Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 269, 2000 г.

Е. Ш. Гутшабаш

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ МОДЕЛЕЙ МАГНЕТИКОВ И КИРАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ: ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ, ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Посвящается памяти А. Г. Изергина

1. Введение

В последние годы метод преобразования Дарбу (ПД) занял прочное место в ряду методов исследования дискретных симметрий и построения точных решений нелинейных эволюционных уравнений (НЭУ). С помощью метода ПД решены многочисленные интегрируемые НЭУ (см. [1, 2]), где также изложена история развития ПД). В работе [3] на примере уравнений sin-Гордон и эллиптический sin-Гордон, М. А. Саллем, в частности, была установлена связь между преобразованиями Дарбу и Беклунда. Известны также важные примеры решений НЭУ, зависящие от произвольных функциональных параметров [1]. Еще одним весьма существенным свойством ПД является его каноничность [1, 4], означающая сохранение гамильтоновости исходного НЭУ.

Данная работа посвящена построению формализма ПД для систем с нетривиальным вхождением комплексного параметра на примере интегрируемых моделей магнетиков и киральных полей. Идейно такой подход восходит к результатам работы [5], в которой был предложен метод деформаций исходной лаксовой U-V-пары и на его основе построен целый ряд новых интегрируемых систем (в [6] эта же идея была использована для получения методом ПД точных решений модифицированной системы Максвелла–Блоха). Заметим, однако, что этот метод, связанный с появлением полюсных особенностей у деформированной

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (коды проектов 98-01-01063 и 00-01-00480).

пары, не является единственно возможным. В частности, другой подход, в котором предполагается полиномиальная зависимость производных от спектрального параметра по пространственной и временной переменным, был реализован в [7]. Это позволило на основе задачи Захарова–Шабата получить новые интегрируемые деформации модели одномерного магнетика Гейзенберга в различных (криволинейных) системах координат.

Здесь мы развиваем и обобщаем подход работы [7], используя запись ассоциированной линейной системы в виде, удобном для дальнейшего применения метода ПД. Возникающий при этом полиномиальный пучок удается деформировать и, как следствие, после надлежащего определения матричного ПД, удается "деформировать" и его. Полученные соотношения применяются как для нахождения новых интегрируемых уравнений магнетиков и киральных полей, так и для построения новых лаксовых представлений уже известных интегрируемых уравнений (в частности, с интегральными членами в ассоциированных линейных задачах), а также для вычисления точных решений двух из этих уравнений.

2. Общие соотношения

Рассмотрим следующую переопределенную линейную систему матричных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\Psi_x(x,t,\lambda) &= \sum_{i=1}^{N_1} U_i(x,t)\Psi(x,t,\lambda)\Lambda^i + U_0(x,t)\Psi(x,t,\lambda),\\
\Psi_t(x,t,\lambda) &= \sum_{j=1}^{M_1} V_j(x,t)\Psi(x,t,\lambda)\Lambda^j + V_0(x,t)\Psi(x,t,\lambda),
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\Psi(x,t,\lambda)$, $U_i(x,t)$, $V_j(x,t)$, $i = 1, N_1$, $j = 1, M_1$ – матричнозначные $(n \times n)$ функции, $\Lambda = \Lambda(x,t,\lambda)$ – диагональная матрица, $\lambda \in C$ – параметр, N_1, M_1 – целые числа (для определенности будем считать, что $M_1 \geqslant N_1$).

Предположим, что

$$\Lambda_x = \sum_{i=0}^{N_0} f_i \Lambda^i, \quad \Lambda_t = \sum_{i=0}^{N_0} h_i \Lambda^i, \tag{2.2}$$

где $f_i = f_i(x,t)$, $h_i = h_i(x,t)$, $i = 0, 1, \ldots, N_0$.

Тогда условия совместности системы (2.1) $(\Psi_{xt}=\Psi_{tx})$ с учетом (2.2) примут вид:

$$U_{0t}-V_{0x}+[U_0,V_0]+U_1h_0-V_1f_0=0,$$

$$U_{1t}-V_{1x}+[U_0,V_1]+[U_1,V_0]+U_1h_1+2U_2h_0-V_1f_1-2V_2f_0=0,$$

$$U_{2t}-V_{2x}+[U_0,V_2]+[U_1,V_1]+[U_2,V_0]+U_1h_2+2U_2h_1+3U_3h_0-$$
$$V_1f_2-2V_2f_1-3V_3f_0=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.3)$$

$$U_{N_1t}-V_{N_1x}+[U_0,V_{N_1}]+[U_{N1},V_0]+\sum_{i=0}^{N_1-2}[U_{N_1-1-i}\ ,V_{i+1}]+$$
$$+\sum_{i=0}^{N_1-1}(i+1)U_{i+1}h_{N_1-i}-\sum_{i=0}^{N_1-1}(i+1)\ V_{i+1}f_{N_1-i}=0,$$

$$-V_{(N_1+1)x}+[U_0,V_{N_1+1}]+\sum_{i=0}^{N_1-1}[U_{i+1},V_{N_1-i}]+$$
$$\sum_{i=0}^{N_1-1}(i+1)U_{i+1}h_{N_1+1-i}-\sum_{i=0}^{N_1-1}(i+1)V_{i+1}f_{N_1+1-i}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-V_{M_1x}+\sum_{i=0}^{N_1}[U_i,V_{M_1-i}]+\sum_{i=0}^{N_1-1}(i+1)U_{i+1}h_{M_1-i}-$$
$$-\sum_{i=0}^{N_1-1}(i+1)V_{i+1}f_{M_1-i}=0.$$

