Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 269, 2000 г.

В. С. Капитонов, А. Г. Пронько

РАЗНОВРЕМЕННЫЕ КОРРЕЛЯТОРЫ ЛОКАЛЬНЫХ СПИНОВ В ОДНОМЕРНОЙ XY–ЦЕПОЧКЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Посвящается светлой памяти
Анатолия Георгиевича Изергина

Введение

В моделях, решаемых с помощью анзаца Бете, описание корреляционных функций основано на их представлении (в термодинамическом пределе) в виде определителей Фредгольма линейных интегральных операторов. Представления такого рода были впервые получены в работах [1, 2] для простейших двухточечных одновременных корреляторов модели одномерных "непроницаемых" бозонов. В дальнейнем они были обобщены на случай разновременных корреляторов, как в моделях, являющихся "точкой сводобных фермионов" моделей, решаемых анзацем Бете (непроницамемые бозоны [3] и изотропная XXO цепочка Гейзенберга [4, 5], так и в случае конечного взаимодействия ([6, 7] для одномерного бозе-газа и [8] для XXZ цепочки). Такого рода представления позволяют получить классические интегрируемые уравнения в частных производных для корреляторов [9–13], которые могут быть использованы, в частности, для получения асимптотических разложений корреляционных функций на больших временах и расстояниях [10, 12, 14, 15].

Следует отметить, что естественность языка классических дифференцальных уравнений для описания корреляционных функций квантовых точно решаемых моделей была осознана уже давно [16–18]. Недавний прогресс в этом направлении, на примере модели непроницаемых бозонов, основанный на подходе, разработанном в работах [10–15], подробно описан в книге [19]. Главное при этом – рассмотрение определителя Фредгольма линей-

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 98-01-00313).

ного оператора, возникающего в представлении корреляторов, как тау-функции для новой системы классических интегрируемых уравнений (см. также работу [9]). Эти линейные интегральные операторы должны быть весьма специального вида – так называемые "интегрируемые" интегральные операторы (см. [19, 20]).

В настоящей работе мы получаем представления в виде определителей для разновременных температурных корреляторов анизотропной XY цепочки Гейзенберга, как для цепочки с конечным числом узлов, так и в термодинамическом пределе. Эта модель была введена и впервые исследована в работе [21]. С тех пор она изучалась многими авторами (см. [22–25] и ссылки в этих работах).

Для вычисления корреляционных функций мы используем видоизменение подхода, предложенного в работе [26] и основанного на использовании интегрирования по грассмановым переменным и соответствующих когерентных состояний. Метод, который используется в настоящей работе, был сформулирован и использован в работе [27] для вычисления одновременных температурных корреляторов анизотропной XY цепочки Гейзенберга. Как было замечено в работе [27], использование когерентных состояний принципиально упрощает вычисления, автоматически приводя к ответам в нужной форме (см., например, приложение работы [27], где воспроизведены этим методом результаты работ [4, 5, 28] для XXO цепочки).

Полученные в настоящей работе представления для разновременных температурных корреляторов анизотропной XY цепочки в виде определителей матриц размерности $2M \times 2M$ являются непосредственным обобщением представлений для изотропного случая. При занулении константы анизотропии, матрицы размерности $2M \times 2M$ автоматически приводятся к блочно-диагональному виду, воспрозводя хорошо известные ответы [4, 5, 28] для изотропной XXO цепочки. С другой стороны, полученные нами представления обобщают результаты для анизотропной цепочки, полученные в работе [27] для одновременных температурных корреляторов, редуцируясь аналогичным способом к определителям матриц резмерности $M \times M$.

В термодинамическом пределе, корреляционные функции представляются в виде определителей Фредгольма линейных интегральных операторов с 2×2 матричным ядром. При этом "интегрируемость" возникающих в термодинамическом пределе интегральных операторов является очевидной. Структура матричных ядер интегральных операторов в точности повторяет ответы для изотропного случая, а именно, функции, входящие в определение "интегрируемого" интегрального оператора для изотропного случая заменяются на 2×2 матрицы-функции в анизотропном случае.

Отметим, что изотропная XXO цепочка представляет собой "точку свободных фермионов" для XXZ цепочки Гейзенберга – модели, решаемой с помощью стандартного анзаца Бете. В анизотропном случае XY цепочка является "линией" свободных фермионов для XYZ цепочки – модели, где обычный анзац Бете не работает. Поэтому интересен тот факт, что ответы для корреляторов XY цепочки в термодинамическом пределе имеют вид простых матричных деформаций ответов для изотропного случая. Для одновременных корреляторов эта деформация сводится к простой модификации фермиевского веса [27].

Заметим, что в работах [30, 31] была сделана попытка вычисления разновременных корреляционных функций XY цепочки. Однако, результаты этих работ не воспрозводят известные ответы [4, 5, 28] для разновременных корреляторов в изотропном случае.

В разделе 1 мы описываем модель и приводим основные сведения о диагонализации ее гамильтониана с помощью преобразования Боголюбова, основываясь здесь, в основном на классических работах [21, 23]. В разделе 2, следуя работе [27], вводятся грассмановы когерентные состояния и предъявляются формулы для матричных элементов операторов между этими состояниями. Раздел 3 посвящен последовательному вычислению вкладов в корреляторы на конечной цепочке длины M, нетривальные части которых представляются в виде определителей матриц размерности $2M \times 2M$. В разделе 4 проводится исследование полученных представлений в термодинамическом пределе и выводится представление для корреляторов в форме определителей Фредгольма линейных интегральных операторов с матричным ядром. В Заключении резюмируются полученные результаты. Наконец, в Приложении кратко представлены основные сведения о грассмановых когерентных состояниях.

1. XY цепочка Гейзенберга

Гамильтониан анизотропной XY цепочки Гейзенберга, описывающий взаимодействие ближайших соседей – спинов 1/2, расположенных в узлах одномерной циклической решетки в постоянном магнитном поле h, имеет вид

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \gamma \mathbf{H}_1 - h\mathbf{S}^z, \tag{1.1}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 &= -\sum_{m=1}^{M} \left(\sigma_m^+ \sigma_{m+1}^- + \sigma_m^- \sigma_{m+1}^+ \right), \\ \mathbf{H}_1 &= -\sum_{m=1}^{M} \left(\sigma_m^+ \sigma_{m+1}^+ + \sigma_m^- \sigma_{m+1}^- \right), \end{aligned} \tag{1.2}$$

а третья компонента полного спина есть

$$\mathbf{S}^z = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{M} \sigma_m^z. \tag{1.3}$$

Число узлов решетки M предпологается четным. Матрицы Паули $\sigma^{\pm}$, σ^z, определяются как обычно

$$\sigma_m^{\pm} := \frac{\sigma_m^1 \pm i\sigma_m^2}{2}, \qquad \sigma^z := \sigma^3, \tag{1.4}$$

причем

$$[\sigma_m^\alpha, \sigma_n^\beta] = 2i\delta_{mn}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}, \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3). \tag{1.5}$$

Периодические граничные условия (цикличность решетки) означают, что

$$\sigma_{m+M}^\alpha \equiv \sigma_m^\alpha, \tag{1.6}$$

для любого $m = 1, \ldots, M$ и $\alpha = 1, 2, 3$. Вещественный параметр γ является параметром анизотропии; изотропный случай $\gamma = 0$ известен как $XX0$ магнетик Гейзенберга.

Заметим, что благодаря симметриям гамильтониана, знак магнитного поля (так же, как и общий знак гамильтониана) не является существенным. В дальнейшем мы полагаем $h \geq 0$.

Преобразование Йордана–Вигнера,

$$\begin{aligned} a_m &:= \exp\{i\pi\mathbf{Q}(m-1)\}\, \sigma_m^+, \\ a_m^\dagger &:= \sigma_m^- \, \exp\{-i\pi\mathbf{Q}(m-1)\}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

вводит канонические фермионные поля a_m, $a_m^\dagger$ на решетке,

$$[a_m, a_n^\dagger]_+ = \delta_{nm}, \qquad [a_m, a_n]_+ = [a_m^\dagger, a_n^\dagger]_+ = 0, \tag{1.8}$$

где $[\ ,\ ]_+$ означает антикоммутатор. Оператор $\mathbf{Q}(m)$ – это оператор числа квазичастиц в первых m узлах решетки,

$$\mathbf{Q}(m) = \sum_{j=1}^{m} q_j, \tag{1.9}$$

где q_m есть локальный оператор плотности,

$$q_m = a_m^\dagger a_m = \sigma_m^- \sigma_m^+ = \frac{1 - \sigma_m^z}{2}. \tag{1.10}$$

Оператор полного числа квазичастиц

$$\mathbf{N} := \mathbf{Q}(M) \tag{1.11}$$

коммутирует с операторами $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{S}^z$, но не с оператором $\mathbf{H}_1$, и потому гамильтониан $\mathbf{H}$ не сохраняет число “a-фермионов”. Однако, оператор $(-1)^{\mathbf{N}} := \exp\{\pm i\pi\mathbf{N}\}$, антикоммутирующий с операторами рождения и уничтожения,

$$[(-1)^{\mathbf{N}}, a_m^\dagger]_+ = [(-1)^{\mathbf{N}}, a_m]_+ = 0, \tag{1.12}$$

коммутирует с любым билинейным по $a^\dagger$, a оператором, и в частности, с гамильтонианом,

$$[(-1)^{\mathbf{N}}, \mathbf{H}] = 0. \tag{1.13}$$

Периодические граничные условия (1.6) для спинов приводят к следующим условиям для фермионов:

$$a_{M+1} = (-1)^{\mathbf{N}} a_1, \qquad a_{M+1}^\dagger = a_1^\dagger (-1)^{\mathbf{N}}. \tag{1.14}$$

При помощи проекторов $\mathbf{P}^\pm$,

$$\mathbf{P}^\pm := \frac{1}{2}(1 \pm (-1)^{\mathbf{N}}), \tag{1.15}$$

гамильтиниан (1.1) переписывается как

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^+\mathbf{P}^+ + \mathbf{H}^-\mathbf{P}^-, \tag{1.16}$$

где оба оператора $\mathbf{H}^{\pm}$ формально представимы в одинаковом виде

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^{\pm} = &- \sum_{m=1}^{M} \Big[a_m^{\dagger} a_{m+1} + a_{m+1}^{\dagger} a_m + \gamma (a_{m+1} a_m + a_m^{\dagger} a_{m+1}^{\dagger}) \Big] \\ &+ h \sum_{m=1}^{M} a_m^{\dagger} a_m - \frac{hM}{2},\end{aligned} \tag{1.17}$$

с граничными условиями

$$a_{M+1} = \mp a_1, \qquad a_{M+1}^{\dagger} = \mp a_1^{\dagger}. \tag{1.18}$$

Т.о. различие между этими двумя гамильтонианами состоит в том, что граничные условия для $\mathbf{H}^{+}$ антипериодические, а для $\mathbf{H}^{-}$ – периодические.

По этой причине преобразования Фурье к импульсному представлению различны для этих гамильтонианов. Наборы разрешенных значений квазиимпульсов обозначим как X^{+} для $\mathbf{H}^{+}$ и X^{-} для $\mathbf{H}^{-}$,

$$X^{\pm} = \{p: \ \exp\{ipM\} = \mp 1; \quad p \in (-\pi, \pi]\}, \tag{1.19}$$

или, более явно,

$$\begin{aligned} X^{+} &= \Big\{ p: \ p = \frac{\pi}{M}(-M - 1 + 2l); \quad l = 1, \dots, M \Big\}, \\ X^{-} &= \Big\{ p: \ p = \frac{\pi}{M}(-M + 2l); \quad l = 1, \dots, M \Big\}. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Соответственно, формулы для преобразований Фурье запишутся в виде

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{\exp\{-i\pi/4\}}{\sqrt{M}} \sum_{p \in X^{\pm}} a_p \exp\{i(m-1)p\}, \\ a_m^{\dagger} &= \frac{\exp\{i\pi/4\}}{\sqrt{M}} \sum_{p \in X^{\pm}} a_p^{\dagger} \exp\{-i(m-1)p\} \end{aligned} \tag{1.21}$$

(суммирование по $p \in X^{+}$ для $\mathbf{H}^{+}$ и по $p \in X^{-}$ для $\mathbf{H}^{-}$) и

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{\exp\{i\pi/4\}}{\sqrt{M}} \sum_{m=1}^{M} a_m \exp\{-i(m-1)p\}, \\ a_p^{\dagger} &= \frac{\exp\{-i\pi/4\}}{\sqrt{M}} \sum_{m=1}^{M} a_m^{\dagger} \exp\{i(m-1)p\}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Гамильтонианы $\mathbf{H}^+$ и $\mathbf{H}^-$ в импульсном представлении примут вид

$$\mathbf{H}^{\pm} = \sum_{p \in X^{\pm}} \left[\varepsilon(p) a_p^\dagger a_p + \frac{\Gamma(p)}{2} (a_p^\dagger a_{-p}^\dagger + a_{-p} a_p) \right] - \frac{Mh}{2}, \qquad (1.23)$$

где

$$\varepsilon(p) = h - 2\cos p, \qquad \Gamma(p) = 2\gamma \sin p. \qquad (1.24)$$

Диагонализация этих гамильтонианов осуществляется с помощью преобразований Боголюбова, различных для $\mathbf{H}^+$ и $\mathbf{H}^-$, к новым каноническим фермионным операторам A_p и $A_p^\dagger$

$$\begin{aligned} A_p &= \cos\frac{\theta(p)}{2} \cdot a_p - \sin\frac{\theta(p)}{2} \cdot a_{-p}^\dagger, \\ A_{-p}^\dagger &= \sin\frac{\theta(p)}{2} \cdot a_p + \cos\frac{\theta(p)}{2} \cdot a_{-p}^\dagger, \end{aligned} \qquad (1.25)$$

где угол преобразования Боголюбова $\theta(p)$ задается соотношениями

$$\cos\theta(p) = \frac{\varepsilon(p)}{E(p)}, \qquad \sin\theta(p) = -\frac{\Gamma(p)}{E(p)}, \qquad (1.26)$$

а функция энергии $E(p)$ определяется как [23]

$$E(p) = \begin{cases} \sqrt{\varepsilon^2(p) + \Gamma^2(p)}, & p \neq 0, \pi \\ \varepsilon(p), & p = 0, \pi. \end{cases} \qquad (1.27)$$

Импульсы $p = 0, \pi$ входят только в набор X^-, соответствующий гамильтониану $\mathbf{H}^-$; они требуют особого рассмотрения, поскольку $\Gamma(0) = \Gamma(\pi) = 0$. Функция $E(p)$ неотрицательна, кроме случая $p = 0$ при $h < 2$. Выбор $E(p)$ в виде (1.27) при $p = 0, \pi$ полностью определяет угол $\theta(p)$, заданный соотношениями (1.26), как 2π-периодическую нечетную функцию импульса p, т.е.

$$\theta(p) = -\theta(-p), \qquad \theta(0) = \theta(\pi) = 0. \qquad (1.28)$$

Гамильтонианы $\mathbf{H}^{\pm}$ диагонализуются

$$\mathbf{H}^{\pm} = \sum_{p \in X^{\pm}} E(p) A_p^\dagger A_p + E_0^{\pm}, \qquad (1.28)$$

где “энергия вакуума” $E_0^{\pm}$ есть

$$E_0^{\pm} = -\frac{1}{2} \sum_{p \in X^{\pm}} E(p) \qquad (1.29)$$

Необходимо отметить, что поскольку $E(0) = \varepsilon(0) = h - 2$, то при $h < 2$ величина E_0^- не является энергией основного состояния; в этом случае энергия основного состояния равна $E_0^- + \varepsilon(0)$.

2. Когерентные состояния и матричные элементы операторов

В качестве инструмента для вычисления корреляционных функций мы будем использовать когерентные состояния для канонических фермионных операторов. В предыдущем разделе фигурировали два набора канонических фермионных операторов a_p, $a_p^\dagger$ и A_p, $A_p^\dagger$, связанные преобразованием Боголюбова (1.25). Для каждого из этих наборов введем свои когерентные состояния, которые будем условно называть "старыми" (для a_p, $a_p^\dagger$) и "новыми" (для A_p, $A_p^\dagger$). Явный вид скалярных произведений для когерентных состояний разных наборов дает универсальный способ вычисления матричных элементов операторов, входящих в определения корреляционных функций. Тем самым задача вычисления корреляционных функций будет сводится к вычислению интегралов по грассмановым переменным.

