Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 269, 2000 г.

В. А. Солонников, А. Фазано

ОБ ОДНОМЕРНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Посвящается памяти А. Г. Изергина

§1. Введение

Предметом настоящей работы является задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad 0 < x < kt, \quad t \in (0,T), \tag{1.1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = g(t), \tag{1.2}$$

$$\frac{d\widetilde{u}}{dt} + b\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=kt} = h(t), \tag{1.3}$$

где $k, b = \mathrm{const} > 0$, $\widetilde{u}(t) = u(kt,t)$, а f, g, h – заданные функции, обращающиеся в нуль в точке $x = 0$, $t = 0$.

Она оказывается полезной при изучении некоторых задач со свободными границами. Рассмотрим, например, однофазную задачу Стефана при следующих предположениях: жидкая фаза с положительной температурой $u(x,t)$ занимает отрезок $0 < x < s(t)$, при $x = 0$ задается положительный поток тепла, свободная граница $\Gamma_t = \{x = s(t)\}$ начинается у твердой стенки $x = 0$, т.е. выполняется условие $s(0) = 0$. Эта задача, в которой неизвестными функциями являются $u(x,t)$ и $s(t)$, формулируется следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < s(t), \quad t \in (0,T),$$

$$-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = q(t), \quad u\big|_{x=s(t)} = 0, \tag{1.4}$$

$$s'(t) = -\mu\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=s(t)}, \quad s(0) = 0 \quad (\mu = \mathrm{const} > 0).$$

Из краевых условий вытекает, что $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\substack{x=0\\t=0}} = -q(0) \equiv u_0'$. Мы предполагаем, что $q(0) > 0$; тогда $s'(0) = \mu q(0) \equiv k > 0$. Кроме того, дифференцируя условие $u(s(t), t) = 0$, мы находим:

$$u_t\Big|_{\substack{x=0\\t=0}} = -u_x(0,0)s'(0) = \mu q^2(0), \quad u_{xx}\Big|_{\substack{x=0\\t=0}} = \mu q^2(0).$$

Отобразим неизвестный интервал $x \in (0, s(t))$ в известный $x \in (0, s_0(t))$, $s_0(t) = kt$, с помощью преобразования

$$x = z + \eta\Big(\frac{z}{t}\Big)\sigma(t) \equiv z + \psi(z,t), \quad z \in (0, s_0(t)), \tag{1.5}$$

где $\eta(r)$ – гладкая функция, равная нулю при $r < k/3$ и единице при $r > 2k/3$, а $\sigma(t) = s(t) - s_0(t)$. При этом преобразовании соотношения (1.4) переходят в

$$\frac{\partial \widehat{u}_t(z,t)}{\partial t} - \frac{\partial \widehat{u}_z(z,t)}{\partial z}\left(\frac{\psi_t'}{1+\psi_z'} - \frac{\psi_{zz}'}{(1+\psi_z')^3}\right) - \frac{1}{(1+\psi_z')^2}\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial z^2} = 0,$$

$$-\frac{\partial \widehat{u}}{\partial z}\bigg|_{z=0} = q(t), \quad \widehat{u}\big|_{z=s_0(t)} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma(t)}{\partial t} = -\mu\left(\frac{\partial \widehat{u}}{\partial z} - u_0'\right)\bigg|_{z=s_0(t)},$$

где $\widehat{u}(z,t) = u(z+\psi, t)$.

Введем новую неизвестную функцию

$$r(z,t) = \widehat{u}(z,t) - u_0'\psi(z,t).$$

Она удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial r}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial z}\bigg|_{z=0},$$

$$\widetilde{r}(t) \equiv r(s_0(t),t) = -u_0'\sigma(t),$$

$$\frac{\partial r}{\partial z}\bigg|_{z=s_0(t)} = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial z}\bigg|_{z=s_0(t)},$$

так что мы приходим к задаче типа (1.1)–(1.3)

$$\begin{gathered}\frac{\partial r}{\partial t} - \frac{1}{(1+\psi_z')^2}\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} + \left(\frac{\psi_t'}{1+\psi_z'} - \frac{\psi_{zz}''}{(1+\psi_z')^3}\right)\times \\ \times\left(u_0' - \frac{\partial r}{\partial z}\right) + u_0'\frac{\psi_z'\psi_z''}{(1+\psi_z')^3} = 0, \\ -\frac{\partial r}{\partial z}\bigg|_{z=0} = q(t), \quad -\frac{1}{u_0'}\frac{d\widetilde{r}}{dt} + \mu\frac{\partial r}{\partial z}\bigg|_{z=s_0(t)} = \mu u_0',\end{gathered} \tag{1.6}$$

в которой

$$\psi(z,t)=\eta\Big(\frac{z}{t}\Big)\sigma(t)=-\frac{1}{u_0'}\eta\Big(\frac{z}{t}\Big)\widetilde{r}(t).$$

Как показано в работе [1], задача (1.4) может быть решена сведением к нелинейным интегральным уравнениям. Другая, более сложная задача со свободной границей (см. [2]), для которой такое сведение провести не удается, будет рассмотрена в нашей последующей работе.

В данной работе мы получаем аналог оценки $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Omega_{0T})$-нормы решения задачи (1.1)–(1.3), но не в обычных, а в весовых гельдеровских пространствах.

Введем следующие обозначения: J_t – интервал $(0,s_0(t))=(0,kt)$, $\Omega_{\tau_1,\tau_2}=\{(x,t)\in\Omega_{0T}:\tau_1<t<\tau_2\}$,

$$[u(\,\cdot\,,t)]^{(l)}_{J_t}=\sup_{x,y\in J_t}|x-y|^{-l+[l]}\left|\frac{\partial^{[l]}u(x,t)}{\partial x^{[l]}}-\frac{\partial^{[l]}u(y,t)}{\partial y^{[l]}}\right|$$

– главная часть нормы $C^l(J_t)$ ($l>0$, нецелое), а для функций одной переменной t положим

$$[u]^{(l)}_{(0,T)}=\sup_{t\in(0,T)}\ \sup_{h\in(0,T-t)}h^{-l+[l]}\left|\frac{d^{[l]}u(t+h)}{dt^{[l]}}-\frac{d^{[l]}u(t)}{dt^{[l]}}\right|.$$