В свою очередь, условия совместности системы (2.2) дают:

$$h_{0x}+h_1f_0=f_{0t}+f_1h_0,$$

$$h_{1x}-f_{1t}+2(h_2f_0-f_2h_0)=0,$$

$$h_{2x}-f_{2t}+2(h_2f_1-h_1f_2)+3(h_3f_0-h_0f_3)=0, \qquad (2.4)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$h_{(N_0)x} - f_{(N_0)t} + \sum_{i=0}^{M_2-1} [h_{i+1} f_{M_2-i} - f_{i+1} h_{M_2-i}] = 0.$$

В случае, если набор функций $\{U_i, V_j, h_k, f_k\}$, удовлетворяющий условиям (2.2)–(2.4), существует, то соответствующее НЭУ, эквивалентное (2.3), будем называть интегрируемым (примеры таких уравнений будут даны в п. 3).

Перейдем к построению ПД системы (2.1). Мы будем говорить, что она ковариантна относительно (матричного) преобразования Дарбу: $\Psi \to \Psi[N]$, $U_i \to U_i[N]$, $V_i \to V_i[N]$, где

$$\Psi[N] = \sum_{k=0}^{N} T_k \Psi \Lambda^k, \tag{2.5}$$

N – целое, $N \geqslant 1$, $N \geqslant M_1 \geqslant N_1$, $T_k = T_k(x,t)$, $k = 1, N$ – матричнозначные функции, подлежащие определению, если выполняются соотношения (аргументы матричных функций для простоты опускаем):

$$\begin{aligned} \Psi_x[N] &= \sum_{i=1}^{N_1} U_i[N]\Psi[N]\Lambda^i + U_0[N]\Psi[N], \\ \Psi_t[N] &= \sum_{j=1}^{M_1} V_j[N]\Psi[N]\Lambda^j + V_0[N]\Psi[N]. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Подставляя анзац (2.5) в первое уравнение системы (2.6) и приравнивая коэффициентные функции при $\Psi\Lambda^0$, $\Psi\Lambda^1, \ldots, \Psi\Lambda^N$, получим:

$$\begin{gathered} T_{0_x} + T_0 U_0 + f_0 T_1 = U_0[N] T_0, \\ T_{1_x} + T_0 U_1 + T_1 U_0 + f_1 T_1 + 2 f_0 T_2 = U_0[N] T_1 + U_1[N] T_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T_{N_x} + \sum_{i=0}^{N} T_i U_{N-i} + \sum_{i=0}^{N-1} (i+1) T_{i+1} f_{N-i} = \\ = U_0[N] T_N + \sum_{i=1}^{N_1} U_i[N] T_{N-i}. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Аналогично из второго уравнения (2.6) следует:

$$T_{0_t} + T_0V_0 + h_0T_1 = V_0[N]T_0,$$

$$T_{1_t} + T_0V_1 + V_0T_11 + h_1T_1 + 2h_0T_2 = V_0[N]T_1 + V_1[N]T_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{2.8}$$

$$T_{N_t} + \sum_{i=0}^{N} T_iV_{N-i} + \sum_{i=0}^{N-1}(i+1)T_{i+1}h_{N-i} =$$

$$= U_0[N]T_N + \sum_{i=1}^{N_1} V_i[N]T_{N-i}.$$

При получении выражений (2.7)–(2.8) предполагается, что $f_i = g_i = 0$ при $i > N_0$, $U_k = 0$ при $k > N_1$ и $V_l = 0$ при $l > M_1$. Они позволяют по затравочным значениям потенциалов $U_0, \ldots U_{N_1}$ и $V_0, \ldots V_{M_1}$ получить явные одевающие формулы для потенциалов $U_0[N], \ldots U_{N_1}[N]$ и $V_0[N], \ldots V_{M_1}[N]$, где $N = 1, 2, \ldots$.

3. Примеры

В этом разделе мы приведем несколько конкретных примеров НЭУ, иллюстрирующих содержательность полученных выше формул.