Введем когерентные состояния, различные для наборов X^+ и X^- (1.20):

$$
\begin{aligned}
|\, \phi, \pm \,\rangle &= \exp\left\{ \sum_{p\in X^\pm} a_p^\dagger \phi_p \right\} |\, 0\,\rangle, \\
\langle\, \phi^*, \pm \,| &= \langle\, 0 \,|\exp\left\{ \sum_{p\in X^\pm} \phi_p^* a_p \right\}.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Заметим, что фоковский вакуум одинаков для обоих наборов операторов a_p, $a_p^\dagger$ $(p \in X^\pm)$:

$$
a_p \,|\, 0\,\rangle = 0, \quad \langle\, 0 \,|\, a_p^\dagger = 0, \qquad p \in X^\pm. \tag{2.2}
$$

Параметры ϕ_p и ϕ_p^* – элементы алгебры Грассмана – антикоммутируют между собой и со всеми операторами a_p, $a_p^\dagger$. Подчеркнем, что мы не рассматриваем инволюции на алгебре Грассмана; ϕ_p и ϕ_p^* независимые параметры, а звездочка над ϕ^* означает только, что соответствующий параметр связан с бра-вектором. Основные свойства когерентных состояний описаны в Приложении А.

Они являются собственными для операторов a_p, $a_p^\dagger$ соответственно:

$$\begin{aligned} a_p \mid \phi, \pm \rangle &= \phi_p \mid \phi, \pm \rangle \qquad p \in X^{\pm}, \\ \langle \phi^*, \pm \mid a_p^\dagger &= \phi_p^* \langle \phi^*, \pm \mid \qquad p \in X^{\pm}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Скалярное произведение когерентных состояний одного типа дается обычной формулой (A.4):

$$\langle \phi^*, \pm \mid \phi, \pm \rangle = \exp\left\{ \sum_{p \in X^{\pm}} \phi_p^* \phi_p \right\}. \tag{2.4}$$

Когда это не может вызвать недоразумения, суммы в правых частях выражений типа (2.4) будут часто обозначаться просто $\phi^*\phi = \sum \phi_p^* \phi_p$ и т.п..

Скалярные произведения состояний различного типа даются формулами

$$\begin{aligned} \langle \phi^*, + \mid \phi, - \rangle &= \exp\left\{ \sum_{p \in X^+, q \in X^-} \phi_p^* \overrightarrow{L}_{pq} \phi_q \right\} = \exp\{\phi^* \overrightarrow{L} \phi\}, \\ \langle \phi^*, - \mid \phi, + \rangle &= \exp\left\{ \sum_{q \in X^-, p \in X^+} \phi_q^* \overleftarrow{L}_{qp} \phi_p \right\} = \exp\{\phi^* \overleftarrow{L} \phi\}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где матричные элементы $M \times M$ матриц $\overrightarrow{L}$ и $\overleftarrow{L}$ суть:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{L}_{pq} &= -\frac{i}{M} \frac{e^{i\left(\frac{p-q}{2}\right)}}{\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)}, \\ \overleftarrow{L}_{qp} &= -\frac{i}{M} \frac{e^{i\left(\frac{q-p}{2}\right)}}{\sin\left(\frac{q-p}{2}\right)}, \end{aligned} \qquad p \in X^+, \quad q \in X^- \tag{2.6}$$

(стрелка указывает, какой индекс, правый или левый, из набора X^-). Матрицы (2.6) связаны соотношениями $\overleftarrow{L}_{qp} = \overrightarrow{L}_{-p,-q} = (\overleftarrow{L}^T)_{pq} = (\overrightarrow{L}^T)_{-q,-p}$ которые будут использованы в дальнейшем.

Формулы (2.5) становятся очевидными, если принять во внимание, что фоковский вакуум одинаков для обоих типов когерентных состояний и переписать скалярные произведения в "координатном представлении", применяя формулы (1.21) и (1.22):

$$\begin{aligned}\langle\, \phi^*, \pm \mid \phi, \mp \,\rangle &= \langle\, 0 \mid \exp\left\{\sum_{m=1}^{M} \phi_m^*(\pm)\, a_m\right\} \exp\left\{\sum_{m=1}^{M} a_m^\dagger\, \phi_m(\mp)\right\} \mid 0\,\rangle \\ &= \exp\left\{\sum_{m=1}^{M} \phi_m^*(\pm)\, \phi_m(\mp)\right\}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где использованы естественные обозначения:

$$\begin{aligned}\phi_m^*(\pm) &:= \frac{\exp(i\pi/4)}{\sqrt{M}} \sum_{p\in X^\pm} \phi_p^* \exp\{-i(m-1)p\}, \\ \phi_m(\pm) &:= \frac{\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{M}} \sum_{p\in X^\pm} \phi_p \exp\{i(m-1)p\}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Введем теперь когерентные состояния для нового набора канонических фермионных операторов A_p, $A_p^\dagger$, связанных со старыми операторами a_p, $a_p^\dagger$ преобразованием Боголюбова (1.25). Новые когерентные состояния задаются формулами, аналогичными формулам (2.1) (для обозначения новых когерентных состояний используются заглавные латинские буквы),

$$\begin{aligned}\mid Y, \pm\,\rangle &= \exp\left\{\sum_{p\in X^\pm} A_p^\dagger Y_p\right\} \mid \Omega_\pm\,\rangle, \\ \langle\, Y^*, \pm \mid &= \langle\, \Omega_\pm \mid \exp\left\{\sum_{p\in X^\pm} Y_p^* A_p\right\},\end{aligned} \tag{2.9}$$

где состояния $\mid \Omega_\pm\,\rangle$, являются вакуумными векторами для наборов операторов A_p, $A_p^\dagger$, $p \in X^\pm$ соответственно:

$$A_p \mid \Omega_\pm\,\rangle = 0, \quad \langle\, \Omega_\pm \mid A_p^\dagger = 0, \quad \langle\, \Omega_\pm \mid \Omega_\pm\,\rangle = 1, \qquad p \in X^\pm. \tag{2.10}$$

Элементы алгебры Грассмана Y_p, Y_p^* аналогичны по своим свойствам старым параметрам ϕ_p, ϕ_p^*; очевидно, что формулы (A.2)–(A.10) справедливы и для новых когерентных состояний. Подчеркнем, что, однако, в отличии от старого вакуума $\mid 0\,\rangle$, одинакового для старых канонических фермионных операторов соответствующих наборам $p \in X^+$ и $p \in X^-$, новые вакуумы $\mid \Omega_+\,\rangle$

и $| \, \Omega_- \rangle$ различны. Это непосредственно следует из связи новых вакуумных состояний со старым вакуумом,

$$| \, \Omega_\pm \rangle = N_\pm^{-1/2} \Omega_\pm^\dagger \, | \, 0 \rangle, \quad \langle \, \Omega_\pm \, | = N_\pm^{-1/2} \langle \, 0 \, | \, \Omega_\pm, \tag{2.11}$$

где операторы $\Omega_\pm^\dagger$ и $\Omega_\pm$ суть:

$$\begin{aligned} \Omega_\pm^\dagger &:= \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{p \in X^\pm} \tau(p) \, a_p^\dagger a_{-p}^\dagger \right\}, \\ \Omega_\pm &:= \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{p \in X^\pm} \tau(p) \, a_{-p} a_p \right\}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

а функция $\tau(p)$ есть

$$\tau(p) := \tan \frac{\theta(p)}{2} \tag{2.13}$$

($\theta(p)$ – угол Боголюбова (1.26)). Нормировочный множитель $N_\pm$ в (2.11) может быть представлен как определитель диагональной $M \times M$ матрицы,

$$N_\pm = \langle \, 0 \, | \, \Omega_\pm \Omega_\pm^\dagger \, | \, 0 \, \rangle = \det{}_M (I + T^\pm), \tag{2.14}$$

где I – единичная матрица и

$$T^\pm := \mathrm{diag}\{ i\tau(p) \}, \qquad p \in X^\pm. \tag{2.15}$$

Свойства (2.10) для состояний (2.11) проверяются с помощью коммутационных соотношений

$$\begin{aligned} [a_p, \Omega_\pm^\dagger] &= \tau(p) \, \Omega_\pm^\dagger a_{-p}^\dagger, \qquad p \in X^\pm, \\ [\Omega_\pm, a_p^\dagger] &= \tau(p) \, a_{-p} \Omega_\pm, \qquad p \in X^\pm, \end{aligned} \tag{2.16}$$

а нормировочный множитель $N_\pm$, после применения формулы (A.6), представляется в виде

$$\begin{aligned} N_\pm = \int d\phi \, d\phi^* \exp \Bigg\{ &- \sum_{p \in X^\pm} \phi_p^* \phi_p \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{p \in X^\pm} \tau(p) \left(\phi_p^* \phi_{-p}^* + \phi_{-p} \phi_p \right) \Bigg\}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

где после замены переменных

$$\zeta_p = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_p + i\phi_{-p}^*), \quad \zeta_p^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_p^* + i\phi_{-p}), \tag{2.18}$$

интеграл вычисляется (см. (A.9)), что и приводит к (2.14).

Вышеизложенные формулы позволяют вычислить скалярные произведения между новыми (2.9) и старыми (2.1) когерентными состояниями. В частности, для скалярных произведений состояний одинакового типа имеем:

$$
\begin{aligned}
\langle\, \phi^*, \pm \mid Y, \pm \,\rangle &= N_\pm^{-1/2} \exp\left\{ \sum_{p\in X^\pm} \sec\frac{\theta(p)}{2}\, \phi_p^* Y_p \right.\\
&\qquad \left. + \frac{1}{2} \sum_{p\in X^\pm} \tau(p) \left(\phi_p^* \phi_{-p}^* - Y_{-p} Y_p \right) \right\},\\
\langle\, Y^*, \pm \mid \phi, \pm \,\rangle &= N_\pm^{-1/2} \exp\left\{ \sum_{p\in X^\pm} \sec\frac{\theta(p)}{2}\, Y_p^* \phi_p \right.\\
&\qquad \left. + \frac{1}{2} \sum_{p\in X^\pm} \tau(p) \left(\phi_{-p} \phi_p - Y_p^* Y_{-p}^* \right) \right\}.
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

Используя формулы (2.19) можно вычислить матричные элементы операторов $\exp\{-z\mathbf{H}^\pm\}$, которые диагональны в новых представлениях, между старыми когерентными состояниями [27]:

$$
\langle\, \phi^*, \pm \mid e^{-z\mathbf{H}^\pm} \mid \phi, \pm \,\rangle = N_\pm^{-1} e^{-zE_0^\pm} \det{}_M (I - J_z^\pm T^\pm)\, e^{\zeta^* D_z^\pm \zeta}, \tag{2.20}
$$

где переменные ζ_p, ζ_p^* ($p \in X^+$ для $\mathbf{H}^+$ и $p \in X^-$ для $\mathbf{H}^-$) определены формулой (2.18). Диагональные $M \times M$ матрицы $J_z^\pm$, $D_z^\pm$ суть

$$
J_z^\pm = \mathrm{diag}\{j_z(p)\}, \quad D_z^\pm = \mathrm{diag}\{d_z(p)\}, \qquad p \in X^\pm, \tag{2.21}
$$

где функции j_z, d_z определены как

$$
j_z(p) := \exp\{-zE(p)\}, \quad d_z(p) := \frac{j_z(p) - i\tau(p)}{1 - i\tau(p) j_z(p)} \tag{2.22}
$$

(матрицы $T^\pm$ определены в (2.15)).

Формулы (2.20) дают матричные элементы $\exp\{-z\mathbf{H}^\pm\}$ в базисе старых когерентных состояний. Для вычисления корреляционных функций необходимо знать также матричные элементы (форм-факторы) локальных спиновых операторов. Поскольку $\mathbf{P}^\pm \sigma_m^\alpha = \sigma_m^\alpha \mathbf{P}^\mp$ ($\alpha = +, -$) нам требуются только матричные элементы локальных операторов $\sigma_m^\pm$ между состояниями различного типа. Соответствующие выражения были получены в работе [27] и задаются формулами:

$$
\begin{aligned}
\langle\, \phi^*, + \mid \sigma_m^+ \mid \phi, - \,\rangle &= \phi_m(-)\, \exp\left\{\phi^* \overrightarrow{L}_{m-1}\, \phi\right\},\\
\langle\, \phi^*, - \mid \sigma_m^+ \mid \phi, + \,\rangle &= \phi_m(+)\, \exp\left\{\phi^* \overleftarrow{L}_{m-1}\, \phi\right\},\\
\langle\, \phi^*, + \mid \sigma_m^- \mid \phi, - \,\rangle &= \phi_m^*(+)\, \exp\left\{\phi^* \overrightarrow{L}_{m-1}\, \phi\right\},\\
\langle\, \phi^*, - \mid \sigma_m^- \mid \phi, + \,\rangle &= \phi_m^*(-)\, \exp\left\{\phi^* \overleftarrow{L}_{m-1}\, \phi\right\},
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

где $\phi_m(\pm)$ и $\phi_m^*(\pm)$ определены в (2.8), а матрицы $\overrightarrow{L}_m$ и $\overleftarrow{L}_m$ определяются аналогично матрицам $\overrightarrow{L}$ и $\overleftarrow{L}$ (см. (2.6)):

$$
\begin{aligned}
(\overrightarrow{L}_m)_{pq} &= \exp\{-imp\}\,(\overrightarrow{L})_{pq}\exp\{imq\},\\
(\overleftarrow{L}_m)_{qp} &= \exp\{-imq\}\,(\overleftarrow{L})_{qp}\exp\{imp\},
\end{aligned}
\qquad p \in X^+, \quad q \in X^-.
\tag{2.24}
$$

Формулы (2.23) и определения (2.8) позволяют получить представления для билинейных комбинаций матричных элементов локальных спиновых операторов:

$$
\begin{aligned}
&\langle\, \xi^*, + \mid \sigma_{m+1}^a \mid \xi, - \,\rangle\langle\, \psi^*, - \mid \sigma_{n+1}^b \mid \psi, + \,\rangle\\
&= \frac{\partial}{\partial\alpha} \exp\left\{\xi^* \overrightarrow{L}_m\, \xi + \psi^* \overleftarrow{L}_n\, \psi + \alpha f_{mn}^{ab}\right\}\Bigg|_{\alpha=0}, \quad a, b = +, -,
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

где

$$
\begin{aligned}
f_{mn}^{+-} &= -\frac{1}{M} \sum_{q_1, q_2 \in X^-} \psi_{q_1}^* e^{-inq_1 + imq_2} \xi_{q_2},\\
f_{mn}^{-+} &= \frac{1}{M} \sum_{p_1, p_2 \in X^+} \xi_{p_1}^* e^{-imp_1 + inp_2} \psi_{p_2},\\
f_{mn}^{++} &= -\frac{i}{M} \sum_{q \in X^-, p \in X^+} \xi_q\, e^{imq + inp}\, \psi_p,\\
f_{mn}^{--} &= \frac{i}{M} \sum_{p \in X^+, q \in X^-} \xi_p^*\, e^{-inp + imq}\, \psi_q^*.
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

Заметим, что формулы (2.23) позволяют получать также представления, аналогичные (2.25), для произведения произвольного числа матричных элементов локальных спиновых операторов. Выражения (2.25) и (2.20) будут использованы нами в следующем разделе для вычисления двухточечных копреляционных функций.

