\Theta = \Theta_2\Theta_1$, переходит при псевдоподобии в распадающееся инвариантное подпространство оператора $M_\vartheta \oplus S$;*

b) $\Theta_2 = \vartheta_2\Psi_2$, $\Theta_1 = \vartheta_1\Psi_1$, *где* ϑ_1, ϑ_2 *– скалярные внутренние функции,* $\vartheta = \vartheta_2\vartheta_1$, $\Psi_1 \in H^\infty(\mathbb{C} \to \mathbb{C}^2)$, $\Psi_2 \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C})$, $\theta = \Psi_2\Psi_1$.

Доказательство. Следствие 1 очевидно. Докажем следствие 2. Легко видеть, что утверждение a) имеет место тогда и только тогда, когда Ω является диагональной матрицей-функцией. Применим следствие 1 и представим Ω в виде $\Omega = \begin{pmatrix} \vartheta_2 & 0 \\ 0 & \vartheta_1 \end{pmatrix} \Omega_1$. Получим, что утверждение a) равносильно выполнению равенства $\vartheta = \vartheta_2\vartheta_1$, где ϑ_2 и ϑ_1 – наибольшие общие делители внутренних частей элементов матриц-функций Θ_2 и Θ_1. Следствие 2 доказано. $\square$

Следующие теоремы являются объединением теоремы 3 и утверждений из §3.

Теорема 4. *Пусть* $\Theta \in H^\infty$, $|\Theta| < 1$ *п.в. на* $\mathbb{T}$, $\Theta \not\equiv 0$, $\Theta = \vartheta\theta$, *где* ϑ *– внутренняя функция,* θ *– внешняя функция. Пусть* $\Theta = \Theta_2\Theta_1$ *– регулярная факторизация функции* Θ, $\Theta_1 \in H^\infty(\mathbb{C} \to \mathbb{C}^2)$, $\Theta_2 \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C})$. *Рассмотрим также регулярную факторизацию* $\Theta = \Theta_1^T\Theta_2^T$. *Пусть* Ω *– внутренняя часть матрицы-функции* $\begin{pmatrix} \Theta_2 \\ \Theta_1^T J \end{pmatrix}$ *и* $\varkappa = \Theta_1^* J \Theta_2^T$.

Инвариантные подпространства оператора M_Θ, *соответствующие факторизациям* $\Theta = \Theta_2\Theta_1$ *и* $\Theta = \Theta_1^T\Theta_2^T$, *переходят при псевдоподобии операторов* M_Θ *и* $M_\vartheta \oplus S$ *в пространства*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\varkappa}{\Delta} \end{pmatrix} \Omega H^2_2 \ominus \begin{pmatrix} \vartheta H^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\overline{\varkappa}}{\Delta} \end{pmatrix} J\Omega H^2_2 \ominus \begin{pmatrix} \vartheta H^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

соответственно.

Теорема 5. *Пусть* $\Theta \in H^\infty$, $|\Theta| < 1$ *п.в. на* $\mathbb{T}$, $\Theta \not\equiv 0$, $\Theta = \vartheta\theta$, *где* ϑ *– внутренняя функция,* θ *– внешняя функция. Пусть* $\Theta = \Theta_2\Theta_1$ *– регулярная факторизация функции* Θ, $\Theta_1 \in H^\infty(\mathbb{C} \to \mathbb{C}^2)$, $\Theta_2 \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C})$, *и* L *– инвариантное подпространство оператора* M_Θ, *задаваемое этой факторизацией. Пусть* Ω *– внутренняя часть матрицы-функции* $\begin{pmatrix} \Theta_2 \\ \Theta_1^T J \end{pmatrix}$, $\Omega \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2)$, *и* $\varkappa = \Theta_1^* J \Theta_2^T$.

a) *Пусть* $A \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2)$, A – *внутренняя,* $\det A = \alpha$ *и* $\Theta_2 A^* \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C})$. *Обозначим через* L_A *инвариантное подпространство оператора* M_Θ, *задаваемое регулярной факторизацией* $\Theta = (\Theta_2 A^*)(A\Theta_1)$. *Пусть* Ω_1 – *внутренняя часть матрицы-функции* $\begin{pmatrix} \Theta_2 A^* \\ (A\Theta_1)^T J \end{pmatrix}$. *Тогда* $L_A \supset L$, *существует такая внутренняя функция* $A_1 \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2)$, *что* $\Omega_1 A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \Omega$, *и пространства* L *и* L_A *переходят при псевдоподобии операторов* M_Θ *и* $M_\vartheta \oplus S$ *в пространства*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\varkappa}{\Delta} \end{pmatrix} \Omega H^2_2 \ominus \begin{pmatrix} \vartheta H^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\overline{\alpha}\varkappa}{\Delta} \end{pmatrix} \Omega_1 H^2_2 \ominus \begin{pmatrix} \vartheta H^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

соответственно.

b) *Пусть* $\mathcal{L}$ – *инвариантное подпространство оператора* M_Θ, $\mathcal{L} \supset L$. *Тогда найдется такая матрица-функция* $A \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2)$, *для которой* $\mathcal{L} = L_A$.