(a) *Магнетик Гейзенберга в переменном магнитном поле.* Положим в (2.1)

$$N_1 = 1, \quad M_1 = 2, \quad U_0 = 0, \quad V_0 = c_0H, \quad U_1 = -(i/2)S, \quad V_1 = (1/2)S_xS,$$

$$U_2 = 0, \quad V_2 = (i/2)S, \quad h_0 = f_0 = h_1 = \ldots = h_{N_0} = f_{N_0} = 0.$$

Здесь $S = \sum_{i=1}^{3} S_i\sigma_i$ – матрица намагниченности, σ_i – матрицы Паули, $H = \sum_{i=1}^{3} H_i\sigma_i$ – матрица внешнего магнитного поля, c_0 – константа. Тогда из (2.3) следует, что $c_0H_x = 0$, т.е. $H = H(t)$ и при $c_0 = -1/2i$ получим следующее уравнение:

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \times \mathbf{S}_{xx} + \mathbf{S} \times \mathbf{H}, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{S} = \mathbf{S}(x,t) = (S_1, S_2, S_3)$, $|\mathbf{S}| = 1$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t) = (H_1, H_2, H_3)$.

Т.о. наряду с классической моделью Гейзенберга [8, 9], оказывается интегрируемым и магнетик во внешнем магнитном поле, зависящем от времени. Заметим, что случай $H_x = H_t = 0$ рассматривался еще в работе [8], где было показано, что заменой искомой функции уравнение (3.1) приводится к случаю $H = 0$. Аналогично этому заменой $S = \Omega^{-1}S'\Omega$, где матрица $\Omega = \Omega(t)$ выбирается из условия $\Omega_t = (1/2i)\Omega H$, уравнение (3.1) также приводится к стандартному виду.

(b) *Деформация одномерной модели магнетика Гейзенберга.* Пусть в (2.1)

$$U_0 = 0, \quad V_0 = 0, \quad h_0 = f_0 = 0, \quad U_1 = -(i/2)S,$$

$$V_1 = (\rho/2)S_xS + \nu S_x + \mu S, \quad V_2 = \delta S, \quad U_i = 0,$$

$$i \geqslant 2, \quad V_j = 0, \quad j \geqslant 3, \quad f_k = h_k = 0, \quad k \geqslant 2.$$

Здесь

$$\rho = \rho(x,t), \quad \nu = \nu(x,t), \quad \mu = \mu(x,t), \quad \delta = \delta(x,t)$$

– заданные функции, c_1 – константа. Тогда получим уравнение ($c_1 = -1/2i$):

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \times [\alpha(x,t)\ \mathbf{S}_{xx} + \beta(x,t)\mathbf{S}_x] + \gamma(x,t)\mathbf{S}_x. \qquad (3.2)$$

В этом уравнении α, β, γ – произвольные функции, связанные условием

$$\Big(\frac{\beta - \alpha_x}{\alpha}\Big)_t = \Big(\gamma_x + \gamma\frac{\beta - \alpha}{\alpha}\Big)_x,$$

вытекающим из равенства $f_{1_x} = h_{1_t}$; при этом должны выполняться соотношения:

$$\rho = \alpha, \quad f_1 = \frac{\beta - \alpha_x}{\alpha}, \quad \mu = -i\gamma/2, \quad h_1 = \Big[\gamma_x + \gamma\frac{\beta - \alpha_x}{\alpha}\Big],$$

$$\nu = 0, \quad \delta = \delta_0(t)e^{\int^x f_1 dx} = i\alpha/2,$$

$\delta_0(t)$ – произвольная функция.

Уравнение (3.2), представляющее собой интегрируемую деформацию одномерной модели магнетика Гейзенберга, ранее несколько иным способом было получено в [7], где также показано, что его с помощью замены переменной можно привести к модели неоднородного магнетика:

$$\mathbf{S}_t = f(x,t)(\mathbf{S} \times \mathbf{S}_{xx}), \qquad (3.3)$$

где $f(x,t)$ – заданная функция. Заметим, однако, что уравнение (3.2), которое описывает однородный магнетик с анизотропией, более удобно для применения ПД и укладывается в схему, описанную в п. 2. Также, если мы положим $\gamma(x,t) = |\mathbf{H}(x,t)|$ (при условии $\gamma > 0$), то будем иметь модель магнетика в нестационарном магнитном поле (здесь $\mathbf{H}$ – вектор внешнего магнитного поля).

(c) *Другой тип деформации одномерной модели Гейзенберга.* Если

$$U_0 = V_0 = 0, \quad U_1 = (1/2)S_x, \quad V_1 = (1/2)S_xS - (AS + SA),$$

$$U_2 = S, V_2 = (1/2i)[S, S_x] + (i/2)S + (2/i)(AS + SA),$$

$$U_3 = U_4 = 0, \quad V_3 = -2S, \quad V_4 = -2iS,$$

то из (2.1), (2.3) имеем уравнение:

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \times \mathbf{S}_{xx} + a_0\mathbf{S}_x^2\mathbf{S}_x. \tag{3.4}$$

Здесь $(AS + SA)_x = (ia_0/2)\mathbf{S}_x^2 S_x$, a_0 – константа. Это уравнение было получено в [10], однако его лаксово представление известно не было.