3. Корреляторы локальных спинов на конечной цепочке

В этом разделе вычисляются температурные корреляционные функции локальных спиновых операторов XY-магнетика на конечной цепочке длины M. Температурные корреляционные функции, зависящие также от времени t и расстояния m, определяются как

$$G^{(a,b)}(m,t) = \frac{1}{Z}\,\mathrm{Sp}\left\{e^{-\beta\mathbf{H}}\sigma^a_{m+1}(t)\sigma^b_1(0)\right\}, \qquad a,b=+,-, \tag{3.1}$$

где Z – статсумма,

$$Z = \mathrm{Sp}\left\{e^{-\beta\mathbf{H}}\right\}, \tag{3.2}$$

а $\beta = 1/T$ – обратная температура. Sp в (3.1), (3.2) означает взятие следа по всему пространству состояний модели. Зависимость локальных спиновых операторов от времени введена каноническим образом

$$\sigma^a_m(t) = e^{it\mathbf{H}}\sigma^a_m e^{-it\mathbf{H}}. \tag{3.3}$$

Рассмотрим вначале статсумму Z (3.2). В силу (1.15) и (1.16) для оператора $e^{-\beta\mathbf{H}}$ имеем тождество

$$\begin{aligned} e^{-\beta\mathbf{H}} &= e^{-\beta\mathbf{H}^+}\mathbf{P}^+ + e^{-\beta\mathbf{H}^-}\mathbf{P}^- \\ &= \frac{1}{2}\left\{e^{-\beta\mathbf{H}^+} + e^{-\beta\mathbf{H}^-} + (-1)^{\mathbf{N}}e^{-\beta\mathbf{H}^+} - (-1)^{\mathbf{N}}e^{-\beta\mathbf{H}^-}\right\}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

в силу которого статсумма представима в виде суммы четырех вкладов

$$Z = \frac{1}{2}\left(Z_F^+ + Z_F^- + Z_B^+ - Z_B^-\right), \tag{3.5}$$

где $Z_F^\pm$ и $Z_B^\pm$ есть“фермионные” и “бозонные” вклады соответственно,

$$\begin{aligned} Z_F^\pm &= \mathrm{Sp}\left\{e^{-\beta\mathbf{H}^\pm}\right\}, \\ Z_B^\pm &= \mathrm{Sp}\left\{(-1)^{\mathbf{N}}e^{-\beta\mathbf{H}^\pm}\right\}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Для “фермионных” вкладов $Z_F^\pm$, в силу (A.5), имеем

$$Z_F^\pm = \int d\phi d\phi^*\, e^{\phi^*\phi}\langle\,\phi^*,\pm\mid e^{-\beta\mathbf{H}^\pm}\mid\phi,\pm\,\rangle. \tag{3.7}$$

Для “бозонных” вкладов $Z_B^\pm$, используя свойство

$$(-1)^{\mathbf{N}}\mid\phi,\pm\,\rangle = \mid -\phi,\pm\,\rangle, \tag{3.8}$$

имеем представления аналогичные (3.7). Используя формулу (2.20) для соответствующего матричного элемента, с учетом (2.14), нетрудно получить

$$
\begin{aligned}
Z_F^{\pm} &= e^{-\beta E_0^{\pm}} \det_M \left(\frac{I - J_\beta^{\pm} T^{\pm}}{I + T^{\pm}} \right) \det_M \left(I + D_\beta^{\pm} \right), \\
Z_B^{\pm} &= e^{-\beta E_0^{\pm}} \det_M \left(\frac{I - J_\beta^{\pm} T^{\pm}}{I + T^{\pm}} \right) \det_M \left(I - D_\beta^{\pm} \right).
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

Используя определения диагональных матриц $D_\beta^{\pm}$, $J_\beta^{\pm}$, $T^{\pm}$ (см. (2.15) и (2.21)) окончательно имеем

$$
\begin{aligned}
Z_F^{\pm} &= e^{-\beta E_0^{\pm}} \det_M \left(I + J_\beta^{\pm} \right) = \prod_{p \in X^{\pm}} \left(2 \cosh \frac{\beta E(p)}{2} \right), \\
Z_B^{\pm} &= e^{-\beta E_0^{\pm}} \det_M \left(I - J_\beta^{\pm} \right) = \prod_{p \in X^{\pm}} \left(2 \sinh \frac{\beta E(p)}{2} \right).
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

Обратимся теперь к парным корреляционным функциям (3.1). Аналогично статсумме они могут быть представлены в виде суммы четырех вкладов

$$
G^{(ab)} = \frac{1}{2Z} \left(Z_F^{+} G_F^{(ab)+} + Z_F^{-} G_F^{(ab)-} + Z_B^{+} G_B^{(ab)+} - Z_B^{-} G_B^{(ab)-} \right), \tag{3.11}
$$

где

$$
\begin{aligned}
Z_F^{\pm} G_F^{(ab)\pm} &= \mathrm{Sp} \left\{ e^{-(\beta - it)\mathbf{H}^{\pm}} \sigma_{m+1}^{a} e^{-it\mathbf{H}^{\mp}} \sigma_1^{b} \right\}, \\
Z_B^{\pm} G_B^{(ab)\pm} &= \mathrm{Sp} \left\{ (-1)^{\mathbf{N}} e^{-(\beta - it)\mathbf{H}^{\pm}} \sigma_{m+1}^{a} e^{-it\mathbf{H}^{\mp}} \sigma_1^{b} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

Вычисление вкладов в коррелятор будет осуществляться по той же схеме как это было проделано выше при вычислении статсуммы. А именно, используя определение следа (A.5) и разложение единицы (A.6) вклады (3.12) представляются как интегралы по грассмановым переменным. Далее, используя приведенные в предыдущем разделе выражения для матричных элементов операторов эти интегралы записываются как гауссовские и с помощью стандартных формул (A.9) и (A.10) вычисляются.

Наметим основные этапы вычисления "фермионного" вклада $Z_F^+ G_F^{(ab)+}$, который записывается в виде

$$
\begin{aligned}
Z_F^+ G_F^{(ab)+} = \int d\eta d\eta^* d\xi d\xi^* d\phi d\phi^* d\psi d\psi^* \, e^{\eta^*\psi - \xi^*\eta - \phi^*\xi - \psi^*\phi} \\
\langle \eta^*, + \mid e^{-(\beta - it)\mathbf{H}^+} \mid \eta, + \rangle \langle \xi^*, + \mid \sigma_{m+1}^a \mid \xi, - \rangle \\
\langle \phi^*, - \mid e^{-it\mathbf{H}^-} \mid \phi, - \rangle \langle \psi^*, - \mid \sigma_1^b \mid \psi, + \rangle .
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Матричные элементы сомножителей даются формулами (2.20) и (2.23), из которых следует также, что матричные элементы локальных спинов могут быть скомбинированы так, чтобы воспользоваться представлениями (2.25). Подставляя (2.20) (с учетом (2.14)) и (2.25) в (3.13) имеем

$$
\begin{aligned}
Z_F^+ G_F^{(ab)+} = \; & e^{-(\beta - it)E_0^+ - itE_0^-} \det{}_M \left(\frac{I - J_{\beta - it}^+ T^+}{I + T^+} \right) \det{}_M \left(\frac{I - J_{it}^- T^-}{I + T^-} \right) \\
& \frac{\partial}{\partial \alpha} \int d\eta d\eta^* d\xi d\xi^* d\phi d\phi^* d\psi d\psi^* \, \exp\Big\{ \omega^* D_{\beta - it}^+ \omega + \zeta^* D_{it}^- \zeta \\
& + \xi^* \overrightarrow{L}_m \xi + \psi^* \overleftarrow{L} \psi + \alpha f_{m0}^{ab} + \eta^*\psi - \xi^*\eta - \phi^*\xi - \psi^*\phi \Big\} \Big|_{\alpha = 0}
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Здесь переменные ω, ω^* и ζ, ζ^* выражаются через η, η^* и ϕ, ϕ^*,

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \omega \\ \omega^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & i\Omega \\ i\Omega & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \phi^* \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & i\Omega \\ i\Omega & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \eta^* \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

где Ω матрица обращения импульса (ср. (2.18)), $\Omega^2 = 1$, $\Omega^T = \Omega$. Заметим, что Ω имеет разные матричные представления для X^+ и X^-, что, однако, не будет явно указываться в обозначениях.

Преобразуем выражение (3.14). Сначала сделаем замену $\psi \to -\psi$, т.к. M – четно, мера интегрирования инвариантна. Далее, произведем замену переменных:

$$
\begin{aligned}
\xi_p^* = e^{i\frac{m}{2}p} \tilde{\xi}_p^*, \quad \psi_p = e^{-i\frac{m}{2}p} \tilde{\psi}_p, \\
\psi_q^* = e^{i\frac{m}{2}q} \tilde{\psi}_q^*, \quad \xi_q = e^{-i\frac{m}{2}q} \tilde{\xi}_q,
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

(здесь и всюду ниже $p \in X^+$ и $q \in X^-$) которая также не меняет меру интегрирования. Аналогичное преобразование выполним и для переменных η, η^*, ϕ, ϕ^*. После замены переменных в показателе экспоненты в (3.14) получим выражение (далее тильды над переменными опускаем):

$$\omega^* D^+_{\beta-it}\omega + \zeta^* D^-_{it}\zeta + \xi^* P \overrightarrow{L}\,\overline{Q}\,\xi - \psi^*\overline{Q}\,\overleftarrow{L}\,P\psi \\ + \alpha f^{ab}_{m0} - \eta^*\psi - \xi^*\eta - \phi^*\xi - \psi^*\phi, \quad (3.17)$$

где P и Q диагональные матрицы,

$$\begin{aligned} P &= \mathrm{diag}\{e^{-i\frac{m}{2}p}\}, \qquad p \in X^+, \\ Q &= \mathrm{diag}\{e^{-i\frac{m}{2}q}\}, \qquad q \in X^-, \end{aligned} \quad (3.18)$$

а черта означает обращение всех импульсов (индексов) матрицы, $\overline{A} \equiv \Omega A \Omega$. Величины f^{ab}_{m0} записываются в виде

$$\begin{aligned} f^{-+}_{m0} &= -\xi^* R^+\psi, \qquad (R^+)_{p_1p_2} = \frac{1}{M}e^{-i\frac{m}{2}(p_1+p_2)}, \\ f^{+-}_{m0} &= -\psi^*\overline{R}^-\xi, \qquad (R^-)_{q_1q_2} = \frac{1}{M}e^{-i\frac{m}{2}(q_1+q_2)}, \\ f^{++}_{m0} &= -i\psi\,\overrightarrow{S}\Omega\xi, \qquad (\overrightarrow{S})_{pq} = \frac{1}{M}e^{-i\frac{m}{2}(p+q)}, \\ f^{--}_{m0} &= -i\psi^*\Omega\overleftarrow{S}\xi^*, \qquad (\overleftarrow{S})_{qp} = \frac{1}{M}e^{-i\frac{m}{2}(q+p)}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где матрицы $\overrightarrow{S}$ и $\overleftarrow{S}$ введены по аналогии с матрицами $\overrightarrow{L}$ и $\overleftarrow{L}$, и обладают свойством $\overleftarrow{S} = (\overrightarrow{S})^T$.

На первом этапе выполним интегрирование по переменным η, η^*, ϕ, ϕ^*. Для этого перейдем от переменных η, η^*, ϕ, ϕ^* к переменным ω, ω^*, ζ, ζ^*, определенных в (3.15), причем $d\eta d\eta^* d\phi d\phi^* = d\omega d\omega^* d\zeta d\zeta^*$. Кроме того, аналогично (3.15), введем переменные

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^* \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & i\Omega \\ i\Omega & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi \\ \xi^* \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \rho \\ \rho^* \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & i\Omega \\ i\Omega & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \psi^* \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

тогда

$$\eta^*\psi + \xi^*\eta + \phi^*\xi + \psi^*\phi = \zeta^*\rho + \rho^*\zeta + \omega^*\lambda + \lambda^*\omega. \quad (3.21)$$

Таким образом, от новых переменных ω, ω^*, ζ, ζ^* зависят только первые два и последние четыре члена в (3.17).

После взятия интегралов по ω, ω^* и ζ, ζ^* по формулам (A.9) для вклада в коррелятор получим

$$
\begin{aligned}
Z_F^+ G_F^{(ab)+} = \mathrm{Const} \cdot \frac{\partial}{\partial\alpha} \int d\xi d\xi^* d\psi d\psi^* \exp\Big\{ -\lambda^* (D^+_{\beta-it})^{-1} \lambda \\
- \rho^* (D^-_{it})^{-1} \rho + \xi^* P \overrightarrow{L}\, \overline{Q}\, \xi - \psi^* \overline{Q}\, \overleftarrow{L}\, P\, \psi + \alpha f^{ab}_{m0} \Big\}\Big|_{\alpha=0}
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Const} := e^{-(\beta-it)E_0^+ - itE_0^-} \det_M \left(\frac{I - J^+_{\beta-it} T^+}{I + T^+} \right) \det_M \left(\frac{I - J^-_{it} T^-}{I + T^-} \right) \\
\det_M D^+_{\beta-it} \det_M D^-_{it}.
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

Теперь наша задача состоит в вычислении интеграла по переменным ξ, ξ^*, ψ, ψ^* или, что эквивалентно, по переменным λ, λ^*, ρ, ρ^*. Будем проводить вычисления в терминах второго набора переменных, которые скомбинируем в “блочные” переменные $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:

$$
\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^* \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho^* \end{pmatrix}.
\tag{3.24}
$$

Заметим, что λ, λ^* (выраженные через ξ^* и ψ посредством (3.20)) и, соответственно, $\mathbf{x}$ параметризуются импульсом $p \in X^+$, а ρ, ρ^* (выраженные через ψ^* и ξ) и, соответственно, $\mathbf{y}$ параметризуются импульсом $q \in X^-$.

Введем блочную матрицу O_1 (общей размерности $2M \times 2M$)

$$
O_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -i\Omega \\ -i\Omega & I \end{pmatrix}, \qquad O_1^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & i\Omega \\ i\Omega & I \end{pmatrix},
\tag{3.25}
$$

тогда (3.20) запишется в виде

$$
\begin{pmatrix} \psi \\ \xi^* \end{pmatrix} = O_1 \mathbf{x}, \qquad \begin{pmatrix} \xi \\ \psi^* \end{pmatrix} = O_1 \mathbf{y}.
\tag{3.26}
$$

Введем обозначение

$$
\sigma := \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_2 \otimes I
\tag{3.27}
$$

тогда первые два члена в показателе экспоненты в (3.22) перепишутся как

$$
\begin{aligned}
-\lambda^* (D^+_{\beta-it})^{-1} \lambda = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \sigma^{-1} (D^+_{\beta-it})^{-1} \mathbf{x}, \\
-\rho^* (D^-_{it})^{-1} \rho = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \sigma^{-1} (D^-_{it})^{-1} \mathbf{y}.
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

(В правых частях (3.28) $D^{+}_{\beta-it}$ и D^{-}_{it} означают матрицы $I\otimes D^{+}_{\beta-it}$ и $I\otimes D^{-}_{it}$ соответственно; далее для упрощения записи тривиальные составляющие матриц будут опускаться.)

Преобразуем третий и четвертый члены в показателе экспоненты в (3.22) так, чтобы они выразились через $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Используя свойство $(\overleftarrow{L})_{qp} = (\overrightarrow{L})_{-p,-q}$ или, иначе, тот факт, что $\overleftarrow{L}^{T} = \Omega\overrightarrow{L}\Omega$, а также используя формулы (3.26) и симметричность матрицы O_1, перепишем третий и четвертый члены:

$$\begin{aligned}\xi^* P\overrightarrow{L}\,\overline{Q}\,\xi - \psi^*\overline{Q}\,\overleftarrow{L}P\,\psi &= \xi^* P\overrightarrow{L}\,\overline{Q}\,\xi + \psi\, P\,\Omega\overrightarrow{L}\Omega\overline{Q}\,\psi^* \\ &= \mathbf{x}^T O_1 O_2 O_1\,\mathbf{y},\end{aligned} \tag{3.29}$$

где $2M\times 2M$ матрица O_2 есть

$$O_2 := \begin{pmatrix} 0 & P\,\Omega\overrightarrow{L}\Omega\overline{Q} \\ P\overrightarrow{L}\overline{Q} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.30}$$

Перепишем теперь величины f^{ab}_{m0} (3.19). Используя симметричность матриц R^+, R^- и свойство $\overleftarrow{S} = (\overrightarrow{S})^T$, для величин f^{ab}_{m0} имеем

$$\begin{aligned} f^{-+}_{m0} &= \frac{1}{2}(\psi R^+\xi^* - \xi^* R^+\psi) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T O_1\sigma^{-1}R^+ O_1\mathbf{x}, \\ f^{+-}_{m0} &= \frac{1}{2}(\xi\overline{R}^-\psi^* - \psi^*\overline{R}^-\xi) = \frac{1}{2}\mathbf{y}^T O_1\sigma^{-1}\overline{R}^- O_1\mathbf{y}, \\ f^{++}_{m0} &= -i\psi\,\overrightarrow{S}\,\Omega\,\xi = -i\mathbf{x}^T O_1\left(\frac{1+\sigma_3}{2}\right)\overrightarrow{S}\,\Omega\, O_1\mathbf{y}, \\ f^{--}_{m0} &= i\xi^*\overrightarrow{S}\,\Omega\,\psi^* = i\mathbf{x}^T O_1\left(\frac{1-\sigma_3}{2}\right)\overrightarrow{S}\,\Omega\, O_1\mathbf{y}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

В результате все величины в подынтегральном выражении (3.22) выражены через переменные $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Поскольку зависимость показателя экспоненты от $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ существенно определяется значениями $a, b = +, -$, посредством величин f^{ab}_{m0}, рассмотрим каждый случай отдельно.