Под $\widehat{C}^{\,l,l/2}(\Omega_{0T})$ будем понимать пространство функций, заданных в Ω_{0T} и имеющих конечную норму

$$\|u\|_{\widehat{C}^{\,l,l/2}(\Omega_{0T})}=\sup_{\tau\in(0,T)}[u]^{(l,l/2)}_{\Omega_{\tau/2,\tau}}+\sup_{\Omega_{0T}}t^{-l}|u(x,t)|,$$

$$[u]^{(l,l/2)}_{\Omega_{\tau/2,\tau}}=\sup_{t\in(\tau/2,\tau)}[u(\,\cdot\,,t)]^{(l)}_{J_t}+$$

$$+\sup_{\Omega_{\tau/2,\tau}}\ \sup_{h\in(0,\tau-t)}h^{-l/2+[l/2]}\left|\frac{\partial^{[l/2]}u(x,t+h)}{\partial t^{[l/2]}}-\frac{\partial^{[l/2]}u(x,t)}{\partial t^{[l/2]}}\right|,$$

а под $\widehat{C}^{\,l}(0,T)$ – пространство функций переменной $t\in(0,T)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{\widehat{C}^{\,l}(0,T)}=[u]^{(l)}_{(0,T)}+\sup_{t\in(0,T)}t^{-2l}|u(t)|.$$

Основной результат работы состоит в следующем.

Теорема 1. *При любых* $f \in \widehat{C}^{\,\alpha,\alpha/2}(\Omega_{0T})$, $g \in \widehat{C}^{\,\frac{1+\alpha}{2}}(0,T)$, $h \in \widehat{C}^{\,\frac{1+\alpha}{2}}(0,T)$, $\alpha \in (0,1)$, *задача* (1.1)–(1.3) *имеет единственное решение* $u \in \widehat{C}^{\,2+\alpha,1+\alpha/2}(\Omega_{0T})$, *и для него справедлива оценка*

$$\|u\|_{\widehat{C}^{\,2+\alpha,1+\alpha/2}(\Omega_{0,T})} + \|u_x\|_{\widehat{C}^{\,1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\Omega_{0,T})} + \\ +\|u_{xx}\|_{\widehat{C}^{\,\alpha,\alpha/2}(\Omega_{0,T})} + \|\widetilde{u}\|_{\widehat{C}^{\,\frac{1+\alpha}{2}}(0,T)} \leqslant \\ \leqslant c\left(\|f\|_{\widehat{C}^{\,\alpha,\alpha/2}(\Omega_{0,T})} + \|g\|_{\widehat{C}^{\,\frac{1+\alpha}{2}}(0,T)} + \|h\|_{\widehat{C}^{\,\frac{1+\alpha}{2}}(0,T)}\right). \tag{1.7}$$

§2. Вспомогательные предложения

В этом параграфе доказана необходимая для дальнейшего интерполяционная теорема и получены оценки решений трех начально-краевых задач для уравнения теплопроводности на полупрямой $x > 0$.

Лемма 1. *Для любой функции* $u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Omega_{\tau/2,\tau})$ $\tau > 0$ *справедливо неравенство*

$$\sup_{(x,t)\in\Omega_{\tau/2,\tau}} \sup_{h\in(0,\tau-t)} h^{-\frac{1+\alpha}{2}}|u_x(x,t+h)-u_x(x,t)| + \\ + \sup_{(x,t)\in\Omega_{\tau/2,\tau}} \sup_{h\in(0,\tau-t)} h^{-\frac{\alpha}{2}}|u_{xx}(x,t+h)-u_{xx}(x,t)| \leqslant \\ \leqslant c\left(\sup_{t\in(\tau/2,\tau)}[u_t(\,\cdot\,,t)]^{(\alpha)}_{J_t} + \sup_{t\in(\tau/2,\tau)}[u(\,\cdot\,,t)]^{(2+\alpha)}_{J_t} + \right. \\ \left. +\tau^{-5/2-\alpha}\sup_{t\in(\tau/2,\tau)}\|u(\,\cdot\,,t)\|_{L_2(J_t)}\right). \tag{2.1}$$

Доказательство. Воспользуемся известными неравенствами

$$\sup_{J_t}|v_x(\,\cdot\,,t)| \leqslant c\left(r^{1+\alpha}\,[v_{xx}(\,\cdot\,,t)]^{(\alpha)}_{J_t} + r^{-1+\alpha}\,[v(\,\cdot\,,t)]^{(\alpha)}_{J_t}\right)$$

$$\sup_{J_t}|v_{xx}(\,\cdot\,,t)| \leqslant c\left(r^{\alpha}\,[v_{xx}(\,\cdot\,,t)]^{(\alpha)}_{J_t} + r^{-2+\alpha}\,[v(\,\cdot\,,t)]^{(\alpha)}_{J_t}\right),$$

справедливыми при любом $r \leqslant kt = |J_t|$. Положим $v(x,t) = u(x,t+h) - u(x,t)$. Если $h \leqslant (kt)^2$, то эти неравенства с $r = \sqrt{h}$ влекут за собой

$$\sup_{J_t} |u_x(x,t+h) - u_x(x,t)| \leqslant ch^{\frac{1+\alpha}{2}} \left([u_t(\,\cdot\,,t)]^{(\alpha)}_{J_t} + [u_{xx}(\,\cdot\,,t)]^{(\alpha)}_{J_t}\right)$$

$$\sup_{J_t} |u_{xx}(x,t+h) - u_{xx}(x,t)| \leqslant ch^{\frac{\alpha}{2}} \left([u_t(\,\cdot\,,t)]^{(\alpha)}_{J_t} + [u_{xx}(\,\cdot\,,t)]^{(\alpha)}_{J_t}\right),$$

а при $h \geqslant (kt)^2$, очевидно, имеем

$$\sup_{J_t} |u_x(x,t+h) - u_x(x,t)| \leqslant ch^{\frac{1+\alpha}{2}} \sup_{t\in(\tau/2,\tau)} t^{-(1+\alpha)} \sup_{J_t} |u_x(x,t)|$$

$$\sup_{J_t} |u_{xx}(x,t+h) - u_{xx}(x,t)| \leqslant ch^{\frac{\alpha}{2}} \sup_{t\in(\tau/2,\tau)} t^{-\alpha} \sup_{J_t} |u_{xx}(x,t)|.$$

Остается воспользоваться интерполяционным неравенством

$$t^{-(1+\alpha)} \sup_{J_t} |u_x(x,t)| + t^{-\alpha} \sup_{J_t} |u_{xx}(x,t)| \leqslant$$

$$\leqslant c\left([u_{xx}(\,\cdot\,,t)]^{(\alpha)}_{J_t} + t^{-5/2-\alpha} \big\|u(\,\cdot\,,t)\big\|_{L_2(J_t)}\right),$$

и лемма доказана.