(d) *Цилиндрически-симметричный магнетик Гейзенберга.* Положим

$$U_0 = V_0 = 0, \quad U_1 = -(i/2)S, \quad V_1 = (1/2)S_xS + (AS + SA), \quad U_2 = 0,$$

$$V_2 = (i/2)S, \quad (AS + SA)_x = ((1/2ix))[S, S_x],$$

где $x^2 = x_1^2 + x_2^2$, а x_1, x_2 – декартовы координаты на плоскости. Тогда мы получаем модель цилиндрически-симметричного магнетика Гейзенберга [11]:

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \times \Big(\mathbf{S}_{xx} + \frac{1}{x}\mathbf{S}_x\Big). \tag{3.5}$$

Здесь наше лаксово представление отличается от использовавшегося в [11].

(e) *Модифицированная киральная модель.* Пусть $g \in G$ – элемент произвольной группы Ли, а M-однородное пространство этой группы, причем $M = G$, а в (2.1) положим

$$U_0 = l^1, \quad V_0 = l^0, \quad U_1 = V_1 = l^0 + l^1, \quad U_k = V_k = 0,$$

$$k \geqslant 2, \quad f_i = g_i = 0, \quad i = 0, \dots, N_0.$$

Здесь $l^0 = g_t g^{-1}$, $l^1 = g_x g^{-1}$ – левые токи. Тогда соотношения (2.3) приводят к модифицированной модели кирального поля [9]:

$$\begin{aligned} l_t^1 - l_x^0 + [l^1, l^0] = 0, \\ l_t^0 - l_x^1 + [l^1, l^0] = 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Первое из этих равенств выполняется тождественно, а второе – в терминах поля $g = g(x,t)$ – имеет вид:

$$g_{tt} - g_{xx} = g_t g^{-1} g_t - g_x g^{-1} g_x + g_t g^{-1} g_x - g_x g^{-1} g_t. \tag{3.7}$$

(f) *Обобщенная модифицированная киральная модель.* Пусть все величины совпадают с величинами из предыдущего случая, за исключением U_1 и V_1, которые мы выберем равными $U_1 = l^0 + l^1 + P$, $V_1 = l^0 + l^1 + Q$. Из (2.3) следует, что $P = Q$ и

$$P_t - P_x + [P, l_0] + [l_1, P] = \pm[A, gBg^{-1}], \tag{3.8}$$

где $A = A(x,t)$, $B = B(x,t)$ – произвольные элементы группы G. Тогда мы имеем следующее интегрируемое уравнение:

$$l_t^0 - l_x^1 + [l^1, l^0] \pm [A, gBg^{-1}] = 0. \tag{3.9}$$

Оно обобщает уравнение, изучавшееся в [12] в случае постоянных вещественных и диагональных матриц A и B. Отметим, также, что при $G = SO(2)$, $A = B = \operatorname{diag}(1/2, 1)$ уравнение (3.9) калибровочно эквивалентно матричному уравнению $\pm$sin-Гордон.

(g) *Деформация модифицированной модели главного кирального поля.* Положим

$$U_0 = l^1, \quad V_0 = l^0, \quad U_1 = V_1 = l^0 + l^1, \quad h_0 = f_0 = 0,$$

и пусть $h_1 = h_1(x,t)$, $f_1 = f_1(x,t)$ – произвольные функции, связанные соотношением $h_{1x} = f_{1t}$. Тогда

$$l_t^0 - l_x^1 + [l^1, l^0] + (l^0 + l^1)(h_1 - f_1) = 0, \tag{3.10}$$

или

$$\begin{aligned} g_{tt} - g_{xx} = {} & g_t g^{-1} g_t - g_x g^{-1} g_x + g_t g^{-1} g_x - \\ & - g_x g^{-1} g_t - (h_1 - f_1)(g_t + g_x), \end{aligned} \tag{3.11}$$

т.е. получили линейную (по производным поля g) интегрируемую деформацию уравнения (3.7).

(h) *Модель N-компонентного поля с анизотропией.* Рассмотрим функции $s_a(x,t)$, $s_a s_a = 1$, $a = 1, N$ и введем киральное поле $g_{ik} = \delta_{ik} - 2s_i s_k$, где δ_{ik} – символ Кронекера. Тогда $g = I - 2P$, где P – оператор проектирования. Зададим лагранжеву плотность модели в виде:

$$\mathcal{L} = (1/2)[\partial_\mu s_a \partial^\mu s_a + (J\mathbf{s}, \mathbf{s}) - \mathbf{J}_N],$$

где

$$J = \mathrm{diag}\,(J_1, J_2, \dots, J_N), \quad J_1 < J_2 < \ldots < J_N,$$

$$\mu = 0, 1, \quad \mathbf{J}_N = (J\mathbf{s}, \mathbf{s})_{|x=\infty}.$$

Тогда мы имеем:

$$l_t^{(0)} - l_x^{(1)} + [\widehat{N}, J] = 0. \tag{3.12}$$

Эта модель была введена в [13], но ее интегрируемость там доказана не была. Здесь

$$U_0 = l^{(1)}, \quad V_0 = l^{(0)}, \quad U_1 = V_1 = l^{(0)} + l^{(1)} + A, \quad \widehat{N} = I - g,$$

причем матрица A удовлетворяет линейному уравнению:

$$A_t - A_x + \big[A, l^{(0)} - l^{(1)}\big] = \big[\widehat{N}, J\big] - \big[l^{(1)}, l^{(0)}\big]. \tag{3.13}$$

Приведем еще два интегрируемых уравнения (и их лаксовы представления), формально не относящиеся к магнетикам и киральным полям, но которые, однако, укладываются в развитую выше схему.

