Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 269, 2000 г.

М. В. Бабич

СИММЕТРИИ 4-МАТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ ШЛЕЗИНГЕРА

Посвящается памяти А. Г. Изергина

0. Система Шлезингера

Рассмотрим следующее линейное дифференциальное уравнение на $SL(2,\mathbb{C})$-значную функцию Ψ комплексной переменной λ:

$$\frac{d}{d\lambda}\Psi = \sum_k A_k \frac{1}{\lambda-\lambda_k}\Psi, \quad \Psi \in SL(2,\mathbb{C}), A_k \in sl(2,\mathbb{C}), \lambda, \lambda_k \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

Его решение $\Psi(\lambda)$ является многозначной функцией с точками ветвления λ_k. Если продолжить Ψ по замкнутому пути, обходящему вокруг λ_k, Ψ приобретет некоторый (независящий от λ) правый множитель M_k. Матрицы M_k называются матрицами монодромии. Вообще говоря, матрицы монодромии зависят от положения точек ветвления λ_k, которые мы рассматриваем как параметры. Как должны меняться матрицы A_k, чтобы все матрицы монодромии M_k и собственные числа A_k оставались неизменными? Л. Шлезингер [1] нашел, что эти условия эквивалентны следующей системе уравнений на матрицы A_k, так называемая *система Шлезингера* (Ss):

$$\frac{\partial A_k}{\partial \lambda_j} = \frac{1}{\lambda_j-\lambda_k}[A_j,A_k] \ \ (j\neq k), \quad \frac{\partial A_k}{\partial \lambda_k} = \sum_{j\neq k}\frac{1}{\lambda_k-\lambda_j}[A_j,A_k], \quad (2)$$

функция Ψ зависит от параметров λ_k согласно уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\Psi = \frac{1}{\lambda_k-\lambda}A_k\Psi \quad \forall k. \quad (3)$$

В данной работе рассматривается простейший нетривиальный случай четырех матриц $A_1, A_2, A_3, A_0 = -(A_1+A_2+A_3)$. Дробно-линейным преобразованием мы переведем точки $\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_0\}$ в

Работа над этой статьей финансировалась из гранта РФФИ 99-01-00687 РАН.

$\{0,x,1,\infty\}$. Функция $\Psi(\lambda)$ зависит от комплексного параметра x и, как функция λ, имеет четыре точки ветвления на $\overline{\mathbb{C}}$: $0,1,x$ и бесконечность. Уравнения (1), (3) и система Шлезингера принимают форму

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\lambda}|_{x=\mathrm{const}}\Psi &= \left(\frac{1}{\lambda}A_1+\frac{1}{\lambda-x}A_2+\frac{1}{\lambda-1}A_3\right)\Psi \\ \frac{\partial}{\partial x}|_{\lambda=\mathrm{const}}\Psi &= \frac{1}{x-\lambda}A_2\Psi, \end{cases} \tag{4}$$

$$\frac{d}{dx}A_1=\frac{1}{x}\left[A_2,A_1\right], \quad \frac{d}{dx}A_2=\frac{1}{x}\left[A_1,A_2\right]+\frac{1}{x-1}\left[A_3,A_2\right], \\ \frac{d}{dx}A_3=\frac{1}{x-1}\left[A_2,A_3\right]. \tag{5}$$

Числа (a_1,a_2,a_3,a_0), где $a_k/2$ это собственное значение A_k, называются параметрами Ss. Мы исследуем симметрии Ss; понятие симметрии трактуется как соответствие между двумя Ss с различными наборами параметров. Всвязи с этим я хочу упомянуть работы Д. Аринкина и С. Лысенко [2, 3], где (методами теории стэков) найдены все изоморфизмы между пространствами модулей, соответствующими различным системам Шлезингера.

1. Перестановки параметров

Наличие этой симметрии очевидно на уровне постановки задачи о изомонодромной деформации. Нормировка $d\Psi\Psi^{-1}\to 0$ при $\lambda\to\infty$ нарушает эту симметрию и для ее восстановления мы сделаем некоторое калибровочное преобразование. Полученная новая система уравнений будет инвариантна относительно группы перестановок S_4.

Рассмотрим универсальное накрытие $\overline{\mathbb{C}}_\lambda\setminus\{0,1,x,\infty\}$, это комплексная плоскость $\mathbb{C}_u$. Соответствие между λ и u мы определим следующим образом:

$$u=\frac{1}{4}\int\limits_0^\lambda\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(x-t)}}\Big/\int\limits_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-xt^2)}}, \quad \lambda=\frac{\theta_2^2(0)\ \theta_1^2(u)}{\theta_3^2(0)\ \theta_0^2(u)}$$

$$\tau=i\int\limits_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-(1-x)t)}}\Big/\int\limits_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-xt^2)}},$$

$$x=\theta_2^4(0|\tau)/\theta_3^4(0|\tau),$$

тэта-функции вычислены по периоду τ:

$$\theta[p,q](u|\tau)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\exp\{\pi i(m+p)^2\tau+2\pi i(u+q)(m+p)\}$$

$$\theta_1(u):=-\theta[\frac{1}{2},\frac{1}{2}](u|\tau),\ \theta_2(u):=\theta[\frac{1}{2},0](u|\tau),$$

$$\theta_3(u):=\theta[0,0](u|\tau),\ \theta_0(u):=\theta[0,\frac{1}{2}](u|\tau).$$

Теорема 1. *Пусть $G=G(x)$ удовлетворяет уравнению*

$$-2G^{-1}\frac{d}{dx}G=\frac{1}{x}A_1+\frac{2x-1}{x(x-1)}A_2+\frac{1}{x-1}A_3,$$

и Ψ это решение системы (4).

Тогда функция $\widehat{\Psi}=G\Psi$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases}\widehat{\Psi}' &= 2\sum\limits_{k=0}^{3}\log'\theta_k(u|\tau)\widehat{A}_k\widehat{\Psi}\\ \overset{\bullet}{\widehat{\Psi}} &= 2\sum\limits_{k=0}^{3}\overset{\bullet}{\log}\theta_k(u|\tau)\widehat{A}_k\widehat{\Psi},\end{cases}\tag{6}$$

где $...'=\partial_u|_{\tau=\text{const}}\ ,\overset{\bullet}{..}=\partial_\tau|_{u=\text{const}},\ \widehat{A}_k=GA_kG^{-1}$.