Начнем с вычисления величины $Z^{+}_{F}G^{(-+)+}_{F}$, которая с учетом формул (3.29)–(3.31) примет вид

$$\begin{aligned} Z^{+}_{F}G^{(-+)+}_{F} = \mathrm{Const}\frac{\partial}{\partial\alpha}\int d\mathbf{x}d\mathbf{y}\,\exp\Big\{\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\sigma^{-1}(D^{+}_{\beta-it})^{-1}\mathbf{x} \\ +\frac{1}{2}\mathbf{y}^T\sigma^{-1}(D^{-}_{it})^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{x}^T O_1 O_2 O_1\mathbf{y} + \frac{\alpha}{2}\mathbf{x}^T O_1\sigma^{-1}R^+ O_1\mathbf{x}\Big\}\Big|_{\alpha=0}, \end{aligned} \tag{3.32}$$

где Const дается формулой (3.23). После взятия интеграла сначала по $\mathbf{y}$, а затем по $\mathbf{x}$ (см. (A.10)), получим

$$Z_F^+ G_F^{(-+)+} = \mathrm{Const}\ \det{}_{2M}^{1/2}\Big\{\sigma^{-1}(D_{it}^-)^{-1}\Big\}\frac{\partial}{\partial\alpha}\det{}_{2M}^{1/2}\Big\{\sigma^{-1}(D_{\beta-it}^+)^{-1} + O_1O_2O_1\sigma D_{it}^- O_1 O_2^T O_1 + \alpha O_1\sigma^{-1}R^+O_1\Big\}\Big|_{\alpha=0}. \tag{3.33}$$

Преобразуем (3.33), в первую очередь вынося $\sigma^{-1}(D_{\beta-it}^+)^{-1}$ из второго определителя,

$$\begin{aligned} Z_F^+ G_F^{(-+)+} = \mathrm{Const}\ \det{}_M^{-1}\Big\{D_{it}^-\Big\}\det{}_M^{-1}\Big\{D_{\beta-it}^+\Big\} \\ \frac{\partial}{\partial\alpha}\det{}_{2M}^{1/2}\Big\{I + \mathcal{M}_F^{(-+)+}(\alpha)\Big\}\Big|_{\alpha=0}, \end{aligned} \tag{3.34}$$

где $2M\times 2M$ матрица $\mathcal{M}_F^{(-+)+}(\alpha)$ есть

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_F^{(-+)+}(\alpha) = O_1O_2O_1\,\sigma D_{it}^-\,O_1O_2^TO_1\,\sigma D_{\beta-it}^+ \\ + \alpha\, O_1\sigma^{-1}R^+O_1\,\sigma D_{\beta-it}^+. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Далее, преобразуем матрицу $\mathcal{M}_F^{(-+)+}(\alpha)$. Введем временно в рассмотрение матрицу K (см. (3.30)),

$$O_2 = K\sigma^{-1}, \qquad K = \begin{pmatrix} P\,\Omega\,\overrightarrow{\overline{L}}\,\Omega\overline{Q} & 0 \\ 0 & -P\,\overrightarrow{\overline{L}}\,\overline{Q}\end{pmatrix}, \tag{3.36}$$

причем

$$\sigma K^T\sigma = \begin{pmatrix} \overline{Q}\,\Omega\,\overleftarrow{\overline{L}}\,\Omega P & 0 \\ 0 & -\overline{Q}\,\overleftarrow{\overline{L}}\,P\end{pmatrix}, \tag{3.37}$$

и используя свойство $\sigma^{-1}O_1\sigma = O_1^{-1}$ тождественно перепишем (3.35) в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_F^{(-+)+}(\alpha) &= O_1K(\sigma^{-1}O_1\sigma)D_{it}^-O_1(\sigma K^T\sigma)(\sigma^{-1}O_1\sigma)D_{\beta-it}^+ \\ &\quad + \alpha\, O_1R^+(\sigma^{-1}O_1\sigma)D_{\beta-it}^+ \\ &= O_1KO_1^{-1}D_{it}^-O_1(\sigma K^T\sigma)O_1^{-1}D_{\beta-it}^+ \\ &\quad + \alpha\, O_1R^+O_1^{-1}D_{\beta-it}^+. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Введем теперь в рассмотрение матрицу $\widetilde{\mathcal{M}}_F^{(-+)+}(\alpha)$, которая отличается от $\mathcal{M}_F^{(-+)+}(\alpha)$ преобразованием подобия

$$\widetilde{\mathcal{M}}_F^{(-+)+}(\alpha) = U^{-1}\mathcal{M}_F^{(-+)+}(\alpha)\,U \tag{3.39}$$

где матрица U есть

$$U = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & i\Omega \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -i\Omega \end{pmatrix}. \tag{3.40}$$

Введем матрицу Λ как результат преобразования подобия с матрицей U матрицы O_1,

$$\Lambda = U^{-1}O_1\,U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix}. \tag{3.41}$$

Введем величины:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_1} &= P\,\Omega\,\overrightarrow{L}\,\Omega\,\overline{Q}, &\qquad \overleftarrow{F_2} &= \overline{Q}\,\Omega\,\overleftarrow{L}\,\Omega P, \\ \overrightarrow{F_2} &= \overline{P}\,\Omega\,\overrightarrow{L}\,\Omega\,Q, &\qquad \overleftarrow{F_1} &= Q\,\Omega\,\overleftarrow{L}\,\Omega\overline{P}, \end{aligned} \tag{3.42}$$

тогда матрица $\widetilde{\mathcal{M}}_F^{(-+)+}(\alpha)$ запишется в следующем виде

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_F^{(-+)+}(\alpha) = \Lambda &\begin{pmatrix} \overrightarrow{F_1} & 0 \\ 0 & -\overrightarrow{F_2} \end{pmatrix} \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} D_{it}^- & 0 \\ 0 & \overline{D}_{it}^- \end{pmatrix} \\ &\times \Lambda \begin{pmatrix} \overleftarrow{F_2} & 0 \\ 0 & -\overleftarrow{F_1} \end{pmatrix} \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} D_{\beta-it}^+ & 0 \\ 0 & \overline{D}_{\beta-it}^+ \end{pmatrix} \\ &+ \alpha\Lambda \begin{pmatrix} R^+ & 0 \\ 0 & \overline{R}^+ \end{pmatrix} \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} D_{\beta-it}^+ & 0 \\ 0 & \overline{D}_{\beta-it}^+ \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.43}$$

где черта, как и выше, означает обращение всех импульсов (индексов) матрицы, в частности $\overline{D}_{it}^- = \Omega D_{it}^-\Omega$, явно $\overline{D}_{it}^- = \mathrm{diag}\{d_{it}(-q)\}$.

Для получения окончательной формы матрицы $\widetilde{\mathcal{M}}_F^{(-+)+}(\alpha)$ заметим, что

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} &\Lambda^{-1} \begin{pmatrix} D_{it}^- & 0 \\ 0 & \overline{D}_{it}^- \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \\ &= \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} \overline{D}_{it}^- & 0 \\ 0 & D_{it}^- \end{pmatrix} \Lambda. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Таким образом, получим

$$\widetilde{\mathcal{M}}_F^{(-+)+}(\alpha) = \overrightarrow{\mathcal{F}_1}\,\overline{\mathcal{D}}_{it}^-\,\overleftarrow{\mathcal{F}_2}\,\mathcal{D}_{\beta-it}^+ + \alpha\mathcal{R}^+\mathcal{D}_{\beta-it}^+, \tag{3.45}$$

где

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathcal{F}_1} = \Lambda \begin{pmatrix} \overrightarrow{F_1} & 0 \\ 0 & \overrightarrow{F_2} \end{pmatrix} \Lambda^{-1}, && \mathcal{D}_{it}^- = \begin{pmatrix} D_{it}^- & 0 \\ 0 & \overline{D}_{it}^- \end{pmatrix}, \\
&\overleftarrow{\mathcal{F}_2} = \Lambda \begin{pmatrix} \overleftarrow{F_2} & 0 \\ 0 & \overleftarrow{F_1} \end{pmatrix} \Lambda^{-1}, && \mathcal{D}_{\beta-it}^+ = \begin{pmatrix} D_{\beta-it}^+ & 0 \\ 0 & \overline{D}_{\beta-it}^+ \end{pmatrix}, \\
&\mathcal{R}^+ = \Lambda \begin{pmatrix} R^+ & 0 \\ 0 & \overline{R}^+ \end{pmatrix} \Lambda^{-1}.
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

Ответ (3.34) для вклада $Z_F^+ G_F^{(-+)+}$, с учетом (3.23), в итоге запишется в виде

$$
\begin{aligned}
Z_F^+ G_F^{(-+)+} = &e^{-(\beta-it)E_0^+ - itE_0^-} \det{}_M \left(\frac{I - J_{\beta-it}^+ T^+}{I + T^+} \right) \det{}_M \left(\frac{I - J_{it}^- T^-}{I + T^-} \right) \\
&\frac{\partial}{\partial\alpha} \det{}_{2M}^{1/2} \left\{ I + \widetilde{\mathcal{M}}_F^{(-+)+}(\alpha) \right\} \Big|_{\alpha=0},
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

Прокомментируем преобразования, выполненные начиная с выражения (3.33). В (3.33) ответ для вклада в коррелятор содержит определитель $2M \times 2M$ антисимметричной матрицы, в то время как в (3.47) фигурирует определитель $2M \times 2M$ матрицы $\widetilde{\mathcal{M}}_F^{(-+)+}(\alpha)$, в которой вся нетривиальная зависимость от времени t и расстояния m сосредоточена в блочно-диагональных структурах, а недиагональные сомножители есть фиксированные матрицы Λ и Λ^{-1}. Представление (3.47) для вклада $Z_F^+ G_F^{(-+)+}$ в коррелятор $G^{(-+)}(m,t)$ окажется удобным для исследования термодинамического предела, которое будет проведено в следующем разделе. В частности, будет показано, что величина $Z_F^+ G_F^{(-+)+}$ сингулярна в термодинамическом пределе и эта сингулярность проистекает из диагональных элементов матрицы $\widetilde{\mathcal{M}}_F^{(-+)+}(\alpha)$, естественным образом отделяя сингулярную часть Z_F^+ от конечной в термодинамическом пределе величины $G_F^{(-+)+}$.

Обратимся к вычислению величины $Z_F^+ G_F^{(+-)+}$, которая с учетом формул (3.29)–(3.31) имеет вид

$$
\begin{aligned}
Z_F^+ G_F^{(+-)+} = &\mathrm{Const} \frac{\partial}{\partial\alpha} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \, \exp\left\{ \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \sigma^{-1} (D_{\beta-it}^+)^{-1} \mathbf{x} \right. \\
&\left. + \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \sigma^{-1} (D_{it}^-)^{-1} \mathbf{y} + \mathbf{x}^T O_1 O_2 O_1 \mathbf{y} + \frac{\alpha}{2} \mathbf{y}^T O_1 \sigma^{-1} \overline{R}^- O_1 \mathbf{y} \right\} \Big|_{\alpha=0},
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

где Const дается формулой (3.23). Как и при вычислении вклада $Z_F^+ G_F^{(-+)+}$, выполним вначале интегрирование по $\mathbf{y}$, а затем по $\mathbf{x}$, что дает

$$
\begin{gathered}
Z_F^+ G_F^{(+-)+} = \mathrm{Const}\ \frac{\partial}{\partial\alpha} \det{}_{2M}^{1/2}\Big\{\sigma^{-1}(D_{it}^-)^{-1} + \alpha\, O_1\sigma^{-1}\overline{R}^-\, O_1\Big\} \\
\det{}_{2M}^{1/2}\Big\{\sigma^{-1}(D_{\beta-it}^+)^{-1} \\
+ O_1O_2O_1\Big[\sigma^{-1}(D_{it}^-)^{-1} + \alpha\, O_1\sigma^{-1}\overline{R}^-\, O_1\Big]^{-1} O_1O_2^TO_1\Big\}\Big|_{\alpha=0}.
\end{gathered}
\tag{3.49}
$$

Используя формулы

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\alpha}\det{}^{1/2}(A_1+\alpha A_2)\Big|_{\alpha=0} &= \frac{1}{2}\det{}^{1/2}A_1\cdot \mathrm{tr}(A_1^{-1}A_2), \\
(A_1+\alpha A_2)^{-1} &= A_1^{-1} - \alpha A_1^{-1}A_2A_1^{-1} + \dots ,
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

справедливые для любых матриц A_1, A_2, для величины $Z_F^+ G_F^{(+-)+}$ получим (в нашем случае $A_1 = \sigma^{-1}(D_{it}^-)^{-1}$, $A_2 = O_1\sigma^{-1}\overline{R}^-\, O_1$)

$$
\begin{gathered}
Z_F^+ G_F^{(+-)+} = \mathrm{Const}\ \det{}_M^{-1}\Big\{D_{it}^-\Big\}\det{}_M^{-1}\Big\{D_{\beta-it}^+\Big\} \\
\left(g^+ + \frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\det{}_{2M}^{1/2}\Big\{I + \mathcal{M}_F^{(+-)+}(\alpha)\Big\}\Big|_{\alpha=0},
\end{gathered}
\tag{3.51}
$$

где матрица $\mathcal{M}_F^{(+-)+}(\alpha)$ есть

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_F^{(+-)+}(\alpha) = O_1O_2O_1\Big[&\sigma D_{it}^- - \alpha\,(\sigma D_{it}^-)\,O_1\sigma^{-1}\overline{R}^-\, O_1(\sigma D_{it}^-)\Big] \\
&\times O_1O_2^TO_1\,\sigma D_{\beta-it}^+ ,
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

а функция g^+ есть

$$
\begin{aligned}
g^+ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_{2M}\Big\{\sigma D_{it}^- O_1\sigma^{-1}\overline{R}^-\, O_1\Big\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_M\Big\{D_{it}^-(R^- + \overline{R}^-)\Big\} \\
&= \frac{1}{M}\sum_{q\in X^-} d_{it}(q)\cos mq.
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

После преобразований представления (3.51), идентичных (3.38), (3.39) и (3.44), для вклада $Z_F^+ G_F^{(+-)+}$, аналогично (3.47), получаем ответ

$$
\begin{aligned}
Z_F^+ G_F^{(+-)+} = \; & e^{-(\beta-it)E_0^+ - itE_0^-} \det{}_M \left(\frac{I - J_{\beta-it}^+ T^+}{I+T^+} \right) \\
\det{}_M & \left(\frac{I - J_{it}^- T^-}{I+T^-} \right) \left(g^+ + \frac{\partial}{\partial\alpha} \right) \det{}_{2M}^{1/2} \left\{ I + \widetilde{\mathcal{M}}_F^{(+-)+}(\alpha) \right\} \Big|_{\alpha=0},
\end{aligned} \tag{3.54}
$$

где $2M \times 2M$ матрица $\widetilde{\mathcal{M}}_F^{(+-)+}(\alpha)$ есть

$$
\widetilde{\mathcal{M}}_F^{(+-)+}(\alpha) = \overrightarrow{\mathcal{F}_1}\, \overline{\mathcal{D}}_{it}^- \overleftarrow{\mathcal{F}_2}\, \mathcal{D}_{\beta-it}^+ - \alpha\, \overrightarrow{\mathcal{F}_1}\, \overline{\mathcal{D}}_{it}^- \overline{\mathcal{R}}^- \overline{\mathcal{D}}_{it}^- \overleftarrow{\mathcal{F}_2}\, \mathcal{D}_{\beta-it}^+. \tag{3.55}
$$