Для доказательства теоремы 5 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 7. *Пусть* $\vartheta \in H^\infty$, ϑ – *внутренняя,* $\delta, \delta_1 \in L^\infty$, $|\delta| = |\delta_1| = 1$ *п.в. на* $\mathbb{T}$, $\Omega, \Omega_1 \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2)$, Ω, Ω_1 – *внутренние,* $\det \Omega = \det \Omega_1 = \vartheta$. *Положим*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \Omega H^2_2 \ominus \begin{pmatrix} \vartheta H^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{pmatrix} \Omega_1 H^2_2 \ominus \begin{pmatrix} \vartheta H^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следующие утверждения равносильны:

a) $E_1 \supset E$;

b) *существуют такие внутренние функции* $\alpha \in H^\infty$ *и* $A_1 \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2)$, *что* $\delta_1 = \overline{\alpha}\delta$ *и* $\Omega_1 A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \Omega$.

Доказательство. Ясно, что a) равносильно включению $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{pmatrix} \Omega_1 H^2_2 \supset \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \Omega H^2_2$, которое равносильно включению $H^2_2 \supset \Omega_1^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overline{\delta}_1 \delta \end{pmatrix} \Omega H^2_2$. Это последнее включение имеет место тогда и только тогда, когда матрица-функция $A_1 = \Omega_1^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overline{\delta}_1 \delta \end{pmatrix} \Omega$ является аналитической, и, следовательно, внутренней. Положим $\alpha = \det A_1$, тогда $\Omega_1 A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overline{\delta}_1 \delta \end{pmatrix} \Omega$, откуда $\vartheta\alpha = \overline{\delta}_1 \delta \vartheta$ и $\delta_1 = \overline{\alpha}\delta$. $\square$

Доказательство теоремы 5. a) Положим $\Phi = \begin{pmatrix} \Theta_2 \\ \Theta_1^T J \end{pmatrix}$, $\Phi_1 = \begin{pmatrix} \Theta_2 A^* \\ (A\Theta_1)^T J \end{pmatrix}$, тогда $\Phi = \Omega G$ и $\Phi_1 = \Omega_1 G_1$, где G и G_1 – внешние функции из $H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2)$. Применяя свойство 3) матрицы J (см. §3), получаем, что $\Phi_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \Phi$, то есть $\Omega_1 G_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \Omega G$. Пусть A_1 – внутренняя часть матрицы-функции $G_1 A$, тогда $\Omega_1 A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \Omega$. Оставшаяся часть утверждения a) вытекает из теорем 1, 3 и леммы 7.

b) По теореме 3 пространства $\mathcal{L}$ и L переходят при псевдоподобии операторов M_Θ и $M_\vartheta \oplus S$ в пространства $\mathcal{E}$ и E, инвариантные относительно $M_\vartheta \oplus S$, причем $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\varkappa}{\Delta} \end{pmatrix} \Omega H^2_2 \ominus \begin{pmatrix} \vartheta H^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\mathcal{E} \supset E$. Записывая пространство $\mathcal{E}$ в виде $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\varkappa_1}{\Delta} \end{pmatrix} \Omega_1 H^2_2 \ominus \begin{pmatrix} \vartheta H^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ и применяя лемму 7, получаем, что существуют такие внутренние функции $\alpha \in H^\infty$ и $A_1 \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2)$, что $\Omega_1 A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \Omega$. Пусть G – внешняя часть матрицы-функции $\begin{pmatrix} \Theta_2 \\ \Theta_1^T J \end{pmatrix}$, и пусть $(A_1 G)^T = A_T G_1$, где $A_T, G_1 \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2)$, A_T – внутренняя, G_1 – внешняя. Положим $A = (A_T)^T$, тогда A – внутренняя и $\Omega_1 G_1^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_2 \\ \Theta_1^T J \end{pmatrix}$, поэтому матрица-функция $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_2 \\ \Theta_1^T J \end{pmatrix} A^*$ является аналитической. Но, по свойству 3) матрицы J (см. §3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_2 \\ \Theta_1^T J \end{pmatrix} A^* = \begin{pmatrix} \Theta_2 A^* \\ \Theta_1^T J(\det A) A^* \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \Theta_2 A^* \\ -\Theta_1^T J(JA^T JA)A^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_2 A^* \\ (A\Theta_1)^T J \end{pmatrix}.$$

Мы получили, что матрица-функция $\Theta_2 A^*$ является аналитической и Ω_1 является внутренней частью матрицы-функции $\begin{pmatrix} \Theta_2 A^* \\ (A\Theta_1)^T J \end{pmatrix}$. Поэтому факторизация $\Theta = (\Theta_2 A^*) \cdot (A\Theta_1)$ является регулярной, соответствующее ей инвариантное подпространство L_A оператора M_Θ переходит при псевдоподобии в пространство $\mathcal{E}$, следовательно, $L_A = \mathcal{L}$. $\square$