(i) *Модель Борна–Инфельда.* Предположим, что поле $\phi(x,t)$ удовлетворяет уравнению:

$$(1 - \phi_t^2)\phi_{xx} + 2\phi_x \phi_t \phi_{xt} - (1 + \phi_x^2)\phi_{tt} = 0. \tag{3.14}$$

Оно получается из вариационного принципа

$$\delta \int\!\!\int dx dt \sqrt{1 - \phi_t^2 + \phi_x^2} = 0, \tag{3.15}$$

и обладает свойством лоренц-инвариантности. Соотношения (2.3) эквивалентны (3.13) при

$$U_1 = \phi_t / \sqrt{1 - \phi_t^2 + \phi_x^2}\,\sigma_3, \quad V_1 = \phi_x / \sqrt{1 - \phi_t^2 + \phi_x^2}\,\sigma_3.$$

(j) *Уравнение минимальной поверхности.* Заменим в уравнении (3.14) и равенстве (3.15) переменную t на $-iy$, а ϕ на Φ. В этом случае будем иметь:

$$(1+\Phi_y^2)\Phi_{xx} - 2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} + (1+\Phi_x^2)\Phi_{yy} = 0. \tag{3.16}$$

Это уравнение, относящееся к классу эллиптических, эквивалентно равенству нулю средней кривизны поверхности в трехмерном эвклидовом пространстве. Полагая в (2.1) (после замены $t \to -iy$)

$$U_1 = \Phi_y/\sqrt{1+\Phi_x^2+\Phi_y^2}\,\sigma_3, \quad V_1 = -i\Phi_x/\sqrt{1+\Phi_x^2+\Phi_y^2}\,\sigma_3,$$

из (2.3) получим уравнение (3.16).

Уравнения (3.14), (3.16) могут рассматриваться как частные случаи несколько более общего уравнения [14]:

$$(k^2+\phi_x^2)\phi_{tt} - 2\phi_x\phi_t\phi_{xt} + (k^2\alpha+\phi_t^2)\phi_{xx} = 0, \tag{3.17}$$

где $\alpha = k^2 - k - 1$; при $\alpha k^2 = -k$ получаем уравнение (3.14), при $\alpha k = -k^2$ – уравнение (3.16), а случай $k = 0$ приводит к так называемому уравнению Бейтмена. Наши лаксовы представления отличаются от представлений, полученных в [14].

4. Точные решения

В этом разделе, используя метод матричного ПД, мы получим точные решения уравнений (3.5) и (3.11).

Уравнение (3.5) будем решать при $x > 0$ и дополнительном условии конечности на оси симметрии выражения:

$$\Big(\frac{1}{x}(\mathbf{S}\times S_x)\Big)_{|x=0}. \tag{4.1}$$

Соответствующая линейная система имеет вид (здесь нам удобно писать индексы у потенциалов, содержащих искомую функцию, сверху):

$$\Psi_x = U^{(1)}\Psi\Lambda, \;\; \Psi_t = V^{(1)}\Psi\Lambda + V^{(2)}\Psi\Lambda^2. \tag{4.2}$$

Пусть Ψ_1 – ее фиксированное решение, отвечающее выбору $\Lambda = \Lambda_1 = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \overline{\lambda}_1)$. Положим $L_1 = \Psi_1\Lambda_1^{-1}\Psi_1^{-1}$ и проверим ковариантность системы (4.2) относительно следующего ПД ($\widetilde{\Psi} \equiv \Psi[1]$):

$$\widetilde{\Psi} = \Psi - L_1\Psi\Lambda. \tag{4.3}$$

Это приводит к одевающим соотношениям:

$$\widetilde{U}^{(1)} = L_1 U^{(1)} L_1^{-1}, \quad \widetilde{U}^{(1)} = U^{(1)} - L_{1x}, \tag{4.4}$$

и

$$\begin{aligned} &\widetilde{V}^{(2)} = L_1 V^{(2)} L_1^{-1}, \quad \widetilde{V}^{(1)} = V^{(1)} - L_{1t}, \\ &\widetilde{V}^{(2)} = V^{(2)} - L_1 V^{(1)} + \widetilde{V}^{(1)} L_1, \end{aligned} \tag{4.5}$$

Эквивалентность всех этих выражений можно доказать после ряда простых вычислений.

