Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 268, 2000 г.

Л. Ю. Колотилина

НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ПЕРРОНОВСКОГО КОРНЯ СУММЫ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ

§1. Введение

Пусть A – неотрицательная матрица порядка n. Напомним, что спектральный радиус $\rho(A)$ матрицы A является ее собственным значением, которое и называется перроновским корнем A, а правые (левые) собственные векторы A, отвечающие ее перроновскому корню называются правыми (левыми) перроновскими векторами матрицы A. Как хорошо известно, если A – неприводимая неотрицательная матрица, то $\rho(A) > 0$, и A имеет положительные правые и левые перроновские векторы, единственные с точностью до скалярного множителя.

В этой работе, во-первых, мы выводим нижнюю оценку перроновского корня суммы неотрицательных матриц, перроновские векторы которых удовлетворяют некоторым предположениям, и исследуем случай, когда эта оценка превращается в равенство. Этот результат, сформулированный в теореме 4 (см. §2), является одновременным обобщением следующих трех теорем.

Теорема 1 [2, Теорема 4]. *Пусть A – неотрицательная неприводимая $n \times n$ матрица, а $u = (u_i)_{i=1}^n$ и $v = (v_i)_{i=1}^n$ – соответственно ее правый и левый перроновские векторы, причем $\sum_{i=1}^n u_i v_i = 1$. Пусть, далее, диагональные матрицы*

$$D^{(l)} = \mathrm{diag}\,(\xi_1^{(l)}, \dots, \xi_n^{(l)}) \ \text{ и } \ E^{(l)} = \mathrm{diag}\,(\eta_1^{(l)}, \dots, \eta_n^{(l)}), \ \ l = 1, 2, \dots, k,$$

положительно определены. Тогда

$$\rho\left(\sum_{l=1}^{k} D^{(l)} A\, E^{(l)}\right) \geqslant \rho(A) \sum_{k=1}^{l} \prod_{i=1}^{n} (\xi_i^{(l)} \eta_i^{(l)})^{u_i v_i}. \tag{1.1}$$

Кроме того, если матрица $A^T A$ неприводима, то равенство в (1.1) имеет место в том и только том случае, когда существуют положительные константы p_l, q_l, $l = 1, 2, \dots, k$, и положительно опре-

деленная диагональная матрица Δ, *такие что*

$$D^{(l)} = p_l \Delta, \quad E^{(l)} = q_l \Delta^{-1}, \quad l = 1, \ldots, k.$$

Теорема 2 [1, теорема 5]. *Пусть* A *и* B – *неотрицательные* $n \times n$ *матрицы и пусть*

$$Au = \rho(A)u, \quad A^T v = \rho(A)v.$$

Предположим, что

$$v^T u > 0$$

и либо

$$Bu = \rho(B)u, \quad B^T v = \rho(B)v, \tag{1.2}$$

либо

$$B^T u = \rho(B)u, \quad Bv = \rho(B)v. \tag{1.3}$$

Тогда для любой диагональной матрицы D *с положительными диагональными элементами имеет место неравенство*

$$\rho(A + D^{-1}B^T D) \geqslant \rho(A) + \rho(B). \tag{1.4}$$

Далее, если обе[1] *матрицы* A *и* B *неприводимы, то равенство в (1.4) имеет место тогда и только тогда, когда в предположении (1.2) векторы* Du *и* v *коллинеарны, а в предположении (1.3) матрица* D *имеет вид* $D = \alpha I_n$, *где* α – *положительное число.*

Теорема 3 [4, теоремы 2.1 и 2.3]. *Пусть* $A^{(l)}$ – *неотрицательные неприводимые* $n \times n$ *матрицы с правыми и левыми перроновскими векторами* $u^{(l)}$ *и* $v^{(l)}$ *соответственно,* $l = 1, \ldots, k$. *Предположим, что*

$$u^{(l)} \circ v^{(l)} = z = (z_i)_{i=1}^n, \quad l = 1, \ldots, k,$$

и

$$\sum_{i=1}^n z_i = 1.$$

Тогда для любых положительно определенных диагональных матриц $\Delta^{(l)} = \operatorname{diag}(\delta_1^{(l)}, \ldots, \delta_n^{(l)})$, $l = 1, \ldots, k$, *имеет место неравенство*

$$\rho\left(\sum_{l=1}^k \Delta^{(l)} A^{(l)}\right) \geqslant \sum_{l=1}^k \rho(A^{(l)}) \prod_{i=1}^n (\delta_i^{(l)})^{z_i}.$$

[1] В формулировке теоремы 5 в [1] ошибочно требовалось, чтобы лишь одна из матриц A и B была неприводима.

Как показано в работе [1], теорема 2 может рассматриваться как обобщение хорошо известной теоремы Левингера [8] (см. также [5]). С другой стороны, в том частном случае, когда $k = 2$ и $D^{(l)} = E^{(l)-1}$, $l = 1, 2$, теорема 2 является и обобщением теоремы 1 (см. [1, замечание 2]). Заметим, что в неприводимом случае теорема 3 по-существу дает одновременное обобщение оценок (1.1) и (1.4).

Следует также отметить, что из теорем 1 и 3 вытекает в качестве следствия приводимый ниже результат, впервые полученный Фридландом и Карлином [6].

Следствие 1. *Пусть A – неотрицательная неприводимая $n \times n$ матрица, для которой $u = (u_i)_{i=1}^n$ и $v = (v_i)_{i=1}^n$ являются соответственно правым и левым перроновскими векторами. Допустим, что $v^T u = 1$. Тогда для любой положительно определенной диагональной матрицы $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$ выполнено неравенство*

$$\rho(DA) \geqslant \rho(A) \prod_{i=1}^{n} d_i^{u_i v_i}.$$

Другим основным результатом данной работы является теорема 5 (см. §2), которая дает набор нижних оценок для перроновского корня суммы произвольных неприводимых неотрицательных матриц.