Следствие. *Пусть $\Theta \in H^\infty$, $|\Theta| < 1$ п.в. на $\mathbb{T}$, $\Theta \not\equiv 0$, $\Theta = \Theta_2\Theta_1$ – регулярная факторизация функции Θ размера $(1 \times 2) \times (2 \times 1)$, L – инвариантное подпространство оператора M_Θ, задаваемое этой* *факторизацией. Инвариантные подпространства* $\mathcal{L}$ *оператора* M_Θ, *для которых* $\mathcal{L} \subset L$, *– это те и только те подпространства, которые задаются факторизациями вида* $\Theta = (\Theta_2 A) \cdot (A^* \Theta_1)$, *где* $A \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2)$, A *– внутренняя,* $A^*\Theta_1$ *– аналитическая.*

Доказательство. Пусть L и $\mathcal{L}$ – инвариантные подпространства оператора M_Θ, задаваемые факторизациями $\Theta = \Theta_2\Theta_1$ и $\Theta = \Theta_4\Theta_3$, соответственно, и пусть L_T и $\mathcal{L}_T$ – подпространства, задаваемые факторизациями $\Theta = \Theta_1^T\Theta_2^T$ и $\Theta = \Theta_3^T\Theta_4^T$. Применяя теорему 4 и лемму 7, легко видеть, что $\mathcal{L} \subset L$, если и только если $L_T \subset \mathcal{L}_T$. По теореме 5 все подпространства $\mathcal{L}_T$, для которых $L_T \subset \mathcal{L}_T$, задаются факторизациями вида $\Theta = (\Theta_1^T A^*)(A\Theta_2^T)$, где A – внутренняя функция из $H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2)$ такая, что $\Theta_1^T A^*$ аналитична. Поэтому все подпространства $\mathcal{L}$, для которых $\mathcal{L} \subset L$, задаются факторизациями вида $\Theta = (A\Theta_2^T)^T(\Theta_1^T A^*)^T = (\Theta_2 A^T) \cdot (A^{T*}\Theta_1)$. Следствие доказано. □

Теорема 6. *Пусть* $\Theta \in H^\infty$, $|\Theta| < 1$ *п.в. на* $\mathbb{T}$, $\Theta \not\equiv 0$, $\Theta = \vartheta\theta$, ϑ *– внутренняя,* θ *– внешняя функция. Пусть* $\Theta = \Theta_2\Theta_1$ *– регулярная факторизация функции* Θ, *причем* $\Theta_1 = \vartheta_1 \Xi \Psi_1$, $\Theta_2 = -\vartheta_2\Psi_2 J \Xi^T J$, *где* ϑ_1 *и* ϑ_2 *– наибольшие общие делители внутренних частей элементов матриц-функций* Θ_1 *и* Θ_2, *соответственно,* $\Xi \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2)$, Ξ *– внутренняя,* $\vartheta_1\vartheta_2 \det \Xi = \vartheta$, $\Psi_1 \in H^\infty(\mathbb{C} \to \mathbb{C}^2)$, $\Psi_2 \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C})$ *и* $\theta = \Psi_2\Psi_1$ *– регулярная факторизация.*

Инвариантное подпространство оператора M_Θ, *задаваемое факторизацией* $\Theta = \Theta_2\Theta_1$, *переходит при псевдоподобии операторов* M_Θ *и* $M_\vartheta \oplus S$ *в пространство*

$$\vartheta_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\varkappa_1}{\Delta} \end{pmatrix} \Omega_1 H_2^2 \ominus \begin{pmatrix} \vartheta H^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где Ω_1 *– внутренняя часть матрицы-функции* $\begin{pmatrix} \Psi_2 \\ \Psi_1^T J \end{pmatrix} J\Xi^T$, $\varkappa_1 = \Psi_1^* J \Psi_2^T$. *При этом* $\det\Omega_1 = \det\Xi$ *и внутренние части элементов строк матрицы-функции* Ω_1 *взаимно-просты.*

Теорема 6 является непосредственным следствием теоремы 3.

§6. Об одном виде факторизаций внешней функции

В §3 было показано, что по каждой регулярной факторизации $\Theta = \Theta_2\Theta_1$ размера $(1 \times 2) \times (2 \times 1)$ и скалярной внутренней функции α можно построить регулярную факторизацию вида

$\Theta = (\Theta_2 A^*) \cdot (A\Theta_1)$, где A – такая внутренняя матрица-функция из $H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2)$, что $\det A = \alpha$. Однако матрица A была построена не явным образом, а как предел последовательности матриц-функций. Здесь будет предпринята попытка построить матрицу-функцию A другим способом в частном случае. Это построение будет следовать [7], где по внешней функции θ и по инвариантному подпространству E оператора S построена регулярная факторизация функции θ, задающая то инвариантное подпространство L оператора M_θ, в которое переходит E при псевдоподобии операторов M_θ и S. В [7] по пространству E строится пространство L, а затем вычисляется характеристическая функция оператора $M_\theta\big|_L$. Как известно (см. [5, п. 19; 8, п. 6.16]), эта функция и будет функцией Θ_1 в соответствующей регулярной факторизации. К сожалению, в общем случае это построение имеет сложный вид. Здесь это построение будет проделано для внешней функции θ, у которой $\log\Delta \in L^1$, и для пространства $E = \frac{\overline{\alpha}\varphi}{\Delta} H^2$, где $\alpha, \varphi \in H^\infty$, $|\varphi| = \Delta$ п.в. на $\mathbb{T}$, α – внутренняя. Полученная функция Θ_1 и будет первым столбцом внутренней матрицы-функции A с $\det A = \alpha$ (а, как известно, такая матрица-функция полностью определяется своим первым столбцом и определителем).