Следующие вспомогательные предложения касаются решений начально-краевых задач

$$\begin{aligned} &\varepsilon v_{1t} - v_{1xx} = f_1(x,t) \quad (x>0, t>0), \quad v_1(x,0) = 0,\\ &v_{1x}\big|_{x=0} = g_1(t), \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon v_{2t} - v_{2xx} = f_2(x,t) \quad (x>0, t>0), \quad v_2(x,0) = 0,\\ &v_2\big|_{x=0} = g_2(t), \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon v_{3t} - v_{3xx} = f_3(x,t) \quad (x>0, t>0), \quad v_3(x,0) = 0,\\ &v_{3t} - bv_{3x}\big|_{x=0} = g_3(t), \end{aligned} \tag{2.4}$$

где ε – произвольно малое положительное число.

Лемма 2. *Если $f_i(x,0) = 0$, $g_i(0) = 0$, $i = 1,2$, и $g_2'(0) = 0$, то решения задач (2.2) и (2.3) подчиняются неравенствам*

$$\varepsilon \sup_{\tau<t} [v_{1\tau}(\,\cdot\,,\tau)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}_+} + \sup_{\tau<t} [v_1(\,\cdot\,,\tau)]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}_+} \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\sup_{\tau<t}\left[f_1(\,\cdot\,,\tau)\right]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}_+}+\varepsilon^{\frac{1+\alpha}{2}}\left[g_1\right]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{(0,t)}\right), \tag{2.5}$$

$$\varepsilon\sup_{\tau<t}\left[v_{2\tau}(\,\cdot\,,\tau)\right]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}_+}+\sup_{\tau<t}\left[v_2(\,\cdot\,,\tau)\right]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}_+}\leqslant$$

$$\leqslant c\left(\sup_{\tau<t}\left[f_2(\,\cdot\,,\tau)\right]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}_+}+\varepsilon^{\alpha/2}\left[\varepsilon g_{2t}-f_2(0,\,\cdot\,)\right]^{(\alpha/2)}_{(0,t)}\right),\quad \forall\, t>0. \tag{2.6}$$

Для доказательства этой леммы следует сделать преобразовние времени $t'=t/\varepsilon$ (что приводит к случаю $\varepsilon=1$) и воспользоваться результатами работ [3–5], или [6], §4.

Лемма 3. *Пусть в задаче* (2.4) $b=\mathrm{const}>0$, $f_3(x,0)=0$, $g_3(0)=0$. *Тогда ее решение подчиняется неравенству*

$$\varepsilon\sup_{\tau<t}\left[v_{3\tau}(\,\cdot\,,\tau)\right]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}_+}+\sup_{\tau<t}\left[v_3(\,\cdot\,,\tau)\right]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}_+}\leqslant$$

$$\leqslant c\left(\sup_{\tau<t}\left[f_3(\,\cdot\,,\tau)\right]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}_+}+\varepsilon^{\alpha/2}\left[f_3(0,\,\cdot\,)\right]^{(\alpha/2)}_{(0,t)}+\right. \tag{2.7}$$

$$\left.+\varepsilon^{1+\alpha/2}\left[g_3\right]^{(\alpha/2)}_{(0,t)}+\varepsilon^{\frac{3+\alpha}{2}}\sup_{\tau<t}\left|g_3(\tau)\right|\right),\quad \forall\, t>0.$$

Доказательство. Представим v_3 в виде суммы $v_3=u+w$, где $u(x,t)$ – решение задачи (2.3) с $f_2=f_3$ и $g_2=0$, а $w(x,t)$ – решение задачи

$$\varepsilon w_t-w_{xx}=0\quad (x>0,t>0),\quad w\big|_{t=0}=0,$$

$$w_t-bw_x\big|_{x=0}=g_3(t)+bu_x\big|_{x=0}=h(t).$$

Оно определяется формулой (см., например, [7])

$$w(x,t)=\int\limits_0^t G_\varepsilon(x,t-\tau)h(\tau)d\tau,$$

где

$$G_\varepsilon(x,t)=-2\int\limits_0^t \Gamma_{\varepsilon x}(x+bu,t-u)du,$$

$$\Gamma_\varepsilon(x,t)=\frac{1}{\varepsilon}\Gamma(x,t/\varepsilon),\quad \Gamma(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\quad (t>0),$$

так что

$$-2\Gamma_{\varepsilon x}(x,t)=\frac{x\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{4\pi t^3}}e^{-\frac{\varepsilon x^2}{4t}}=-2\Gamma_x(\sqrt{\varepsilon}\,x,t).$$

Отсюда следует, что

$$G_{\varepsilon x}(x,t)=-2\varepsilon\int\limits_0^t\Gamma_{\varepsilon t}(x+bu,t-u)du=$$

$$=-2\varepsilon\Gamma_\varepsilon(x,t)-2\varepsilon b\int\limits_0^t\Gamma_{\varepsilon x}(x+bu,t-u)du=-2\varepsilon\Gamma_\varepsilon+\varepsilon bG_\varepsilon,$$

$$G_{\varepsilon xx}(x,t)=-2\varepsilon\Gamma_{\varepsilon x}(x,t)+\varepsilon b\big(-2\varepsilon\Gamma_\varepsilon(x,t)+\varepsilon bG_\varepsilon(x,t)\big).$$