Из свойства матрицы S: $\sigma_2 S \sigma_2 = -\overline{S}$, имеем $\sigma_2 U^{(1)} \sigma_2 = \overline{U}^{(1)}$, поэтому матрица Ψ принимает вид:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi_1 & -\overline{\chi}_1 \\ \chi_1 & \overline{\phi}_1 \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Кроме того, принимая во внимание, что $\sigma_2 S S_x \sigma_2 = \overline{S S_x}$, для матрицы A, входящей во второе уравнение (4.2), получаем $A = -\overline{A}$, т.е. все ее элементы чисто мнимые.

Нетрудно убедиться, что вектор $\mathbf{S}_1 = (\cos(\ln x), \sin(\ln x), 0)$ является стационарным решением уравнения (3.5)[1]. Такую структуру вектора намагниченности естественно назвать спирально-логарифмической (чисто спиральные структуры в магнетиках подробно рассмотрены в [15], где также указывалась причина их возникновения – взаимодействия магнитных моментов с электронами проводимости, приводящие к перестройке электронного состояния вблизи поверхности Ферми. Следует отметить здесь также недавнюю работу [16], которой обсуждалось появление спиральных структур в неабелевых калибровочных полях). Выбрав теперь ее в качестве затравочного (фонового) решения[2] и используя, например, первое из соотношений (4.4) с учетом того, что $S_x S = (i/x)\sigma_1$, найдем простейшее односолитонное решение ($S_+ = S_1 + iS_2$):

$$\begin{aligned} &S_+(x,t) = -i\sin(\ln x) + S_+^{(1)}, \\ &S_3(x,t) = \cos(\ln x) + S_3^{(1)}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

---

[1]Решения этого уравнения для простейшего фона $\mathbf{S} = (0,0,1)$ методом обратной задачи были построены в [11].

[2]Насколько известно автору, подобные структуры ранее в литературе не рассматривались.

Здесь $S_+^{(1)}$, $S_3^{(1)}$ - несингулярные функции, выражения для которых достаточно громоздки и здесь мы их приводить не будем.

Вычислим N-солитонное решение. С этой целью воспользуемся (4.3). Тогда нетрудно получить:

$$\Psi[N] = \Psi - Q_1\Psi\Lambda - \ldots - Q_N\Lambda^N, \tag{4.8}$$

причем матричные функции $Q_1, \ldots, Q_N$ определяются из линейной матричной системы уравнений:

$$\begin{aligned} &\Psi_1 - Q_1\Psi_1\Lambda_1^2 - \ldots - Q_N\Psi_1\Lambda_1^N = 0 \\ &\Psi_2 - Q_1\Psi_2\Lambda_2^2 - \ldots - Q_N\Psi_2\Lambda_2^N = 0 \\ &\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Psi_N - Q_1\Psi_N\Lambda_N^2 - \ldots - Q_N\Psi_N\Lambda_1^N = 0, \end{aligned} \tag{4.9}$$

где

$$\Lambda_i = \mathrm{diag}\,(\lambda_i, \overline{\lambda}_i), \quad i = 1, N,$$

а Ψ_i – решение (4.2), соответствующее значению $\lambda = \lambda_i$. С другой стороны, из (4.4) имеем:

$$U[N] = U - \sum_{i=1}^{N} L_{ix} = U - Q_{1x}. \tag{4.10}$$

Из (4.9) и (4.10) легко следуют выражения для N-солитонного решения:

$$\begin{aligned} S_3[N] &= 1 - 2i\Big(\frac{\Delta_1}{\Delta}\Big)_x, \\ S_+[N] &= -2i(\frac{\Delta_2}{\Delta})_x, \end{aligned} \tag{4.11}$$

где $S_+[N] = S_1[N] + iS_2[N]$,

$$\Delta =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1\phi_1 & \lambda_1\chi_1 & \lambda_1^2\phi_1 & \lambda_1^2\chi_1 & \ldots & \lambda_1^N\phi_1 & \lambda_1^N\chi_1 \\ -\overline{\lambda}_1\overline{\chi}_1 & \overline{\lambda}_1\overline{\phi}_1 & -\overline{\lambda}_1^2\,\overline{\chi}_1 & \overline{\lambda}_1^2\overline{\phi}_1 & \ldots & -\overline{\lambda}_1^N\,\overline{\chi}_1 & \overline{\lambda}_1^N\,\overline{\phi}_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_N\phi_N & \lambda_N\chi_N & \lambda_N^2\phi_N & \lambda_N^2\chi_N & \ldots & \lambda_N^N\phi_N & \lambda_N^N\chi_N \\ -\overline{\lambda}_N\overline{\chi}_N & \overline{\lambda}_N\overline{\phi}_N & -\overline{\lambda}_N^2\,\overline{\chi}_N & \overline{\lambda}_N^2\overline{\phi}_N & \ldots & -\overline{\lambda}_N^N\overline{\chi}_N & \overline{\lambda}_N^N\overline{\phi}_N \end{vmatrix},$$

а Δ_1 и Δ_2 получаются заменой в определителе Δ первого и второго столбцов на столбцы $(\phi_1, -\chi_1, \dots \phi_N, -\chi_N)^T$ и $(\chi_1, \overline{\phi}_1, \dots \chi_N \overline{\phi}_N)^T$ соответственно. Доказательство того, что (4.11) действительно является N-солитонным решением, стандартно [9, 11] (отметим только, что методом обратной задачи получение явного детерминантного представления для этой модели, как и стандартной модели магнетика Гейзенберга, оказывается затруднительным [9]).