Кроме того, мы показываем, что полезная лемма (см. лемму 5 в §2), доказанная впервые Фидлером [5, лемма 2.2], также может быть получена как следствие обобщенного неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, и устанавливаем критерий разложимости приводимой неотрицательной матрицы, связанный с леммой 5.

В заключение этого вводного параграфа мы уточним обозначения, используемые в дальнейшем.

- Если $x = (x_i)_{i=1}^n$ и $y = (y_i)_{i=1}^n$, то
$$x \circ y = (x_i y_i)_{i=1}^n,$$
то есть "$\circ$" обозначает покомпонентное (или адамаровское) произведение векторов.
- Для $n \times n$ матрицы A и вектора x размерности n через $A[J]$ и $x[J]$, где $J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, мы обозначаем соответственно главную подматрицу матрицы A и подвектор вектора x, отвечающие подмножеству индексов J.

- $\mathrm{Diag}(A_{11},\ldots,A_{rr})$, где матрицы A_{ii}, $i=1,\ldots,r$, являются квадратными, обозначает блочно диагональную матрицу с блоками A_{ii}, $i=1,\ldots,r$, по главной диагонали.
- I_n – единичная матрица порядка n.

§2. Результаты

Основными результатами данной работы являются приводимые ниже теоремы 4 и 5.

Теорема 4. *Пусть $A^{(l)}$, $l=1,\ldots,k$, – неотрицательные ненулевые $n\times n$-матрицы, для которых $u^{(l)}$ и $v^{(l)}$, $l=1,\ldots,k$, являются соответственно правыми и левыми перроновскими векторами. Предположим, что*

$$u^{(1)}\circ v^{(1)}=u^{(2)}\circ v^{(2)}=\ldots=u^{(k)}\circ v^{(k)}=c \tag{2.1}$$

и что вектор $c=(c_i)_{i=1}^n$ не является нулевым. Тогда для произвольных положительно определенных диагональных матриц $D^{(l)}=\mathrm{diag}(\xi_1^{(l)},\ldots,\xi_n^{(l)})$ и $E^{(l)}=\mathrm{diag}(\eta_1^{(l)},\ldots,\eta_n^{(l)})$, $l=1,\ldots,k$, справедливо неравенство

$$\rho\left(\sum_{l=1}^k D^{(l)}A^{(l)}E^{(l)}\right)\geqslant\sum_{l=1}^k\rho(A^{(l)})\prod_{i=1}^n(\xi_i^{(l)}\eta_i^{(l)})^{c_i/\sum_{j=1}^n c_j}. \tag{2.2}$$

Далее, если хоть одна из матриц $A^{(l)}$ неприводима, то неравенство в (2.2) обращается в равенство в том и только том случае, когда

$$D^{(l)}A^{(l)}E^{(l)}=\alpha_l{\Delta^{(l)}}^{-1}A^{(l)}\Delta^{(l)},\quad l=1,\ldots,k, \tag{2.3}$$

где $\Delta^{(l)}$, $l=1,\ldots,k$, – это положительно определенные диагональные матрицы, такие что

$${\Delta^{(1)}}^{-1}u^{(1)}=\ldots={\Delta^{(k)}}^{-1}u^{(k)}, \tag{2.4}$$

и

$$\alpha_l=\prod_{i=1}^n(\xi_i^{(l)}\eta_i^{(l)})^{c_i/\sum_{j=1}^n c_j},\quad l=1,\ldots,k. \tag{2.5}$$

Если, кроме того, для некоторого l, $1\leqslant l\leqslant k$, хотя бы одна из матриц ${A^{(l)}}^TA^{(l)}$ или $A^{(l)}{A^{(l)}}^T$ неприводима, то существует положительная константа β_l, такая что

$$E^{(l)}=\beta_l\Delta^{(l)}\quad\text{и}\quad D^{(l)}=\alpha_l\beta_l^{-1}{\Delta^{(l)}}^{-1}. \tag{2.6}$$

Доказательство теоремы 4 будет основано на приводимых ниже четырех леммах.

Лемма 1. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *и пусть векторы* $u = (u_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$ *и* $v = (v_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$ *удовлетворяют условию*

$$(Au)\circ v = (A^T v)\circ u. \tag{2.7}$$

Тогда при любых $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$, *справедливо тождество*

$$\prod_{i,j=1}^{n} (\alpha_i\beta_j)^{v_i a_{ij} u_j} = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i\beta_i)^{(Au)_i v_i}. \tag{2.8}$$

В частности, если u *и* v *являются соответственно правым и левым собственными векторами матрицы* A *и отвечают одному и тому же собственному значению* λ, *то*

$$\prod_{i,j=1}^{n} (\alpha_i\beta_j)^{v_i a_{ij} u_j} = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i\beta_i)^{\lambda u_i v_i}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Мы имеем:

$$\prod_{i,j=1}^{n} (\alpha_i\beta_j)^{v_i a_{ij} u_j} = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{v_i \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j} \prod_{j=1}^{n} \beta_j^{u_j \sum_{i=1}^n v_i a_{ij}}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{v_i (Au)_i} \prod_{j=1}^{n} \beta_j^{u_j (A^T v)_j} \overset{(2.7)}{=} \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i\beta_i)^{(Au)_i v_i}.$$

□

Лемма 2. Обобщенное неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим (см., например, [2]). *Пусть* $x = (x_i)_{i=1}^n$ *и* $y = (y_i)_{i=1}^n$ *– положительные векторы. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{y_j}{x_j}\right)^{x_j / \sum_{k=1}^n x_k},$$

причем это неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $y = \alpha x$, *где* $\alpha > 0$.