Перейдем к подробному изложению.

Лемма 8. *Пусть* $\theta \in H^\infty$, θ *– внешняя,* $|\theta| < 1$ *п.в. на* $\mathbb{T}$, $\theta \not\equiv 0$, $\Delta = \sqrt{1 - |\theta|^2}$ *п.в. на* $\mathbb{T}$, $\log\Delta \in L^1$. *Пусть* $\alpha, \varphi \in H^\infty$, $|\varphi| = \Delta$ *п.в. на* $\mathbb{T}$, α *– внутренняя. Пусть* $A \in H^\infty(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2)$, A *– внутренняя,* $\det A = \alpha$ *и* $(\theta, \varphi)A^*$ *– аналитическая.*

Пространство $\frac{\overline{\alpha}\varphi}{\Delta} H^2$, *инвариантное для оператора* S, *переходит при псевдоподобии операторов* M_θ *и* S *в пространство, задаваемое регулярной факторизацией* $\theta = ((\theta, \varphi)A^*) \cdot (A \binom{1}{0})$.

Доказательство. Так как при псевдоподобии операторов существует взаимно-однозначное соответствие между их инвариантными подпространствами, достаточно доказать обратное утверждение: инвариантное подпространство оператора M_θ, задаваемое факторизацией $\theta = ((\theta, \varphi)A^*) \cdot (A \binom{1}{0})$, переходит при псевдоподобии в пространство $\frac{\overline{\alpha}\varphi}{\Delta} H^2$. Но это утверждение уже доказано в §5 (теорема 5). $\square$

Из леммы 8 видно, что если взять инвариантное подпространство $\frac{\overline{\alpha}\varphi}{\Delta} H^2$ оператора S и построить пространство L, в которое переходит $\frac{\overline{\alpha}\varphi}{\Delta}H^2$ при псевдоподобии операторов M_θ и S, то характеристической функцией оператора $M_\theta\big|_L$ будет оператор-функция $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, то есть первый столбец матрицы A.

Итак, пусть даны функции θ, φ, $\alpha\in H^\infty$, θ – внешняя, $|\theta|<1$ п.в. на $\mathbb{T}$, $\Delta=\sqrt{1-|\theta|^2}$ п.в. на $\mathbb{T}$, $\log\Delta\in L^1$, $|\varphi|=\Delta$ п.в. на $\mathbb{T}$, α – внутренняя, α и внутренняя часть функции φ взаимно просты. Для удобства предположим также, что $\alpha(0)\neq 0$. Обозначим через L инвариантное подпространство оператора M_θ, в которое переходит пространство $\frac{\overline{\alpha}\varphi}{\Delta}H^2$ при псевдоподобии операторов S и M_θ. Вычислим характеристическую функцию оператора $M_\theta\big|_L$. Это и будет первый столбец искомой матрицы A. В окончательной формуле он обозначен Θ_T.

1. Модель оператора M_θ, построенная по регулярной факторизации $\theta=(\theta,\varphi)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

Ясно, что $\frac{\overline{\alpha}\varphi}{\Delta}H^2\supset\frac{\varphi}{\Delta}H^2$, поэтому L содержит инвариантное подпространство L_0 оператора M_θ, соответствующее при псевдоподобии пространству $\frac{\varphi}{\Delta}H^2$. Пространство L_0 задается факторизацией $\theta=(\theta,\varphi)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ (применим лемму 8 с $\alpha\equiv 1$).

Положим

$$M_{1\theta}:K_{1\theta}\to K_{1\theta},\quad K_{1\theta}=\begin{pmatrix}H^2_-\\L^2\end{pmatrix}\ominus\begin{pmatrix}\overline{\theta}\\\overline{\varphi}\end{pmatrix}H^2_-$$

$$K_{1\theta}f=P_{1\theta}zf,\quad f\in K_{1\theta}$$

$$U:K_\theta\to K_{1\theta},\quad U=\begin{pmatrix}\overline{\theta}&\Delta\\\overline{\varphi}&-\frac{\overline{\varphi}\theta}{\Delta}\end{pmatrix},$$

тогда $UL_0=\begin{pmatrix}0\\H^2\end{pmatrix}$ (см. §5).

Положим $L_1=UL$. Операторы $M_{1\theta}\big|_{L_1}$ и $M_\theta\big|_L$ унитарно эквивалентны.