Величины $\overrightarrow{\mathcal{F}_1}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}_2}$, $\mathcal{D}_{it}^-$ и $\mathcal{D}_{\beta-it}^+$ определены в (3.46), а матрица $\mathcal{R}^-$ есть

$$
\mathcal{R}^- = \Lambda \begin{pmatrix} R^- & 0 \\ 0 & \overline{R}^- \end{pmatrix} \Lambda^{-1}. \tag{3.56}
$$

Обратимся к вычислению величин $Z_F^+ G_F^{(\pm\pm)+}$, которые с учетом формул (3.29)–(3.31) имеют вид

$$
\begin{aligned}
Z_F^+ G_F^{(\pm\pm)+} = \mathrm{Const} \frac{\partial}{\partial\alpha} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y}\, \exp & \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \sigma^{-1} (D_{\beta-it}^+)^{-1} \mathbf{x} \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \sigma^{-1} (D_{it}^-)^{-1} \mathbf{y} + \mathbf{x}^T O_1 \widetilde{O}_2(\alpha)\, O_1 \mathbf{y} \right\} \Big|_{\alpha=0},
\end{aligned} \tag{3.57}
$$

где матрица $\widetilde{O}_2(\alpha)$ есть

$$
\widetilde{O}_2(\alpha) = O_2 \mp i\alpha \left(\frac{1 \pm \sigma_3}{2} \right) \overrightarrow{S}\, \Omega. \tag{3.58}
$$

После взятия интегралов по $\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}$, выделения стандарного множителя из определителя зависящего от α, получим

$$
\begin{aligned}
Z_F^+ G_F^{(\pm\pm)+} = \; & \mathrm{Const}\, \det{}_M^{-1} \left\{ D_{it}^- \right\} \det{}_M^{-1} \left\{ D_{\beta-it}^+ \right\} \\
& \frac{\partial}{\partial\alpha} \det{}_{2M}^{1/2} \left\{ I + \mathcal{M}_F^{(\pm\pm)+}(\alpha) \right\} \Big|_{\alpha=0},
\end{aligned} \tag{3.59}
$$

где

$$
\mathcal{M}_F^{(\pm\pm)+}(\alpha) = O_1 \widetilde{O}_2(\alpha) O_1\, \sigma D_{it}^-\, O_1 \widetilde{O}_2^T(\alpha) O_1\, \sigma D_{\beta-it}^+. \tag{3.60}
$$

После преобразований, идентичных (3.38), (3.39) и (3.44), для величин $Z_F^+ G_F^{(\pm\pm)+}$, аналогично (3.47), получаем ответ

$$
\begin{aligned}
Z_F^+ G_F^{(\pm\pm)+} &= e^{-(\beta-it)E_0^+ - itE_0^-} \det_M\left(\frac{I - J_{\beta-it}^+ T^+}{I+T^+}\right) \\
\det_M\left(\frac{I - J_{it}^- T^-}{I+T^-}\right) &\frac{\partial}{\partial\alpha} \det{}_{2M}^{1/2}\left\{I + \widetilde{\mathcal{M}}_F^{(\pm\pm)+}(\alpha)\right\}\Big|_{\alpha=0},
\end{aligned}
\tag{3.61}
$$

где матрицы $\widetilde{\mathcal{M}}_F^{(\pm\pm)+}(\alpha)$, с точностью до квадратичного по α слагаемого, не дающего вклада в (3.61), равны

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{M}}_F^{(\pm\pm)+}(\alpha) = \overrightarrow{\mathcal{F}_1}\, \overline{\mathcal{D}}_{it}^-\, \overleftarrow{\mathcal{F}_2} \mathcal{D}_{\beta-it}^+ &+ \alpha\, \overrightarrow{\mathcal{S}_1}^{(\pm)}\, \overline{\mathcal{D}}_{it}^-\, \overleftarrow{\mathcal{F}_2} \mathcal{D}_{\beta-it}^+ \\
&- \alpha\, \overrightarrow{\mathcal{F}_1}\, \overline{\mathcal{D}}_{it}^-\, \overleftarrow{\mathcal{S}_2}^{(\pm)} \mathcal{D}_{\beta-it}^+ .
\end{aligned}
\tag{3.62}
$$

Матрицы $\overrightarrow{\mathcal{S}_1}^{(\pm)}$ и $\overleftarrow{\mathcal{S}_2}^{(\pm)}$ определяются как

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathcal{S}_1}^{(\pm)} &= \Lambda\, \sigma^{\pm} \begin{pmatrix} \Omega \overrightarrow{S}\, \Omega & \underline{0} \\ 0 & \overrightarrow{S} \end{pmatrix} \Lambda^{-1}, \\
\overleftarrow{\mathcal{S}_2}^{(\pm)} &= \Lambda \begin{pmatrix} \Omega \overleftarrow{S}\, \Omega & \underline{0} \\ 0 & \overleftarrow{S} \end{pmatrix} \sigma^{\pm} \Lambda^{-1},
\end{aligned}
\tag{3.63}
$$

а величины $\overrightarrow{\mathcal{F}_1}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}_2}$, $\mathcal{D}_{it}^-$ и $\mathcal{D}_{\beta-it}^+$ определены в (3.46).

Рассмотрим вклады $Z_F^- G_F^{(ab)-}$ в корреляционную функцию $G^{(ab)}(m,t)$. Из формул (3.12) следует, что представления для величин $Z_F^- G_F^{(ab)-}$ могут быть получены из представлений для величин $Z_F^+ G_F^{(ab)+}$ путем замены наборов импульсов $X^+ \leftrightarrow X^-$. Это означает, что величины $Z_F^- G_F^{(ab)-}$ представимы в виде, аналогичном формулам (3.47), (3.54) и (3.61),

$$
\begin{aligned}
Z_F^- G_F^{(ab)-} &= e^{-(\beta-it)E_0^- - itE_0^+} \det_M\left(\frac{I - J_{it}^- T^-}{I+T^-}\right) \det_M\left(\frac{I - J_{\beta-it}^+ T^+}{I+T^+}\right) \\
&\left(g^- \delta_{(ab)=(+-)} + \frac{\partial}{\partial\alpha}\right) \det{}_{2M}^{1/2}\left\{I + \widetilde{\mathcal{M}}_F^{(ab)-}(\alpha)\right\}\Big|_{\alpha=0},
\end{aligned}
\tag{3.64}
$$

где функция g^- есть (см. (3.53))

$$
g^- = \frac{1}{M} \sum_{p\in X^+} d_{it}(p) \cos mp. \tag{3.65}
$$

Замена наборов импульсов $X^+ \leftrightarrow X^-$ в терминах матриц означает замену $\overrightarrow{L} \leftrightarrow \overleftarrow{L}$, $P \leftrightarrow Q$, что эквивалентно изменению направлений стрелок у величин (3.42), $\overrightarrow{F}_{1,2} \leftrightarrow \overleftarrow{F}_{1,2}$. Кроме того, имеем $\overrightarrow{S} \leftrightarrow \overleftarrow{S}$. Тогда, естественным образом вводя величины

$$
\begin{aligned}
\overleftarrow{\mathcal{F}_1} &= \Lambda \begin{pmatrix} \overleftarrow{F_1} & 0 \\ 0 & \overleftarrow{F_2} \end{pmatrix} \Lambda^{-1}, \\
\overrightarrow{\mathcal{F}_2} &= \Lambda \begin{pmatrix} \overrightarrow{F_2} & 0 \\ 0 & \overrightarrow{F_1} \end{pmatrix} \Lambda^{-1}, \\
\overleftarrow{\mathcal{S}_1}^{(\pm)} &= \Lambda\, \sigma^{\pm} \begin{pmatrix} \Omega \overleftarrow{S} \Omega & 0 \\ 0 & \overleftarrow{S} \end{pmatrix} \Lambda^{-1}, \\
\overrightarrow{\mathcal{S}_2}^{(\pm)} &= \Lambda \begin{pmatrix} \Omega \overrightarrow{S} \Omega & 0 \\ 0 & \overrightarrow{S} \end{pmatrix} \sigma^{\pm} \Lambda^{-1},
\end{aligned}
\tag{3.66}
$$

по аналогии с (3.46) и (3.63), и учитывая также, что при замене $X^+ \leftrightarrow X^-$ имеем $D_z^+ \leftrightarrow D_z^-$, $R^+ \leftrightarrow R^-$, приходим к выводу, что матрицы $\widetilde{\mathcal{M}}_F^{(ab)-}(\alpha)$ получаются из матриц $\widetilde{\mathcal{M}}_F^{(ab)+}(\alpha)$ путем замены знаков в верних индексах и изменению направлений стрелок у матриц, фигурирующих в правых частях формул (3.45), (3.55) и (3.62). Явно, для матриц $\widetilde{\mathcal{M}}_F^{(ab)-}(\alpha)$ имеем следующие выражения

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{M}}_F^{(-+)-}(\alpha) &= \overleftarrow{\mathcal{F}_1}\, \overline{\mathcal{D}}_{it}^{+} \overrightarrow{\mathcal{F}_2}\, \mathcal{D}_{\beta-it}^{-} + \alpha \mathcal{R}^{-} \mathcal{D}_{\beta-it}^{-}, \\
\widetilde{\mathcal{M}}_F^{(+-)-}(\alpha) &= \overleftarrow{\mathcal{F}_1}\, \overline{\mathcal{D}}_{it}^{+} \overrightarrow{\mathcal{F}_2}\, \mathcal{D}_{\beta-it}^{-} - \alpha\, \overleftarrow{\mathcal{F}_1}\, \overline{\mathcal{D}}_{it}^{+} \overline{\mathcal{R}}^{+} \overline{\mathcal{D}}_{it}^{+} \overrightarrow{\mathcal{F}_2}\, \mathcal{D}_{\beta-it}^{-}. \\
\widetilde{\mathcal{M}}_F^{(\pm\pm)-}(\alpha) &= \overleftarrow{\mathcal{F}_1}\, \overline{\mathcal{D}}_{it}^{+} \overrightarrow{\mathcal{F}_2} \mathcal{D}_{\beta-it}^{-} + \alpha\, \overleftarrow{\mathcal{S}_1}^{(\pm)}\, \overline{\mathcal{D}}_{it}^{+} \overrightarrow{\mathcal{F}_2} \mathcal{D}_{\beta-it}^{-} \\
&\quad - \alpha\, \overleftarrow{\mathcal{F}_1}\, \overline{\mathcal{D}}_{it}^{+} \overrightarrow{\mathcal{S}_2}^{(\pm)} \mathcal{D}_{\beta-it}^{-}.
\end{aligned}
\tag{3.67}
$$

Рассмотрим теперь “бозонный” вклад $Z_B^+ G_B^{(ab)+}$ в коррелятор. В силу (3.8), формула (3.13) для “бозонного” вклада запишется в виде

$$
\begin{aligned}
Z_B^+ G_B^{(ab)+} = \int & d\eta d\eta^* d\xi d\xi^* d\phi d\phi^* d\psi d\psi^*\, e^{\eta^* \psi - \xi^* \eta - \phi^* \xi - \psi^* \phi} \\
& \langle\, \eta^*, + \mid e^{-(\beta - it)\mathbf{H}^+} \mid \eta, + \,\rangle \langle\, \xi^*, + \mid \sigma_{m+1}^a \mid \xi, - \,\rangle \\
& \langle\, \phi^*, - \mid e^{-it\mathbf{H}^-} \mid \phi, - \,\rangle \langle\, \psi^*, - \mid \sigma_1^b \mid -\psi, + \,\rangle.
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

Дальнейшие вычисления могут быть проведены полностью по той же схеме, как это было подробно изложено выше при вычислении аналогичного “фермионного” вклада. Специфика этого случая состоит в том, что изменение знака у переменной ψ в матричном элементе ведет к изменению выражений для всех величин содержащих эту переменную, а именно, изменится знак у величин f_{m0}^{-+} и f_{m0}^{++} (3.19), (3.31), а матрица O_2 в "бозонном" случае примет вид (см. (3.29) и (3.30))

$$O_2 := \begin{pmatrix} 0 & -P\,\Omega\,\overrightarrow{L}\,\Omega\overline{Q} \\ P\,\overrightarrow{L}\,\overline{Q} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.69}$$

В соответствии с этим изменятся матрицы K и $\sigma K^T\sigma$, участвующие в преобразовании (3.38); в "бозонным" случае они равны

$$\begin{aligned} K &= \begin{pmatrix} -P\,\Omega\,\overrightarrow{L}\,\Omega\overline{Q} & 0 \\ 0 & -P\,\overrightarrow{L}\,\overline{Q} \end{pmatrix}, \\ \sigma K^T\sigma &= \begin{pmatrix} \overline{Q}\,\Omega\,\overleftarrow{L}\,\Omega P & 0 \\ 0 & \overline{Q}\,\overleftarrow{L}\,P \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.70}$$

Такая структура матриц K и $\sigma K^T\sigma$ приводит к тому, что на этапе преобразований детерминантного представления описываемого выражением (3.43) для "бозонных" вкладов уже будет получаться окончательный ответ. (т.е. в "бозонном" случае нет необходимости в тождестве (3.44)).

Таким образом, для вкладов $Z_B^+ G_B^{(ab)+}$ справедливы следующие представления

$$Z_B^+ G_B^{(ab)+} = e^{-(\beta-it)E_0^+ - itE_0^-}\, \det{}_M\left(\frac{I - J_{it}^- T^-}{I+T^-}\right) \det{}_M\left(\frac{I - J_{\beta-it}^+ T^+}{I+T^+}\right)$$

$$\left(g^+\delta_{(ab)=(+-)} + \frac{\partial}{\partial\alpha}\right) \det{}_{2M}^{1/2}\left\{I + \widetilde{\mathcal{M}}_B^{(ab)-}(\alpha)\right\}\Big|_{\alpha=0}, \tag{3.71}$$

где функция g^+ определена в (3.53), а матрицы $\widetilde{\mathcal{M}}_B^{(ab)-}(\alpha)$ суть

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_B^{(-+)+}(\alpha) &= -\overrightarrow{\mathcal{F}_1}\,\mathcal{D}_{it}^-\overleftarrow{\mathcal{F}_2}\,\mathcal{D}_{\beta-it}^+ - \alpha\mathcal{R}^+\mathcal{D}_{\beta-it}^+, \\ \widetilde{\mathcal{M}}_B^{(+-)+}(\alpha) &= -\overrightarrow{\mathcal{F}_1}\,\mathcal{D}_{it}^-\overleftarrow{\mathcal{F}_2}\,\mathcal{D}_{\beta-it}^+ + \alpha\,\overrightarrow{\mathcal{F}_1}\,\mathcal{D}_{it}^-\overline{\mathcal{R}}^-\mathcal{D}_{it}^-\overleftarrow{\mathcal{F}_2}\,\mathcal{D}_{\beta-it}^+. \\ \widetilde{\mathcal{M}}_B^{(\pm\pm)+}(\alpha) &= -\overrightarrow{\mathcal{F}_1}\,\mathcal{D}_{it}^-\overleftarrow{\mathcal{F}_2}\mathcal{D}_{\beta-it}^+ + \alpha\,\overrightarrow{\mathcal{S}_1}^{(\pm)}\,\mathcal{D}_{it}^-\overleftarrow{\mathcal{F}_2}\mathcal{D}_{\beta-it}^+ \\ &\quad - \alpha\,\overrightarrow{\mathcal{F}_1}\,\mathcal{D}_{it}^-\overleftarrow{\mathcal{S}_2}^{(\pm)}\mathcal{D}_{\beta-it}^+. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Наконец, “бозонный” вклад $Z_B^- G_B^{(ab)-}$ в коррелятор будет очевидным образом получаться путем замены наборов импульсов $X^+ \leftrightarrow X^-$ в предсталении для соответствующего вклада $Z_B^+ G_B^{(ab)+}$ (3.71). В терминах матричного представления, это означает замены $\mathcal{D}^+ \leftrightarrow \mathcal{D}^-$, $\mathcal{R}^+ \leftrightarrow \mathcal{R}^-$, и обращение направления стрелок у величин $\mathcal{F}_{1,2}$ и $\mathcal{S}_{1,2}^{(\pm)}$ в матрицах (3.72).