Лемма 3 [1]. *Пусть A – неотрицательная ненулевая $n \times n$ матрица и пусть $u = (u_i)_{i=1}^n$ и $v = (v_i)_{i=1}^n$ являются соответственно ее правым и левым перроновскими векторами. Предположим, что*

$$v^T u > 0$$

и введем обозначение

$$J = \{i : u_i v_i > 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Тогда

$$A[J]u[J] = \rho(A)u[J], \quad A[J]^T v[J] = \rho(A)v[J],$$

т.е. $u[J]$ и $v[J]$ являются соответственно правым и левым перроновскими векторами подматрицы $A[J]$, причем $\rho(A[J]) = \rho(A)$.

Следующая лемма является вариантом одного хорошо известного результата (см., например, [7, с. 343]).

Лемма 4. *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^r$, $r \geqslant 2$, – неотрицательная и ненулевая блочная $r \times r$ матрица с квадратными блоками по главной диагонали, причем*

$$A_{ij} = 0, \quad i > j,$$

т.е. A является верхней блочно треугольной матрицей. Если у матрицы A существуют положительные правый и левый перроновские векторы, то

$$A = \mathrm{Diag}\,(A_{11}, \dots, A_{rr}),$$

т.е. относительно заданного блочного разбиения матрица A в действительности является блочно диагональной, и при этом

$$\rho(A_{ii}) = \rho(A), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Доказательство. Сперва рассмотрим случай $r = 2$, в котором матрица A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Пусть $u = \left[\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \end{smallmatrix}\right]$ и $v = \left[\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right]$ – это соответственно правый и левый перроновские векторы A, разбитые на подвекторы в соответствии с блочным разбиением матрицы. Тогда мы имеем:

$$v_1^T A_{11} = \rho(A) v_1^T, \quad A_{22} u_2 = \rho(A) u_2. \tag{2.10}$$

Следовательно,

$$\rho(A_{11}) = \rho(A_{22}) = \rho(A).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\rho(A)v^T u =& v^T Au = v_1^T A_{11} u_1 + v_2^T A_{22} u_2 + v_1^T A_{12} u_2 \\ \overset{(2.10)}{=}& \rho(A)(v_1^T u_1 + v_2^T u_2) + v_1^T A_{12} u_2 \\ =& \rho(A) v^T u + v_1^T A_{12} u_2,\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$v_1^T A_{12} u_2 = 0.$$

Поскольку оба вектора v_1 и u_2 положительны, то последнее соотношение влечет равенство

$$A_{12} = 0,$$

что и завершает доказательство в случае $r = 2$.

Доказательстиво в случае $r > 2$ нетрудно получить из случая $r = 2$ по индукции. □

Доказательство теоремы 4. Обозначим

$$F = \sum_{l=1}^{k} D^{(l)} A^{(l)} E^{(l)},$$

и пусть

$$Fx = \rho(F)x,$$

так что $x = (x_i)_{i=1}^n$ – правый перроновский вектор матрицы F. Мы должны установить справедливость неравенства

$$\rho(F) \geqslant \sum_{l=1}^{k} \rho(A^{(l)}) \prod_{i=1}^{n} (\xi_i^{(l)} \eta_i^{(l)})^{c_i / \sum_{j=1}^n c_j}. \tag{2.11}$$

Доказательство неравенства (2.11) разобьем на три части.

I. Предположим сперва, что оба вектора c и x положительны и определим вектор $y = (y_i)_{i=1}^n$ с помощью соотношения

$$y \circ x = c. \tag{2.12}$$

По лемме 2 для каждого l, $1 \leqslant l \leqslant k$, мы имеем:

$$y^T D^{(l)} A^{(l)} E^{(l)} x = \sum_{r,s:a_{rs}^{(l)} \neq 0} y_r \xi_r^{(l)} a_{rs}^{(l)} \eta_s^{(l)} x_s$$

$$\geqslant \sum_{r,s:a_{rs}^{(l)}\neq 0} v_r^{(l)} a_{rs}^{(l)} u_s^{(l)} \prod_{i,j:a_{ij}^{(l)}\neq 0} \left(\frac{y_i\xi_i^{(l)}}{v_i^{(l)}}\cdot\frac{\eta_j^{(l)}x_j}{u_j^{(l)}}\right)^{v_i^{(l)}a_{ij}^{(l)}u_j^{(l)}/\sum_{p,q:a_{pq}^{(l)}\neq 0} v_p^{(l)}a_{pq}^{(l)}u_q^{(l)}}$$

$$= v^{(l)^T} A^{(l)} u^{(l)} \prod_{i,j=1}^{n} \left(\frac{y_i\xi_i^{(l)}}{v_i^{(l)}}\cdot\frac{\eta_j^{(l)}x_j}{u_j^{(l)}}\right)^{v_i^{(l)}a_{ij}^{(l)}u_j^{(l)}/v^{(l)^T}A^{(l)}u^{(l)}}. \qquad (2.13)$$

Здесь и далее мы используем обозначения

$$u^{(l)} = (u_i^{(l)})_{i=1}^n, \quad v^{(l)} = (v_i^{(l)})_{i=1}^n, \quad A^{(l)} = (a_{ij}^{(l)})_{i,j=1}^n, \quad l = 1, \dots, k.$$

Поскольку $u^{(l)}$ и $v^{(l)}$ – это соответственно правый и левый перроновские векторы матрицы $A^{(l)}$, $l = 1, \dots, k$, по лемме 1 мы имеем:

$$\prod_{i,j=1}^{n} \left(\frac{y_i\xi_i^{(l)}}{v_i^{(l)}}\cdot\frac{\eta_j^{(l)}x_j}{u_j^{(l)}}\right)^{v_i^{(l)}a_{ij}^{(l)}u_j^{(l)}} = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i y_i}{v_i^{(l)}u_i^{(l)}}\xi_i^{(l)}\eta_i^{(l)}\right)^{\rho(A^{(l)})u_i^{(l)}v_i^{(l)}},$$

тогда как в силу (2.1) и (2.12) выполнены равенства

$$\frac{x_i y_i}{v_i^{(l)}u_i^{(l)}} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad l = 1, \dots, k.$$