Доказательство. Рассмотрим (6). Замена переменных[2] $(u,\tau)\longrightarrow(\lambda,x)$ дает:

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial\lambda}|_{x=\text{const}}\widehat{\Psi}\widehat{\Psi}^{-1} &= \frac{1}{\lambda}\widehat{A}_1+\frac{1}{\lambda-x}\widehat{A}_2+\frac{1}{\lambda-1}\widehat{A}_3\\ \frac{\partial}{\partial x}|_{\lambda=\text{const}}\widehat{\Psi}\widehat{\Psi}^{-1} &= \frac{1}{x-\lambda}\widehat{A}_2-\frac{1}{2x}\widehat{A}_1-\frac{2x-1}{2x(x-1)}\widehat{A}_2-\frac{1}{2(x-1)}\widehat{A}_3.\end{cases}$$

Выберем $G=G(x)$ решением уравнения

$$-2\frac{d}{dx}GG^{-1}=\frac{1}{x}\widehat{A}_1+\frac{2x-1}{x(x-1)}\widehat{A}_2+\frac{1}{x-1}\widehat{A}_3,$$

легко видеть, $\Psi=G^{-1}\widehat{\Psi}$ удовлетворяет системе (4).

QED

[2]эта замена приведена в Приложении.

Замечание 1. Исследуя аналитические свойства $\widehat{\Psi}_u\widehat{\Psi}^{-1}$ и $\widehat{\Psi}_\tau\widehat{\Psi}^{-1}$, можно написать следующее представление для второго уравнения из системы (6):

$$4\pi i\dot{\widehat{\Psi}} = (\widehat{A}' + \widehat{A}\log'\theta_1(2u|\tau))\widehat{\Psi}, \text{ где } \widehat{A} = \sum_{k=0}^{3}\log'\theta_k(u|\tau)\widehat{A}_k.$$

Заметим так же, что система (6) возникает и при описании изомонодромных деформаций на торе [7].

Условия совместности для (6) (т.е. вариант Ss (5)) принимают следующую симметричную форму:

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{\widehat{A}}_1 & = 2\left[\widehat{A}_2\dot{\log}\,\theta_2 + \widehat{A}_3\dot{\log}\,\theta_3 + \widehat{A}_0\dot{\log}\,\theta_0, \widehat{A}_1\right] \\ \dot{\widehat{A}}_2 & = 2\left[\widehat{A}_1\dot{\log}\,\theta_2 + \widehat{A}_0\dot{\log}\,\theta_3 + \widehat{A}_3\dot{\log}\,\theta_0, \widehat{A}_2\right] \\ \dot{\widehat{A}}_3 & = 2\left[\widehat{A}_0\dot{\log}\,\theta_2 + \widehat{A}_1\dot{\log}\,\theta_3 + \widehat{A}_2\dot{\log}\,\theta_0, \widehat{A}_3\right] \\ \dot{\widehat{A}}_0 & = 2\left[\widehat{A}_3\dot{\log}\,\theta_2 + \widehat{A}_2\dot{\log}\,\theta_3 + \widehat{A}_1\dot{\log}\,\theta_0, \widehat{A}_0\right] \end{array}\right. \qquad (7)$$

здесь $\theta_k = \theta_k(0|\tau)$.

Определим действие модулярной группы Σ на функции $\Psi(u|\tau)$ следующим образом:

$$\text{пусть } \sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \cong \Sigma,$$

$$\text{положим } \sigma\Psi(u|\tau) = \Psi\left(\frac{u}{\gamma\tau+\delta}|\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right).$$

Система (6) инвариантна относительно действия модулярной группы в следующем смысле

Теорема 2. *Пусть* $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in \Sigma$ *– элемент модулярной группы и* $\widehat{\Psi}(u|\tau)$ *решение* (6) *для некоторого набора* $\widehat{A}_k(\tau)$, $k = 1,2,3,0$. *Тогда матрица* $\tilde{\Psi} = \sigma\widehat{\Psi}$ *удовлетворяет уравнению*

$$\left\{\begin{array}{ll} \tilde{\Psi}' & = 2\sum_{k=0}^{3}\log'\theta_k(u|\tau)\tilde{A}_k\tilde{\Psi} \\ \dot{\tilde{\Psi}} & = 2\sum_{k=0}^{3}\dot{\log}\,\theta_k(u|\tau)\tilde{A}_k\tilde{\Psi}, \end{array}\right. \qquad (8)$$

где $\tilde{A}_k(\tau)=\widehat{A}_{k_\sigma}(\sigma\tau)$; $\sigma\tau=(\alpha\tau+\beta)/(\gamma\tau+\delta)$; k_σ *перестановка индексов* 2, 3 *и* 0, *соответствующая перестановке полупериодов* $\{\frac{\gamma\tau+\delta}{2}; \frac{(\alpha+\gamma)\tau+\beta+\delta}{2}; \frac{\alpha\tau+\beta}{2}\}\longrightarrow\{\frac{1}{2}; \frac{1+\tau}{2}; \frac{\tau}{2}\}$ $(\bmod 1,\tau)$.

Доказательство. Как известно, Σ задается двумя генераторами $S=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ и $T=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$. Для доказательства теоремы достаточно проверить утверждение для S и T, а так же убедиться, что матрица $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ соответствует тривиальному преобразованию $\tilde{A}_k(\tau)=\widehat{A}_k(\tau)$.