4. Вывод представлений для корреляционных функций в термодинамическом пределе

Корреляционные функции наиболее важны и интересны в термодинамическом пределе, в пределе бесконечной цепочки, $M \to \infty$, при фиксированном магнитном поле h. Нетрудно видеть, однако, что все вклады $Z_{F,B}^{\pm} G_{F,B}^{(ab)\pm}$ в (3.11), ровно как и все вклады $Z_{F,B}^{\pm}$ в статсумму, сингулярны в термодинамическом пределе. Естественно ожидать, что все сингулярности в числителе и знаменателе выражения (3.11) проистекают из сингулярности величин $Z_{F,B}^{\pm}$, а величины $G_{F,B}^{(ab)\pm}$ конечны в пределе $M \to \infty$.

Для величин $Z_{F,B}^{\pm}$, используя (3.10), нетрудно получить оценку

$$\left|\frac{Z_B^{\pm}}{Z_F^{\pm}}\right| < C^M, \qquad C = \tanh\frac{\beta E_{\max}}{2} < 1, \tag{4.1}$$

где $E_{\max}$ максимальное значение функции $E(p)$. Следовательно, в термодинамическом пределе имеем

$$\frac{Z_F^-}{Z_F^+} \to 1, \qquad \left|\frac{Z_B^-}{Z_B^+}\right| \to 1, \qquad \frac{Z_B^{\pm}}{Z_F^{\pm}} \to 0. \tag{4.2}$$

Таким образом, корреляционные функции $G^{(ab)}$ будут определяться только “фермионными” вкладами $G_F^{(ab)\pm}$, при условии, что “бозонные” величины $G_B^{(ab)\pm}$ окажутся конечными при $M \to \infty$. Поэтому, для вычисления корреляционных функций $G^{(ab)}$ в термодинамическом пределе необходимо иметь представления для величин $G_{F,B}^{(ab)\pm}$ на конечной цепочке в терминах объектов, имеющих хорошо определенный (конечный) предел при $M \to \infty$. Тем самым будет достигнута двоякая цель: во-первых, мы покажем, что величины $G_F^{(ab)\pm}$ и $G_B^{(ab)\pm}$ конечны в пределе $M \to \infty$, а, во-вторых, из точных представлений для величин $G_F^{(ab)\pm}$ при конечном M будет очевидным образом следовать представление для корреляционных функций $G^{(ab)}$ в термодинамическом пределе.

Проведем соответствующее вычисление на примере величин $G_F^{(ab)+}$. В представлениях (3.47), (3.54), (3.61) для вкладов $Z_F^+ G_F^{(ab)+}$ самым нетривиальным объектом являются определители $2M\times 2M$ матриц $I+\widetilde{\mathcal{M}}_F^{(ab)+}(\alpha)$. Рассмотрим подробно матрицу $\overrightarrow{\mathcal{F}_1}\,\overline{\mathcal{D}}_{it}^-\overleftarrow{\mathcal{F}_2}$, которая определяет не зависящую от α часть матриц $\widetilde{\mathcal{M}}_F^{(ab)+}(\alpha)$. Используя явный вид матричных элементов матриц $\overrightarrow{F}_{1,2}$ и $\overleftarrow{F}_{1,2}$,

$$
\begin{aligned}
(\overrightarrow{F}_1)_{pq} &= \frac{i}{M}\frac{e^{-i\left(\frac{p-q}{2}\right)}}{\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)}e^{-i\frac{m}{2}(p-q)},\\
(\overrightarrow{F}_2)_{pq} &= \frac{i}{M}\frac{e^{-i\left(\frac{p-q}{2}\right)}}{\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)}e^{i\frac{m}{2}(p-q)},\\
(\overleftarrow{F}_1)_{qp} &= \frac{i}{M}\frac{e^{-i\left(\frac{q-p}{2}\right)}}{\sin\left(\frac{q-p}{2}\right)}e^{-i\frac{m}{2}(q-p)},\\
(\overleftarrow{F}_2)_{qp} &= \frac{i}{M}\frac{e^{-i\left(\frac{q-p}{2}\right)}}{\sin\left(\frac{q-p}{2}\right)}e^{i\frac{m}{2}(q-p)},
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

(где, как и в предыдущем разделе, $p\in X^+$ и $q\in X^-$) выпишем матричные элементы матрицы $\overrightarrow{\mathcal{F}_1}\,\overline{\mathcal{D}}_{it}^-\overleftarrow{\mathcal{F}_2}$, трактуя ее как $M\times M$ блочную матрицу построенную из 2×2 матриц ($p,p'\in X^+$):

$$
\begin{aligned}
&\left(\overrightarrow{\mathcal{F}_1}\,\overline{\mathcal{D}}_{it}^-\overleftarrow{\mathcal{F}_2}\right)_{pp'}\\
&= -\frac{1}{M^2}\sum_{q\in X^-}\frac{e^{-i\left(\frac{p-p'}{2}\right)}}{\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{q-p'}{2}\right)}\begin{pmatrix}\cos\frac{m}{2}(p-q) & i\sin\frac{m}{2}(p-q)\\ i\sin\frac{m}{2}(p-q) & \cos\frac{m}{2}(p-q)\end{pmatrix}\\
&\qquad\begin{pmatrix}d_{it}(-q) & 0\\ 0 & d_{it}(q)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{m}{2}(q-p') & -i\sin\frac{m}{2}(q-p')\\ -i\sin\frac{m}{2}(q-p') & \cos\frac{m}{2}(q-p')\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Из (4.4) видно, что диагональные элементы 2×2 матрицы, стоящей под знаком суммы содержат, в частности, слагаемое $\cos\frac{m}{2}(p-q)\cos\frac{m}{2}(q-p')$, и следовательно, в диагональных элементах матрицы $\overrightarrow{\mathcal{F}_1}\,\overline{\mathcal{D}}_{it}^-\overleftarrow{\mathcal{F}_2}$ фигурируют суммы по q от выражений содержащих формально двойной полюс в точке $p=p'$. При M

конечном все суммы в (4.4) хорошо определены, поскольку $q \neq p$, для $q \in X^-$, $p \in X^+$. В термодинамическом пределе, однако, значения q и p сгущаются, заполняя непрерывно интервал $(-\pi, \pi)$, и для коррекного перехода к термодинамического пределу суммы по q содержащие полюса необходимо преобразовать.

Для этого, используя тождество

$$\frac{1}{M^2} \sum_{q \in X^-} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{q-p}{2}\right)} = 1, \qquad p \in X^+, \tag{4.5}$$

представим матрицу $\overrightarrow{\mathcal{F}_1}\,\overline{\mathcal{D}}_{it}^-\overleftarrow{\mathcal{F}_2}$ в виде суммы

$$\overrightarrow{\mathcal{F}_1}\,\overline{\mathcal{D}}_{it}^-\overleftarrow{\mathcal{F}_2} = \overline{\mathcal{D}}_{it}^+ + \widetilde{V}_F^+, \tag{4.6}$$

где матрица $\widetilde{V}_F^+$ определяется формулой

$$\widetilde{V}_F^+ = \overrightarrow{\mathcal{F}_1}\,\overline{\mathcal{D}}_{it}^-\overleftarrow{\mathcal{F}_2} - \overline{\mathcal{D}}_{it}^+. \tag{4.7}$$

Используя тождество (4.5) для диагональных элементов матрицы $\widetilde{V}_F^+$ имеем

$$\left(\widetilde{V}_F^+\right)_{pp} = \left(\overrightarrow{\mathcal{F}_1}\,\overline{\mathcal{D}}_{it}^-\overleftarrow{\mathcal{F}_2}\right)_{pp}$$

$$-\frac{1}{M^2} \sum_{q \in X^-} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{q-p}{2}\right)} \begin{pmatrix} d_{it}(-p) & 0 \\ 0 & d_{it}(p) \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

и таким образом (4.8) представимо в виде суммы по q от выражения имеющего формально только простой полюс по q в точке p.

Заметим, что суммы по q от выражений содержащих простой полюс присутствуют также в недиагональных элементах матрицы $\widetilde{V}_F^+$ (задающихся недиагональными элементами матрицы $\overrightarrow{\mathcal{F}_1}\,\overline{\mathcal{D}}_{it}^-\overleftarrow{\mathcal{F}_2}$) и в матрицах описывающих линейную по α часть матриц $\widetilde{\mathcal{M}}_F^{(ab)+}(\alpha)$. Для анализа этих матричных элементов мы, обобщая подход использованный в [5] для XXO цепочки, введем в рассмотрение матрицы-функции размерности 2×2

$$\mathbf{e}_-(p) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{m}{2}p} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{m}{2}p} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_+(p) = \mathbf{e}_-(p)\,\mathbf{e}(p), \tag{4.9}$$

где матрица-функция $\mathbf{e}(p)$ есть

$$\mathbf{e}(p) = \frac{1}{M} \sum_{q \in X^-} \frac{e^{i\left(\frac{q-p}{2}\right)}}{\sin\left(\frac{q-p}{2}\right)} \mathbf{e}_-^{-1}(q)\, \mathbf{d}(-q)\, \mathbf{e}_-^{-1}(q) \tag{4.10}$$

и

$$\mathbf{d}(q) = \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} d_{it}(q) & 0 \\ 0 & d_{it}(-q) \end{pmatrix} \Lambda. \tag{4.11}$$

В силу тождества

$$\begin{gathered} \frac{1}{\sin\left(\frac{q-p}{2}\right)\sin\left(\frac{q-p'}{2}\right)} \\ = \frac{1}{\sin\left(\frac{p-p'}{2}\right)} \left(\frac{e^{i\left(\frac{q-p}{2}\right)}}{\sin\left(\frac{q-p}{2}\right)} - \frac{e^{i\left(\frac{q-p'}{2}\right)}}{\sin\left(\frac{q-p'}{2}\right)} \right), \quad p \neq p', \end{gathered} \tag{4.12}$$

недиагональные матричные элементы матрицы $\widetilde{V}_F^+$ записываются в виде (ср. (4.4) и (4.7)):

$$\left(\widetilde{V}_F^+\right)_{pp'} = \frac{e^{-i\left(\frac{p-p'}{2}\right)}}{M \sin\left(\frac{p-p'}{2}\right)} \Lambda \Big(\mathbf{e}_+(p)\, \mathbf{e}_-^T(p') - \mathbf{e}_-(p)\, \mathbf{e}_+^T(p')\Big) \Lambda^{-1}. \tag{4.13}$$

Введем обозначения для матриц входящих в линейную по α часть матриц $\widetilde{\mathcal{M}}_F^{(ab)+}(\alpha)$ (см. (3.45), (3.55), (3.62)):

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_F^{(-+)+} &= \mathcal{R}^+, \\ \widetilde{W}_F^{(+-)+} &= -\overrightarrow{\mathcal{F}_1}\, \overline{\mathcal{D}}_{it}^-\, \overline{\mathcal{R}}^-\, \overline{\mathcal{D}}_{it}^-\, \overleftarrow{\mathcal{F}_2}, \\ \widetilde{W}_F^{(\pm\pm)+} &= \overrightarrow{\mathcal{S}_1}^{(\pm)}\, \overline{\mathcal{D}}_{it}^-\, \overleftarrow{\mathcal{F}_2} - \overrightarrow{\mathcal{F}_1}\, \overline{\mathcal{D}}_{it}^-\, \overleftarrow{\mathcal{S}_2}^{(\pm)}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Матрицы $\widetilde{W}_F^{(ab)+}$ имеют матричные элементы

$$\begin{aligned} \left(\widetilde{W}_F^{(-+)+}\right)_{pp'} &= \frac{1}{M} \Lambda\, \mathbf{e}_-(p)\, \mathbf{e}_-^T(p')\, \Lambda^{-1}, \\ \left(\widetilde{W}_F^{(+-)+}\right)_{pp'} &= -\frac{1}{M} \Lambda \Big(\mathbf{e}_+(p)\, \mathbf{e}_+^T(p') - 2ig^+ \mathbf{e}_+(p)\, \mathbf{e}_-^T(p')\Big) \Lambda^{-1}, \\ \left(\widetilde{W}_F^{(\pm\pm)+}\right)_{pp'} &= \frac{i}{M} \Lambda \Big(\mathbf{e}_-(p) \sigma^\pm \mathbf{e}_+^T(p') \\ &\quad - 2ig^+ \mathbf{e}_-(p) \sigma^\pm \mathbf{e}_-^T(p') + \mathbf{e}_+(p) \sigma^\pm \mathbf{e}_-^T(p')\Big) \Lambda^{-1}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

где функция g^+ определена в (3.53).

Суммы по q содержатся только в матрице-функции $\mathbf{e}(p)$, причем $\mathbf{e}(p) = \mathbf{c}(p) + ig^+ I$ где матрица-функция $\mathbf{c}(p)$ есть

$$\mathbf{c}(p) = \frac{1}{M} \sum_{q \in X^-} \cot\left(\tfrac{q-p}{2}\right) \mathbf{e}_-^{-1}(q)\, \mathbf{d}(-q)\, \mathbf{e}_-^{-1}(q). \tag{4.16}$$

Для перехода к термодинамическому пределу в суммах вида (4.16), содержащих простые полюсы при $q = p$, воспользуемся тождеством

$$\frac{1}{M} \sum_{q \in X^-} \cot\left(\tfrac{q-p}{2}\right) = 0, \qquad p \in X^+, \tag{4.17}$$

тогда для любой функции $f(p)$, в силу (4.17), имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{M} \sum_{q \in X^-} \cot\left(\tfrac{q-p}{2}\right) f(q) \\ =&\frac{1}{M} \sum_{q \in X^-} \cot\left(\tfrac{q-p}{2}\right) (f(q) - f(p)), \quad p \in X^+ \end{aligned} \tag{4.18}$$

и, следовательно, простой полюс в пределе $M \to \infty$ должен пониматься в смысле главного значения.

Это утверждение получено нами для недиагональных элементов матрицы $\widetilde{V}_F^+$ (и для всех элементов матриц $\widetilde{W}_F^{(ab)+}$), однако, как нетрудно убедиться прямым вычислением, процедура определения простого полюса в суммах по q в диагональных элементах $\widetilde{V}_F^+$ в пределе $M \to \infty$ также производится с помощью формулы (4.18). Кроме того, можно показать, полностью следуя выкладкам приложения работы [5], что диагональные элементы $\widetilde{V}_F^+$, задающиеся формулой (4.8), получаются из недиагональных элементов $\widetilde{V}_F^+$ путем взятия формального предела $p \to p'$ в формуле (4.13) по правилу Лопиталя.

Заметим, что суммы вида (4.18) имеют порядок $\mathcal{O}(1)$ при $M \to \infty$, а все матричные элементы $2M \times 2M$ матриц $\widetilde{V}_F^+$ и $\widetilde{W}_F^{(ab)+}$, как видно из (4.13) и (4.15), имеют порядок $\mathcal{O}(1/M)$, и, таким образом, эти матрицы являются хорошо определенными величинами в пределе $M \to \infty$, в котором они переходят в интегральные операторы (с 2×2 матричным ядром), действующие на (вектор-)

функции на отрезке $(-\pi,\pi)$. Соответствующий предельный переход будет описан ниже, при выводе представлений для корреляционных функций в термодинамическом пределе.