Следовательно, неравенство (2.13) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} y^T D^{(l)} A^{(l)} E^{(l)} x &\geqslant v^{(l)^T} A^{(l)} u^{(l)} \prod_{i=1}^{n} (\xi_i^{(l)}\eta_i^{(l)})^{u_i^{(l)}v_i^{(l)}/v^{(l)^T}u^{(l)}} \\ &\overset{(2.1)}{=} \rho(A^{(l)}) \sum_{r=1}^{n} c_r \prod_{i=1}^{n} (\xi_i^{(l)}\eta_i^{(l)})^{c_i/\sum_{j=1}^n c_j}, \quad l = 1, \dots, k, \end{aligned} \qquad (2.14)$$

и для доказательства неравенства (2.11) в рассматриваемом случае остается просуммировать неравенства (2.14) по $l = 1, \dots, k$ и принять во внимание, что x – это правый перроновский вектор матрицы F, а $y^T x = \sum_{r=1}^n c_r$ в силу (2.12).

Теперь мы установим справедливость неравенства (2.11) в общем случае, когда векторы c и x являются неотрицательными. Если вектор c имеет нулевые компоненты и

$$J = \{i:\, c_i \neq 0,\, 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

то, по лемме 3, положительные векторы $u^{(l)}[J]$ и $v^{(l)}[J]$ являются соответственно правыми и левыми перроновскими векторами матриц $A^{(l)}[J]$, $l = 1, \dots, k$, причем

$$\rho(A^{(l)}[J]) = \rho(A^{(l)}), \quad l = 1, \dots, k. \tag{2.15}$$

В этом месте доказательство разветвляется в зависимости от приводимости или неприводимости подматрицы

$$F[J] = \sum_{l=1}^{k} D^{(l)}[J] A^{(l)}[J] E^{(l)}[J]$$

матрицы F.

II. Предположим сперва, что матрица $F[J]$ неприводима. В этом случае ее правый перроновский вектор $\bar{x}$ необходимо положителен. Тогда, по первой части доказательства, мы имеем:

$$\rho(F[J]) \geqslant \sum_{l=1}^{k} \rho(A^{(l)}[J]) \prod_{i \in J} (\xi_i^{(l)} \eta_i^{(l)})^{c_i / \sum_{j \in J} c_j}$$

$$\overset{(2.15)}{=} \sum_{l=1}^{k} \rho(A^{(l)}) \prod_{i=1}^{n} (\xi_i^{(l)} \eta_i^{(l)})^{c_i / \sum_{j=1}^{n} c_j}.$$

Поскольку же, в силу монотонности перроновского корня относительно взятия главных подматриц, выполнено неравенство

$$\rho(F[J]) \leqslant \rho(F),$$

то мы заключаем, что неравенство (2.11) справедливо и при условии, что матрица $F[J]$ неприводима.

III. Рассмотрим теперь случай приводимой матрицы $F[J]$. Без потери общности можно предполагать, что $F[J]$ – верхняя блочно треугольная матрица, т.е.

$$F[J] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1r} \\ & F_{22} & \dots & F_{2r} \\ & & \dots & \\ & 0 & & F_{rr} \end{bmatrix},$$

и это блочное разбиение соответствует разбиению

$$J = \bigcup_{j=1}^{r} J_j$$

индексного множества $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ на r дизъюнктных подмножеств J_j, $j = 1, \ldots, r$. Мы можем также предполагать, что все диагональные блоки F_{ii}, $i = 1, \ldots, r$, матрицы $F[J]$ являются неприводимыми. В этом случае относительно того же самого блочного разбиения каждая из матриц $A^{(l)}[J]$, $l = 1, \ldots, k$, тоже имеет верхнюю блочно треугольную форму. Применяя лемму 4, мы заключаем, что в действительности все матрицы $A^{(l)}[J]$, $l = 1, \ldots, k$, блочно диагональны. Следовательно, матрица $F[J] = \sum_{l=1}^{k} D^{(l)}[J]A^{(l)}[J]E^{(l)}[J]$ также является блочно диагональной, т.е.

$$F[J] = \mathrm{Diag}(F_{11}, \ldots, F_{rr}).$$

Лемма 4 в то же время гарантирует нам, что каждый из диагональных блоков $A^{(l)}[J_j]$, $j = 1, \ldots, r$, любой из матриц $A^{(l)}[J]$, $l = 1, \ldots, k$, имеет тот же перроновский корень, что и матрица $A^{(l)}[J]$, откуда, в силу (2.15), мы получаем, что

$$\rho(A^{(l)}[J_j]) = \rho(A^{(l)}), \quad j = 1, \ldots, r, \quad l = 1, \ldots, k. \tag{2.16}$$

Как легко убедиться, векторы $u^{(l)}[J_j]$ и $v^{(l)}[J_j]$ являются соответственно правым и левым перроновскими векторами матрицы $A^{(l)}[J_j]$, $j = 1, \ldots, r$, $l = 1, \ldots, k$. Но поскольку все эти векторы положительны, а каждая из матриц $F[J_j] = F_{jj}$ неприводима, то по первой части доказательства с учетом (2.16) мы имеем:

$$\rho(F[J_j]) \geqslant \sum_{l=1}^{k} \rho(A^{(l)}) \prod_{i \in J_j} (\xi_i^{(l)} \eta_i^{(l)})^{c_i/\beta_j}, \quad j = 1, \ldots, r, \tag{2.17}$$

где мы используем обозначения

$$\beta_j = \sum_{i \in J_j} c_i, \quad j = 1, \ldots, r. \tag{2.18}$$

В этих обозначениях, очевидно, справедливы равенства

$$\sum_{j=1}^{r} \beta_j = \sum_{i \in J} u_i^{(l)} v_i^{(l)} = \sum_{i : c_i \neq 0} c_i = \sum_{i=1}^{n} c_i = v^{(l)^T} u^{(l)}. \tag{2.19}$$