Рассмотрим S:

$$S\widehat{\Psi}(u|\tau)=\widehat{\Psi}(u|\tau+1)$$

Равенства

$$\theta_1(u|\tau)=e^{-i\pi/4}\theta_1(u|\tau+1),\quad \theta_2(u|\tau)=e^{-i\pi/4}\theta_2(u|\tau+1),$$

и

$$\theta_3(u|\tau)=\theta_0(u|\tau+1),\quad \theta_0(u|\tau)=\theta_3(u|\tau+1),$$

означают, что $\tilde{\Psi}=S\widehat{\Psi}$ удовлетворяют (8), где

$$\tilde{A}_1(\tau)=\widehat{A}_1(\tau+1),\ \tilde{A}_2(\tau)=\widehat{A}_2(\tau+1),$$
$$\tilde{A}_3(\tau)=\widehat{A}_0(\tau+1),\ \tilde{A}_0(\tau)=\widehat{A}_3(\tau+1).$$

Рассмотрим T:

$$T\widehat{\Psi}(u|\tau)=\tilde{\Psi}(u|\tau)=\widehat{\Psi}(-u/\tau|-1/\tau)=\widehat{\Psi}(v|\tau_T),$$

где $\tau_T=-1/\tau$, $v=\tau_T u$.

$$\frac{1}{2}d\tilde{\Psi}(u|\tau)=\sum_{k=0}^{3}\log'\theta_k(v|\tau_T)\widehat{A}_k(\tau_T)\tilde{\Psi}dv+$$
$$+\sum_{k=0}^{3}\dot{\log}\theta_k(v|\tau_T)\widehat{A}_k(\tau_T)\tilde{\Psi}d\tau_T=\sum_{k=0}^{3}\log'\theta_k(v|\tau_T)\widehat{A}_k(\tau_T)\tau_T\tilde{\Psi}du+ \tag{9}$$
$$+\sum_{k=0}^{3}\left(\dot{\log}\theta_k(v|\tau_T)+\log'\theta_k(v|\tau_T)u\right)\widehat{A}_k(\tau_T)(\tau_T)^2\tilde{\Psi}d\tau$$

Из равенств

$$\theta_1(u|\tau)=-i\mu\theta_1(v|\tau_T),\ \theta_2(u|\tau)=\mu\theta_0(v|\tau_T),\ \theta_3(u|\tau)=\mu\theta_3(v|\tau_T),$$

и

$$\theta_0(u|\tau) = \mu\theta_2(v|\tau_T), \text{где } \mu = \sqrt{-i\tau}\exp\{\tau_T\pi i u^2\},$$

мы получаем

$$\log\theta_k(u|\tau) = d\log\mu + d\log\theta_{k_T}(v|\tau_T) =$$

$$= d\log\mu + \log'\theta_{k_T}(v|\tau_T)dv + \overset{\bullet}{\log}\theta_{k_T}(v|\tau_T)d\tau_T =$$

$$= d\log\mu + \log'\theta_{k_T}(v|\tau_T)du + \left(\overset{\bullet}{\log}\theta_{k_T}(v|\tau_T) + \log'\theta_{k_T}(v|\tau_T)u\right)d\tau_T,$$

где индекс k_T принимает значения $1, 0, 3, 2$ когда k пробегает $1, 2, 3, 0$.

$$\log'\theta_{k_T}(v|\tau_T)\tau_T = \log'\theta_k(u|\tau) - \frac{\partial}{\partial u}\log\mu$$

$$\overset{\bullet}{\log}\theta_{k_T}(v|\tau_T)(\tau_T)^2 = \overset{\bullet}{\log}\theta_k(u|\tau) - u\tau_T\left(\log'\theta_k(u|\tau) - \frac{\partial}{\partial u}\log\mu\right) - \frac{\partial}{\partial\tau}\log\mu.$$

Подставляя последние два равенства в (9), получаем

$$\frac{1}{2}d\tilde{\Psi}(u|\tau) = \sum_{k=0}^{3}\log'\theta_k(u|\tau)\widehat{A}_{k_T}(\tau_T)\tilde{\Psi}du + \sum_{k=0}^{3}\overset{\bullet}{\log}\theta_k(u|\tau)\widehat{A}_{k_T}(\tau_T)\tilde{\Psi}d\tau. \tag{10}$$

Здесь мы воспользовались равенством $\sum_k \widehat{A}_k = 0$ и тем, что μ не зависит от индекса "k" тэта-функции. Равенство (10) означает, что $\tilde{\Psi}$ удовлетворяет (8) с

$$\tilde{A}_1(\tau) = \widehat{A}_1(-1/\tau), \tilde{A}_2(\tau) = \widehat{A}_0(-1/\tau),$$

$$\tilde{A}_3(\tau) = \widehat{A}_3(-1/\tau), \tilde{A}_0(\tau) = \widehat{A}_2(-1/\tau).$$

Для завершения доказательства нужно показать, что действие "σ" и "$-\sigma$" совпадают; но это так, поскольку $\overset{\bullet}{\log}\ \theta_k(u) = \overset{\bullet}{\log}\ \theta_k(-u)$ и $\log'\theta_k(u) = \log'\theta_k(-u)$.

Мы определили действие модулярной группы на функции двух переменных и обозначили эту группу преобразований Σ; добавим еще один генератор: $\sigma'\Psi(u|\tau) = \Psi(u+1|\tau)$, и обозначим соответствующую группу прееобразований Σ'.

Из Теоремы 2 и тривиального наблюдения, что функця $\tilde{\Psi} = \sigma'\Psi(u|\tau) = \Psi(u+1|\tau)$ удовлетворяет (8) с $\tilde{A}_{1,2}(\tau) = \widehat{A}_{2,1}(\tau)$, $\tilde{A}_{3,0}(\tau) = \widehat{A}_{0,3}(\tau)$, мы получаем

Утверждение 1.1. *Пусть* $\Psi(u|\tau)$ *решение* (6) *с параметрами* (a_1, a_2, a_3, a_0), *и пусть* $(1, 2, 3, 0) \longrightarrow (j_1, j_2, j_3, j_0)$ *любая перестановка индексов. Тогда существует* $\sigma \in \Sigma'$ *такая, что* $\tilde{\Psi} = \sigma\Psi$ *удовлетворяет* (8) *с параметрами* $(a_{j_1}, a_{j_2}, a_{j_3}, a_{j_0})$.

Мы будем говорить, что система (6) инвариантна относительно произвольной перестановки параметров.

2. Преобразования Шлезингера

Идея получения новых решений системы (2) посредством домножения исходного решения той же системы слева на специально подобранную матричнозначную функцию принадлежит самому Шлезингеру [1]. Многие авторы приводили разнообразные варианты этих преобразований, приспособленные для тех или иных целей (смотри [5, 9–11]). В данном тексте объясняется основная идея преобразований Шлезингера и приводятся формулы наиболее простые по форме и (по мнению автора) легко адаптируемые к той или иной конкретной задаче.

Рассмотрим функцию Ψ, являющуюся решением (4) или (6). В окрестности особых точек (смотри [4, 5, 8]) имеет место представление:

$$\Psi(u + \omega_J) = (G_J + O(u^2)) \begin{pmatrix} u^{a_J} & 0 \\ 0 & u^{-a_J} \end{pmatrix} (I + j_J^{\pm}\sigma_{\pm} \log u) C_J, \quad (11)$$

где $G_J + O(u^2)$ некоторый степенной ряд по u^2, $G_J, C_J \in SL(2, \mathbb{C})$, $\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; величины $j_J^{\pm}$ равны нулю для любого $\pm a_J \notin \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$. Матрицы C_J и числа j_J постоянны, через ω_J мы обозначили ноль соответствующей тэта-функции: $\theta_J(\omega_J) = 0$.

Из (11) следует, что $\widehat{A}_J = G_J\, æ_J\, (G_J)^{-1}$, где $2æ_J = a_J \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, если $a_J \neq 0$ и $2æ_J = j_J^{\pm}\sigma_{\pm}$ если $a_J = 0$.

Матрицы монодромии (постоянные) имеют вид:

$$M_J = C_J^{-1} \begin{pmatrix} e^{\pi i a_J} & 0 \\ 0 & e^{-\pi i a_J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \pi i j_J^{\pm} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C_J.$$

Пусть F аналитическая и однозначная вне сингулярностей Ψ функция. Предположим, что нам удалось найти F с таким поведением в окрестностях ω_J, что произведение $F\Psi = \tilde{\Psi}$ снова имеет представление (11), уже с некоторыми новыми $\tilde{G}_J$, $\tilde{a}_J$. В таком случае $\tilde{\Psi}$ имеет те же самые (и, следовательно, постоянные!) матрицы монодромии что и Ψ. После нормировки "$\det\ \tilde{\Psi} = 1$" и должного калибровочного преобразования, $\tilde{\Psi}$ будет удовлетворять системе (6) или системе (4). Заметим, что из теоремы единственности для соответствующей задачи Римана–Гильберта следует, что в существенном (с точностью до нормировок и калибровочных преобразований) функция Ψ определяется параметрами a_k и матрицами монодромии M_k однозначно. Преобразование Шлезингера не меняет монодромии, следовательно различные преобразования Шлезингера коммутируют между собой (опять же с точностью до калибровки), и, стало быть, любое преобразование Шлезингера может быть получено последовательным применением нескольких так называемых "элементарных" преобразований Шлезингера, формулы для которых мы сейчас выпишем.

Как легко понять, следующая матрица увеличивает на единицу параметры a_I и a_J:

$$F_{I^+,J^+} = \begin{pmatrix} \theta_I^2(u) & 0 \\ 0 & \theta_J^2(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix},$$

где вектор-строки (f_{11}, f_{12}) и (f_{21}, f_{22}) могут быть выбраны любыми, ортогональными векторам-столбцам главного члена (11) $((G_J)_{11}, (G_J)_{21})^T$ и $((G_I)_{11}, (G_I)_{21})^T$ соответственно, например:

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(G_J)_{21} & (G_J)_{11} \\ -(G_I)_{21} & (G_I)_{11} \end{pmatrix}.$$

Данный вид матрицы (f_{ij}) сохраняет форму (11) у произведения $F_{I^+,J^+}\Psi = \tilde{\Psi}$.

Напишем аналогичные выражения для множителей F_{I^-,J^+}, F_{I^+,J^-} и F_{I^-,J^-}, которые позволят изменять значения параметров a_I, a_J на ± 1 во всех возможных сочетаниях:

$$F_{I^+,J^-} = \begin{pmatrix} \theta_I^2(u) & 0 \\ 0 & \theta_J^2(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(G_J)_{22} & (G_J)_{12} \\ -(G_I)_{21} & (G_I)_{11} \end{pmatrix}$$

$$F_{I^-,J^+} = \begin{pmatrix} \theta_I^2(u) & 0 \\ 0 & \theta_J^2(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(G_J)_{21} & (G_J)_{11} \\ -(G_I)_{22} & (G_I)_{12} \end{pmatrix}$$

$$F_{I^-,J^-} = \begin{pmatrix} \theta_I^2(u) & 0 \\ 0 & \theta_J^2(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(G_J)_{22} & (G_J)_{12} \\ -(G_I)_{22} & (G_I)_{12} \end{pmatrix}$$

Таким образом мы видим, что преобразованием Шлезингера могут быть соединены системы с параметрами (a_1, a_2, a_3, a_0) и $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \tilde{a}_0)$ если и только если

$$a_k - \tilde{a}_k \in \mathbb{Z}, \qquad \sum_{k=0}^{3} a_k - \tilde{a}_k = 0(\mathrm{mod} 2)$$

3. Преобразования Окамото

В этом разделе мы рассмотрим преобразования, найденные К. Окамото [6] для уравнения Пенлеве VI, которое эквивалентно Ss. Это преобразование связывает системы Шлезингера с параметрами (a_1, a_2, a_3, a_0) и $(a_1, a_2, a_3, a_0)J$, где

$$J = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Для того чтобы сделать изложение более наглядным, мы перейдем от “$sl(2,\mathbb{C})$-языка” к эквивалентному ему “$\mathbb{C}^3$-языку”.

Определим на $sl(2,\mathbb{C})$ скалярное и векторное произведения:

$$\langle A, B\rangle = 2\mathrm{tr}\ AB, \quad [A, B] = AB - BA.$$

Мы будем использовать следующие варианты[3] известных формул линейной алгебры

$$\begin{aligned} -\langle [A,B]C\rangle^2 &= \det\begin{pmatrix} \langle A,A\rangle & \langle A,B\rangle & \langle A,C\rangle \\ \langle B,A\rangle & \langle B,B\rangle & \langle B,C\rangle \\ \langle C,A\rangle & \langle C,B\rangle & \langle C,C\rangle \end{pmatrix} \\ -[A,[B,C]] &= B\langle A,C\rangle - C\langle A,B\rangle. \end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом система (5) определяет движение тетраэдра A_1, A_2, A_3, A_0, где A_k это радиус-вектор одноименной вершины; начало координат находится в центре масс. Калибровочные преобразования линейной системы (4) приводят к вращениям $A_k \longrightarrow GA_kG^{-1}$ (где $G = G(x) \in SL(2,\mathbb{C})$) тетраэдра как единого целого.

[3] $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ эквивалентно $\mathbb{R}^{2,1}$, а не $\mathbb{R}^3$, что объясняет появление непривычного знака минус слева.

Рассмотрим “матрицу Грама”, т.е. матрицу попарных скалярных произведений радиус-векторов вершин. Заметим, что скалярные произведения не зависят от калибровачных преобразований, и $\langle A_i, A_k\rangle = \langle \widehat{A}_i, \widehat{A}_k\rangle = a_{ik}$, так что мы рассматриваем системы (5) и (7) одновременно:

$$a_{ik} := \langle A_i, A_k\rangle = 2\mathrm{tr}\ (A_i A_k), \quad a_{kk} = 2\mathrm{tr}\ A_k^2 = -4\det A_k = (a_k)^2.$$

Имеют место соотношения:

$$\begin{gathered} a_{ik} = a_{ki} \\ \sum_{i=0}^{3} a_{ik} = 0\ \forall k \\ a_{ik} + (a_{ii} + a_{kk})/2 = a_{jl} + (a_{jj} + a_{ll})/2 \\ \text{для попарно различных } i, j, k, l. \end{gathered} \tag{13}$$

Вторая и третья строчки следуют из $\langle \sum A_i, A_k\rangle = 0$ и $\langle A_i + A_k, A_i + A_k\rangle = \langle -A_j - A_l, -A_j - A_l\rangle$, справедливых вследствие $\sum A_i = 0$.

Матричные элементы (a_{ik}) удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} a_{12} & = \frac{d}{d\tau} a_{03} = 4\left(\frac{d}{d\tau}\log\ \frac{\theta_0}{\theta_3}\right) a_{230} \\ \frac{d}{d\tau} a_{13} & = \frac{d}{d\tau} a_{20} = 4\left(\frac{d}{d\tau}\log\ \frac{\theta_2}{\theta_0}\right) a_{230} \\ \frac{d}{d\tau} a_{10} & = \frac{d}{d\tau} a_{32} = 4\left(\frac{d}{d\tau}\log\ \frac{\theta_3}{\theta_2}\right) a_{230} \\ \quad a_{kk} & = \mathrm{const} \qquad \forall k, \end{cases} \tag{14}$$

или

$$\frac{d}{d\tau} a_{1k} = \frac{d}{d\tau} a_{ij} = -4\left(\frac{d}{d\tau}\log\ \frac{\theta_i}{\theta_j}\right) a_{ijk}, \quad i, j, k \in \{2, 3, 0\},$$

где $\theta_k = \theta_k(0|\tau)$ это тэта-константы, $a_{ijk} = \langle [A_i, A_j], A_k\rangle$ – полтора объема тетраэдра A_1, A_2, A_3, A_0.

Заметим, что сумма уравнений (14) равна нулю, так что имеются только два независимых уравнения первого порядка на две неизвестных функции (можно взять, например, a_{12} и a_{13}); все остальные a_{ik} легко выражаются через них и параметры a_{kk} (равенства (13)). Мы можем исключить одну из неизвестных и получить одно обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. После некоторой (нетривиальной!) замены переменных оно сводится к шестому уравнению Пенлеве.

Если мы знаем a_{ik}, тетраэдр может быть восстановлен с точностью до положения в пространстве, а система (4) с точностью до калибровачного преобразования. Зададимся следующим естественным вопросом:

Какие различные системы Шлезингера имеют одну и ту же систему уравнений (14)?

Ответ:

Это системы Шлезингера, связанные преобразованием Окамото.

Прокомментируем это заявление. Мы будем говорить, что Ss $A_1, \dots, A_0$ и $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_0$ имеют одинаковые системы (14) если $a_{ik} = \tilde{a}_{ik} + \mathrm{const}_{ik}$ и $a_{230} = \tilde{a}_{230}$, где const_{ik} некоторые, независящие от τ величины.

Будем задавать тетраэдр A_1, A_2, A_3, A_0 тремя векторами $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$:

$$\vec{X} := A_1 + A_2, \quad \vec{Y} := A_1 + A_3, \quad \vec{Z} := A_1 + A_0$$

$$2A_1 = \vec{X} + \vec{Y} + \vec{Z}, \quad 2A_2 = \vec{X} - \vec{Y} - \vec{Z},$$

$$2A_3 = -\vec{X} + \vec{Y} - \vec{Z}, \quad 2A_0 = -\vec{X} - \vec{Y} + \vec{Z}.$$

Векторы $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ соединяют середины противолежащих (не имеющих общих концов) ребер тетраедра и образуют базис $\mathbb{C}^3$. Вычисление его матрицы Грама дает:

$$\begin{pmatrix} X^2 & a_{10/23} & a_{13/20} \\ a_{10/23} & Y^2 & a_{12/30} \\ a_{13/20} & a_{12/30} & Z^2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \langle\vec{X},\vec{X}\rangle & \langle\vec{X},\vec{Y}\rangle & \langle\vec{X},\vec{Z}\rangle \\ \langle\vec{Y},\vec{X}\rangle & \langle\vec{Y},\vec{Y}\rangle & \langle\vec{Y},\vec{Z}\rangle \\ \langle\vec{Z},\vec{X}\rangle & \langle\vec{Z},\vec{Y}\rangle & \langle\vec{Z},\vec{Z}\rangle \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \langle\vec{X},\vec{X}\rangle & \frac{a_{11}+a_{00}-a_{22}-a_{33}}{2} & \frac{a_{11}+a_{33}-a_{22}-a_{00}}{2} \\ \frac{a_{11}+a_{00}-a_{22}-a_{33}}{2} & \langle\vec{Y},\vec{Y}\rangle & \frac{a_{11}+a_{22}-a_{33}-a_{00}}{2} \\ \frac{a_{11}+a_{33}-a_{22}-a_{00}}{2} & \frac{a_{11}+a_{22}-a_{33}-a_{00}}{2} & \langle\vec{Z},\vec{Z}\rangle \end{pmatrix}$$

Здесь использованы обозначения: $a_{1i/jk} = (a_{11}+a_{ii}-a_{jj}-a_{kk})/2 = \mathrm{const}$. Мы видим, что для любой Ss все попарные скалярные произведения векторов этого базиса константы, кроме “квадратов длин” векторов $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$, которые связаны одним соотношением: $X^2 + Y^2 + Z^2 := a_{\Sigma} = \mathrm{const}$. Таким образом состояние

Ss может быть естественным образом параметризовано точкой сферы радиуса $\sqrt{a_\Sigma}$. Квадраты декартовых координат этой точки удовлетворяют уравнениям (14) ($a_{12} = X^2/2 + \mathrm{const}$, $a_{13} = Y^2/2 + \mathrm{const}$, $a_{10} = Z^2/2 + \mathrm{const}$). Используя (12) для вычисления величины a_{230}, мы получим следующее выражение:

$$-4a_{230}^2 = \det \begin{pmatrix} X^2 & a_{10/23} & a_{13/20} \\ a_{10/23} & Y^2 & a_{12/30} \\ a_{13/20} & a_{12/30} & Z^2 \end{pmatrix} = X^2Y^2Z^2 -$$

$$-\frac{1}{3}\Big(X^2(2a_{12/30}^2 - a_{10/23}^2 - a_{13/20}^2) + Y^2(2a_{13/20}^2 - a_{12/30}^2 - a_{10/23}^2) +$$

$$+ Z^2(2a_{10/23}^2 - a_{12/30}^2 - a_{13/20}^2)\Big) + 2a_{12/30}a_{13/20}a_{10/23} -$$

$$\frac{1}{3}a_\Sigma(a_{12/30}^2 + a_{13/20}^2 + a_{10/23}^2) = X^2Y^2Z^2 + \frac{2}{3}(4\sigma_2^2 - \sigma_1^2)X^2 -$$

$$-\frac{1}{3}(4\sigma_2^2 - \sigma_1^2 + 24\sqrt{\sigma_4})Y^2 - \frac{1}{3}(4\sigma_2^2 - \sigma_1^2 - 24\sqrt{\sigma_4})Z^2 - 16\sigma_3 + \frac{8}{3}\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^3,$$

где, следуя Окамото [6], мы обозначили

$$a_1 = b_1 + b_2,\ a_2 = b_1 - b_2,\ a_3 = b_3 + b_4,\ a_0 = b_3 - b_4,$$

$$\sigma_1 = \sum_i b_i^2,\ \sigma_2 = \sum_{i<j} b_i^2 b_j^2,\ \sigma_3 = \sum_{i<j<k} b_i^2 b_j^2 b_k^2,\ \sqrt{\sigma_4} = b_1 b_2 b_3 b_4.$$

Таким образом a_{230} не изменяется при перестановках b_i. С другой стороны мы видим, что равенство

$$\det \begin{pmatrix} X^2 + \mathrm{const}_X & \tilde a_{10/23} & \tilde a_{13/20} \\ \tilde a_{10/23} & Y^2 + \mathrm{const}_Y & \tilde a_{12/30} \\ \tilde a_{13/20} & \tilde a_{12/30} & Z^2 + const_Z \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} X^2 & a_{10/23} & a_{13/20} \\ a_{10/23} & Y^2 & a_{12/30} \\ a_{13/20} & a_{12/30} & Z^2 \end{pmatrix}$$

эквивалентно следующим равенствам:

$$\mathrm{const}_X = \mathrm{const}_Y = \mathrm{const}_Z = 0, \quad \sigma_1 = \tilde\sigma_1, \quad \sigma_2 = \tilde\sigma_2,$$

$$\sigma_3 = \tilde\sigma_3, \quad b_1 b_2 b_3 b_4 = \tilde b_1 \tilde b_2 \tilde b_3 \tilde b_4,$$

где величины снабженные волной вычислены по $\tilde a_{kk}$.

Отсюда следует, что единственно возможными преобразованиями, сохраняющими эти равенства, являются перестановки b_k и одновременные изменения знаков некоторых пар b_i, b_k. Генераторами этой группы, действующими на множестве параметров Ss (a_1, a_2, a_3, a_0), являются замены знаков a_k (эти преобразования тривиальны, поскольку в уравнения входят только квадраты величин a_k) и одно нетривиальное преобразование:

$$(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \tilde{a}_0) = (a_1, a_2, a_3, a_0)\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

которое и являлось конечной целью наших построений. Заметим, что это преобразование тетраэдра трудно себе представить "наглядно" вследствие его невещественности. Например в случае ортогональных векторов $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ (это соответствует равным параметрам $a_k = a_i\ \forall k, i$; здесь мы положим $a_k = 1$):

$$\det\begin{pmatrix} \langle\vec{X},\vec{X}\rangle & \langle\vec{X},\vec{Y}\rangle & \langle\vec{X},\vec{Z}\rangle \\ \langle\vec{Y},\vec{X}\rangle & \langle\vec{Y},\vec{Y}\rangle & \langle\vec{Y},\vec{Z}\rangle \\ \langle\vec{Z},\vec{X}\rangle & \langle\vec{Z},\vec{Y}\rangle & \langle\vec{Z},\vec{Z}\rangle \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} X^2 & 0 & 0 \\ 0 & Y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - X^2 - Y^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} X^2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & Y^2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 - X^2 - Y^2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \langle\vec{\tilde{X}},\vec{\tilde{X}}\rangle & \langle\vec{\tilde{X}},\vec{\tilde{Y}}\rangle & \langle\vec{\tilde{X}},\vec{\tilde{Z}}\rangle \\ \langle\vec{\tilde{Y}},\vec{\tilde{X}}\rangle & \langle\vec{\tilde{Y}},\vec{\tilde{Y}}\rangle & \langle\vec{\tilde{Y}},\vec{\tilde{Z}}\rangle \\ \langle\vec{\tilde{Z}},\vec{\tilde{X}}\rangle & \langle\vec{\tilde{Z}},\vec{\tilde{Y}}\rangle & \langle\vec{\tilde{Z}},\vec{\tilde{Z}}\rangle \end{pmatrix}.$$

Таким образом $\langle\vec{\tilde{X}} + \vec{\tilde{Y}} - \vec{\tilde{Z}}, \vec{\tilde{X}} + \vec{\tilde{Y}} - \vec{\tilde{Z}}\rangle = 0$. Для вещественных векторов $\vec{\tilde{Z}} = \vec{\tilde{X}} + \vec{\tilde{Y}}$, определитель тождественный ноль, и все величины a_{ij} постоянны.

4. Приложение

Произведем замену переменных $(\tau, u) \longrightarrow (x, \lambda)$ в системе

$$\begin{cases} \widehat{\Psi}' & = 2\sum\limits_{k=0}^{3} \log'\theta_k(u|\tau)\widehat{A}_k\widehat{\Psi} \\ \dot{\widehat{\Psi}} & = 2\sum\limits_{k=0}^{3} \dot{\log}\theta_k(u|\tau)\widehat{A}_k\widehat{\Psi}, \end{cases}$$

где

$$u = \frac{1}{4K}\int\limits_0^{\lambda} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(x-t)}} = \frac{1}{4K}\int\limits_0^{\lambda/x} \frac{xdt}{\sqrt{xt_1(1-xt_1)x(1-t_1)}} = \\ = \frac{1}{2K}\int\limits_0^{\sqrt{\lambda/x}} \frac{dt_2}{\sqrt{(1-t_2^2)(1-xt_2^2)}};$$

$$\lambda = \sqrt{x}\ \theta_1^2(u)/\theta_0^2(u) = x\ \mathrm{sn}^2 v,\ 1-\lambda = \sqrt{1-x}\ \theta_3^2(u)/\theta_0^2(u) = \mathrm{dn}^2 v, \\ x-\lambda = \sqrt{x(1-x)}\ \theta_2^2(u)/\theta_0^2(u) = x\ \mathrm{cn}^2 v$$

$$K = \frac{1}{2}\int\limits_0^{x} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(x-t)}} = \int\limits_0^{1} \frac{dt_2}{\sqrt{(1-t_2^2)(1-xt_2^2)}}, \quad v = 2Ku,$$

и тэта-функции вычислены по периоду τ:

$$\tau = \int\limits_1^{1/x} \frac{dt_1}{\sqrt{t_1(1-t_1)(1-xt_1)}} \Big/ \int\limits_0^{1} \frac{dt_1}{\sqrt{t_1(1-t_1)(1-xt_1)}}, \quad x = \frac{\theta_2^4(0|\tau)}{\theta_3^4(0|\tau)}.$$

Рассмотрим первое уравнение

$$2\sum_k \widehat{A}_k \frac{\partial}{\partial\lambda}|_{x=\mathrm{const}} \log\theta_k(u) = 2\sum_{k\neq 0} \widehat{A}_k \frac{\partial}{\partial\lambda}|_{x=\mathrm{const}} \log\frac{\theta_k(u)}{\theta_0(u)} = \\ = \frac{1}{\lambda}\widehat{A}_1 + \frac{1}{\lambda-x}\widehat{A}_2 + \frac{1}{\lambda-1}\widehat{A}_3$$

Для преобразования второго уравнения произведем вспомогательные вычисления:

$$\frac{\theta_k''(u)}{\theta_k(u)} - \frac{\theta_0''(u)}{\theta_0(u)} = \log''\frac{\theta_k(u)}{\theta_0(u)} + \left(\frac{\theta_k'(u)}{\theta_k(u)}\right)^2 - \left(\frac{\theta_0'(u)}{\theta_0(u)}\right)^2 = \\ = \log''\frac{\theta_k(u)}{\theta_0(u)} + \left(\log'\frac{\theta_k(u)}{\theta_0(u)}\right)^2 + 2\log'\frac{\theta_k(u)}{\theta_0(u)}\log'\theta_0(u) = \\ = \frac{(\theta_k(u)/\theta_0(u))''}{\theta_k(u)/\theta_0(u)} + 2\left(\log'\frac{\theta_k(u)}{\theta_0(u)}\right)\log'\theta_0(u).$$

Используя уравнение теплопроводности $4\pi i\overset{\bullet}{\theta}_k(u) = \theta_k''(u)$ мы получаем

$$\overset{\bullet}{\log}\frac{\theta_1(u)}{\theta_0(u)} = \frac{1}{4\pi i}\left(\frac{\theta_1''(u)}{\theta_1(u)} - \frac{\theta_0''(u)}{\theta_0(u)}\right) =$$

$$= \frac{K^2}{\pi i}\left(\frac{1}{\mathrm{sn}\ v}\frac{\partial^2}{\partial v^2}\mathrm{sn}\ v + 2\frac{\partial}{\partial v}\log \mathrm{sn}\ v\quad Z\right) =$$

$$= \frac{K^2}{\pi i}\left(-\mathrm{dn}^2\ v - x\mathrm{cn}^2\ v + 2\frac{\mathrm{cn}\ v\mathrm{dn}\ v}{\mathrm{sn}\ v}Z\right),$$

$$\overset{\bullet}{\log}\frac{\theta_2(u)}{\theta_0(u)} = \frac{K^2}{\pi i}\left(-\mathrm{dn}^2\ v + x\mathrm{sn}^2\ v - 2\frac{\mathrm{sn}\ v\mathrm{dn}\ v}{\mathrm{cn}\ v}Z\right),$$

$$\overset{\bullet}{\log}\frac{\theta_3(u)}{\theta_0(u)} = \frac{K^2}{\pi i}x\left(-\mathrm{cn}^2\ v + \mathrm{sn}^2\ v - 2\frac{\mathrm{sn}\ v\mathrm{cn}\ v}{\mathrm{sn}\ v}Z\right),$$

здесь $Z := \partial/\partial v \log\theta_0(v/(2K))$.