Таким образом, вторые производные w_{xx} выражаются в виде суммы

$$w_{xx}(x,t)=-2\varepsilon\int\limits_0^t\Gamma_{\varepsilon x}(x,t-\tau)h(\tau)d\tau+\int\limits_0^t K_\varepsilon(x,t-\tau)h(\tau)d\tau\equiv$$

$$\equiv\varphi_1(x,t)+\varphi_2(x,t),$$

где $K_\varepsilon=\varepsilon b(-2\varepsilon\Gamma_\varepsilon+\varepsilon bG_\varepsilon)$. Оценим разность $w_{xx}(x+h,t)-w_{xx}(x,t)$. Имеем

$$\varphi_1(x+h,t)-\varphi_1(x,t)=-2\varepsilon\int\limits_{-\infty}^t\big(\Gamma_{\varepsilon x}(x+h,t-\tau)-\Gamma_{\varepsilon x}(x,t-\tau)\big)(h(\tau)-h(t))d\tau,$$

$$\varphi_2(x+h,t)-\varphi_2(x,t)=\int\limits_0^t\big(K_\varepsilon(x+h,t-\tau)-K_\varepsilon(x,t)\big)h(\tau)d\tau,$$

и так как

$$\int\limits_{-\infty}^t\big|\Gamma_{\varepsilon x}(x+h,t-\tau)-\Gamma_{\varepsilon x}(x,t-\tau)\big|\,|t-\tau|^{\alpha/2}d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{t-\varepsilon h^2}^t\Big(\big|\Gamma_{\varepsilon x}(x+h,t-\tau)\big|+\big|\Gamma_{\varepsilon x}(x,t-\tau)\big|\Big)\,(t-\tau)^{\alpha/2}d\tau+$$

$$+c\int\limits_0^h d\xi \int\limits_{-\infty}^{t-\varepsilon h^2} \big|\Gamma_{\varepsilon xx}(x+\xi,t-\tau)\big|(t-\tau)^{\alpha/2}d\tau \leqslant c\varepsilon^{\alpha/2}h^\alpha,$$

$$\int\limits_0^t \big|K_\varepsilon(x,t-\tau)\big|d\tau \leqslant c\varepsilon^2\int\limits_0^t(\Gamma_\varepsilon+|G_\varepsilon|)d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c\varepsilon^2\left(\sqrt{\frac{t}{\varepsilon}}+t\right)=c\varepsilon(\sqrt{\varepsilon t}+\varepsilon t),$$

$$\int\limits_0^t \big|K_{\varepsilon x}(x,t-\tau)\big|d\tau \leqslant c\varepsilon^2\int\limits_0^t\big(|\Gamma_{\varepsilon x}+\varepsilon(\Gamma_\varepsilon+|G_\varepsilon|)\big)d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c\varepsilon^2(1+\sqrt{\varepsilon t}+\varepsilon t),$$

а значит

$$\int\limits_0^t \big|K_\varepsilon(x+h,t-\tau)-K_\varepsilon(x,t-\tau)\big|d\tau \leqslant$$

$$\leqslant ch^\alpha\varepsilon^{1+\alpha}(\sqrt{\varepsilon t}+\varepsilon t)^{1-\alpha}(1+\sqrt{\varepsilon t}+\varepsilon t)^\alpha \leqslant ch^\alpha\varepsilon^{\frac{3+\alpha}{2}}(1+t),$$

то

$$\big[w(\,\cdot\,,t)\big]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}_+} \leqslant c(t)\left(\varepsilon^{1+\alpha/2}\big[h\big]^{(\alpha/2)}_{(0,t)}+\varepsilon^{\frac{3+\alpha}{2}}\sup\nolimits_{\tau\in(0,t)}|h(\tau)|\right).$$

Вспомним, что $h=g_2+bu_x\big|_{x=0}$, причем $u(x,t)$ удовлетворяет неравенству (2.6) с $f_2=f_3$, $g_2=0$. Следовательно,

$$\varepsilon^{1+\alpha/2}\big[u_x(0,\,\cdot\,)\big]^{(\alpha/2)}_{(0,t)}+\varepsilon^{\frac{3+\alpha}{2}}\sup\nolimits_{\tau\in(0,t)}|u_x(0,\tau)| \leqslant$$

$$\leqslant c\varepsilon^{1/2}\cdot\varepsilon^{\frac{1+\alpha}{2}}\big[u_x(0,\,\cdot\,)\big]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{(0,t)} \leqslant$$

$$\leqslant c\varepsilon^{1/2}\left(\varepsilon\sup\big[u(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}_+}+\sup\big[u(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}_+}\right).$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\varepsilon\sup_{\tau<t}\big[w_\tau(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}_+}+\sup\nolimits_{\tau<t}\big[w_\tau(\,\cdot\,,\tau)\big]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}_+} \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\varepsilon^{1+\alpha/2}\big[g_3\big]^{(\alpha/2)}_{(0,t)}+\varepsilon^{\frac{3+\alpha}{2}}\sup_{\tau<t}|g_3(\tau)|\right)+$$

$$+c\varepsilon^{1/2}\left(\sup_{\tau<t}\left[f_3(\,\cdot\,,\tau)\right]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}_+}+\varepsilon^{\alpha/2}\sup\nolimits_{\tau<t}\left[f_3(0,\,\cdot\,)\right]^{(\alpha/2)}_{(0,t)}\right).$$

Объединяя эту оценку с оценкой (2.6) для $u(x,t)$, приходим к (2.7). Лемма доказана.

§3. Доказательство неравенства (1.7)

Доказательство неравенства (1.7) удобно разбить на следующие этапы.

Шаг 1. Доказательство оценки

$$\sup_{t\in(0,T)}\left[u_t(\,\cdot\,,t)\right]^{(\alpha)}_{J_t}+\sup\nolimits_{t\in(0,T)}\left[u(\,\cdot\,,t)\right]^{(2+\alpha)}_{J_t}\leqslant$$

$$\leqslant c\left(\left\|f\right\|_{\widehat{C}^{\alpha,\alpha/2}(\Omega_{0T})}+\left\|g\right\|_{\widehat{C}^{\frac{1+\alpha}{2}}(0,T)}+\right.$$

$$\left.+\left\|h\right\|_{\widehat{C}^{\frac{1+\alpha}{2}}(0,T)}+\sup_{t\in(0,T)}t^{-5/2-\alpha}\left\|u(\,\cdot\,,t)\right\|_{L_2(J_t)}\right). \tag{3.1}$$

Рассмотрим решение задачи (1.1)–(1.3) в области $\Omega_{\tau/4,\tau}$. Положим $\tau/4=\varepsilon$ и сделаем замену переменных

$$t=\varepsilon t',\quad x=\varepsilon x'.$$

При этом область $\Omega_{\tau/4,\tau}$ перейдет в $\Omega_{1,4}$, а уравнения (1.1)–(1.3) примут форму

$$\varepsilon U_{t'}-U_{x'x'}=F_\varepsilon,\qquad U\big|_{x'=0}=G_\varepsilon,\qquad \widetilde{U}_{t'}+bU_{x'}\big|_{x'=kt}t'=H_\varepsilon, \tag{3.2}$$

где

$$U(x',t')=u(\varepsilon x',\varepsilon t'),\quad F_\varepsilon(x',t')=\varepsilon^2 f(\varepsilon x',\varepsilon t'),$$
$$G_\varepsilon(t')=\varepsilon g_\varepsilon(\varepsilon t'),\qquad H_\varepsilon(t')=\varepsilon h_\varepsilon(\varepsilon t').$$

Докажем следующее предложение.

Лемма 4. *Решение задачи* (3.2) *удовлетворяет неравенству*

$$\varepsilon\sup_{\tau\in(2,4)}\left[U_\tau(\,\cdot\,,\tau)\right]^{(\alpha)}_{J_t}+\sup_{\tau\in(2,4)}\left[U(\,\cdot\,,\tau)\right]^{(2+\alpha)}_{J_t}\leqslant$$

$$\leqslant\delta\Big(\varepsilon\sup_{\tau\in(1,2)}\left[U_\tau(\,\cdot\,,\tau)\right]^{(\alpha)}_{J_t}+\sup_{\tau\in(1,2)}\left[U(\,\cdot\,,\tau)\right]^{(\alpha)}_{J_t}\Big)+$$

$$+c\sup_{t\in(1,4)}\big[F_\varepsilon(\,\cdot\,,t)\big]^{(\alpha)}_{J_t}+\varepsilon^{\alpha/2}[\widetilde{F}_\varepsilon]^{(\alpha/2)}_{(1,4)}+ \tag{3.3}$$

$$+c\varepsilon^{\frac{1+\alpha}{2}}\Big(\big[G_\varepsilon\big]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{(1,4)}+\sup_{t\in(1,4)}|G_\varepsilon(t)|\Big)+$$

$$+\varepsilon^{1+\alpha/2}\Big(\big[H_\varepsilon\big]^{(\alpha/2)}_{(1,4)}+\sup_{t\in(1,4)}|H_\varepsilon(t)|\Big)+c_\delta\sup_{t\in(1,4)}\big\|U(\,\cdot\,,t)\big\|_{L_2(J_t)},$$

где δ – произвольно малое положительное число.

Доказательство. Пусть $\zeta(r)$ – бесконечно дифференцируемая функция положительного аргумента, равная единице при $r>1$ и нулю при $r<1/2$ и пусть

$$\psi_1(x,t)=\left(1-\zeta\left(\frac{3x}{2k}\right)\right)\zeta(t-1),\quad \psi_2(x,t)=\zeta\left(\frac{3x}{2k}\right)\zeta(t-1).$$

Ясно, что функции

$$w_i(x,t)=U(x,t)\psi_i(x,t),\quad i=1,2$$

(штрих у аргументов x, t опускается) удовлетворяет соотношениям

$$\varepsilon w_{1t}-w_{1xx}=F_\varepsilon\psi_1+\varepsilon U\psi_{1t}-2\psi_{1x}U_x-\psi_{1xx}U\equiv\Phi_1,\quad x>0,\quad t\in(1,4),$$

$$w_1\big|_{t=1}=0,\quad w_{1x}\big|_{x=0}=G_\varepsilon\zeta(t-1), \tag{3.4}$$

$$\varepsilon w_{2t}-w_{2xx}=F_\varepsilon\psi_2+\varepsilon U\psi_{2t}-2\psi_{2x}U_x-\psi_{2xx}U\equiv\Phi_2,$$

$$-\infty<x<kt,\quad t\in(1,4),$$

$$w_2\big|_{t=1}=0,\quad \widetilde{w}_{2t}+bw_{2x}\big|_{x=kt}=H_\varepsilon\zeta(t-1)+\widetilde{U}\zeta_t'(t-1), \tag{3.5}$$

причем ψ_1, а ψ_2 продолжены нулем в области $x>\frac{2k}{3}$ и $x<\frac{k}{3}$, соответственно. Введя новую переменную $y=kt-x$, сводим (3.5) к задаче на полупрямой $y>0$:

$$\varepsilon(w_{2t}'+kw_{2y}')-w_{2yy}'=\Phi_2',\quad y>0,\quad t\in(1,4),$$

$$w_2'\big|_{t=1}=0,\quad w_{2t}'-bw_{2y}'\big|_{y=0}=H_\varepsilon\zeta(t-1)+\widetilde{U}\zeta_t'(t-1),$$

где $w_2'(y,t)=w_2(kt-y,t)$. Перенесем член $k\varepsilon w_{2y}'$ в правую часть уравнения и воспользуемся леммой 3. Это дает

$$\varepsilon\sup_{t\in(1,4)}\big[w_{2t}'(\,\cdot\,,t)\big]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}_+}+\sup_{t\in(1,4)}\big[w_2'(\,\cdot\,,t)\big]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}_+}\leqslant$$

$$\leqslant c\Big(\sup_{t\in(1,4)}\big|F_\varepsilon(\,\cdot\,,t)\big|_{C^\alpha(J_t)}+\varepsilon^{\alpha/2}\big[\widetilde{F}_\varepsilon\big]^{(\alpha/2)}_{(1,4)}+$$

$$+\varepsilon^{1+\alpha/2}\Big(\big[H_\varepsilon\big]^{(\alpha/2)}_{(1,4)}+\sup_{t\in(1,4)}\big|H_\varepsilon(t)\big|\Big)+$$

$$+\varepsilon^{1+\alpha/2}\Big(\big[\widetilde{U}\big]^{(\alpha/2)}_{(1,4)}+\sup_{t\in(1,4)}|\widetilde{U}(t)|\Big)+\sup_{t\in(1,4)}\big|U(\,\cdot\,,t)\big|_{C^{1+\alpha}(J_t)}\Big).$$

Точно так же из леммы 2, примененной к задаче (3.4), следует

$$\varepsilon\sup_{t\in(1,4)}\big[w_{1t}(\,\cdot\,,t)\big]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}_+}+\sup_{t\in(1,4)}\big[w_1(\,\cdot\,,t)\big]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}_+}\leqslant$$

$$\leqslant c\Big(\sup_{t\in(1,4)}\big|F_\varepsilon(\,\cdot\,,t)\big|_{C^\alpha(J_t)}+\varepsilon^{\frac{1+\alpha}{2}}\Big(\big[G_\varepsilon\big]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{(1,4)}+$$

$$+\sup_{t\in(1,4)}|G_\varepsilon(t)|\Big)+\sup_{t\in(1,4)}\big|U(\,\cdot\,,t)\big|_{C^{1+\alpha}(J_t)}\Big).$$

Так как $w_1+w_2=U(x,t)\zeta(t-1)$, то отсюда вытекает

$$\varepsilon\sup_{t\in(2,4)}\big[U_t(\,\cdot\,,t)\big]^{(\alpha)}_{J_t}+\sup_{t\in(2,4)}\big[U_t(\,\cdot\,,t)\big]^{(2+\alpha)}_{J_t}\leqslant$$

$$\leqslant c\Big(\sup_{t\in(1,4)}\big[F_\varepsilon(\,\cdot\,,t)\big]_{C^\alpha(J_t)}+\varepsilon^{\alpha/2}\big[\widetilde{F}_\varepsilon\big]^{(\alpha/2)}_{(1,4)}+$$

$$+\varepsilon^{1+\alpha/2}\Big(\big[H_\varepsilon\big]^{(\alpha/2)}_{(1,4)}+\sup_{t\in(1,4)}\big|H_\varepsilon(t)\big|\Big)+$$

$$+\varepsilon^{\frac{1+\alpha}{2}}\Big(\big[G_\varepsilon\big]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{(1,4)}+\sup_{t\in(1,4)}|G_\varepsilon(t)|\Big)+$$

$$+\varepsilon^{1+\alpha/2}\Big(\big[\widetilde{U}\big]^{(\alpha/2)}_{(1,4)}+\sup_{t\in(1,4)}|\widetilde{U}(t)|\Big)+\sup_{t\in(1,4)}\big|U(\,\cdot\,,t)\big|_{C^{1+\alpha}(J_t)}\Big).$$

Наконец, воспользовавшись оценкой

$$\varepsilon^{1+\alpha/2}\big[\widetilde{U}\big]^{(\alpha/2)}_{(1,4)}\leqslant c\varepsilon^{1+\alpha/2}\Big(\sup_{\Omega_{1,4}}|U_t(x,t)+\sup_{\Omega_{1,4}}|U_x(x,t)\Big)\leqslant$$

$$\leqslant c\varepsilon^{\alpha/2}\Big(\sup_{\Omega_{1,4}}|U_{xx}(x,t)|+\sup_{\Omega_{1,4}}|F_\varepsilon(x,t)\Big)+c\varepsilon^{\alpha/2}\sup_{\Omega_{1,4}}|U_x(x,t)|$$

и интерполяционным неравенством

$$\sup_{x\in J_t}|U_{xx}(x,t)|+|U_x(\,\cdot\,,t)|_{C^{1+\alpha}(J_t)}\leqslant\delta\big[U(\,\cdot\,,t)\big]^{(2+\alpha)}_{J_t}+c_\delta\big\|U(\,\cdot\,,t)\big\|_{L_2(J_t)}$$

с произвольно малым $\delta>0$, приходим к (3.3). Лемма доказана.

Для доказательства неравенства (3.1) достаточно вернуться в (3.3) к старым переменным $x=\varepsilon x'$, $t=\varepsilon t'$ ($\varepsilon=\tau/4$) и взять supremum по $\tau\in(0,T)$.

Шаг 2. Оценка нормы $\|u(\,\cdot\,,t)\|_{L_2(J_t)}$. Докажем неравенство

$$t^{-5/2-\alpha}\big\|u(\,\cdot\,,t)\big\|_{L_2(J_t)}\leqslant ct^{-1-\alpha}\sup_{\tau<t}\Big(|g(\tau)|+|h(\tau)|+I_{|f|}(\tau)\Big)\leqslant$$

$$\leqslant c\Big(\sup_{\tau<t}\tau^{-1-\alpha}+|g(\tau)|\sup_{\tau<t}\tau^{-1-\alpha}|h(\tau)|+\sup_{\tau<t}\tau^{-\alpha}\sup_{J_\tau}|f(x,\tau)|\Big),\quad(3.6)$$

где $I_f(\tau)=\int_{J_\tau}f(x,\tau)dx$ и $c=c(t)$ – монотонно возрастающая функция t. Будем исходить из легко проверяемого энергетического соотношения

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\int\limits_{J_t}|u(x,t)|^2dx+b^{-1}|\widetilde{u}(t)|^2\Big)+\int\limits_{J_t}u_x^2dx=$$

$$=b^{-1}h(t)\widetilde{u}(t)-g(t)u(x,0)+\int\limits_{J_t}fudx+\frac{k}{2}|\widetilde{u}|(t)|^2,$$

которое с помощью формулы

$$u(x,t)=\widetilde{u}(t)-\int\limits_x^{kt}u_x(\xi,t)d\xi$$

может быть записано в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\int\limits_{J_t}|u(x,t)|^2dx+b^{-1}|\widetilde{u}(t)|^2\Big)+\int\limits_{J_t}u_x^2dx=$$

$$=\big(b^{-1}h(t)-g(t)+I_f\big)\widetilde{u}(t)+\frac{k}{2}|\widetilde{u}(t)|^2+$$

$$+g(t)\int\limits_0^{kt}u_x(x,\tau)d\tau-\int\limits_{J_t}f(x,t)dx\int\limits_x^{kt}u_\xi(\xi,t)d\xi.\qquad(3.7)$$

Так как

$$\Big|\int\limits_x^{kt} u_\xi(\xi,t)d\xi\Big| \leqslant \sqrt{kt}\Big(\int\limits_{J_t} u_\xi^2(\xi,t)d\xi\Big)^{1/2},$$

то два последние члена в (3.7) не превосходят

$$\Big(|g(t)|+I_{|f|}\Big)\sqrt{kt}\Big(\int\limits_{J_t} u_\xi^2 d\xi\Big)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\Big(|g(t)+I_{|f|}\Big)^2 kt + \frac{1}{2}\int\limits_{J_t} u_\xi^2\, d\xi,$$