Учитывая, что (в силу монотонности перроновского корня относительно взятия главных подматриц)

$$\rho(F[J_j]) \leqslant \rho(F[J]) \leqslant \rho(F),$$

и суммируя неравенства (2.17) с коэффициентами β_j по $j = 1, \ldots, r$, мы выводим:

$$\rho(F) \sum_{j=1}^{r} \beta_j \geqslant \sum_{j=1}^{r} \beta_j \rho(F[J_j]) \tag{2.20}$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^{r} \beta_j \sum_{l=1}^{k} \rho(A^{(l)}) \prod_{i \in J_j} (\xi_i^{(l)} \eta_i^{(l)})^{c_i/\beta_j} = \sum_{l=1}^{k} \rho(A^{(l)}) \sum_{j=1}^{r} \alpha_j^{(l)} \beta_j,$$

где мы обозначили

$$\alpha_j^{(l)} = \prod_{i \in J_j} (\xi_i^{(l)} \eta_i^{(l)})^{c_i/\beta_j}, \quad j = 1, \ldots, r, \quad l = 1, \ldots, k. \tag{2.21}$$

В силу леммы 2 (т.е. обобщенного неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим) мы также имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{r} \alpha_j^{(l)} \beta_j &\geqslant \sum_{j=1}^{r} \beta_j \prod_{s=1}^{r} {\alpha_s^{(l)}}^{\beta_s / \sum_{p=1}^{r} \beta_p} \\ &\overset{(2.19),(2.21)}{=} \sum_{j=1}^{r} \beta_j \prod_{i \in J} (\xi_i^{(l)} \eta_i^{(l)})^{c_i / \sum_{p=1}^{n} c_p} \qquad (2.22) \\ &= \sum_{j=1}^{r} \beta_j \prod_{i=1}^{n} (\xi_i^{(l)} \eta_i^{(l)})^{c_i / \sum_{p=1}^{n} c_p}. \end{aligned}$$

Теперь для завершения доказательства неравенства (2.11) нам остается лишь заметить, что это неравенство следует из (2.20) и (2.22).

Рассмотрим теперь случай равенства. Прежде всего мы заметим, что, поскольку хоть одна из матриц $A^{(l)}$, $l = 1, \ldots, k$, является по предположению неприводимой, каждый из векторов $u^{(l)}$, $l = 1, \ldots, k$, положителен в силу (2.1), а матрица F также неприводима. Предположим сперва, что соотношения (2.3)–(2.5) выполняются, и обозначим положительный вектор (2.4) через x. Тогда мы имеем:

$$Fx \overset{(2.3)}{=} \sum_{l=1}^{k} \alpha_l {\Delta^{(l)}}^{-1} A^{(l)} \Delta^{(l)} x \overset{(2.4)}{=} \sum_{l=1}^{k} \alpha_l {\Delta^{(l)}}^{-1} A^{(l)} u^{(l)}$$

$$= \sum_{l=1}^{k} \alpha_l \rho(A^{(l)}) \Delta^{(l)^{-1}} u^{(l)} \overset{(2.4)}{=} \left[\sum_{l=1}^{k} \alpha_l \rho(A^{(l)}) \right] x,$$

откуда следует, что x – это правый перроновский вектор неприводимой матрицы F, а также что

$$\rho(F) = \sum_{l=1}^{k} \alpha_l \rho(A^{(l)}).$$

Тем самым достаточность установлена.

Обратно, предположим, что

$$\rho(F) = \sum_{l=1}^{k} \alpha_l \rho(A^{(l)}), \tag{2.23}$$

где α_l, $l = 1, \ldots, k$, определены в (2.5). Пусть x – это (положительный) правый перроновский вектор матрицы F, а вектор y определим соотношением

$$x \circ y = c. \tag{2.24}$$

По первой части доказательства неравенства (2.11) равенство (2.23) выполняется в том и только том случае, когда

$$y^T D^{(l)} A^{(l)} E^{(l)} x = \alpha_l v^{(l)^T} A^{(l)} u^{(l)}, \quad l = 1, \ldots, k.$$

Но, в силу леммы 2, из последних соотношений с необходимостью следует, что

$$y_i \xi_i^{(l)} a_{ij}^{(l)} \eta_j^{(l)} x_j = \alpha_l v_i^{(l)} a_{ij}^{(l)} u_j^{(l)}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad l = 1, \ldots, k.$$

В матричных терминах мы тогда имеем:

$$D^{(l)} A^{(l)} E^{(l)} = \alpha_l \nabla^{(l)} A^{(l)} \Delta^{(l)}, \quad l = 1, \ldots, k,$$

где

$$\Delta^{(l)} = \operatorname{diag}(u_1^{(l)}/x_1, \ldots, u_n^{(l)}/x_n), \quad l = 1, \ldots, k;$$
$$\nabla^{(l)} = \operatorname{diag}(v_1^{(l)}/y_1, \ldots, v_n^{(l)}/y_n), \quad l = 1, \ldots, k.$$

Учитывая (2.1) и (2.24), мы заключаем, что

$$\nabla^{(l)} = \Delta^{(l)^{-1}}, \quad l = 1, \ldots, k.$$

Тем самым равенства (2.3) и (2.4) установлены, и доказательство необходимости завершено.