Вернемся к формуле (4.6), из которой следует, что матрица $\overrightarrow{\mathcal{F}_1}\,\overline{\mathcal{D}}^{-}_{it}\overleftarrow{\mathcal{F}_2}$ есть сумма двух матриц, а именно, диагональной матрицы $\overline{\mathcal{D}}^{+}_{it}$, матричные элементы которой порядка $\mathcal{O}(1)$ при $M\to\infty$, и матрицы $\widetilde{V}^{+}_{F}$, все матричные элементы которой, как показано выше, порядка $\mathcal{O}(1/M)$. Следовательно, матрицы $\widetilde{\mathcal{M}}^{(ab)+}_{F}(\alpha)$ также содержат диагональный вклад порядка $\mathcal{O}(1)$, равный $\overline{\mathcal{D}}^{+}_{it}\mathcal{D}^{+}_{\beta-it}$; все остальные слагаемые порядка $\mathcal{O}(1/M)$. Присутсвие вклада порядка $\mathcal{O}(1)$ в матрицах $\widetilde{\mathcal{M}}^{(ab)+}_{F}(\alpha)$ порождает сингулярность определителя $2M\times 2M$ матрицы $I+\widetilde{\mathcal{M}}^{(ab)+}_{F}(\alpha)$ в пределе $M\to\infty$. Естественно выделить сингулярность (при $M\to\infty$) порождаемую диагональными элементами матрицы $\widetilde{\mathcal{M}}^{(ab)+}_{F}(\alpha)$, факторизуя сингулярную часть. С учетом (4.6) и (4.14) имеем

$$
\begin{aligned}
I+\widetilde{\mathcal{M}}^{(ab)+}_{F}(\alpha) &= I+\left(\overline{\mathcal{D}}^{+}_{it}+\widetilde{V}^{+}_{F}+\alpha\widetilde{W}^{(ab)+}_{F}\right)\mathcal{D}^{+}_{\beta-it}\\
&= \left(I+\left(\widetilde{V}^{+}_{F}+\alpha\widetilde{W}^{(ab)+}_{F}\right)\mathcal{D}^{+}_{\beta-it}\left(I+\overline{\mathcal{D}}^{+}_{it}\mathcal{D}^{+}_{\beta-it}\right)^{-1}\right)\\
&\qquad\times\left(I+\overline{\mathcal{D}}^{+}_{it}\mathcal{D}^{+}_{\beta-it}\right),
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

и, следовательно,

$$
\begin{aligned}
&\det{}^{1/2}_{2M}\left(I+\widetilde{\mathcal{M}}^{(ab)+}_{F}(\alpha)\right)\\
&= \det{}_{M}\left(I+\overline{D}^{+}_{it}D^{+}_{\beta-it}\right)\det{}^{1/2}_{2M}\left(I+\widetilde{V}^{+}_{F}\Theta^{+}_{F}+\alpha\widetilde{W}^{(ab)+}_{F}\Theta^{+}_{F}\right)
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

где диагональная $2M\times 2M$ матрица Θ^{+}_{F} есть

$$
\Theta^{+}_{F}=\mathcal{D}^{+}_{\beta-it}\left(I+\overline{\mathcal{D}}^{+}_{it}\mathcal{D}^{+}_{\beta-it}\right)^{-1}
\tag{4.21}
$$

В правой части (4.20) первый сомножитель сингулярен, а второй конечен в пределе $M\to\infty$.

Используя выражение (3.10) для Z^{+}_{F} и представления (3.47), (3.54) и (3.61) для вкладов $Z^{+}_{F}G^{(ab)+}_{F}$, с учетом формулы (4.20), для величин $G^{(ab)+}_{F}$ получим

$$
G^{(ab)+}_{F}=G_0\left(g^{+}\delta_{(ab),(+-)}+\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)
$$

$$\times \det{}_{2M}^{1/2}\Big(I + V_F^+ + \alpha W_F^{(ab)+}\Big)\bigg|_{\alpha=0}, \tag{4.22}$$

где преддетерминантный фактор G_0 равен

$$G_0 = e^{it(E_0^+ - E_0^-)} \det{}_M^{-1}\left(\frac{I - J_{\beta-it}^+ T^+}{I - T^+}\right) \det{}_M\left(\frac{I - J_{\beta-it}^- T^-}{I - T^-}\right). \tag{4.23}$$

Матрицы V_F^+ и $W_F^{(ab)+}$ определяются формулами

$$\begin{aligned} V_F^+ &= \Lambda^{-1}(\Theta_F^+)^{1/2}\widetilde{V}_F^+(\Theta_F^+)^{1/2}\Lambda, \\ W_F^{(ab)+} &= \Lambda^{-1}(\Theta_F^+)^{1/2}\widetilde{W}_F^{(ab)+}(\Theta_F^+)^{1/2}\Lambda, \end{aligned} \tag{4.24}$$

их матричные элементы равны (см. (4.13) и (4.15))

$$\begin{aligned} \big(V_F^+\big)_{pp'} &= \frac{e^{-i\left(\frac{p-p'}{2}\right)}}{M\sin\left(\frac{p-p'}{2}\right)}\,\Phi^{1/2}(p)\Big(\mathbf{e}_+(p)\,\mathbf{e}_-^T(p') - \mathbf{e}_-(p)\,\mathbf{e}_+^T(p')\Big)\Phi^{1/2}(p'), \\ \Big(W_F^{(-+)+}\Big)_{pp'} &= \frac{1}{M}\,\Phi^{1/2}(p)\,\mathbf{e}_-(p)\,\mathbf{e}_-^T(p')\,\Phi^{1/2}(p'), \\ \Big(W_F^{(+-)+}\Big)_{pp'} &= -\frac{1}{M}\Phi^{1/2}(p)\Big(\mathbf{e}_+(p)\mathbf{e}_+^T(p') - 2ig^+\,\mathbf{e}_+(p)\mathbf{e}_-^T(p')\Big)\Phi^{1/2}(p'), \\ \Big(W_F^{(\pm\pm)+}\Big)_{pp'} &= \frac{i}{M}\,\Phi^{1/2}(p)\Big(\mathbf{e}_-(p)\sigma^\pm\mathbf{e}_+^T(p') \\ &\quad - 2ig^+\mathbf{e}_-(p)\sigma^\pm\mathbf{e}_-^T(p') + \mathbf{e}_+(p)\sigma^\pm\mathbf{e}_-^T(p')\Big)\Phi^{1/2}(p'), \end{aligned} \tag{4.25}$$

где 2×2 матрицы-функции $\mathbf{e}_\pm(p)$ определены в (4.9)–(4.11), а функция g^+ определена в (3.53). Матрица-функция $\Phi(p)$ есть

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= \Lambda^{-1}\begin{pmatrix} \varphi(p) & 0 \\ 0 & \varphi(-p) \end{pmatrix}\Lambda, \\ \Phi^{1/2}(p) &= \Lambda^{-1}\begin{pmatrix} \varphi^{1/2}(p) & 0 \\ 0 & \varphi^{1/2}(-p) \end{pmatrix}\Lambda, \end{aligned} \tag{4.26}$$

где функция $\varphi(p)$ определяется как

$$\varphi(p) = \frac{d_{\beta-it}(p)}{1 + d_{\beta-it}(p)\,d_{it}(-p)}. \tag{4.27}$$

Из (4.22) видно, что величина $G_F^{(ab)+}$ представлена в терминах величин, конечных в пределе $M \to \infty$, причем $G_0 \to 1$ в этом пределе. Подчеркнем, формула (4.22) есть точный ответ для величины $G_F^{(ab)+}$ для любого M.

Для величины $G_F^{(ab)-}$, полностью повторяя вышеизложенные рассуждения с учетом замены наборов импульсов $X^+ \leftrightarrow X^-$, получим

$$G_F^{(ab)-} = G_0^{-1}\left(g^-\delta_{(ab),(+-)} + \frac{\partial}{\partial\alpha}\right)$$

$$\times \det{}_{2M}^{1/2}\left(I + V_F^- + \alpha W_F^{(ab)-}\right)\Bigg|_{\alpha=0}, \tag{4.28}$$

где

$$\begin{aligned} V_F^- &= \Lambda^{-1}(\Theta_F^-)^{1/2}\widetilde{V}_F^-(\Theta_F^-)^{1/2}\Lambda, \\ W_F^{(ab)-} &= \Lambda^{-1}(\Theta_F^-)^{1/2}\widetilde{W}_F^{(ab)-}(\Theta_F^-)^{1/2}\Lambda, \end{aligned} \tag{4.29}$$

и матрица Θ_F^- дается (4.21) с заменой $\mathcal{D}^+ \to \mathcal{D}^-$. Матрица $\widetilde{V}_F^-$ формально определяется соотношением, аналогичным (4.7),

$$\widetilde{V}_F^- = \overleftarrow{\mathcal{F}_1}\,\overline{\mathcal{D}}_{it}^+\overrightarrow{\mathcal{F}_2} - \overline{\mathcal{D}}_{it}^-, \tag{4.30}$$

которое нужно понимать в смысле формулы (4.8), с заменой импульсов $p \leftrightarrow q$, $p \in X^+$, $q \in X^-$ (заметим, что тождество (4.5), так же как и тождество (4.17), инвариантно относительно замены наборов $X^+ \leftrightarrow X^-$). Матрицы $\widetilde{W}_F^{(ab)-}$ есть (см. (3.67))

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_F^{(-+)-} &= \mathcal{R}^-, \\ \widetilde{W}_F^{(+-)-} &= -\overleftarrow{\mathcal{F}_1}\,\overline{\mathcal{D}}_{it}^+\mathcal{R}^+\overline{\mathcal{D}}_{it}^+\overrightarrow{\mathcal{F}_2}, \\ \widetilde{W}_F^{(\pm\pm)-} &= \overleftarrow{\mathcal{S}_1}^{(\pm)}\,\overline{\mathcal{D}}_{it}^+\overrightarrow{\mathcal{F}_2} - \overleftarrow{\mathcal{F}_1}\,\overline{\mathcal{D}}_{it}^+\overrightarrow{\mathcal{S}_2}^{(\pm)}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Заметим, что матричные элементы матриц V_F^- и $W_F^{(ab)-}$ также могут быть записаны в форме (4.25) с учетом того, что аргументами матриц-функций являются $q, q' \in X^-$ и суммирование в определении матрицы-функции $\mathbf{e}(q)$ (см. (4.10)) должно осуществляться по $p \in X^+$.

Рассмотрим теперь "бозонные" вклады $G_B^{(ab)\pm}$. Для "бозонных" вкладов, проводя анализ проведенный выше на примере "фермионного" вклада $G_F^{(ab)+}$, получим

$$G_B^{(ab)\pm} = G_0^{\pm 1}\left(g^\pm\,\delta_{(ab),(+-)} + \frac{\partial}{\partial\alpha}\right)$$

$$\times\det{}_{2M}^{1/2}\Bigl(I - V_B^{\pm} - \alpha W_B^{(ab)\pm}\Bigr)\bigg|_{\alpha=0}, \tag{4.32}$$

где

$$\begin{aligned} V_B^{\pm} &= \Lambda^{-1}(\Theta_B^{\pm})^{1/2}\widetilde{V}_B^{\pm}(\Theta_B^{\pm})^{1/2}\Lambda, \\ W_B^{(ab)\pm} &= \Lambda^{-1}(\Theta_B^{\pm})^{1/2}\widetilde{W}_B^{(ab)\pm}(\Theta_B^{\pm})^{1/2}\Lambda. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Диагональные $2M\times 2M$ матрицы $\Theta_B^{\pm}$ определяются формулой

$$\Theta_B^{\pm} = \mathcal{D}_{\beta-it}^{\pm}\left(I - \overline{\mathcal{D}}_{it}^{\pm}\mathcal{D}_{\beta-it}^{\pm}\right)^{-1}. \tag{4.34}$$

Например, матрица V_B^{+} определяется как

$$\widetilde{V}_B^{+} = \overrightarrow{\mathcal{F}_1}\,\mathcal{D}_{it}^{-}\,\overleftarrow{\mathcal{F}_2} - \mathcal{D}_{it}^{+}, \tag{4.35}$$

причем выражение для матрицы V_B^{+} нужно понимать в смысле формулы (4.8). Матрицы $W_B^{(ab)^+}$ определяются как

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_B^{(-+)+} &= \mathcal{R}^{+}, \\ \widetilde{W}_B^{(+-)+} &= -\overrightarrow{\mathcal{F}_1}\,\mathcal{D}_{it}^{-}\,\overline{\mathcal{R}}^{-}\,\mathcal{D}_{it}^{-}\,\overleftarrow{\mathcal{F}_2}, \\ \widetilde{W}_B^{(\pm\pm)+} &= -\overrightarrow{\mathcal{S}_1}^{(\pm)}\,\mathcal{D}_{it}^{-}\,\overleftarrow{\mathcal{F}_2} + \overrightarrow{\mathcal{F}_1}\,\mathcal{D}_{it}^{-}\,\overleftarrow{\mathcal{S}_2}^{(\pm)}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Матрицы V_B^{-} и $W_B^{(ab)-}$ получаются путем формальной замены $\mathcal{D}^{+}\leftrightarrow\mathcal{D}^{-}$, $\mathcal{R}^{+}\leftrightarrow\mathcal{R}^{-}$, и обращением направления стрелок у величин $\mathcal{F}_{1,2}$ и $\mathcal{S}_{1,2}^{(\pm)}$ в матрицах (4.35), (4.36). Матричные элементы матриц $V_B^{\pm}$ и $W_B^{(ab)\pm}$ также могут быть представлены в виде, аналогичном (4.25), однако определение матриц-функций $\mathbf{e}(p)$ и $\Phi(p)$ в "бозонном" случае несколько иное. Явный вид матричных элементов $V_B^{\pm}$ и $W_B^{(ab)\pm}$, однако, не существеннен, поскольку, как это видно из представления (4.32), функции $G_B^{(ab)\pm}$ конечны в пределе $M\to\infty$ и, как это обсуждалось в начале этого раздела, они не дают вклада в корреляционные функции $G^{(ab)}$ в термодинамическом пределе.

Рассмотрим переход к термодинамическому пределу в представлении (3.11) для корреляционных функций $G^{(ab)}$. В силу (4.2) корреляционные функции определяются только "фермионными" вкладами $G_F^{(ab)\pm}$ в термодинамическом пределе. Очевидно, что все отличие величин $G_F^{(ab)+}$ и $G_F^{(ab)-}$ состоит в замене наборов импульсов $X^+ \leftrightarrow X^-$. В термодинамическом пределе значения импульсов $p \in X^+$ и $q \in X^-$ сгущаются, заполняя непрерывно интервал $(-\pi, \pi)$ и различие между этими двумя наборами исчезает. Следовательно, $G_F^{(ab)-} \to G_F^{(ab)+}$ при $M \to \infty$ и для корреляционных функций $G^{(ab)}$ имеем

$$G^{(ab)}\Big|_{M=\infty} = G_F^{(ab)+}\Big|_{M=\infty}. \tag{4.37}$$

Таким образом, корреляционные функции $G^{(ab)}$ в термодинамическом пределе даются выражением (4.22) при $M = \infty$.

Рассмотрим объекты, возникающие в результате предельного перехода $M \to \infty$ в представлении (4.22). В первую очередь, заметим, что суммы по $q \in X^\pm$ переходят в интегралы

$$\frac{1}{M}\sum_{q\in X^\pm} \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dq, \tag{4.38}$$

а всякая $2M \times 2M$ матрица A представимая как $M \times M$ блочная матрица с элементами $A_{pp'}$, являющимися 2×2 матрицами, переходит в линейный интегральный оператор $\hat{A}$ с 2×2 матричным ядром

$$A(p, p') = \lim_{M\to\infty} \frac{M}{2\pi} A_{pp'}. \tag{4.39}$$

Оператор $\hat{A}$ действует на вектор-функции $\vec{f}(p)$ на отрезке $(-\pi, \pi)$ по правилу

$$\left(\hat{A}\vec{f}\right)_j(p) = \int_{-\pi}^{\pi} dq \sum_{k=1,2} [A(p,q)]_{jk} f_k(q). \tag{4.40}$$

След оператора $\hat{A}$ определяется как

$$\operatorname{Tr}\hat{A} = \int_{-\pi}^{\pi} dq \operatorname{tr}_2 A(q,q), \tag{4.41}$$

а произведение двух операторов $\hat{A}_3 = \hat{A}_1\hat{A}_2$ есть оператор с ядром

$$[A_3(p,p')]_{jk} = \int_{-\pi}^{\pi} dq \sum_{l=1,2} [A_1(p,q)]_{jl}[A_2(q,p')]_{lk}. \tag{4.42}$$

В (4.22) фигурирует определитель $2M\times 2M$ матрицы вида $I+A$, который в пределе $M\to\infty$ переходит в определитель Фредгольма $\det(\hat I+\hat A)$ линейного интегрального оператора с матричным ядром. Определение следа (4.41) и произведения операторов (4.42) позволяют использовать стандартную формулу

$$\det(\hat I+\hat A)=\exp\left\{\operatorname{Tr}\ln(\hat I+\hat A)\right\}=\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\operatorname{Tr}\hat A^k\right\} \quad (4.43)$$

в качестве определения величины $\det(\hat I+\hat A)$. Ядро единичного оператора $\hat I$, согласно (4.39), суть $\delta_{jk}\Delta(p-p')$, где $\Delta(p-p')$ есть δ-функция на отрезке $(-\pi,\pi)$.