Поскольку

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{i\pi}{4K^2x(x-1)},$$

мы можем переписать равенства так:

$$\frac{\partial}{\partial x}|_{u=\mathrm{const}}\log\frac{\theta_1(u)}{\theta_0(u)} = \frac{1}{4x(x-1)}\left(2\lambda - 1 - x + 2\frac{\mathrm{cn}\ v\mathrm{dn}\ v}{\mathrm{sn}\ v}Z\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}|_{u=\mathrm{const}}\log\frac{\theta_2(u)}{\theta_0(u)} = \frac{1}{4x(x-1)}\left(2\lambda - 1 - 2\frac{\mathrm{sn}\ v\mathrm{dn}\ v}{\mathrm{cn}\ v}Z\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}|_{u=\mathrm{const}}\log\frac{\theta_3(u)}{\theta_0(u)} = \frac{1}{4x(x-1)}\left(2\lambda - x - 2x\frac{\mathrm{sn}\ v\mathrm{cn}\ v}{\mathrm{dn}\ v}Z\right).$$

Перейдем непосредственно ко второму уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial x}|_{\lambda=\mathrm{const}}\widehat{\Psi}\widehat{\Psi}^{-1} = \frac{\partial}{\partial x}|_{u=\mathrm{const}}\widehat{\Psi}\widehat{\Psi}^{-1} - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}|_{u=\mathrm{const}}\right)\frac{\partial}{\partial\lambda}|_{x=\mathrm{const}}\widehat{\Psi}\widehat{\Psi}^{-1}.$$

Вычислим $\partial\lambda/\partial x$:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}|_{u=\mathrm{const}} = \lambda\frac{\partial}{\partial x}|_{u=\mathrm{const}}\log\sqrt{x}\frac{\theta_1^2(u)}{\theta_0^2(u)} = \lambda\left(\frac{1}{2x} + 2\frac{\partial}{\partial x}|_{u=\mathrm{const}}\log\frac{\theta_1(u)}{\theta_0(u)}\right)$$

$$= \lambda\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x(x-1)}(2\lambda - 1 - x + 2\frac{\mathrm{cn}\ v\ \mathrm{dn}\ v}{\mathrm{sn}\ v}Z)\right) =$$

$$= \frac{\lambda}{x(x-1)}\left(\lambda - 1 + \frac{\mathrm{cn}\ v\ \mathrm{dn}\ v}{\mathrm{sn}\ v} Z\right).$$

Окончательно мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}|_{\lambda=\mathrm{const}}\widehat{\Psi}\widehat{\Psi}^{-1} = \frac{\widehat{A}_1}{2x(x-1)}\left(2\lambda - 1 - x + 2\frac{\mathrm{cn}\ v\ \mathrm{dn}\ v}{\mathrm{sn}\ v}Z\right) +$$

$$+\frac{\widehat{A}_2}{2x(x-1)}\left(2\lambda - 1 - 2\frac{\mathrm{sn}\ v\ \mathrm{dn}\ v}{\mathrm{cn}\ v}Z\right) + \frac{\widehat{A}_3}{2x(x-1)}\left(2\lambda - x - \right.$$

$$\left. -2x\frac{\mathrm{cn}\ v\ \mathrm{sn}\ v}{\mathrm{dn}\ v}Z\right) - \frac{\lambda}{x(x-1)}\left(\lambda - 1 + \frac{\mathrm{cn}\ v\ \mathrm{dn}\ v}{\mathrm{sn}\ v}Z\right)\left(\frac{1}{\lambda}\widehat{A}_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda - x}\widehat{A}_2 + \frac{1}{\lambda - 1}\widehat{A}_3\right) = \frac{1}{x-\lambda}\widehat{A}_2 - \frac{1}{2x}\widehat{A}_1 - \frac{2x-1}{2x(x-1)}\widehat{A}_2 - \frac{1}{2(x-1)}\widehat{A}_3$$

QED

Пользуясь случаем, я хочу поблагодарить Д. А. Короткина за многочисленные плодотворные обсуждения и интерес к этой работе в целом.

Литература

1. L. Schlesinger, *Über eine Klasse von Differentialsystemen beliebiger Ordnung mit festen kritischen Punkten.* J. Reine Math., **141** (1912) 96–145.
2. D. Arinkin, S. Lysenko, *On the Moduli of $SL(2)$-bundles with Connections on $P^1 \setminus \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,.* International Mathematics Research Notices, **19** (1997) 983–999.
3. D. Arinkin, S. Lysenko, *Isomorphisms between Moduli Spaces of $SL(2)$-bundles with Connecti ons on $P^1 \setminus \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.* Mathematical Research Letters, **4** (1997) 181–190.
4. M. Jimbo, T. Miwa, and K. Ueno, *Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients I.* Phisica 2D (1981), 306–352.
5. M. Jimbo, T. Miwa, *Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients II, III.* Phisica 2D (1981), 407–448; Phisica 4D (1981), 26–46.
6. K. Okamoto, *Studies in the Painlevé equations I. Sixth Painlevé equation PVI.* Annali Mat. Pura Appl., **146** (1987), 337–381.
7. D. A. Korotkin, H. Samtleben, *On the quantization of isomonodromic deformations on the torus.* Intern. J. Modern Physics A, **12**, No. 11 (1997), 2013–2029.
8. A. S. Fokas, A. R. Its, A. A. Kapaev, and V. Yu. Novokshenov, *Painlevé transcendents as Nonlinear Special Functions.* Kluwer Ac.Pub., in preparation.

9. U. Mugan, A. Sakka, *Schlesinger transformations for Painlevé VI equation.* J. Math. Phys., **36** (3) (1995), 1284–1298.
10. A. Kitaev, *Special functions of the isomonodromy type.* Preprint SFB-288-272 (Berlin), June (1997), pp. 27.
11. D. A. Korotkin, N. Manojlović, and H. Samtleben, *Schlesinger transformations for elliptic isomonodromic deformations.* In preparation (1999).

Babich M. V. Symmetries of the 4-matrices Schlesinger system.

All types of symmetries, such as a permutation of parameters, Schlesinger and Okamoto transformations are considered. The new form of Schlesinger system and the action of modular group on the corresponding linear system are studied, the geometrical meaning of the Okamoto transformation is discussed.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 22 марта 1999 г.