Наконец, допустим, что матрица $A^{(l)^T}A^{(l)}$, $1 \leqslant l \leqslant k$, неприводима. Из (2.3) следует соотношение

$$A^{(l)} = \alpha_l^{-1}\Delta^{(l)}D^{(l)}A^{(l)}E^{(l)}\Delta^{(l)^{-1}},$$

а также равенство

$$A^{(l)} = \alpha_l D^{(l)^{-1}}\Delta^{(l)^{-1}}A^{(l)}\Delta^{(l)}E^{(l)^{-1}}.$$

Следовательно, мы заключаем, что

$$A^{(l)^T}A^{(l)} = E^{(l)^{-1}}\Delta^{(l)}A^{(l)^T}A^{(l)}\Delta^{(l)^{-1}}E^{(l)}. \tag{2.25}$$

Поскольку матрица $A^{(l)^T}A^{(l)}$ неприводима, ее положительный правый перроновский вектор, скажем, $z^{(l)}$ единственен с точностью до скалярного множителя. Поэтому, принимая во внимание (2.25), мы приходим к заключение, что

$$z^{(l)} = \beta_l\Delta^{(l)}E^{(l)^{-1}}z^{(l)}, \quad \beta_l > 0,$$

или, в эквивалентной форме, что

$$E^{(l)} = \beta_l\Delta^{(l)}.$$

В силу этого соотношения, из (2.3) мы получаем равенство

$$\beta_l D^{(l)}A^{(l)} = \alpha_l\Delta^{(l)^{-1}}A^{(l)},$$

из которого вытекает, что

$$\beta_l D^{(l)}A^{(l)}u^{(l)} = \rho(A^{(l)})\beta_l D^{(l)}u^{(l)} = \rho(A^{(l)})\alpha_l\Delta^{(l)^{-1}}u^{(l)}.$$

Теперь остается лишь заметить, что последнее соотношение эквивалентно равенству

$$D^{(l)} = \alpha_l\beta_l^{-1}\Delta^{(l)^{-1}}.$$

Тем самым доказательство (2.6) для l таких, что матрица $A^{(l)^T}A^{(l)}$ неприводима, завершено. Случай, когда неприводима матрица $A^{(l)}A^{(l)^T}$ рассматривается аналогично.

Теорема 4 доказана полностью. □

Замечание 1. Неравенство (2.2) в случае, когда все матрицы $A^{(l)}$ неприводимы, тривиально следует из теоремы 3 (см. §1).

Замечание 2. Если в предположениях теоремы 4 для некоторого l, $1 \leqslant l \leqslant k$, матрица $A^{(l)}$ неприводима и

$$D^{(l)^{-1}} = E^{(l)},$$

то из (2.3) вытекает соотношение

$$A^{(l)} = \alpha_l D^{(l)^{-1}} \Delta^{(l)^{-1}} A^{(l)} \Delta^{(l)} D^{(l)},$$

показывающее, что как $u^{(l)}$ так и $D^{(l)^{-1}} \Delta^{(l)^{-1}} u^{(l)}$ являются правыми перроновскими векторами матрицы $A^{(l)}$. Поскольку же $A^{(l)}$ неприводима, обязательно найдется число $\gamma_l > 0$, такое что

$$D^{(l)^{-1}} \Delta^{(l)^{-1}} u^{(l)} = \gamma_l u^{(l)}.$$

Из этого соотношения следует, что

$$E^{(l)} = \gamma_l \Delta^{(l)} \quad \text{и} \quad D^{(l)} = \gamma_l^{-1} \Delta^{(l)^{-1}}.$$

В этом случае, в силу (2.4),

$$E^{(l)} x = \gamma_l u^{(l)}, \quad \text{где} \quad x = \Delta^{(l)^{-1}} u^{(l)}, \quad l = 1, \dots, k,$$

т.е. векторы $E^{(l)}x$ и $u^{(l)}$ коллинеарны. Как легко видеть, в предположениях теоремы 2 эти условия в точности сводятся либо к коллинеарности Du и v (при выполнении соотношений (1.2)), либо к коллинеарности Du и u (при выполнении (1.3)). Таким образом, теорема 5 действительно является обобщением теоремы 2.

В частном случае $k = 1$ из теоремы 4 вытекает следующее обобщение следствия 1, исключающее требование неприводимости матрицы.

Следствие 2. *Пусть A – неотрицательная ненулевая $n \times n$ матрица, для которой $u = (u_i)_{i=1}^n$ и $v = (v_i)_{i=1}^n$ являются соответственно правым и левым перроновскими векторами, и пусть*

$$v^T u > 0.$$

Тогда неравенство

$$\rho(DA) \geqslant \rho(A) \prod_{i=1}^n d_i^{u_i v_i / v^T u}$$

справедливо для любой положительно определенной диагональной матрицы $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$.

Следующая теорема 5 дает набор нижних оценок перроновского корня суммы произвольных неприводимых неотрицательных матриц.

Теорема 5. *Пусть* $A^{(l)}$, $l = 1, \ldots, k$, *– неприводимые неотрицательные* $n \times n$ *матрицы, для которых* $u^{(l)} = (u_i^{(l)})_{i=1}^n$ *и* $v^{(l)} = (v_i^{(l)})_{i=1}^n$ *являются соответственно правыми и левыми перроновскими векторами. Предположим также, что*

$$v^{(l)^T} u^{(l)} = 1, \quad l = 1, \ldots, k. \tag{2.26}$$

Тогда для любого положительного вектора $c = (c_i)_{i=1}^n$, *удовлетворяющего условию*

$$\sum_{i=1}^n c_i = 1, \tag{2.27}$$

справедливо неравенство

$$\rho\left(\sum_{l=1}^k A^{(l)}\right) \geqslant \sum_{l=1}^k \rho(A^{(l)}) \prod_{i=1}^n \left(\frac{c_i}{u_i^{(l)} v_i^{(l)}}\right)^{u_i^{(l)} v_i^{(l)}}. \tag{2.28}$$

Кроме того, если для каждого l, $1 \leqslant l \leqslant k$, *по крайней мере одна из матриц* $A^{(l)} A^{(l)^T}$ *или* $A^{(l)^T} A^{(l)}$ *неприводима, то* (2.28) *является равенством в том и только том случае, когда существуют положительные константы* β_l, $l = 1, \ldots, k$, *такие что*

$$\beta_1 u^{(1)} = \ldots = \beta_k u^{(k)}, \quad \beta_1^{-1} v^{(1)} = \ldots = \beta_k^{-1} v^{(k)} \tag{2.29}$$