Рассмотрим решение уравнения (3.11). В этом случае удобно перейти к конусным переменным $\xi = t - x$, $\eta = t + x$. Тогда соответствующая пара линейных уравнений примет вид:

$$\Psi_\xi = l^3 \Psi, \tag{4.12}$$

$$\Psi_\eta = 2l^2 \Psi \Lambda + l^2 \Psi, \tag{4.13}$$

где $l^2 = g_\eta g^{-1}$, $l^3 = g_\xi g^{-1}$.

Проверка ковариантности (4.13) относительно ПД вида:

$$\widetilde{\Psi} = T_0 \Psi + T_1 \Psi \Lambda, \tag{4.14}$$

приводит к следующим одевающим соотношениям :

$$\widetilde{l}^2 = T_{0\eta} T_0^{-1} + T_0 l^2 T_0^{-1}, \tag{4.15}$$

$$\widetilde{l}^2 = Z l^2 Z^{-1} + T_{1\eta} Z^{-1} + \frac{f_1 + h_1}{2} T_1 Z_1^{-1}, \tag{4.16}$$

$$\widetilde{l}^2 = T_1 l^2 T_1^{-1}, \tag{4.17}$$

где $Z = 2T_0 + T_1$, l_2 – затравочное решение уравнения, полученного из (3.11) переходом к конусным переменным. Из условия $\widetilde{\Psi}_{|\Psi=\Psi_1, \Lambda=\Lambda_1} = 0$ следует, что $T_1 = -T_0 L_1$, где $L_1 = \Psi_1 \Lambda_1^{-1} \Psi_1^{-1}$, а Ψ_1 – решение (4.12), соответствующее $\lambda = \lambda_1$. При этом из требования эквивалентности (4.15) и (4.17) имеем уравнение на матрицу T_0:

$$T_{0\eta} = T_0 (L_1 l^2 L_1^{-1} - l^2).$$

Покажем эквивалентность (4.15) и (4.16). Нетрудно видеть, что задача сводится к доказательству справедливости равенства:

$$L_1 l^2 - l^2 L_1 = 2l^2 - L_{1\eta} - \frac{f_1 + h_1}{2} L_1 - 2 L_1 l^2 L_1^{-1},$$

которое вытекает из соотношения:

$$\Lambda_{1\eta} = 2l^2 I + l^2 L_1 - \frac{f_1 + h_1}{2} L_1 - 2L_1 l^2 L_1^{-1} - L_1 l^2,$$

где I – единичная матрица; т.е. эквивалентность соотношений (4.15)–(4.16) доказана.

Аналогичная проверка ковариантности (4.12) относительно преобразования (4.14) дает

$$\widetilde{l}^3 = T_{0\xi} T_0^{-1} + T_0 l^3 T_0^{-1}, \tag{4.18}$$

$$\widetilde{l}^3 = T_1 l^3 T_1^{-1} + T_{1\xi} T_1^{-1} + \frac{f_1 - h_1}{2} I. \tag{4.19}$$

Эквивалентность этих соотношений также легко доказывается с учетом связи матриц T_0 и T_1 и равенства

$$L_{1\xi} = l^3 L_1 - \frac{f_1 - h_1}{2} L_1 - L_1 l^3.$$

Наконец, эквивалентность всех одевающих формул (4.15)–(4.17) и (4.18)–(4.19) можно проще всего доказать переходом от координат ξ, η к координатам x, t.

Односолитонное решение уравнения (3.11) следует, например, из (4.15) и может быть формально записано в виде:

$$g(1) = T \exp\Bigl(\int^{\eta} \bigl[T_{0\eta} T_0^{-1} + T_0 l^2 T_0^{-1}\bigr]\, ds\Bigr)\, g, \tag{4.20}$$

где символ T означает упорядоченную экспоненту, а g - затравочное решение уравнения (3.11).