2. Вычисление пространства L_1. Оператор Y – один из операторов, осуществляющих псевдоподобие M_θ и S:

$$Y:L^2\to K_\theta,\quad Y=\begin{pmatrix}-\theta P_+\Delta\\1-\Delta P_+\Delta\end{pmatrix}.$$

Оператор UY сплетает операторы $M_{1\theta}$ и S, и $L_1=UL=$

$\operatorname{clos} UY\frac{\overline{\alpha}\varphi}{\Delta}H^2$. Ясно, что

$$UY\frac{\overline{\alpha}\varphi}{\Delta} = \begin{pmatrix} P_-\overline{\alpha}\varphi \\ -\overline{\alpha}\theta \end{pmatrix}, \quad \operatorname{clos}\begin{pmatrix} P_-\overline{\alpha}\varphi \\ -\overline{\alpha}\theta \end{pmatrix}\alpha H^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ H^2 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$L_1 = \operatorname{clos}\begin{pmatrix} P_-\overline{\alpha}\varphi \\ -\overline{\alpha}\theta \end{pmatrix}H^2 = \operatorname{clos}\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} P_-\overline{\alpha}\varphi \\ -\overline{\alpha}\theta \end{pmatrix}K_\alpha, \begin{pmatrix} 0 \\ H^2 \end{pmatrix}\right).$$

Далее,

$$L_1 \ominus \begin{pmatrix} 0 \\ H^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_- \end{pmatrix} L_1 = \operatorname{clos}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_-\overline{\alpha}\varphi \\ -\overline{\alpha}\theta \end{pmatrix}K_\alpha =$$

$$= \operatorname{clos}\begin{pmatrix} P_-\overline{\alpha}\varphi \\ -P_-\overline{\alpha}\theta \end{pmatrix}K_\alpha$$

и

$$L_1 = \operatorname{clos}\begin{pmatrix} P_-\overline{\alpha}\varphi \\ -P_-\overline{\alpha}\theta \end{pmatrix}K_\alpha \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ H^2 \end{pmatrix}.$$

3. Оператор T. Положим

$$K = \operatorname{clos}\begin{pmatrix} P_\alpha\theta \\ P_\alpha\varphi \end{pmatrix}K_\alpha,$$

P – ортогональный проектор из L^2_2 на K,

$$F_1 = P\begin{pmatrix} \alpha\overline{z} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = P\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha\overline{z} \end{pmatrix},$$

$$Q : K \to K, \quad Qf = zf - \alpha\begin{pmatrix} (f, F_1) \\ (f, F_2) \end{pmatrix}, \quad f \in K,$$

$$R : K \to H^2, \quad Rf = (f, F_1), \quad f \in K,$$

$$T : \begin{pmatrix} H^2 \\ K \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} H^2 \\ K \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} z & R \\ 0 & Q \end{pmatrix}.$$

4. Операторы $M_{1\theta}\big|_{L_1}$ и T унитарно эквивалентны. Положим

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} P_-\overline{\alpha}\varphi \\ -P_-\overline{\alpha}\theta \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{U} : L_1 \to H^2 \oplus K$$

$$\mathcal{U}\big|_{\begin{pmatrix} 0 \\ H^2 \end{pmatrix}} = (0,-1), \quad \mathcal{U}\big|_{\operatorname{clos}\mathcal{X}K_\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

P_{H^2} и P_K – ортогональные проекторы из $H^2 \oplus K$ на H^2 и K, соответственно.

Покажем, что $\mathcal{U}$ осуществляет унитарную эквивалентность операторов $M_{1\theta}\big|_{L_1}$ и T.

Ясно, что

$$\mathcal{U}\begin{pmatrix} 0 \\ H^2 \end{pmatrix} = H^2 \quad \text{и} \quad \mathcal{U}\operatorname{clos}\mathcal{X}K_\alpha = K.$$

Далее,

$$I_{K_{1\theta}} = \begin{pmatrix} P_- & 0 \\ 0 & P_- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_+ \end{pmatrix},$$

$$P_{1\theta} = I_{K_{1\theta}} P_{1\theta} = \left(\begin{pmatrix} P_- & 0 \\ 0 & P_- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_+ \end{pmatrix}\right) \times$$

$$\times \left(\begin{pmatrix} P_- & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \overline{\theta} \\ \overline{\varphi} \end{pmatrix} P_-(\theta,\varphi)\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} P_- & 0 \\ 0 & P_- \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \overline{\theta} \\ \overline{\varphi} \end{pmatrix} P_-(\theta,\varphi) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_+ \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$M_{1\theta}\big|_{\begin{pmatrix} 0 \\ H^2 \end{pmatrix}} = z\big|_{\begin{pmatrix} 0 \\ H^2 \end{pmatrix}},$$

$$M_{1\theta}\mathcal{X} = P_{1\theta} z\mathcal{X} = \begin{pmatrix} P_- z\overline{\alpha}\varphi \\ -P_- z\overline{\alpha}\theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \overline{\theta} \\ \overline{\varphi} \end{pmatrix} P_-\overline{\alpha} z(\theta,\varphi)\begin{pmatrix} \varphi \\ -\theta \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ -P_+ z P_-\overline{\alpha}\theta \end{pmatrix} = \mathcal{X}z + \begin{pmatrix} 0 \\ -P_+ z P_-\overline{\alpha}\theta \end{pmatrix},$$

и

$$M_{1\theta}\mathcal{X}\big|_{K_\alpha} = \mathcal{X}M_\alpha\big|_{K_\alpha} + \begin{pmatrix} 0 \\ -P_+ z P_-\overline{\alpha}\theta \end{pmatrix}\big|_{K_\alpha}.$$