и имеют место соотношения

$$u^{(l)} \circ v^{(l)} = c, \quad l = 1, \ldots, k. \tag{2.30}$$

В этом случае равенство (2.28) *принимает вид*

$$\rho\left(\sum_{l=1}^k A^{(l)}\right) = \sum_{l=1}^k \rho(A^{(l)}). \tag{2.31}$$

Доказательство. Пусть x – это (положительный) правый перроновский вектор неприводимой матрицы

$$F = \sum_{l=1}^k A^{(l)}. \tag{2.32}$$

Определим положительный вектор y посредством соотношения

$$x \circ y = c. \tag{2.33}$$

Тогда, ввиду (2.27) и (2.33), мы имеем:

$$\rho(F) = \rho(F) y^T x = y^T F x = \sum_{l=1}^{k} y^T A^{(l)} x. \tag{2.34}$$

Определим матрицы $D^{(l)} = \operatorname{diag}(\xi_1^{(l)}, \ldots, \xi_n^{(l)})$ и $E^{(l)} = \operatorname{diag}(\eta_1^{(l)}, \ldots, \eta_n^{(l)})$ с помощью равенств

$$E^{(l)} u^{(l)} = x, \quad D^{(l)} v^{(l)} = y, \quad l = 1, \ldots, k. \tag{2.35}$$

Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 4, используя леммы 1 и 2, а также (2.35) и (2.26), мы выводим:

$$\begin{aligned} y^T A^{(l)} x &= v^{(l)^T} D^{(l)} A^{(l)} E^{(l)} u^{(l)} \\ &\geqslant \rho(A^{(l)}) \prod_{i=1}^{n} (\xi_i^{(l)} \eta_i^{(l)})^{u_i^{(l)} v_i^{(l)}}, \quad l = 1, \ldots, k. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Из соотношений (2.34) и (2.36) очевидным образом вытекает требуемое неравенство (2.28), если принять во внимание, что, в силу (2.35) и (2.33),

$$\xi_i^{(l)} \eta_i^{(l)} = \frac{c_i}{u_i^{(l)} v_i^{(l)}}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad l = 1, \ldots, k.$$

Рассмотрим теперь случай равенства. Неравенство (2.28) превращается в равенство тогда и только тогда, когда равенствами являются все неравенства (2.36), а значит, в силу леммы 2, найдутся $\alpha_l > 0$, такие что

$$y_i a_{ij}^{(l)} x_j = \alpha_l v_i^{(l)} a_{ij}^{(l)} u_j^{(l)}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad l = 1, \ldots, k, \tag{2.37}$$

где мы используем ранее принятые обозначения $A^{(l)} = (a_{ij}^{(l)})_{i,j=1}^n$, $l = 1, \ldots, k$. Равенства (2.37) могут быть переписаны как в виде

$$D^{(l)} A^{(l)} E^{(l)} = \alpha_l A^{(l)}, \quad l = 1, \ldots, k, \tag{2.38}$$

так и в эквивалентном виде

$$A^{(l)} = \alpha_l D^{(l)^{-1}} A^{(l)} E^{(l)^{-1}}, \quad l = 1, \ldots, k. \tag{2.39}$$

Предположим теперь, что матрица $A^{(l)^T}A^{(l)}$ неприводима. Используя (2.38) и (2.39), нетрудно убедиться, что

$$A^{(l)^T}A^{(l)} = E^{(l)^{-1}}A^{(l)^T}A^{(l)}E^{(l)},$$

откуда следует (см. доказательство теоремы 4), что

$$E^{(l)} = \beta_l I_n, \tag{2.40}$$

где $\beta_l > 0$ – некоторая константа.

Соотношения (2.40) и (2.35) показывают, что

$$x = \beta_l u^{(l)}, \tag{2.41}$$

т.е. матрицы $A^{(l)}$ и F имеют общий правый перроновский вектор.

Теперь из (2.40) и (2.38) мы выводим равенство

$$\beta_l D^{(l)}A^{(l)} = \alpha_l A^{(l)},$$

умножая которое на $u^{(l)}$, мы приходим к выводу, что

$$D^{(l)} = \alpha_l \beta_l^{-1} I_n. \tag{2.42}$$

Из соотношений (2.42) и (2.35) следует равенство

$$y = \alpha_l \beta_l^{-1} v^{(l)}. \tag{2.43}$$

Для тех l, для которых неприводимой является матрица $A^{(l)}A^{(l)^T}$, соотношения (2.40)–(2.43) выводятся аналогично.

Далее, поскольку в силу (2.27), (2.33) и (2.26) мы имеем

$$x^T y = v^{(l)^T} y^{(l)} = 1, \quad l = 1, \ldots, k,$$

то из (2.41) и (2.43) немедленно следует, что

$$\alpha_l = 1, \quad l = 1, \ldots, k. \tag{2.44}$$

Ввиду же (2.44) соотношения (2.29) и (2.30) тривиально следуют из (2.41) и (2.43).

Обратно, допустим, что выполнены условия (2.29) и (2.30). В этом случае, в силу (2.30), неравенство (2.28) очевидным образом сводится к виду

$$\rho\left(\sum_{l=1}^{k} A^{(l)}\right) \geqslant \sum_{l=1}^{k} \rho(A^{(l)}), \tag{2.45}$$

а поскольку, в силу (2.29), матрицы $A^{(l)}$ все имеют общий правый перроновский вектор, то неравенство (2.45) на самом деле является равенством.

Теорема 5 доказана полностью. □

Замечание 3. В предположениях теоремы 5 оба набора равенств (2.29) необходимы для того, чтобы (2.28) являлось равенством, тогда как равенство (2.31), к которому сводится (2.28), очевидно справедливо, если матрицы $A^{(l)}$, $l = 1, \ldots, k$, имеют общий правый или левый перроновский вектор.

Теперь мы приведем простое доказательство, основанное на обобщенном неравенстве между средним арифметическим и средним геометрическим, следующего технически полезного результата, установленного М. Фидлером в статье [5] (см. также [1]).