Таким образом, корреляционные функции в термодинамическом пределе предсталяются в виде определителей Фредгольма линейных интегральных операторов с 2×2 матричным ядром. Обозначим через $\hat V$ и $\hat W^{(ab)}$ интегральные операторы в которые переходят, согласно формуле (4.39), $2M\times 2M$ матрицы V_F^+ и $W_F^{(ab)+}$ (см. (4.24), (4.25)), соответственно. Тогда для корреляционных функций в термодинамическом пределе имеем представление

$$G^{(ab)}\Big|_{M=\infty}=\left(g\,\delta_{(ab),(+-)}+\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\det{}^{1/2}\Big(\hat I+\hat V+\alpha\hat W^{(ab)}\Big)\bigg|_{\alpha=0}, \quad (4.44)$$

где операторы $\hat V$ и $\hat W^{(ab)}$ имеют ядра

$$\begin{aligned}
V(p,p')&=\frac{e^{-i\left(\frac{p-p'}{2}\right)}}{2\sin\left(\frac{p-p'}{2}\right)}\Big(\mathbf{E}_+(p)\,\mathbf{E}_-^T(p')-\mathbf{E}_-(p)\,\mathbf{E}_+^T(p')\Big),\\
W^{(-+)}(p,p')&=\frac{1}{2}\,\mathbf{E}_-(p)\,\mathbf{E}_-^T(p'),\\
W^{(+-)}(p,p')&=-\frac{1}{2}\Big(\mathbf{E}_+(p)\,\mathbf{E}_+^T(p')-2ig\,\mathbf{E}_+(p)\,\mathbf{E}_-^T(p')\Big),\\
W^{(\pm\pm)}(p,p')&=\frac{i}{2}\Big(\mathbf{E}_-(p)\sigma^{\pm}\,\mathbf{E}_+^T(p')\\
&\qquad-2ig\mathbf{E}_-(p)\sigma^{\pm}\,\mathbf{E}_-^T(p')+\mathbf{E}_+(p)\sigma^{\pm}\,\mathbf{E}_-^T(p')\Big).
\end{aligned} \quad (4.45)$$

Функция g есть предел функции g^+ (3.53),

$$g=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dq\,d_{it}(q)\cos(mq) \quad (4.46)$$

Матрицы-функции $\mathbf{E}_\pm(p)$ определяются как

$$\mathbf{E}_-(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Phi^{1/2}(p)\,\mathbf{e}_-(p), \qquad \mathbf{E}_+(p) = \mathbf{E}_-(p)\,\mathbf{E}(p), \tag{4.47}$$

где $\mathbf{E}(p)$ есть предел матрицы-функции $\mathbf{e}(p)$ (4.10),

$$\mathbf{E}(p) = \frac{i}{\pi}\mathrm{P.v.}\int\limits_{-\pi}^{\pi} dq\,\frac{e^{iq}}{e^{iq}-e^{ip}}\,\mathbf{e}_-^{-1}(q)\,\mathbf{d}(-q)\,\mathbf{e}_-^{-1}(q). \tag{4.48}$$

Матрицы-функции $\mathbf{e}_-(p)$, $\mathbf{d}(p)$ и $\Phi(p)$ определены в (4.9), (4.11) и (4.26) соответственно.

Представление (4.44) для корреляционных функций в термодинамическом пределе является основным результатом настоящей работы.

Заключение

Используя метод интегрирования по грассмановым переменным нами получены точные представления для разновременных температурных корреляционных функций (3.1) (см., также (3.11)) анизотропного XY магнетика Гейзенберга в магнитном поле как для конечной цепочки длины M, см. формулы (3.45), (3.54), (3.61), (3.64), (3.71), так и в термодинамическом пределе (4.44).

Полученные нами представления для конечной цепочки содержат определители $2M \times 2M$ матриц, зависящих от расстояния, времени, температуры, параметра анизотропии и внешнего поля. Заметим, что эти определители, с помощью некоторого явного пребразования подобия, могут быть приведены к определителям некоторых матриц размерности $M \times M$. Соответствующие представления могут быть полезны, например, для численного исследования корреляцproperционных функций при конечном M. Мы, однако, преследуя цель получения ответов в термодинамическом пределе, ограничились использованием “$2M \times 2M$-представления” (см. раздел 4) которое оказывается более удобным для решения этой задачи.

В термодинамическом пределе корреляционные функции представляются как определители Фредгольма линейных интегральных операторов с 2×2 матричным ядром, см. формулы (4.44)–(4.48). Существенно, что эти интегральные операторы являются “интегрируемыми” интегральными операторами [19, 20] (после перехода к переменным на единичной окружности $\lambda = e^{ip}$). “Интегрируемость” означает, что для этих интегральных операторов может быть развит формализм матричной задачи Римана-Гильберта и извлечена асимтотика корреляторов на больших расстояниях и временах, аналогично тому, как это было проделано для изотропной $XX0$ цепочки в работах [13, 29]. Мы намерены дать соответствующую формулировку ассоциированной матричной задачи Римана-Гильберта в нашей следующей публикации.

Приложение A

Рассмотрим набор канонических фермионных операторов a_q, $a_q^\dagger$:

$$[a_p, a_q]_+ = [a_p^\dagger, a_q^\dagger]_+ = 0, \qquad [a_p, a_q^\dagger]_+ = \delta_{pq}. \tag{A.1}$$

Обозначим через M число пар операторов a и $a^\dagger$) в наборе. Предполагается, что существует фоковский вакуум со свойствами

$$a_q \mid 0 \rangle = 0, \quad \langle 0 \mid a_q^\dagger = 0, \quad \forall\ q; \qquad \langle 0 \mid 0 \rangle = 1. \tag{A.2}$$

Введем когерентные состояния [32]

$$\begin{aligned} \mid \xi \rangle \equiv \mid \xi_q \rangle &= \exp\Big\{\sum_q a_q^\dagger \xi_q\Big\} \mid 0 \rangle, \\ \mid \xi^* \rangle \equiv \mid \xi_q^* \rangle &= \langle 0 \mid \exp\Big\{\sum_q \xi_q^* a_q\Big\}, \end{aligned} \tag{A.3}$$

где суммирования ведутся по всему набору. Параметры ξ_q, ξ_q^* (элементы алгебры Грассмана) антикоммутируют между собой и со всеми операторами a_q, $a_q^\dagger$. Отметим, что звездочка над ξ^* означает только, что соответствующий параметр связан с бравектором. Мы не рассматриваем инволюции на алгебре Грассмана; параметры ξ^* и ξ вполне независимы. Когерентные состояния (A.2) являются собственными для операторов уничтожения и рождения соответственно

$$a_p \mid \xi \rangle = \xi_p \mid \xi \rangle, \quad \langle \xi_p^* \mid a_p^\dagger = \langle \xi^* \mid \xi_p. \tag{A.4}$$

Скалярное произведение двух когерентных состояний нетрудно вычислить используя коммутационные соотношения между величинами a, $a^\dagger$, ξ, ξ^*:

$$\langle \xi^* \mid \xi \rangle = \exp\Big\{\sum_q \xi_q^* \xi_q\Big\} \equiv \exp\{\xi^* \xi\}. \tag{A.5}$$

След оператора $\mathbf{O}$ можно представить как интеграл по антикоммутирующим переменным от матричных элементов оператора между когерентными состояниями (см. [32]):

$$\mathrm{Sp}\,\mathbf{O} = \int d\xi\, d\xi^* \exp\{\xi^*\xi\}\langle\, \xi^* \mid \mathbf{O} \mid \xi\,\rangle, \tag{A.6}$$

а разложение единичного оператора дается формулой

$$\mathbf{1} = (-1)^M \int d\xi\, d\xi^* \exp\{-\xi^*\xi\} \mid \xi\,\rangle\langle\, \xi^* \mid \tag{A.7}$$

(у нас M – число узлов решетки – четное, и множитель $(-1)^M$ в формулах такого типа, естественно, опускается). Мы используем, для краткости, обозначения

$$d\xi \equiv \prod_q d\xi_q, \quad d\xi^* \equiv \prod_q d\xi_q^*. \tag{A.8}$$

Наконец, при вычислении интегралов, возникающих в результате применения (A.6), нами используется хорошо известная формула для гауссова интеграла по антикоммутирующим переменным

$$\int d\xi\, d\xi^* \exp\left\{\xi^* K\xi + \eta^*\xi + \xi^*\eta\right\} = \exp\{-\eta^*\, K^{-1}\, \eta\} \det K. \tag{A.9}$$

Нам придется также использовать формулу, справедливую для антисимметричной матрицы A,

$$\int d\xi \exp\left\{\frac{1}{2}\xi A\xi + \eta\xi\right\} = \exp\left\{\frac{1}{2}\eta\, A^{-1}\eta\right\} \det{}^{1/2} A, \quad A = -A^T. \tag{A.10}$$

Литература

1. A. Lenard, *Momentum distribution in the ground state of the one-dimensional system of impenetrable bosons.* — L. Math. Phys. **5** (1964), 930–943.
2. A. Lenard, *One-dimensional impenetrable bosons thermal equilibrium.* — J. Math. Phys. **7** (1966), 1268–1272.
3. V. E. Korepin, N. A. Slavnov, *The time-dependent correlation function of an impenetrable Bose gas as a Fredholm minor.* — Commun. Math. Phys. **129** (1990), 103–113.
4. F. Colomo, A. G. Izergin, V. E. Korepin, and V. Tognetti, *Correlators in the Heisenberg XXO chain as Fredholm determinants.* — Phys. Lett. **A 169** (1992), 243–247.
5. F. Colomo, A. G. Izergin, V. E. Korepin, and V. Tognetti, *Temperature correlations functions in the XXO Heisenberg chain.* — Теоретич. и мат. физика **94** (1993), 19–51.

6. V. E. Korepin, *Dual field formulation of quantum integrable models.* — Commun. Math. Phys. **113** (1987), 177–190.
7. T. Kojima, V. E. Korepin, N. A. Slavnov, *Determinant representation for dynamical correlation functions of the Quantum nonlinear Schrödinger equation.* Preprint hep-th/9611216.
8. F. H. L. Essler, H. Frahm, A. G. Izergin A. G. , and V. E. Korepin, *Determinant representation for correlation functions of spin 1/2 XXX and XXZ Heisenberg magnets.* — Commun. Math. Phys. **174** (1995), 191–214.
9. A. Jimbo, T. Miwa, Y. Mori, and M. Sato, *Density matrix of an impenetrable Bose gas and the fifth Painlevé transcendent.* — Phys. **D1** (1980), 80–158.
10. A. R. Its, A. G. Izergin, and V. E. Korepin, *Correlation radius for one-dimensional impenetrable bosons.* — Phys. Lett. A **141** (1989), 121–125.
11. A. R. Its, A. G. Izergin, V. E. Korepin, and N. A. Slavnov, *Differential equations for quantum correlation functions.* — Int. J. Phys. **B4** (1990), 1003–1037.
12. A. R. Its, A. G. Izergin, V. E. Korepin, and N. A. Slavnov, *Temperature correlations of quantum spins.* — Phys. Rev. Lett. **70** (1993), 1704–1706.
13. А. Г. Изергин, А. Р. Итс, В. Е. Корепин, Н. А. Славнов, *Матричная задача Римана–Гильберта и дифференциальные уравнения для корреляционных функций XXO цепочки Гейзенберга.* — Алгебра и Анализ **6** (1994), 138–151.
14. A. R. Its, A. G. Izergin, and V. E. Korepin, *Space correlations on the one-dimensional impenetrable Bose gas at finite temperature.* — Phys. **D 53** (1991), 181–213.
15. A. R. Its, A. G. Izergin, and V. E. Korepin, and G. G. Varzugin, *Large time and distance asymptotics of field correlation function of impenetrable bosons at finite temperature.* — Phys. **D 54** (1992), 351–395.
16. C. A. Tracy, B. M. Mc Coy, *Neutron scattering and the correlation function of the Ising model near T_c.* — Phys. Rev. Lett. **31** (1973), 1500–1504.
17. T. T. Wu, B. M. Mc Coy, C. A. Tracy, and E. Barough, *Spin-spin correlation function for the two-dimensional Isung model: Exact theory in the scaling region.* — Phys. Rev. **B 13** (1976), 316–374.
18. B. M. Mc Coy, C. A. Tracy, and T. T. Wu, *Painlevé functions of the third kind.* — J. Math. Phys. **18** (1977), 1058–1092.
19. V. E. Korepin, A. G. Izergin, and N. M. Bogolyubov, *Quantum inverse scattering method and correlation functions.* Cambridge Monographs Math. Phys., Cambridge Univ. Press, Cambridge (1993).
20. A. R. Its, A. G. Izergin, and V. E. Korepin, and N. A. Slavnov, *The quantum correlation function as the tau-function of classical differential equations.* Springer Ser. Nonlinear Dyn., Springer, Berlin, 1993, p. 407–417, Important development in solution theory.
21. E. Lieb, T. Schultz, and D. Mattis, *Two soluble models of an antiferromagnetic chain.* — Ann. Phys. **16** (1961), 407–466.
22. B. M. Mc Coy, *Spin correlation functions of the XY model.* — Phys. Rev. **173** (1968), 531–541.
23. B. M. Mc Coy, E. Barouch, and D. B. Abraham, *Statistical mechanics of the XY model. Time-dependent spin correlation functions.* — Phys. Rev. **A 4** (1971), 2331–2341.

24. B. M. Mc Coy, J. H. H. Perk, R. E. Schrock, *Correlation functions of the transverse Ising chain at the critical field for large temporal and spatial separations.* — Nucl. Phys. **B 220 [FS 8]** (1983), 269–282.
25. А. Г. Изергин, Н. А. Китанин, Н. А. Славнов, *О корреляционных функциях* XY. — Зап. научн. семин. ПОМИ **224** (1995), 178–191.
26. В. С. Капитонов, К. Н. Ильинский, *Функциональное представление для корреляторов спиновых цепочек.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **224** (1995), 192–207.
27. А. Г. Изергин, В. С. Капитонов, Н. А. Китанин, *Одновременные температурные корреляторы одномерной* XY *цепочки Гейзенберга цепочек.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **245** (1997), 173–206.
28. F. Colomo, A. G. Izergin, and V. Tognetti, *Correlation functions in the XXO Heisenberg chain and their relations with Frenkel exciton spectra.* — J. Phys. **A 30** (1997), 361–369.
29. А. Г. Изергин, А. Р. Итс, В. Е. Корепин, Н. А. Славнов, *Интегрируемые дифференциальные уравнения для температурных корреляционных функций* XXO *цепочки Гейзенберга.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **205** (1993), 6–20.
30. K. N. Ilinskii, G. V. Kalinin., *Cyclic* XY *model and exotic statistics in one dimension.* — Phys. Rev **E 54** (1996), R 1017–R 1020.
31. A. V. Ilinskaia, K. N. Ilinskii, G. V. Kalinin, V. V. Melezhik, A. S. Stepanenko, *Exact results on linear responce of cyclic molecular aggregates.* Preprint TPBU-8-95, cond-mat/9509040.
32. Н. В. Борисов, М. В. Иоффе, М. И. Эйдес, *Вторичное квантование полевых систем на грассмановой алгебре.* — Теор. и мат. физика **29** (1976), 25–41.

Kapitonov V. S., Pronko A. G. Time-dependent temperature correlators of local spins of the one-dimensional Heisenberg XY chain.

Time-dependent temperature correlators of the anisotropic Heisenberg XY chain are calculated by making use of technique of integration over Grassmann variables. For the chain of length M the correlators are represented as determinants of $2M \times 2M$ matrices. In the thermodynamic limit the correlation functions are expressed in terms of the Fredholm determinants of linear integral operators with a matrix kernel.

С.-Петербургкий
Технологический институт
(Технический университет)

Поступило 16 ноября 2000 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН