Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 269, 2000 г.

К. Малышев

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ, ДЗЕТА-РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И КОРРЕЛЯТОРЫ ТРЕТЬИХ КОМПОНЕНТ СПИНОВ В XXO-МОДЕЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Посвящается памяти А. Г. Изергина

1. Введение

В моделях, решаемых с помощью анзаца Бете [1], корреляционные функции, т.е. произведения операторов, усредненные по состоянию термодинамического равновесия, связаны с определителями Фредгольма некоторых линейных интегральных операторов. Например, одно из таких 'детерминантных' представлений было получено в [2] для простейшего двухточечного одновременного коррелятора в одномерной модели "непроницаемых" бозонов, описываемых квантовым нелинейным уравнением Шредингера с бесконечным взаимодействием. Недавно результат [2] был обобщен на случай корреляторов с несовпадающими временными аргументами [3], а также для XXO-модели Гейзенберга [4]. Детерминантные представления для корреляционных функций позволяют получить классические нелинейные интегрируемые уравнения в частных производных, описывающие эти корреляторы [5].

В свою очередь, известна возможность вычислять среднее квантового оператора при помощи представления этого среднего функциональным интегралом [6–8]. В работе [9] было предложено применить подход функционального интегрирования к вычислению статистической суммы и производящей функции статических корреляторов третьих компонент спинов в XXO и XY-моделях Гейзенберга на конечной цепочке длины M. Полученные функциональные интегралы были вычислены и привели к отве-

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 98-01-00313.

там в известной форме [10], т.е. в виде определителей конечномерных матриц размера $M \times M$. Далее, в работе [11] представления в виде определителей были получены для одновременных температурных корреляторов всех компонент локальных спинов анизотропной XY-цепочки Гейзенберга (как для конечных M, так и в термодинамическом пределе). Вычисления в [11] проведены не с помощью функционального интеграла, а с использованием интегрирования по конечному набору соответствующих грассмановых когерентных состояний.

Предложение [9] связать некоторые из детерминантных формул для XXO и XY-моделей с функциональным интегрированием выглядит привлекательно, несмотря на замечание [11] об упрощении вычислений в случае использования именно конечнократного грассманова интегрирования по когерентным состояниям. В предлагаемой работе для XXO-модели развита другая версия представления статистической суммы и производящей функции корреляторов третьих компонент спинов функциональным интегралом. При этом открывается возможность привлечь соотношения, связанные с дзета-регуляризацией функциональных интегралов, а точнее – определителей соответствующих операторов. При этом оказывается, что и в подходе функционального интеграла можно достичь существенного упрощения и большей наглядности.

В физическом контексте основные идеи дзета-регуляризации (ζ-регуляризации) были сформулированы, например, в [12, 13]. Использование ζ-регуляризации для определения регуляризованных определителей операторов (ограниченных на ортогональное дополнение к своему ядру) в математической литературе связывается с [14]. Для физики ζ-регуляризация оказалась весьма полезным средством при вычислении, например, инстантанных детерминантов [15, 16], энергии Казимира на многообразиях [17], а также для вычисления аксиальной и конформной аномалий [18]. Для физических приложений с ζ-регуляризацией можно ознакомиться по [12, 13, 19] и, более формально, по [20].

Работа организована следующим образом. Раздел 2 содержит основные обозначения и вводные замечания, касающиеся рассматриваемой XXO-модели. Представление для производящей функции корреляторов третьих компонент спинов (и, соответственно, для статистической суммы) в виде гауссова функционального интеграла получено в разделе 3. В разделе 4 предъявлена сводка наиболее важных соотношений ζ-регуляризации, и с помощью обобщенной ζ-функции в виде ряда вычислена статистическая сумма модели. В разделе 5 введена обобщенная ζ-функция в виде интеграла Меллина, и с ее помощью вычислена производящая функция корреляторов спинов. В разделе 5 также рассмотрено дифференцирование полученного интеграла по параметру, и вычислены некоторые конкретные корреляторы. Обсуждение в разделе 6 завершает работу.

2. Основные обозначения

Итак, рассмотрим XXO-модель Гейзенберга [4] на цепочке длины M (M будем предполагать четным), взятую в фермионном представлении [11]. Пусть $Q(m)$ есть оператор числа квазичастиц на первых m узлах решетки ($m \leqslant M$). Будем вычислять среднее оператора $\exp(\alpha Q(m))$ по основному состоянию модели,

$$\langle e^{\alpha Q(m)}\rangle \equiv \langle \Phi_0 \mid e^{\alpha Q(m)} \mid \Phi_0\rangle,$$

по формуле:

$$\langle e^{\alpha Q(m)}\rangle = \frac{\operatorname{Tr}\left(e^{\alpha Q(m)} e^{-\beta H_{XX}}\right)}{\operatorname{Tr}\left(e^{-\beta H_{XX}}\right)}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

где H_{XX} – гамильтониан XXO-модели, β – обратная температура и Tr означает след оператора. Используемый нами гамильтониан H_{XX} возникает в результате преобразования Йордана–Вигнера [11] от исходных матричных спиновых переменных на решетке к каноническим фермионным переменным с антикоммутационными соотношениями:

$$\{c_k, c_n\} = \{c_k^\dagger, c_n^\dagger\} = 0, \quad \{c_k, c_n^\dagger\} = \delta_{kn},$$

где $\{,\}$ – антикоммутатор. В этих обозначениях $Q(m) \equiv \sum_{k=1}^{m} c_k^\dagger c_k$.

Можно проверить [11], что H_{XX} перестановочен с оператором полного числа квазичастиц $\widehat{N} \equiv Q(M)$, а оператор четности $(-1)^{\widehat{N}}$ антикоммутирует с каноническими переменными,

$$\{(-1)^{\widehat{N}}, c_n\} = \{(-1)^{\widehat{N}}, c_n^\dagger\} = 0,$$

и перестановочен с H_{XX} как с оператором билинейным по c_n, $c_n^\dagger$. Поэтому можно ввести два проектора $P^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm (-1)^{\widehat{N}})$ такие, что с их помощью H_{XX} записывается в виде

$$H_{XX} = H^+P^+ + H^-P^-,$$
$$H^\pm = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M}(c_n^\dagger c_{n+1} + c_{n+1}^\dagger c_n) + h\widehat{N} - \frac{hM}{2}, \tag{2}$$

где $h > 0$ – внешнее магнитное поле. Индекс $^\pm$ в (2) соответствует выбору граничных условий на цепочке в следующем виде:

$$\begin{aligned} c_{M+1} &= -c_1, \quad c_{M+1}^\dagger = -c_1^\dagger \quad \text{для} \quad H^+, \\ c_{M+1} &= +c_1, \quad c_{M+1}^\dagger = +c_1^\dagger \quad \text{для} \quad H^-. \end{aligned} \tag{3}$$

Учитывая соотношения (2), (3), искомое среднее (1), т.е.

$$G(m) \equiv \frac{1}{Z}\,\mathrm{Tr}\,(e^{\alpha Q(m)}e^{-\beta H})$$

(индекс XX опускаем), будем вычислять по формулам [9, 11]:

$$G(m) = \frac{1}{2Z}(G_F^+Z_F^+ + G_F^-Z_F^- + G_B^+Z_B^+ - G_B^-Z_B^-), \tag{4.1}$$

где

$$\begin{aligned} G_F^\pm Z_F^\pm &\equiv \mathrm{Tr}\,(e^{\alpha Q(m)}e^{-\beta H^\pm}), \\ G_B^\pm Z_B^\pm &\equiv \mathrm{Tr}\,(e^{\alpha Q(m)}(-1)^{\widehat{N}}e^{-\beta H^\pm}). \end{aligned} \tag{4.2}$$

По аналогии с (4), запишем статистическую сумму $Z = \mathrm{Tr}\,(\exp(-\beta H))$ в виде

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{2}(Z_F^+ + Z_F^- + Z_B^+ - Z_B^-), \\ Z_F^\pm &= \mathrm{Tr}\,(e^{-\beta H^\pm}), \quad Z_B^\pm = \mathrm{Tr}\,((-1)^{\widehat{N}}e^{-\beta H^\pm}) \end{aligned} \tag{5}$$

(соотношения (4) сводятся к (5) при $\alpha \to 0$).

В [9] представления для $G_F^\pm Z_F^\pm$ и $G_B^\pm Z_B^\pm$ получены в виде функциональных интегралов по антикоммутирующим переменным для XXO и XY-моделей. В результате вычисления интегралов ответы возникают в виде определителей конечномерных матриц. При этом функциональная антикоммутирующая переменная интегрирования $\xi_n(\tau)$ оказывается подчиненной обычному требованию антипериодичности по мнимому времени $\tau : \xi_n(\tau) = -\xi_n(\tau+\beta)$ (n – номер узла).

В работах [7, 8], затрагивающих связь теорем об индексе с суперсимметричной квантовой механикой, содержится следующее наблюдение. Пусть a, $a^\dagger$ – фермиевские канонические операторы. Рассмотрим унитарный оператор $\mathcal{U}(1)$-преобразования $Q_\vartheta \equiv \exp(i\vartheta a^\dagger a)$, действующий на $a, a^\dagger$ следующим образом:

$$Q_\vartheta a Q_\vartheta^\dagger = e^{-i\vartheta} a, \quad Q_\vartheta a^\dagger Q_\vartheta^\dagger = e^{i\vartheta} a^\dagger.$$

Оказывается, что при вычислении $\mathrm{Tr}\,(Q_\vartheta \exp(-\beta H))$ естественно придти к функциональному интегралу от $\exp S$ (S – действие свободной модели) по переменной, подчиненной 'автоморфному' условию: $\xi(\tau) = -e^{i\vartheta}\xi(\tau+\beta)$, означающему, что при сдвиге τ на период β переменная интегрирования преобразуется по соответствующему нетривиальному представлению $\mathcal{U}(1)$. Заметим, что автоморфное граничное условие по τ уже возникало при исследовании квантово-статистических спиновых моделей методом функционального интегрирования [21].

Нетрудно заметить, что $\exp(\alpha Q(m))$ обладает аналогичным свойством:

$$e^{\alpha Q(m)} c_n e^{-\alpha Q(m)} = \left[\begin{array}{ll} e^{-\alpha} c_n, & 1 \leqslant n \leqslant m \\ c_n & m < n \leqslant M, \end{array}\right. \tag{6}$$

и при вычислении (1) можно попытаться использовать замечание [7, 8]. Автоморфное условие возникает в [21] на всех узлах рассматриваемых там моделей. Можно догадаться, что специфика при вычислении (1) окажется связанной с $m \leqslant M$, и автоморфное условие возникнет только для части узлов.

В заключение раздела введем необходимые нам когерентные состояния, отвечающие фермионным операторам c_n, $c_n^\dagger$, для которых имеется фоковский вакуум $\mid 0\rangle$:

$$c_n \mid 0\rangle = \langle 0 \mid c_n^\dagger = 0, \quad \forall n, \quad \langle 0 \mid 0\rangle = 1.$$

А именно:

$$\begin{aligned} \mid x(n)\rangle &= \exp\left\{\sum_{k=1}^{M} c_k^\dagger x_k(n)\right\} \mid 0\rangle \equiv \exp(c^\dagger x(n)) \mid 0\rangle, \\ \langle x^*(n) \mid &= \langle 0 \mid \exp\left\{\sum_{k=1}^{M} x_k^*(n) c_k\right\} \equiv \langle 0 \mid \exp(x^*(n) c), \end{aligned} \tag{7}$$

где n – дискретный индекс, принимающий значения от 1 до N, и использованы сокращенные обозначения [9, 11]: $\sum_{k=1}^{M} c_k^{\dagger} x_k \equiv c^{\dagger} x$, $\prod_{k=1}^{M} dx_k \equiv dx$, и т.д. Фактически, определены N независимых когерентных состояний, зависящих от независимых комплексно-значных грассмановых параметров $x_k^*(n)$, $x_k(n)$. Для векторов (7) имеют место соотношения:

$$c_k \mid x(n)\rangle = x_k(n) \mid x(n)\rangle, \quad \langle x^*(n) \mid c_k^{\dagger} = \langle x^*(n) \mid x_k^*(n),$$
$$\langle x^*(n) \mid x(n)\rangle = \exp(x^*(n)x(n)).$$

3. Функциональный интеграл

Перейдем к выводу представлений для (4), (5) в виде функционального интеграла. Рассмотрим для определенности

$$G_F^{\pm} Z_F^{\pm} = \int dz\, dz^* e^{z^* z} \langle z^* | e^{\alpha Q(m)} e^{-\beta H^{\pm}} | z\rangle, \tag{8}$$

где след оператора записан как интеграл по антикоммутирующим переменным [22], и определены состояния $\langle z^*|, |z\rangle$:

$$\langle z^*| = \langle 0| \exp(z^* c), \quad |z\rangle = \exp(c^{\dagger} z)|0\rangle.$$

Для перехода к функциональному интегралу разделим отрезок $[0, \beta]$ на N частей длины β/N, и представим $\exp(-\beta H^{\pm})$ в виде произведения N одинаковых сомножителей. Вставляя между этими сомножителями N разложений единицы преобразуем (8) в

$$\begin{aligned} G_F^{\pm} Z_F^{\pm} = \int dz\, dz^* \prod_{n=1}^{N} dx^*(n) dx(n) \exp\left(z^* z - \sum_{n=1}^{N} x^*(n) x(n)\right) \\ \times \langle z^* | e^{\alpha Q(m)} | x(1)\rangle \langle x^*(1) | e^{-\frac{\beta}{N} H^{\pm}} | x(2)\rangle \ldots \langle x^*(N) | e^{-\frac{\beta}{N} H^{\pm}} | z\rangle, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\mid x(n)\rangle$ и $\langle x^*(n) \mid$ определены в (7).

Используя свойства когерентных состояний, находим следующие матричные элементы:

$$\langle z^* | e^{\alpha Q(m)} | x(1)\rangle = \exp\left(e^{\alpha} \sum_{k=1}^{m} z_k^* x_k(1) + \sum_{k=m+1}^{M} z_k^* x_k(1)\right),$$

$$\langle x^*(n) | e^{-\frac{\beta}{N} H^{\pm}} | x(n+1)\rangle \underset{N \gg 1}{\simeq}$$

$$\simeq \exp\left(x^*(n)x(n+1) - \frac{\beta}{N}\,H^{\pm}(x^*(n), x(n+1))\right),$$

$$H^{\pm}(x^*(n), x(n+1)) \equiv -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{M}(x_k^*(n)x_{k+1}(n+1) + x_{k+1}^*(n)x_k(n+1)) + h\sum_{k=1}^{M} x_k^*(n)x_k(n+1) - \frac{hM}{2},$$

и, подставляя их в (9), получаем

$$G_F^{\pm}Z_F^{\pm} = \int dz\,dz^* \prod_{n=1}^{N} dx^*(n)dx(n)\,\exp\left\{\sum_{k=1}^{m} z_k^*(z_k + e^{\alpha}x_k(1)) + \sum_{k=m+1}^{M} z_k^*(z_k + x_k(1)) + x^*(1)(x(2) - x(1)) + \ldots + x^*(N)(z - x(N)) - \frac{\beta}{N}(H^{\pm}(x^*(1), x(2)) + \ldots + H^{\pm}(x^*(N), z))\right\}. \quad (10)$$

Обозначим $z \equiv x(N+1)$, $z^* \equiv e^{-\alpha}x^*(0)$, наложим условия

$$x_k(0) = -e^{-\alpha}x_k(N+1), \quad 1 \leqslant k \leqslant m,$$
$$x_k(0) = -x_k(N+1), \quad m < k \leqslant M,$$

и сделаем переход к $N \to \infty$. В результате правая часть (10) превратится в интеграл:

$$\int \prod_{\tau\in[0,\beta]} dx^*(\tau)dx(\tau)\exp\left(\int_0^{\beta} \mathcal{L}(\tau)d\tau\right), \quad (11.1)$$

где лагранжиан $\mathcal{L}(\tau)$ имеет вид:

$$\mathcal{L}(\tau) = x^*(\tau)\frac{dx}{d\tau} - H^{\pm}(x^*(\tau), x(\tau)), \quad (11.2)$$

и функциональные переменные $x(\tau)$, $x^*(\tau)$ подчинены условиям:

$$x_k(\tau) = -e^{-\alpha}x_k(\tau+\beta), \quad 1 \leqslant k \leqslant m,$$
$$x_k(\tau) = -x_k(\tau+\beta), \quad m < k \leqslant M. \quad (11.3)$$

Поля $x_k^*(\tau)$ – вообще говоря, независимые переменные интегрирования. Оказывается удобным подчинить $x_k^*(\tau)$ требованию, аналогичному (11.3), но с фактором e^α вместо $e^{-\alpha}$.

Проделанный вывод представления (11) наивно следует [8] и не учитывает специфику конкретных квадратичных гамильтонианов $H^\pm$: условия (11.3) характеризуют две независимые группы узлов, гамильтонианы же с взаимодействием между соседними узлами диагональны только в импульсном представлении. Поэтому оказывается существенным следующее (новое, по сравн., с [8, 21]) обстоятельство.

Можно считать, что как традиционные условия (анти-)периодичности $x_k(\tau) = \pm x_k(\tau+\beta)$, $k \in \{1, \dots, M\}$, так и условия (11.3), задают некоторое представление относительно сдвигов переменной τ на период $\beta : \tau \to \tau + \beta$. Действие $\int_0^\beta \mathcal{L}(\tau) d\tau$, стоящее в показателе экспоненты интеграла (11.1), является корректным объектом при условии инвариантности $\mathcal{L}(\tau)$ относительно сдвига τ. В случае стандартного условия такая инвариантность имеет место, если $\mathcal{L}(\tau)$ содержит только четные степени полей.

Используем (11.3) для вычисления приращения $\delta\mathcal{L}(\tau)$:

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}(\tau) = \mathcal{L}(\tau+\beta) - \mathcal{L}(\tau) = \\
&= \frac{1}{2}[(e^\alpha - 1)(x_{m+1}^*(\tau)x_m(\tau) + x_M^*(\tau)x_{M+1}(\tau)) + \\
&\qquad + (e^{-\alpha} - 1)(x_m^*(\tau)x_{m+1}(\tau) + x_{M+1}^*(\tau)x_M(\tau))].
\end{aligned}
$$

Причина возникновения $\delta\mathcal{L}(\tau)$ проста: циклическая квадратичная форма

$$
\sum_{k=1}^{M} (x_k^* x_{k+1} + x_{k+1}^* x_k)
$$

инвариантна при замене

$$
x_k \to \pm e^\alpha x_k, \quad x_k^* \to \pm e^{-\alpha} x_k^*, \tag{12}
$$

если $k = 1, \dots, M$ (однородное “калибровочное” преобразование) и неинвариантна, если замена (12) затрагивает только часть узлов (неоднородное преобразование). Условие (11.3) задает на переменных интегрирования неоднородное представление группы сдвигов $\tau \to \tau + \beta$, и для $\mathcal{L}(\tau)$ (11.2) инвариантность оказывается нарушенной. Эту симметрию легко восстановить в предельной формуле (11.1), заменив $H^{\pm}(x^*(\tau), x(\tau))$ на форму следующего вида:

$$\widetilde{H}^{\pm}(\tau) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{M}{}'(x^*_{k+1}(\tau)x_k(\tau) + x^*_k(\tau)x_{k+1}(\tau))$$

$$+h\sum_{k=1}^{M} x^*_k(\tau)x_k(\tau) - \frac{1}{2}\big[x^*_{m+1}(\tau)x_m(\tau)e^{-\frac{\alpha}{\beta}\tau} + x^*_m(\tau)x_{m+1}(\tau)e^{\frac{\alpha}{\beta}\tau}$$

$$+x^*_{M+1}(\tau)x_M(\tau)e^{\frac{\alpha}{\beta}\tau} + x^*_M(\tau)x_{M+1}(\tau)e^{-\frac{\alpha}{\beta}\tau}\big] - \frac{hM}{2},$$

где $\sum'$ означает, что при суммировании пропущены индексы $k = m, M$. Лагранжиан

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\tau) = x^*(\tau)\frac{dx}{d\tau} - \widetilde{H}^{\pm}(\tau)$$

инвариантен относительно $\tau \to \tau + \beta$, мера в интеграле (11.1) инвариантна как относительно однородных, так и неоднородных преобразований (12), и, окончательно, получаем:

$$G^{\pm}_F Z^{\pm}_F = \int \prod_{\tau\in[0,\beta]} dx^*(\tau)dx(\tau)\exp\left(\int_0^{\beta}\widetilde{\mathcal{L}}(\tau)d\tau\right). \qquad (13)$$

Утверждение данной работы состоит в том, что представление (13), дополненное условиями (11.3), является корректным соотношением, альтернативным представлению, полученному в [9]. Последующие вычисления подтверждают это.

Перейдем в (13) к испульсному представлению:

$$x_k(\tau) = (\beta M)^{-1/2}\sum_p e^{i(\omega\tau - i\frac{\alpha}{\beta}\tau + qk)}x_p, \quad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

$$x_k(\tau) = (\beta M)^{-1/2}\sum_p e^{i(\omega\tau + qk)}x_p, \qquad m < k \leqslant M, \qquad (14.1)$$

где $p = (\omega, q)$, и суммирование идет по мацубаровским частотам $\omega = \pi T(2n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, и по квазиимпульсам $q \in X^{\pm}$. Два множества

$$X^+ = \{q : q = -\pi + \pi(2l-1)/M\},$$
$$X^- = \{q : q = -\pi + 2\pi l/M\}, \qquad (14.2)$$

$l = 1, \ldots, M$, возникают из двух граничных условий (3). Подставим разложения (14.1) в (13), перенормируем $x_p \exp(i(m+1)q/2) \to x_p$ и получим:

$$G_F^{\pm} Z_F^{\pm} = \int \prod_{\omega_F, q \in X^{\pm}} dx_p^* dx_p \exp(S^{\pm}(\alpha)),$$
$$S^{\pm}(\alpha) = \sum_p (i\omega - \varepsilon_q) x_p^* x_p + \frac{\alpha}{\beta} \sum_{\omega, q, q'} Q_{qq'}^{(0)} x_{\omega q}^* x_{\omega q'} + \frac{Mh\beta}{2}, \tag{15.1}$$

где $\varepsilon_q = h - \cos q$ – зонная энергия квазичастиц,

$$Q_{qq'}^{(0)} = \frac{1}{M} \frac{\sin \frac{m}{2}(q - q')}{\sin \frac{q-q'}{2}}, \tag{15.2}$$

и $q, q' \in X^+$ либо X^-.

Воспользуемся известным результатом для конечнократных интегралов [22],

$$\int dx^* dx \exp(-x^* \mathcal{M} x) = \det \mathcal{M},$$

и получаем следующие формальные ответы:

$$G_F^{\pm} Z_F^{\pm} = e^{Mh\beta/2} \mathrm{Det} \left[(-i\omega_F + \varepsilon_q) \delta_{pp'} - \frac{\alpha}{\beta} \delta_{\omega\omega'} Q_{qq'}^{(0)} \right], \tag{16.1}$$

$$G_B^{\pm} Z_B^{\pm} = e^{Mh\beta/2} \mathrm{Det} \left[(-i\omega_B + \varepsilon_q) \delta_{pp'} - \frac{\alpha}{\beta} \delta_{\omega\omega'} Q_{qq'}^{(0)} \right], \tag{16.2}$$

и

$$Z_F^{\pm} = e^{Mh\beta/2} \mathrm{Det} \left[(i\omega_F - \varepsilon_q) \delta_{pp'} \right], \tag{17.1}$$

$$Z_B^{\pm} = e^{Mh\beta/2} \mathrm{Det} \left[(i\omega_B - \varepsilon_q) \delta_{pp'} \right], \tag{17.2}$$

где ω_F и ω_B – фермиевские и бозевские частоты. Здесь и ниже символ Det используется для определителя "бесконечномерных" матриц, det – для конечномерных. Модификация вычислений для (16.2) и (17.2) проводится непосредственно. Матричные операторы, возникающие в (16) и (17), удобно обозначать, соответственно, $A(\alpha) \equiv A_\alpha$ и A.

4. Дзета-регуляризация

Для придания смысла определителям (16), (17) в данной работе предлагается использовать ζ-регуляризацию [12, 13, 19, 20]. Начнем с (17). Заметим, что для статистической суммы XY-модели изменение формул незначительно [11]:

$$
\begin{aligned}
Z_F^{\pm} &\equiv \operatorname{Tr}\,(e^{-\beta H_{XY}^{\pm}}) = e^{-\beta E_0^{\pm}}\,\operatorname{Det}\,[(i\omega_F - E_q)\delta_{pp'}],\\
Z_B^{\pm} &\equiv \operatorname{Tr}\,((-1)^{\widehat{N}}\,e^{-\beta H_{XY}^{\pm}}) = e^{-\beta E_0^{\pm}}\,\operatorname{Det}\,[(i\omega_B - E_q)\delta_{pp'}],
\end{aligned}
\tag{18}
$$

где

$$
E_0^{\pm} \equiv -\frac{1}{2}\sum_{q\in X^{\pm}} E_q, \qquad E_q = (\varepsilon_q^2 + \gamma^2 \sin^2 q)^{1/2}.
$$

Займемся поэтому регуляризацией (18).

Сделаем вводные замечания. Обычно, (обобщенная) ζ-функция связана с некоторым эллиптическим оператором. А именно, пусть $\mathcal{A}$ – неотрицательный эллиптический оператор порядка $p > 0$ на компактном d-мерном гладком многообразии. Пусть его собственные значения λ_n нумеруются мульти-индексом n. Обобщенной ζ-функцией оператора $\mathcal{A}$ назовем ряд

$$
\zeta(s \mid \mathcal{A}) = \sum_{\lambda_n \neq 0} (\lambda_n)^{-s}, \tag{19}
$$

сходящийся при $\operatorname{Re} s > d/p$. Этот ряд определяет $\zeta(s \mid \mathcal{A})$ как мероморфную функцию переменной $s \in \mathbb{C}$, обладающую аналитическим продолжением в точку $s = 0$. Формальное равенство

$$
\lim_{s\to 0} \frac{d\zeta}{ds}(s \mid \mathcal{A}) = \lim_{s\to 0}\left[-\sum_{\lambda_n\neq 0}\frac{\log\lambda_n}{(\lambda_n)^s}\right] = -\log\left(\prod_{\lambda_n\neq 0}\lambda_n\right)
$$

открывает возможность определить регуляризованный определитель $\mathcal{A}$ соотношением

$$
\log \operatorname{Det} \mathcal{A} = -\zeta'(0 \mid \mathcal{A}). \tag{20}
$$

Допуская определенную вольность, частными случаями $\zeta(s \mid \mathcal{A})$ (19) можно считать ζ-функцию Римана

$$
\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \qquad \operatorname{Re} s > 1, \tag{21}
$$

и обобщенную ζ-функцию

$$\zeta(s,\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)^{-s},\quad \alpha\neq 0,-1,-2,\dots, \tag{22}$$

которые являются мероморфными функциями s, имеют простой полюс при $s=1$ с вычетом 1, и обладают продолжением в $s=0$ [23]. Заметим, что $\zeta\left(s,\frac{1}{2}\right)$ есть ζ-функция Гурвица, и $\zeta(s,1)=\zeta(s)$.

Отправляясь от (19), можно получить представление $\zeta(s\mid\mathcal{A})$ интегралом Меллина:

$$\zeta(s\mid\mathcal{A})=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{0}^{\infty}t^{s-1}[\mathrm{Tr}\,(e^{-\mathcal{A}t})-\dim(\ker\mathcal{A})]dt. \tag{23}$$

Интеграл (23) определен при достаточно больших положительных $\mathrm{Re}\,s$ (точнее, при $\mathrm{Re}\,s>d/p$); при остальных $\mathrm{Re}\,s$ требуется его аналитическое продолжение. Формулу (23) можно связать [18, 19] с определением $\mathrm{Det}\,\mathcal{A}$ регуляризацией по собственному времени [24]:

$$\log\frac{\mathrm{Det}\,\mathcal{A}}{\mathrm{Det}\,\mathcal{A}_0}=\mathrm{Tr}\left[\int_{0}^{\infty}(e^{-\mathcal{A}_0 t}-e^{-\mathcal{A}t})\frac{dt}{t}\right]. \tag{24}$$

Определения через (20), (23) и через (24) различаются на бесконечную аддитивную постоянную.

Теперь можно перейти к вычислению (18). Введем следующие ряды, которые можно выразить через $\zeta(s,\alpha)$ (22):

$$\begin{gathered}\zeta_F^{\pm}(s\mid A)\equiv\sum_{\omega_F,q\in X^{\pm}}(i\omega_F-E_q)^{-s}=\\=\left(\frac{\beta}{2\pi i}\right)^{s}\sum_{q\in X^{\pm}}\left[\zeta\left(s,\frac{1}{2}+i\frac{\beta E_q}{2\pi}\right)+(-1)^s\zeta\left(s,\frac{1}{2}-i\frac{\beta E_q}{2\pi}\right)\right],\end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered}\zeta_B^{\pm}(s\mid A)\equiv\sum_{\omega_B,q\in X^{\pm}}(i\omega_B-E_q)^{-s}=\left(\frac{\beta}{2\pi i}\right)^{s}\times\\\times\sum_{q\in X^{\pm}}\left[\zeta\left(s,i\frac{\beta E_q}{2\pi}\right)+(-1)^s\zeta\left(s,-i\frac{\beta E_q}{2\pi}\right)\right]-\sum_{q\in X^{\pm}}(-E_q)^{-s}.\end{gathered} \tag{26}$$

Аналитические продолжения для $\zeta(s,z)$ известны [23]:

$$\zeta(0,z)=\frac{1}{2}-z,\quad \zeta'(0,z)=\log\frac{\Gamma(z)}{(2\pi)^{1/2}}, \tag{27}$$

откуда получаем следующие ответы для производных в нуле:

$$\begin{aligned} -\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\zeta_F^{\pm}(s\mid A)&=\sum_{q\in X^{\pm}}\log(1+e^{c\beta E_q}),\\ -\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\zeta_B^{\pm}(s\mid A)&=\sum_{q\in X^{\pm}}\log(1-e^{c\beta E_q}),\end{aligned} \tag{28}$$

где $c=\pm1$ вследствие произвола при дифференцировании $(-1)^s=\exp(\pm i\pi s)$.

Выбирая $c=-1$ и комбинируя (20) с (28), получаем для (18) известные соотношения XY-модели:

$$\begin{aligned} Z_F^{\pm}&=e^{-\beta E_0^{\pm}}\prod_{q\in X^{\pm}}(1+e^{-\beta E_q})=\prod_{q\in X^{\pm}}2\cosh\frac{\beta E_q}{2},\\ Z_B^{\pm}&=e^{-\beta E_0^{\pm}}\prod_{q\in X^{\pm}}(1-e^{-\beta E_q})=\prod_{q\in X^{\pm}}2\sinh\frac{\beta E_q}{2}.\end{aligned} \tag{29}$$

Полная статистическая сумма вычисляется по формуле (5), свободная энергия есть $F=-(1/\beta M)\log Z$, и произвол в выборе c не сказывается на намагниченности $M_z=-\partial F/\partial h$ и энтропии $S=-\partial F/\partial T$. В частности, в термодинамическом пределе

$$F=-\frac{1}{2\pi\beta}\int\limits_0^{\pi}\log(2(1+\cosh\beta E_q))dq. \tag{30}$$

Использование интегральных представлений для $\log(\Gamma(z)/(2\pi)^{1/2})$ ([23], формулы Бине, Куммера и др.) приводит к новым интегральным представлениям для F. Все представленные формулы сводятся к XXO-модели в пределе $\gamma\to 0$.

Заметим также следующее. Мы ввели суммы (25), (26), заведомо сходящиеся при достаточно больших $|s|$, которые можно считать определениями обобщенных ζ-функций, соответствующих матричным операторам $A=(i\omega-E_q)\delta_{pp'}$, возникающим в (17), (18). Сводя эти ζ-функции к $\zeta(s,\alpha)$, удается получить регуляризованные детерминанты по формуле (20). Иными словами, введение $\zeta_F^{\pm}(s\mid A)$, $\zeta_B^{\pm}(s\mid A)$ – формальная точка зрения. На практике, конечно, можно сразу записать искомые определители диагональных матриц как бесконечные произведения

$$\prod_{\omega_F,\, q\in X^\pm} (i\omega_F - E_q), \qquad \prod_{\omega_B,\, q\in X^\pm} (i\omega_B - E_q).$$

Данные произведения можно вычислить, регуляризуя бесконечные множители с помощью известных продолжений для (21), (22):

$$\begin{aligned} \prod_{n\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \left(\frac{2\pi}{\beta}\, n\right)^2 &= \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{4\zeta\left(0,\frac{1}{2}\right)} e^{-4\zeta'(0,\frac{1}{2})} = 4, \\ \prod_{n\in\mathbb{Z}^+} \left(\frac{2\pi}{\beta}\, n\right)^2 &= \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{2\zeta(0)} e^{-2\zeta'(0)} = \beta. \end{aligned} \tag{31}$$

Здесь мы пользуемся

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta'(0) = -\frac{\log 2\pi}{2} \tag{32}$$

(т.е., (27) при $z = 1$), и снова приходим к (29)*. Интересно отметить, что соотношения (31) заслужили упоминание в [25] (ответ к упражнению FP15, с. 676–678).

5. Определители операторов $A(\alpha)$

5.1. Регуляризация ζ-функцией.

В предыдущем разделе ζ-функции (25), (26), отвечающие матричным операторам A (17), (18), определены как ряды. Для вычисления регуляризованных детерминантов недиагональных операторов $A(\alpha)$ (16) воспользуемся интегралом (23). Рассмотрим, например, (16.1) и вычислим $G_F^\pm$.

Запишем формальный интеграл

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \mathrm{Tr}\, \left[e^{(i\omega_F - \widehat{\varepsilon} + \frac{\alpha}{\beta}\widehat{Q})t} \right] dt, \tag{33}$$

где $\widehat{\varepsilon}$ и $\widehat{Q}$ означают матрицы в импульсном пространстве, соответственно, $\mathrm{diag}\,\{\varepsilon_q\}$ и $Q^{(0)}_{pq}$ (15.2), а индексы p, q независимо

*См. Приложение.

пробегают множества X^+ или X^-. Сходимость интеграла (33) на верхнем пределе обеспечена при $h > h_c = 2$ (h_c – критическое магнитное поле [4]). На нижнем пределе требуется регуляризация.