Перейдем к построению N-солитонного решения. Из условия

$$\Psi[N]_{|_{\Psi_i, \Lambda_i}} = 0, \quad i = 1, ...N, \tag{4.21}$$

будем иметь систему уравнений на матрицы $T_1, T_2, \ldots, T_N$:

$$\begin{aligned} T_1 \Psi_1 \Lambda_1 + T_2 \Psi_1 \Lambda_1^2 + \ldots + T_N \Psi_1 \Lambda_1^N &= -T_0 \Psi_1 \\ T_1 \Psi_2 \Lambda_2 + T_2 \Psi_2 \Lambda_2^2 + \ldots + T_N \Psi_2 \Lambda_2^N &= -T_0 \Psi_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T_1 \Psi_N \Lambda_N + T_2 \Psi_N \Lambda_N^2 + \ldots + T_N \Psi_N \Lambda_N^N &= -T_0 \Psi_N, \end{aligned} \tag{4.22}$$

из которой, в частности, при заданных Ψ_1, $\Psi_2, \dots, \Psi_N$ и Λ_1, $\Lambda_2, \dots, \Lambda_N$ можно определить матрицу T_N через матрицу T_0. С другой стороны, условие совместности для N-кратных одевающих соотношений (4.15) и (4.16) дает:

$$T_{0\eta} = (T_N l^2 T_N^{-1} - T_0 l^2 T_0^{-1}) T_0, \tag{4.23}$$

причем T_N имеет структуру вида $T_N = T_0 K_N$, где K_N-матрица, зависящая от Ψ_i, Λ_i, $i \geqslant 1$. Таким образом, мы получаем замкнутое линейное уравнение (4.23) на матрицу T_0, решая которое, будем иметь:

$$l^2[N] = T_{0\eta} T_0^{-1} + T_0 l^2 T_0^{-1}.$$

Отсюда следует дифференциальное уравнение на искомую матрицу $g[N]$. Его формальное решение имеет вид[3]:

$$g[N] = T \exp \int^{\xi} \left[T_{0\eta} T_0^{-1} + T_0 l^2 T_0^{-1} \right] ds. \tag{4.24}$$

Заметим, что получение более явных формул для $g[N]$ в рамках данного подхода требует дальнейшей конкретизации группы G, использования соответствующих симметрий и т.д.

4. Заключение

Результаты, полученные в работе, свидетельствуют о широких возможностях метода ПД. По сути дела, можно сказать, что область его применимости совпадает с областью применимости метода обратной задачи. В то же время, по сравнению с последним он обладает как своими преимуществами, так и недостатками, что связано со спецификой алгебраического характера этого метода. Отметим здесь лишь сравнительную простоту получения в рамках данного подхода лаксовых представлений для нелинейных уравнений, а также регулярность процедуры построения одевающих соотношений. Кроме того, очевидно, что этот подход допускает дальнейшие обобщения, например, при наличии у матрицы комплексного параметра полюсных особенностей,

[3] В применении к киральным полям в методе ПД “одеваются” токи, что и приводит к необходимости еще одного интегрирования, в отличие от метода одевания, в котором восстанавливается само поле

или принадлежности этого параметра некоторой кривой на комплексной плоскости.

Автор признателен М. А. Саллю за внимание, проявленное к работе и полезные обсуждения.

Литература

1. V. B. Matveev, M. A. Salle, *Darboux transformations and solitons.*. Springer Series in Nonlinear Dynamics (1991).
2. В. Б. Матвеев, М. А. Салль, *Солитоны*. В сб.: Физика на пороге новых открытий, Изд-во ЛГУ (1990).
3. М. В. Бабич, Е. Ш. Гутшабаш, В. Д. Липовский, А. В. Рыбин, М. А. Салль, А. О. Смирнов, *Некоторые приложения методов теории солитонов в физике слабой сверхпроводимости.*. В межвед. сб.: Высокотемпературная сверхпроводимость. (Актуальные проблемы), **136**, No. 3, Изд-во ЛГУ (1991).
4. А. И. Бобенко, — Вестник ЛГУ, Сер. Физика, Химия **22(4)** (1982), 14.
5. С. П. Бурцев, В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, — ТМФ **70** (1987), 323.
6. A. V. Rybin, Preprint University of Jyvaskyla, JYFL 28/90.
7. J. Cieslinski, — Phys. Lett. **A149** (1990), 139.
8. L. A. Takhtajan, — Phys. Lett. **A64** (1977), 235.
9. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*. Наука, М. (1986).
10. A. V. Mikhailov, A. B. Shabat, — Phys. Lett. **A116** (1986), 191.
11. А. В. Михайлов, А. И. Яремчук, — Письма в ЖЭТФ **36** (1982), 78.
12. А. С. Будагов, — Зап. научн. семин. ЛОМИ **77** (1978), 24.
13. И. Л. Боголюбский, А. А. Боголюбская, Preprint JINR, No. E5-95-273.
14. J. C. Brunelli, M. Gurses, K. Zheltukhin, hep-th /9906233.
15. Ю. А. Изюмов, *Дифракция нейтронов на длиннопериодических структурах*. Энергоатомиздат, М. (1987).
16. R. Jackiw, So-Young Pi, hep-th /9911072.

Gutshabash E. Sh. On some set of models of magnets and chiral fields: integrability, Darboux transformation and exact solutions.

Two matrix linear systems which are the polynomial bunch with the complex parameter have been considered. The conditions of their compatibility have been find, also examples of integrable equations of magnets and chiral fields have been given. Some its exact solutions have been constructed.

НИИ Физики
С.-Петербургского
государственного университета

Поступило 28 февраля 2000 г.