Далее,

$$\mathcal{U}M_{1\theta}\big|_{\begin{pmatrix} 0 \\ H^2 \end{pmatrix}} = (0,-1)z\big|_{\begin{pmatrix} 0 \\ H^2 \end{pmatrix}} = -(0,z)\big|_{\begin{pmatrix} 0 \\ H^2 \end{pmatrix}},$$

$$T\mathcal{U}\big|_{\begin{pmatrix}0\\H^2\end{pmatrix}} = z(0,-1)\big|_{\begin{pmatrix}0\\H^2\end{pmatrix}} = -(0,z)\big|_{\begin{pmatrix}0\\H^2\end{pmatrix}},$$

$$P_{H^2}\mathcal{U}M_{1\theta}\mathcal{X}\big|_{K_\alpha} = (0,-1)\begin{pmatrix}0\\-P_+zP_-\overline{\alpha}\theta\end{pmatrix}\bigg|_{K_\alpha} = P_+zP_-\overline{\alpha}\theta\big|_{K_\alpha},$$

$$P_{H^2}T\mathcal{U}\mathcal{X}\big|_{K_\alpha} = R\mathcal{U}\mathcal{X}\big|_{K_\alpha} = R\begin{pmatrix}P_\alpha\theta\\P_\alpha\varphi\end{pmatrix}\bigg|_{K_\alpha} \text{ и } \forall x\in K_\alpha$$

$$R\begin{pmatrix}P_\alpha\theta\\P_\alpha\varphi\end{pmatrix}x = \left(\begin{pmatrix}P_\alpha\theta\\P_\alpha\varphi\end{pmatrix}x, P\begin{pmatrix}\alpha\overline{z}\\0\end{pmatrix}\right) = (P_\alpha\theta x, \alpha\overline{z}) = P_+zP_-\overline{\alpha}\theta x,$$

поэтому

$$P_{H^2}\mathcal{U}M_{1\theta}\mathcal{X}\big|_{K_\alpha} = P_{H^2}T\mathcal{U}\mathcal{X}\big|_{K_\alpha}.$$

Наконец,

$$P_K\mathcal{U}M_{1\theta}\mathcal{X}\big|_{K_\alpha} = \mathcal{U}\mathcal{X}M_\alpha\big|_{K_\alpha} = \begin{pmatrix}P_\alpha\theta\\P_\alpha\varphi\end{pmatrix}M_\alpha\big|_{K_\alpha},$$

$$P_KT\mathcal{U}\mathcal{X}\big|_{K_\alpha} = Q\mathcal{U}\mathcal{X}\big|_{K_\alpha} = Q\begin{pmatrix}P_\alpha\theta\\P_\alpha\varphi\end{pmatrix}\bigg|_{K_\alpha} \text{ и } \forall x\in K_\alpha$$

$$Q\begin{pmatrix}P_\alpha\theta\\P_\alpha\varphi\end{pmatrix}x = \begin{pmatrix}zP_\alpha\theta x\\zP_\alpha\varphi x\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\alpha(P_\alpha\theta x,\alpha\overline{z})\\\alpha(P_\alpha\varphi x,\alpha\overline{z})\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}zP_\alpha\theta x - \alpha P_+zP_-\overline{\alpha}\theta x\\zP_\alpha\varphi x - \alpha P_+zP_-\overline{\alpha}\varphi x\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\alpha P_-zP_-\overline{\alpha}\theta x\\\alpha P_-zP_-\overline{\alpha}\varphi x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}P_\alpha z\theta x\\P_\alpha z\varphi x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}P_\alpha\theta\\P_\alpha\varphi\end{pmatrix}P_\alpha zx = \begin{pmatrix}P_\alpha\theta\\P_\alpha\varphi\end{pmatrix}M_\alpha x, \tag{8}$$

поэтому

$$P_K\mathcal{U}M_{1\theta}\mathcal{X}\big|_{K_\alpha} = P_K\,T\mathcal{U}\mathcal{X}\big|_{K_\alpha}.$$

Итак, операторы $M_\theta\big|_L$, $M_{1\theta}\big|_{L_1}$ и T унитарно эквивалентны, поэтому искомая функция является характеристической функцией оператора T.

5. Вычисление характеристической функции оператора T. Характеристическая функция Θ_T сжимающего оператора T, действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, вычисляется по формуле

$$\Theta_T(\zeta) = -T + \zeta D_{T^*}(I - \zeta T^*)^{-1} D_T, \quad \zeta \in \mathbb{D},$$

$$\Theta_T(\zeta) : \mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_{T^*},$$

где $D_T = (I - T^*T)^{\frac{1}{2}}$, $D_{T^*} = (I - TT^*)^{\frac{1}{2}}$ – дефектные операторы, $\mathcal{D}_T = \operatorname{clos} D_T\mathcal{H}$, $\mathcal{D}_{T^*} = \operatorname{clos} D_{T^*}\mathcal{H}$ – дефектные подпространства оператора T (см. [5, п. 14; 6, гл. VI, §1; 8, п. 1.13]). Вычисления будут проводиться в несколько этапов.

5.1. Формулы для операторов Q, R, T.

$$R^* : H^2 \to K, \quad R^*\big|_{zH^2} = 0, \quad R^*1 = F_1,$$

$$R^*Rf = (f, F_1)F_1, \quad f \in K, \quad RR^*1 = \|F_1\|^2,$$

$$Q^*Qf = f - (f, F_1)F_1 - (f, F_2)F_2, \quad f \in K,$$

$$QR^* : H^2 \to K, \quad QR^*1 = QF_1,$$

$$RQ^* : K \to H^2, \quad RQ^*f = (f, QF_1), \quad f \in K.$$

5.2. Оператор D_T и пространство $\mathcal{D}_T$.

$$I - T^*T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\cdot, F_2)F_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}_T = \mathbb{C}F_2,$$

$$D_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\|F_2\|}(\cdot, F_2)F_2 \end{pmatrix}.$$

5.3. Пространство $\mathcal{D}_{T^*}$. Запишем оператор $I - TT^*$ в виде матрицы, действующей в $H^2 \oplus K = zH^2 \oplus \mathbb{C} \oplus K$:

$$I - TT^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \|F_1\|^2 & -RQ^* \\ 0 & -QR^* & I - QQ^* \end{pmatrix}.$$

Положим

$$f_1 = (1 - \|F_1\|^2) \oplus (-QF_1), \quad f_2 = (F_2, F_1) \oplus QF_2,$$

$$f_1, f_2 \in \mathbb{C} \oplus K \subset H^2 \oplus K.$$

Легко видеть, что $(I-TT^*)1=f_1$, $(I-TT^*)Qf=-(f,F_1)f_1+(f,F_2)f_2$ $\forall f\in K$, поэтому

$$(I-TT^*)(\mathbb{C}\oplus\operatorname{clos}QK)\subset\mathcal{L}(f_1,f_2).$$

Из условия $\alpha(0)\neq 0$ следует, что $\operatorname{clos}M_\alpha=K_\alpha$. Используя это равенство и формулу (8) из п. 4, показывающую, что оператор $\begin{pmatrix}P_\alpha\theta\\P_\alpha\varphi\end{pmatrix}$ сплетает операторы Q и M_α, получаем, что $\operatorname{clos}QK=K$. Таким образом,

$$(I-TT^*)(\mathbb{C}\oplus K)\subset\mathcal{L}(f_1,f_2),$$

и, учитывая, что $(I-TT^*)zH^2=\{0\}$, получаем $\mathcal{D}_{T^*}\subset\mathcal{L}(f_1,f_2)$. Обратное включение также очевидно, и мы получили, что

$$\mathcal{D}_{T^*}=\mathcal{L}(f_1,f_2).$$

5.4. Оператор D_{T^*}. Построим в $\mathcal{L}(f_1,f_2)$ ортонормированный базис $\{y_1,y_2\}$. Положим

$$\begin{gathered}a^2=1-\|F_1\|^2,\quad b^2=1-\|F_2\|^2,\quad \beta=(F_2,F_1),\\ d^2=a^2b^2-|\beta|^2.\end{gathered}\tag{9}$$

Легко видеть, что

$$\begin{gathered}\|f_1\|^2=a^2-|\beta|^2,\quad \|f_2\|^2=(1-b^2)b^2,\quad (f_1,f_2)=(1-b^2)\overline{\beta},\\ (I-TT^*)f_1=f_1-\overline{\beta}f_2,\quad (I-TT^*)f_2=(1-b^2)f_2.\end{gathered}$$

Пусть

$$y_1=\frac{1}{bd}(b^2f_1-\overline{\beta}f_2),\quad y_2=\frac{1}{b\sqrt{1-b^2}}\,f_2,$$

тогда $\{y_1,y_2\}$ является ортонормированным базисом в $\mathcal{L}(f_1,f_2)$, $(I-TT^*)y_1=y_1$, $(I-TT^*)y_2=(1-b^2)y_2$, поэтому

$$D_{T^*}=(\cdot,y_1)y_1+\sqrt{1-b^2}(\cdot,y_2)y_2.$$

5.5. Резольвента T^*. Положим

$$F_\zeta=P\begin{pmatrix}0\\ \frac{\alpha-\alpha(\zeta)}{z-\zeta}\end{pmatrix},\quad \zeta\in\mathbb{D},$$

тогда $F_\zeta\in K$ и $(I-\zeta Q^*)F_\zeta=F_2$, поэтому

$$\zeta Q^*F_\zeta=F_\zeta-F_2,\quad (I-\zeta T^*)F_\zeta=F_2\quad \text{и}\quad F_\zeta=(I-\zeta T^*)^{-1}F_2.$$

Положим

$$\psi_1(\zeta) = (F_\zeta, F_1), \quad \psi_2(\zeta) = (F_\zeta, F_2). \tag{10}$$

Отметим, что если $f \in K$, то f можно представить в виде $f = \left(\begin{smallmatrix} \alpha \overline{z g_1} \\ \alpha \overline{z g_2} \end{smallmatrix}\right)$, где $g_1, g_2 \in K_\alpha$, и тогда

$$(F_\zeta, f) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha - \alpha(\zeta)}{z - \zeta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \overline{z g_1} \\ \alpha \overline{z g_2} \end{pmatrix} \right) = \left(\frac{\alpha - \alpha(\zeta)}{z - \zeta}, \alpha \overline{z g_2} \right) = g_2(\zeta).$$