Воспользуемся асимптотическим соотношением

$$\mathrm{Tr}\,\left[e^{(i\omega_F-\widehat{\varepsilon}+\frac{\alpha}{\beta}\widehat{Q})t}\right]\xrightarrow[t\to 0]{}\phi_0,$$

где $\phi_0 \equiv \phi_0(A_\alpha)$ – бесконечная постоянная, равная $\mathrm{Tr}\,(\delta_{pp'}) \equiv \sum_{\omega_F}\mathrm{tr}\,(\widehat{\delta})$ ($\widehat{\delta}$ – единичная матрица размера $M\times M$), и определим функцию $\rho(t)$:

$$\rho(t)\equiv \mathrm{Tr}\,\left[e^{(i\omega_F-\widehat{\varepsilon}+\frac{\alpha}{\beta}\widehat{Q})t}\right]-\phi_0,\quad t\in[0,1[. \tag{34}$$

Разобьем интеграл (33) на две части и запишем его с помощью (34) так:

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int\limits_1^\infty t^{s-1}\mathrm{Tr}\,\left[e^{(i\omega_F-\widehat{\varepsilon}+\frac{\alpha}{\beta}\widehat{Q})t}\right]dt+\frac{1}{\Gamma(s)}\int\limits_0^1 t^{s-1}\rho(t)dt+\frac{\phi_0}{s\Gamma(s)}. \tag{35}$$

Функция $\rho(t)$ есть формальный ряд по степеням t^n, $n\geqslant 1$. Кроме того,

$$\frac{1}{s\Gamma(s)}\simeq 1+\gamma s+o(s),\quad \gamma=-\psi(1), \tag{36}$$

где $\psi(z)=(d/dz)\log\Gamma(z)$. Следовательно, выражение (35), аналитичное при $s\to 0$, определяет аналитическое продолжение (33) при всех $\mathrm{Re}\,s\geqslant 0$, и именно его можно считать определением ζ-функции $\zeta_F^{\pm}(s\mid A_\alpha)$ в правой полуплоскости $\mathbb{C}\ni s$.

Рассмотрим теперь вопрос о постоянной ϕ_0 и о коэффициентах, характеризующих $\rho(t)$. В случае дифференциальных операторов на многообразиях эти числа (коэффициенты Сили) оказываются ненулевыми [18–20]. В нашем случае эти коэффициенты бесконечны, однако им могут быть приписаны с помощью (21), (22) конечные значения.

Во-первых, с использованием (32) имеем:

$$\phi_0=M\sum_{\mathbb{Z}}1=M(2\zeta(0)+1)=0,$$

где $\sum_{\mathbb{Z}}$ может быть заменена на $\sum_{\mathbb{Z}+\frac12}$, и $2\zeta(0)+1$ – на $2\zeta\left(0,\frac12\right)$ („ζ-регуляризованная мощность" множества $\mathbb{Z}$ есть нуль). Далее, расходимость коэффициентов при степенях t в $\rho(t)$ определяется расходящимися суммами

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} n^m.$$

При нечетных m такие суммы разумно считать, по нечетности величин $\left(l+\frac{1}{2}\right)^m$, нулями (в качестве наводящего соображения можно вычислить $\mathrm{Tr}\,(i\omega-\widehat{\varepsilon}+\frac{\alpha}{\beta}\,\widehat{Q})$, рассматривая $\sum_\omega(i\omega-\varepsilon_q+\frac{\alpha}{\beta}\,Q^{(0)}_{qq})^{-s}$ при $s=-1$). Если $m=2k$, $k=1,2,\ldots$, то

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} n^m = 2\sum_{l=0}^{\infty}\left(l+\frac{1}{2}\right)^m = 2\zeta\left(-2k,\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2^{2k}}-1\right)\zeta(-2k).$$

Но $\zeta(-2k)=0$ при $k\geqslant 1$. Можно считать, что для рассматриваемого оператора $A(\alpha)$, ζ-регуляризованные коэффициенты Сили суть нули, и, фактически, в (35) имеет значение только первое слагаемое.

Воспользуемся (36) и перейдем от (35) к соотношению

$$\begin{aligned}&-\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\zeta_F^{\pm}(s\mid A_\alpha)\\&=-\int\limits_1^{\infty}\mathrm{tr}\,\left[e^{(-\widehat{\varepsilon}+\frac{\alpha}{\beta}\widehat{Q})t}\right]\left(\sum_{\omega_F}e^{i\omega_F t}\right)\frac{dt}{t}-\int\limits_0^1\rho(t)\frac{dt}{t}-\gamma\phi_0,\end{aligned}\tag{37}$$

где можно использовать формулу Пуассона для суммирования по ω_F. Тогда правая часть (37) принимает вид:

$$-\mathrm{tr}\,\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\left(e^{-\beta\widehat{\varepsilon}+\alpha\widehat{Q}}\right)^k-\int\limits_0^1\rho(t)\frac{dt}{t}-\gamma\phi_0$$

$$=\log\det\left(1+e^{-\beta\widehat{\varepsilon}+\alpha\widehat{Q}}\right)-\int\limits_0^1\rho(t)\frac{dt}{t}-\gamma\phi_0.$$

Учтем также, что матрица $\widehat{Q}$ обладает свойством $\widehat{Q}^2=\widehat{Q}$ и поэтому $e^{\alpha\widehat{Q}} - 1 = (e^{\alpha} - 1)\widehat{Q}$. Следовательно,

$$G_F^{\pm} = \frac{\mathrm{Det}\ \left[(i\omega_F - \varepsilon_q)\delta_{pp'} + \frac{\alpha}{\beta}\,\delta_{\omega\omega'}Q^{(0)}_{qq'}\right]}{\mathrm{Det}\left[(i\omega_F - \varepsilon_q)\delta_{pp'}\right]}$$
$$= \det\left[1 + (e^{\alpha} - 1)\widehat{Q}(1 + e^{\beta\widehat{\varepsilon}})^{-1}\right].$$

Для $G_F^{\pm}$, т.е. для отношения определителей, регуляризация $\rho(t)$ и ϕ_0 не имеет значения. Действуя аналогично изложенному, получаем:

$$G_B^{\pm} = \det\left[1 + (e^{\alpha} - 1)\widehat{Q}(1 - e^{\beta\widehat{\varepsilon}})^{-1}\right].$$

5.2. Дифференцирование определителей.

При вычислении корреляторов третьих компонент спинов (оператор третьей компоненты спина на узле $\sigma_z^{(m)}$, как и другие локальные спиновые операторы определены, например, в [4]) приходится вычислять производные по α от (1) в точке $\alpha = 0$, т.е.

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{d^n}{d\alpha^n}\,G(m).$$

Фактически, имея ввиду предложенное представление (33), (37), достаточно научиться вычислять только первую производную. Остальные дифференцирования будут проходить как обычные дифференцирования конечномерных матриц.

Рассматриваемые операторы $A(\alpha)$ линейны по α: $A(\alpha) \equiv A_1 + \alpha A_2$. Вычислим первую производную по α от определителя $\mathrm{Det}\,A(\alpha)$, используя формальный интеграл (33):

$$\frac{(d/d\alpha)\mathrm{Det}\,A(\alpha)}{\mathrm{Det}\,A(\alpha)} = -\frac{d}{d\alpha}\left(\int\limits_0^{\infty}\mathrm{Tr}\,(e^{A(\alpha)t})\frac{dt}{t}\right) \tag{38}$$

(для дифференцирования по параметру регуляризация при $t \searrow 0$ несущественна). В духе леммы Рэя–Зингера–Шварца [14, 26] используем в (38) следующее равенство:

$$\frac{d}{d\alpha}(\mathrm{Tr}\,(e^{A(\alpha)t})) = t\frac{d}{dt}\,\mathrm{Tr}\,(B(\alpha)e^{A(\alpha)t}), \quad B(\alpha) \equiv A_2A^{-1}(\alpha).$$

Тогда интеграл по t берется и получаем:

$$\frac{(d/d\alpha)\mathrm{Det}\,A_\alpha}{\mathrm{Det}\,A_\alpha} = \mathrm{Tr}\,B(\alpha)$$
$$= \mathrm{Tr}\left(\frac{\widehat{Q}}{\beta}(i\omega_F - \widehat{\varepsilon} + \frac{\alpha}{\beta}\widehat{Q})^{-1}\right) = \mathrm{tr}\,(\widehat{Q}(1+e^{\beta\widehat{\varepsilon}-\alpha\widehat{Q}})^{-1}), \quad (39)$$

где при суммировании по частотам использована формула Коши для матриц [27]. Зная (39), можно вычислить все нужные производные:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{(d/d\alpha)\mathrm{Det}\,A_\alpha}{\mathrm{Det}\,A_\alpha} = \mathrm{tr}\,(\widehat{Q}(1+e^{\beta\widehat{\varepsilon}})^{-1}),$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{(d^2/d\alpha^2)\mathrm{Det}\,A_\alpha}{\mathrm{Det}\,A_\alpha} = \mathrm{tr}\,(\widehat{Q}(1+e^{\beta\widehat{\varepsilon}})^{-1}) + \quad (40)$$

$$+\mathrm{tr}^{\,2}(\widehat{Q}(1+e^{\beta\widehat{\varepsilon}})^{-1}) - \mathrm{tr}\,(\widehat{Q}(1+e^{\beta\widehat{\varepsilon}})^{-1}\widehat{Q}(1+e^{\beta\widehat{\varepsilon}})^{-1}),$$

и т.д.

В завершение раздела, используем полученные формулы для вычисления средних $\langle\sigma_z^{(m)}\rangle$ и $\langle\sigma_z^{(m+1)}\sigma_z^{(1)}\rangle$. Для этого перепишем (40):

$$\langle Q(m)\rangle = \frac{m}{M}\sum_q (1+e^{\beta\varepsilon_q})^{-1}, \quad (41)$$

$$\langle Q^2(m)\rangle = \frac{m}{M}\sum_q (1+e^{\beta\varepsilon_q})^{-1} + \frac{m^2}{M^2}\left[\sum_q (1+e^{\beta\varepsilon_q})^{-1}\right]^2$$
$$-\sum_{p,q}(Q_{pq}^{(0)})^2(1+e^{\beta\varepsilon_p})^{-1}(1+\varepsilon^{\beta\varepsilon_q})^{-1}. \quad (42)$$

Из (41) получаем в термодинамическом пределе:

$$\sigma_z \equiv \langle\sigma_z^{(m)}\rangle = 1 - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{dq}{1+e^{\beta\varepsilon_q}}, \quad (43)$$

где используются определения

$$\langle\sigma_z^{(m)}\rangle = 1 - 2\mathcal{D}_1\langle Q(m)\rangle$$

и $\mathcal{D}_1 f(m) = f(m) - f(m-1)$. Результат (43) согласуется с намагниченностью $\mathcal{M}_z = -\partial F/\partial h$, вычисляемой с помощью F (30). Из (42) получаем:

$$\langle \sigma_z^{(m+1)} \sigma_z^{(1)} \rangle = \sigma_z^2 - \frac{1}{\pi^2} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} dq \frac{e^{imq}}{1 + e^{\beta \varepsilon_q}} \right|^2 ,$$

где используем определения

$$\langle \sigma_z^{(m+1)} \sigma_z^{(1)} \rangle = 2\mathcal{D}_2 \langle Q^2(m) \rangle + 2\sigma_z - 1$$

и $D_2 f(m) = f(m+1) - 2f(m) + f(m-1)$. Полученные ответы правильно воспроизводят результат [4], и, таким образом, оправдывают выбранную стратегию, вытекающую из функционального определения (11.3), (13).

6. Обсуждение

В работе получено представление функциональным интегралом для статистической суммы и для производящей функции статических корреляторов третьих компонент спинов в XXO-модели Гейзенберга. Работа примыкает к публикациям [7, 8, 21], в которых получены статистические суммы некоторых одномерных решеточных моделей в виде функциональных интегралов по полям, преобразующимся “автоморфно” при сдвиге мнимого времени на период. Отличие данной работы от [7, 8, 21] состоит в том, что автоморфное граничное условие по мнимому времени возникает только для части узлов (несколько первых) M-узельной модели. Полученное функциональное представление отличается от предложенного в [9], где переменные интегрирования подчинены обычным условиям фермион/бозонного типа.

Регуляризация гауссовых функциональных интегралов выполнена с использованием обобщенных дзета-функций соответствующих бесконечномерных матричных операторов. При этом удается достичь, по сравнению с [9], определенного технического упрощения: в [9] регуляризуемый интеграл домножается и делится на вспомогательный конечнократный грассманов интеграл, и дважды сдвигаются переменные интегрирования. Достигнутое упрощение, по-видимому, ослабляет (по крайней мере для рассмотренных случаев) возражение [11] о неудобстве функционального представления. Кроме того показано, что с практической точки зрения (т.е. если требуются только производные по параметру) можно обойти ответ в виде определителя конечномерной матрицы и сразу придти (даже не интересуясь регуляризацией интеграла Меллина) к формуле для первой производной производящей функции. Предложенное функциональное представление делает более прозрачной связь вычисляемых объектов также и с конечнократным грассмановым интегрированием [11].

В заключение, автору приятно поблагодарить Н. М. Боголюбова, П. Г. Зографа, В. С. Капитонова и П. П. Кулиша за замечания, высказанные в адрес данной статьи.

Приложение

Стоит отметить еще один способ получить (29) для XXO-модели. Действительно, пользуясь (13) при $\alpha = 0$, запишем $Z_F^{\pm}$ в "частотно-узельном" представлении:

$$Z_F^{\pm} = \prod_{\omega_F} \det \begin{pmatrix} a & c & & & & & \pm c \\ c & a & c & & & & \\ & c & a & c & & & \\ & & & \dots & \dots & & \\ & & & & c & a & c \\ \pm c & & & & & c & a \end{pmatrix},$$

где $a = i\omega_F - h$ и $c = 1/2$. Определитель матрицы $M \times M$ вычисляется и получаем

$$Z_F^{\pm} = \prod_{\omega_F} 2^{1-M}(T_M(a) \mp 1),$$

где T_M – многочлен Чебышева первого рода [23], и $T_M(\cos\theta) = \cos M\theta$. Множества $X^{\pm}$ (14.2) определяются уравнением $\cos Mq = \pm 1$, и поэтому $\cos q$ является корнем многочлена $T_M \mp 1$ при $q \in X^{\pm}$. Поэтому получаем:

$$Z_F^{\pm} = 2^{2\zeta(0,1/2)(1-M)} \prod_{\omega_F, q \in X^{\pm}} (i\omega - h + \cos q),$$

и, с учетом (27), снова приходим к (29) для XXO случая. Аналогично для $Z_B^{\pm}$ и, с некоторыми усложнениями, для $G_F^{\pm}$, $G_B^{\pm}$, где также проходит формальное вычисление в "узельном" представлении, и ответы содержат многочлены Чебышева первого и второго родя.

Литература

1. Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи.* М., Наука (1992).

   V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum inverse scattering method and correlation functions.* Cambridge University Press, 1993.
2. A. Lenard, *One-dimensional impenetrable bosons in thermal equilibrium.* J. Math. Phys., **7**, No. 7 (1966), 1268–1272.

   A. Lenard, *Momentum distribution in the ground state of the one-dimensional system of impenetrable bosons.* J. Math. Phys., **5**, No. 7 (1964), 930–943.
3. V. E. Korepin, N. A. Slavnov, *The time dependent correlation function of an impenetrable Bose gas as a Fredholm minor.* Comm. Math. Phys., **129**, No. 1 (1990), 103–113.
4. F. Colomo, A. G. Izergin, V. E. Korepin, V. Tognetti, *Correlators in the Heisenberg XXO chain as Fredholm determinants.* Phys. Lett. A, **169**, No. 4 (1992), 243–247.

   F. Colomo, A. G. Izergin, V. E. Korepin, V. Tognetti, *Temperature correlation functions in the XXO Heisenberg chain. I.* Теор. Мат. Физ., **94**, No. 1 (1993), 19–51.
5. A. R. Its, A. G. Izergin, V. E. Korepin, *Correlation radius for one-dimensional impenetrable bosons.* Phys. Lett. A, **141**, No. 3/4 (1989) 121–124.

   A. R. Its, A. G. Izergin, V. E. Korepin, *Temperature correlators of the impenetrable Bose gas as an integrable system.* Comm. Math. Phys., **129**, No. 1 (1990), 205–222.

   A. R. Its, A. G. Izergin, V. E. Korepin, N. A. Slavnov, *Differential equations for quantum correlation functions.* Int. J. Mod. Phys. B, **4**, No. 5 (1990), 1003–1037.

   A. G. Izergin, A. R. Its, V. E. Korepin, N. A. Slavnov, *The matrix Riemann-Hilbert problem and differential equations for correlation functions of the XXO Heisenberg chain.* Алгебра и Анализ, **6**, No. 2 (1994), 315–326.
6. А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей.* М., Наука, 1978, (с изм.) 1988.
7. L. Alvarez-Gaumé, *A note on the Atiyah–Singer index theorem.* J. Phys. A: Math. Gen., **16**, No. 18 (1983), 4177-4182.

   L. Alvarez-Gaumé, *Supersymmetry and the Atiyah–Singer index theorem.* Comm. Math. Phys., **90**, No. 2 (1983), 161–173.
8. L. Alvarez-Gaumé, *Supersymmetry and index theory.* In: Supersymmetry, NATO ASI Ser., vol. 125, Eds. K. Dietz et.al. (Plenum, New York, 1985) pp. 1–44.
9. В. С. Капитонов, К. Н. Ильинский, *Функциональное представление для корреляторов спиновых цепочек.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **224** (1995), 192–207.
10. А. Г. Изергин, Н. А. Китанин, Н. А. Славнов, *О корреляционных функциях XY-модели.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **224** (1995), 178–191.
11. А. Г. Изергин, В. С. Капитонов, Н. А. Китанин, *Одновременные температурные корреляторы одномерной XY-цепочки Гейзенберга.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **245**, (1997), 173–206.

12. S. W. Hawking, *Zeta function regularization of path integrals in curved spacetime.* Comm. Math. Phys., **55**, No. 2 (1977), 133–148.

J. S. Dowker, R. Critchley, *Effective Lagrangian and energy-momentum tensor in de Sitter space.* Phys. Rev. D, **13**, No. 12 (1976), 3224–3232.

13. С. Хокинг, *Интегралы по траекториям в приложении к квантовой гравитации.* В сб.: Общая теория относительности, под ред. С. Хокинга, В. Израэля, М., Мир (1983), сс. 363–406.

Б. С. Де Витт, *Квантовая гравитация: новый синтез.* ibid., сс. 296–362.

14. D. B. Ray, I. M. Singer, *R-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds.* Adv. Math., **7**, No. 2 (1971), 145–210.

15. E. Corrigan, P. Goddard, H. Osborn, S. Templeton, *Zeta-function regularization and multi-instanton determinants.* Nucl. Phys. B, **159**, No. 3 (1979) 469–496.

H. Osborn, *Calculation of multi-instanton determinants.* Nucl. Phys. B, **159**, No. 3 (1979), 497–511.

16. A. S. Schwarz, *Instantons and fermions in the field of instanton.* Comm. Math. Phys., **64**, No. 3 (1979), 233–268.

17. B. P. Dolan, Ch. Nash, *Zeta function continuation and the Casimir energy on odd and even dimensional spheres.* Comm. Math. Phys., **148**, No. 1 (1992), 139–153.

R. Kantowski, K. A. Milton, *Casimir energies in $M^4 \times S^N$ for even N. Green's-function and zeta-function techniques.* Phys. Rev. D., **36**, No. 12 (1987), 3712–3721.

18. В. Н. Романов, А. С. Шварц, *Аномалии и эллиптические операторы.* Теор. Мат. Физ., **41**, No. 2 (1979), 190–204.

19. А. С. Шварц, *Квантовая теория поля и топология.* М., Наука (1989).

20. А. С. Шварц, *Эллиптические операторы в квантовой теории поля.* В сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, под ред. Р. В. Гамкрелидзе, т. 17, М., ВИНИТИ, 1981, сс. 113–173.

J. B. Bost, *Fibrés déterminants, déterminants regularisés et mesures sur les espaces de modules des courbes complexes.* In: Séminaire Bourbaki, 1986-87, Astérisque 152–153 (1987), pp. 113–149.

21. В. Н. Попов, С. А. Федотов, *Метод функционального интегрирования и диаграммная техника для спиновых систем.* ЖЭТФ, **94**, No. 3 (1988), 183–194.

22. Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантовая.* М., Наука (1986).

23. W. Magnus, F. Oberhettinger, R. P. Soni, *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics.* Springer, Berlin etc. (1966).

24. В. А. Фок, *Собственное время в классической и квантовой механике.* Изв. АН СССР, сер. физ., No. 4–5 (1937), 551–568.

J. Schwinger, *On gauge invariance and vacuum polarization.* Phys. Rev., **82**, No. 5 (1951), 664–679.

25. *Quantum fields and strings: A Course for mathematicians.* vol. 1, eds. P. Deligne, et al., Amer. Math. Soc., Inst. Adv. Studies, 1999.

26. A. S. Schwarz, *The partion function of degenerate quadratic functional and Ray–Singer invariants.* Lett. Math. Phys., **2**, No. 3 (1978), 247–252.

27. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* М., Наука (1988).

Malyshev K. Functional integration, zeta regularization and correlators of third components of spins in the XXO-Heisenberg model.

New representation for the generating function of static correlators of third components of spins in the XXO-Heisenberg model is advanced in the form of Gaussian functional integral. The generating function, as well as the partition function of the model, are calculated by means of zeta regularization procedure. Formulas for certain correlation functions at nonzero temperature are obtained.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 28 февраля 2000 г.