а значит (3.7) влечет за собой

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\int\limits_{J_t}|u(x,t)|^2dx + b^{-1}|\widetilde{u}(t)|^2\Big) + \frac{1}{2}\int\limits_{J_t} u_x^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \big|b^{-1}h(t) - g(t) + I_f\,\big|\;|\widetilde{u}(t)| + \frac{k}{2}|\widetilde{u}(t)|^2 + \big(|g(t)|^2 + I_{|f|}^2\big)kt. \qquad (3.8)$$

Интегрируя это неравенство и применяя лемму Гронуолла, получаем учитывая, что $\widetilde{u}(0)=0$, получаем

$$|\widetilde{u}(t)|^2 \leqslant \int\limits_0^t |b^{-1}h(\tau) - g(\tau) + I_f\,|\;|\widetilde{u}(\tau)|\,d\tau + c\int\limits_0^t \Big(|g|^2 + I_{|f|}^2\Big)\tau d\tau.$$

После повторного интегрирования от 0 до t легко находим оценку для $\int_0^t |u(\tau)|^2\,d\tau$, а затем и для $|u(t)|$:

$$\sup_{\tau\leqslant t}|\widetilde{u}(\tau)| \leqslant ct\sup_{\tau<t}\Big(|h(\tau)| + |g(\tau)| + I_{|f|}\Big) \qquad (3.9)$$

с $c\equiv c(t)$, являющейся монотонно возрастающей функций t.

Прибавим к обеим частям (3.8) $\frac{|\widetilde{u}(t)|^2}{2t}$ и заметим, что

$$\int\limits_{J_t}|u_x(x,t)|^2dx + \frac{|\widetilde{u}|^2}{t} \geqslant \frac{c}{t^2}\int\limits_{J_t}|u(x,t)|^2dt.$$

В результате получим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{J_t}|u|^2\,dx+\frac{c_1}{t^2}\int\limits_{J_t}|u|^2\,dx+2b^{-1}\widetilde{u}\,\widetilde{u}_t+\frac{c_2}{t}|\widetilde{u}|^2\leqslant c_3m(t), \tag{3.10}$$

где

$$m(t)=t\sup_{\tau<t}\big(|g(\tau)|^2+|h(\tau)|^2+I^2_{|f|}\big).$$

Производную $\widetilde{u}_t$ найдем из соотношения

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{J_t}u(x,t)dx=\int\limits_{J_t}u_t(x,t)dx+k\widetilde{u}=I_f+k\widetilde{u}+u_x\Big|_{x=0}^{x=kt}=$$

$$=I_f+k\widetilde{u}+b^{-1}h-g-b^{-1}\,\widetilde{u}_t,$$

из которого следует, что

$$b^{-1}\widetilde{u}\widetilde{u}_t=-\frac{d}{dt}(\widetilde{u}I_u)+I_u\widetilde{u}_t+\big(I_f+b^{-1}h-g+k\widetilde{u}\big)\widetilde{u}=$$

$$=-\frac{d}{dt}\Big(\widetilde{u}I_u+\frac{b}{2}I_u^2\Big)+\big(bI_u+\widetilde{u}\big)\big(I_f+b^{-1}h-g+k\widetilde{u}\big).$$

Подставляя это в (3.10), получаем

$$\frac{d}{dt}\bigg(\int\limits_{J_t}u^2(x,t)dx-2\widetilde{u}I_u-bI_u^2\bigg)+\frac{c_1}{t^2}\int\limits_{J_t}u^2(x,t)dx+\frac{c_2|\widetilde{u}(t)|^2}{t}\leqslant$$

$$\leqslant c_3m(t)+2\big(bI_u+\widetilde{u}\big)\big(I_f+b^{-1}h-g+k\widetilde{u}\big). \tag{3.11}$$

Пользуясь оценкой (3.9) и элементарным неравенством $|I_u|\leqslant\sqrt{kt}(\int\limits_I u^2(x,t)dx)^{1/2}$, легко убедиться в том, что при малых t ($t\leqslant\tau_0$) правая часть (3.11) не превосходит

$$c_3'm(t)+\frac{1}{2}\bigg(\frac{c_1}{t^2}\int\limits_{J_t}u^2(x,t)dx+\frac{c_2}{t}|\widetilde{u}(t)|^2\bigg)$$

и, более того, что из (3.11) следует

$$\frac{d}{dt}\bigg(\int\limits_{J_t}u^2(x,t)dx-2\widetilde{u}I_u-bI_u^2\bigg)+$$

$$+\frac{c_4}{t^2}\Big(\int\limits_{J_t} u^2(x,t)dx - 2\widetilde{u}I_u - bI_u^2\Big) \leqslant c_5\, m(t),$$

а значит

$$\frac{d}{dt}e^{-\frac{c_4}{t}}\Big(\int\limits_{J_t} u^2(x,t)dx - 2\widetilde{u}I_u - bI_u^2\Big) \leqslant c_5\, e^{-\frac{c_4}{t}}m(t)$$

и

$$\int\limits_{J_t} u^2(x,t)dx - 2\widetilde{u}I_u - bI_u^2 \leqslant c_5\, e^{\frac{c_4}{t}}\int\limits_0^t e^{\frac{c_4}{\tau}}m(\tau)\,d\tau \leqslant \frac{c_5}{c_4}m(t)t^2.$$

При достаточно малом $t : t \leqslant \tau_0$ отсюда и из (3.9) легко выводится (3.6).

В случае $t > \tau_0$ мы воспользуемся вытекающим из (3.10) неравенством

$$\frac{d}{dt}e^{-\frac{c_1}{t}}\int\limits_{J_t} u^2(x,t)dx + b^{-1}e^{-\frac{c_1}{t}}\frac{d\widetilde{u}^2(t)}{dt} \leqslant c_3 m(t)e^{-\frac{c_1}{t}}.$$

Отсюда после интегрирования и умножения на $e^{c_1/t}$ получаем

$$\int\limits_{J_t} u^2(x,t)dx \leqslant \frac{c_3}{c_1}m(t)t^2 + b^{-1}c_1\int\limits_0^t \widetilde{u}^2(\tau)e^{c_1(\frac{1}{t}-\frac{1}{\tau})}\frac{d\tau}{\tau^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_3}{c_1}m(t)t^2 + b^{-1}\sup_{\tau<t}\widetilde{u}^2(\tau) \leqslant m(t)\Big(\frac{c_3}{c_1}t^2 + ct\Big) \leqslant \Big(\frac{c_3}{c_1}+\frac{c}{\tau_0}\Big)m(t)t^2.$$

Таким образом, (3.6) имеет место при всех $t > 0$, что и требовалось доказать.