5.6. Окончательное вычисление. Пусть $\zeta \in \mathbb{D}$, тогда

$$\Theta_T(\zeta) \frac{F_2}{\|F_2\|} = -\frac{1}{\|F_2\|} T F_2 + \zeta D_{T^*} (I - \zeta T^*)^{-1} D_T \frac{F_2}{\|F_2\|} =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-b^2}} ((F_2, F_1) \oplus Q F_2) + \zeta D_{T^*} (I - \zeta T^*)^{-1} F_2 =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-b^2}} f_2 + \zeta D_{T^*} F_\zeta. \tag{11}$$

Далее,

$$-\frac{1}{\sqrt{1-b^2}} f_2 = -b y_2,$$

$$\begin{aligned} \zeta D_{T^*} F_\zeta &= D_{T^*} \zeta F_\zeta = (\zeta F_\zeta, y_1) y_1 + \sqrt{1-b^2} (\zeta F_\zeta, y_2) y_2 = \\ &= \left(\zeta F_\zeta, \frac{1}{bd} (b^2 f_1 - \overline{\beta} f_2) \right) y_1 + \sqrt{1-b^2} \left(\zeta F_\zeta, \frac{1}{b\sqrt{1-b^2}} f_2 \right) y_2 = \\ &= -\left(\frac{b}{d} (\zeta F_\zeta, Q F_1) + \frac{\beta}{bd} (\zeta F_\zeta, Q F_2) \right) y_1 + \frac{1}{b} (\zeta F_\zeta, Q F_2) y_2. \end{aligned} \tag{12}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} (\zeta F_\zeta, Q F_1) &= (\zeta Q^* F_\zeta, F_1) = (F_\zeta - F_2, F_1) = \psi_1(\zeta) - \beta, \\ (\zeta F_\zeta, Q F_2) &= (\zeta Q^* F_\zeta, F_2) = (F_\zeta - F_2, F_2) = \psi_2(\zeta) - (1 - b^2), \end{aligned} \tag{13}$$

и, подставляя результаты вычислений (12) и (13) в (11), получаем, что

$$\Theta_T(\zeta) \frac{F_2}{\|F_2\|} = -\left(\frac{b}{d} \psi_1(\zeta) + \frac{\beta}{bd} (\psi_2(\zeta) - 1) \right) y_1 + \frac{1}{b} (\psi_2(\zeta) - 1) y_2,$$

то есть

$$\Theta_T(\zeta) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{bd} (b^2 \psi_1(\zeta) + \beta (\psi_2(\zeta) - 1)) \\ \frac{1}{b} (\psi_2(\zeta) - 1) \end{pmatrix}, \quad \zeta \in \mathbb{D},$$

где $\beta, b, d \in \mathbb{C}$, β, b, d определены формулами (9), $\psi_1, \psi_2 \in K_\alpha$, ψ_1, ψ_2 определены формулами (10).

В заключение автор выражает искреннюю признательность В. И. Васюнину, В. В. Капустину, С. А. Купину и Н. К. Никольскому за полезные обсуждения.

Литература

1. Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции.* М., Мир (1984).
2. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* М., Наука (1966).
3. В. В. Капустин, *Рефлексивность операторов: общие методы и критерий для почти изометрических сжатий.* Алгебра и анализ, **4**, вып. 2 (1992), 141–160.
4. Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига.* М., Наука (1980).
5. Н. К. Никольский, С. В. Хрущев, *Функциональная модель и некоторые задачи спектральной теории функций.* — В кн.: Математическая физика и комплексный анализ. Труды МИАН СССР, **176**, М., Наука (1987), 97–210.
6. Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш, *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве.* М., Мир (1970).
7. S. Kupin, *An informal report on "rectangular" factorizations, the scalar case.* Université Bordeaux 1 (1998).
8. N. Nikolski, V. Vasyunin, *Elements of spectral theory in terms of the free function model, Part I: Basic Constructions.* – in Holomorphic Spaces, ed. by S. Axler, J. E. McCarthy, D. Sarason, Mathematical Sciences Research Institute Piblications, Cambridge University Press, **33** (1998), 211–302.
9. N. K. Nikolskii, V. I. Vasyunin, *Unified approach to function models and the transcription problem.* Preprint LOMI E-5-86, Leningrad (1986).
10. V. V. Peller, *An excursion into the theory of Hankel operators.* – in Holomorphic Spaces, ed. by S. Axler, J. E. McCarthy, D. Sarason, Mathematical Sciences, Research Institute Piblications, Cambridge University Press, **33** (1998), 65–120.

Gamal M. F. Regular factorization of the scalar characteristic function.

It is known that the regular factorizations of the characteristic function of an operator describe its invariant subspaces. The case of a scalar characteristic function is considered. Some examples are given. Factorizations describing all chains of invariant subspaces that contain a given subspace L are constructed in terms of the factorization describing L. A representation of the regular factorization of a function is obtained in terms of factorizations of its inner and outer parts.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
gamal@ pdmi.ras.ru

Поступило 25 мая 2000 г.