Шаг 3. Завершение доказательства. Неравенства (3.1) и (3.6) имеют своим следствием

$$\sup_{t\in(0,T)}\big[u_t(\,\cdot\,,t)\big]^{(\alpha)}_{J_t} + \sup_{t\in(0,T)}\big[u(\,\cdot\,,t)\big]^{(2+\alpha)}_{J_t} + \sup_{t\in(0,T)} t^{-5/2-\alpha}\|u(\,\cdot\,,t)\|_{L_2(J_t)} \leqslant$$

$$\leqslant c\Big(\|f\|_{\widehat{C}^{\alpha,\alpha/2}(\Omega_{0T}} + \|g\|_{\widehat{C}^{\frac{1+\alpha}{2}}(0,T)} + \|h\|_{\widehat{C}^{\frac{1+\alpha}{2}}(0,T)}\Big). \tag{3.12}$$

Теперь для доказательства (1.7) достаточно воспользоваться интерполяционными неравенствами. Прежде всего, из (2.1), (3.12) следует

$$\sup_{\tau/2<t<t'<\tau}\ \sup_{J_t}|t-t'|^{-\alpha/2}|u_{xx}(x,t)-u_{xx}(x,t')|+$$

$$\sup_{\tau/2<t<t'<\tau}\ \sup_{J_t}|t-t'|^{-\frac{1+\alpha}{2}}|u_x(x,t)-u_x(x,t')|\leqslant$$

$$c\Big(\|f\|_{\widehat{C}^{\alpha,\alpha/2}(\Omega_{0T}}+\|g\|_{\widehat{C}^{\frac{1+\alpha}{2}}(0,T)}+\|h\|_{\widehat{C}^{\frac{1+\alpha}{2}}(0,T)}\Big),$$

а из уравнения $u_t-u_{xx}=f$ вытекает, что

$$\sup_{\tau/2<t<t'<\tau}\ \sup_{J_t}|t-t'|^{-\alpha/2}|u_t(x,t)-u_{t'}(x,t')|\leqslant$$

$$\sup_{\tau/2<t<t'<\tau}\ \sup_{J_t}|t-t'|^{-\alpha/2}|u_{xx}(x,t)-u_{xx}(x,t')|+$$

$$\sup_{\tau/2<t<t'<\tau}\ \sup_{J_t}|t-t'|^{-\alpha/2}|f(x,t)-f(x,t')|.$$

Таким образом,

$$\big[u_t\big]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\Omega_{\tau/2,\tau}}+\big[u_x\big]^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{\Omega_{\tau/2,\tau}}+\big[u_{xx}\big]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\Omega_{\tau/2,\tau}}\leqslant$$

$$c\Big(\|f\|_{\widehat{C}^{\alpha,\alpha/2}(\Omega_{0T}}+\|g\|_{\widehat{C}^{\frac{1+\alpha}{2}}(0,T)}+\|h\|_{\widehat{C}^{\frac{1+\alpha}{2}}(0,T)}\Big). \qquad (3.13)$$

Кроме того, мы имеем

$$|u_t(x,t)|\leqslant|u_{xx}(x,t)|+|f(x,t)|,$$

$$t^{-\alpha}\sup_{J_t}|u_{xx}(\,\cdot\,,t)|+t^{-1-\alpha}\sup_{J_t}|u_x(\,\cdot\,,t)|+t^{-2-\alpha}\sup_{J_t}|u(\,\cdot\,,t)|\leqslant$$

$$\leqslant c\Big(\big[u_{xx}(\,\cdot\,,t)\big]^{(\alpha)}_{J_t}+t^{-5/2-\alpha}\big\|u(\,\cdot\,,t)\big\|_{L_2(J_t)}\Big).$$

Следовательно,

$$\sup_{\Omega_{0T}}t^{-\alpha}|u_t(x,t)|+\sup_{\Omega_{0T}}t^{-\alpha}|u_{xx}(x,t)|+$$

$$+\sup_{\Omega_{0T}}t^{-1-\alpha}|u_x(x,t)|+\sup_{\Omega_{0T}}t^{-2-\alpha}|u(x,t)|$$

также оценивается через правую часть (3.13). Объединение всех полученных оценок приводит к (1.7). Теорема 1 доказана.

Литература

1. Е. И. Ким, Г. И. Бижанова, *Исследование второй граничной задачи Стефана при малых значениях времени.* — Вестник АН Каз. ССР No. 6 (1981), 76–86.
2. A. Fasano, *A one-dimensional flow problem in porous media with hydrophile grains.* Math. Meth. Appl. Sci, to appear.
3. M. López Morales, *Primer problema de contorno para ecuaciones parabolicas lineales y no lineales.* — Revista Ciencias Matemáticas **13**, No. 1 (1992), 3–20.
4. D. Guidetti, *The parabolic mixed Cauchy–Dirichlet problem in spaces of functions which are Hölder continuous with respect to space variables.* — Atti Acad. Naz. Lincei (IX) **7**, No. 3 (1996), 161–168.
5. A. Lunardi, *Maximal space regularity in nonhomogeneous initial boundary value parabolic problem.* — Num. Funct. Anal. Optim. **10** (1989), 323–349.
6. В. А. Солонников, *Оценки решения второй начально-краевой задачи для системы Стокса в пространствах функций с непрерывными по Гёльдеру производными по пространственным переменным.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **259** (1999).
7. Г. И. Бижанова, В. А. Солонников, *О разрешимости начально-краевой задачи для параболического уравнения в весовом гельдеровском пространстве функций.* — Алгебра и анализ **5**, No. 1 (1993), 99–134.

Solonnikov V. A., Fasano A. One-dimensional parabolic problem arising in the study of some free boundary problems.

The paper is concerned with one-dimensional parabolic problem in the domain bounded by straight lines $x = 0$ and $x = kt$, $k > 0$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, with the Neumann boundary condition on the line $x = 0$ and with dynamic boundary condition on the lne $x = kt$. For the solution of this problem coercive estimate in a weighted Hölder norm is obtained. It is shown that this estimate can be useful for the analysis of parabolic free boundary problems.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 11 сентября 1999 г.