Лемма 5. *Пусть A – неотрицательная $n \times n$ матрица и пусть u и v – положительные векторы размерности n. Если выполнено соотношение*

$$(Au) \circ v = (A^T v) \circ u, \tag{2.46}$$

то для всех положительных векторов x и y, удовлетворяющих условию

$$x \circ y = u \circ v, \tag{2.47}$$

справедливо неравенство

$$y^T A x \geqslant v^T A u. \tag{2.48}$$

Кроме того[2]*, если матрица A неприводима, то неравенство* (2.48) *обращается в равенство в том и только том случае, когда при некотором $\gamma > 0$ имеют место соотношения*

$$x = \gamma u \quad \text{и} \quad y = \gamma^{-1} v.$$

Доказательство. Используя лемму 2, мы выводим:

$$y^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} y_i a_{ij} x_j = \sum_{i,j : a_{ij} \neq 0} y_i a_{ij} x_j$$

[2]Эта часть утверждения леммы 5 отсутствует в оригинальной формулировке, приводимой в [5], и была добавлена в [1]. Отметим, что в [1] ошибочно требовалось, чтобы матрица A была недиагональна, тогда как необходимо потребовать, чтобы A была неприводимой.

$$\geqslant \sum_{i,j:a_{ij}\neq 0} v_i a_{ij} u_j \prod_{r,s:a_{rs}\neq 0} \left(\frac{y_r}{v_r}\,\frac{x_s}{u_s}\right)^{v_r a_{rs} u_s \Big/ \sum_{p,q:a_{pq}\neq 0} v_p a_{pq} u_q}$$

$$= v^T A u \prod_{r,s=1}^{n} \left(\frac{y_r}{v_r}\,\frac{x_s}{u_s}\right)^{v_r a_{rs} u_s / v^T A u}.$$

С другой стороны, предположение (2.46) позволяет нам применить лемму 1, в результате чего мы приходим к равенству

$$\prod_{r,s=1}^{n} \left(\frac{y_r}{v_r}\,\frac{x_s}{u_s}\right)^{v_r a_{rs} u_s} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i x_i}{v_i u_i}\right)^{(Au)_i v_i}.$$

Принимая во внимание соотношения

$$\frac{x_i y_i}{u_i v_i} = 1, \quad i = 1, \ldots, n,$$

гарантируемые (2.47), мы получаем требуемое неравенство

$$y^T A x \geqslant v^T A u.$$

Предположим теперь, что матрица A неприводима, и рассмотрим случай равенства в (2.48). По лемме 2, равенство в (2.48) возможно тогда и только тогда, когда

$$y_i a_{ij} x_j = \alpha v_i a_{ij} u_j, \quad \alpha > 0, \quad i,j = 1, \ldots, n. \tag{2.49}$$

Из соотношений (2.49) следует, что

$$y^T A x = \alpha v^T A u,$$

а поэтому равенство в (2.48) возможно только при условии, что соотношения (2.49) выполняются с $\alpha = 1$.

Определим диагональную матрицу D с помощью равенства

$$Au = Du.$$

Поскольку вектор u положителен, а матрица A неприводима, то матрица D имеет положительные диагональные элементы, так что мы можем переписать последнее соотношение в виде

$$D^{-1} A u = u. \tag{2.50}$$

Таким образом, вектор u является правым перроновским вектором неприводимой матрицы $D^{-1}A$.

Пусть теперь

$$D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n).$$

Умножая равенства (2.49) с $\alpha = 1$ на d_i^{-1} и суммируя их по $j = 1, \dots, n$, мы получаем:

$$y_i(D^{-1}Ax)_i = v_i(D^{-1}Au)_i \overset{(2.50)}{=} v_i u_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Полученные соотношения вместе с условием (2.47) показывают, что

$$D^{-1}Ax = x, \tag{2.51}$$

т.е. x, наряду с u, является правым перроновским вектором неприводимой матрицы $D^{-1}A$. Следовательно,

$$x = \gamma u, \quad \gamma > 0,$$

и, ввиду (2.47),

$$y = \gamma^{-1} v.$$

Теперь для завершения доказательства леммы 5 остается лишь заметить, что если $x = \gamma u$, $y = \gamma^{-1}v$, где $\gamma > 0$, то равенство $y^T Ax = v^T Au$ очевидно. □

Условие (2.46) (см. также (2.7)), встречающееся в формулировке леммы 5, может быть также использовано при доказательстве разложимости приводимой неотрицательной матрицы. Точнее, имеет место следующее утверждение.

Лемма 6. *Пусть A – приводимая неотрицательная матрица без нулевых строк и столбцов и пусть положительные векторы u и v удовлетворяют условию*

$$(Au) \circ v = (A^T v) \circ u. \tag{2.52}$$

Тогда матрица A разложима.

Доказательство. Как было установлено в ходе доказательства леммы 5, вектор u является правым перроновским вектором матрицы $D^{-1}A$, где диагональная матрица D определяется равенством

$$Au = Du \tag{2.53}$$

и имеет положительные диагональные элементы. Кроме того, из (2.52) и (2.53) следует, что

$$(D^{-1}A)^T Dv = A^T v = Dv.$$

Последнее соотношение показывает, что Dv – это положительный левый перроновский вектор матрицы $D^{-1}A$. Таким образом, приводимая неотрицательная матрица $D^{-1}A$ имеет положительные правый и левый перроновские векторы. Следовательно, матрица $D^{-1}A$ разложима в силу леммы 4, но тогда и матрица A тоже разложима. □

Замечание 4. Поскольку для перроновских векторов матрицы A соотношение (2.52) выполняется тривиальным образом, лемма 6 может рассматриваться как обобщение леммы 4.

В заключение этой работы мы приведем обобщение леммы 5 на приводимый случай.

Лемма 7. *Если в условиях леммы 5 матрица A приводима, но не содержит ни нулевых строк, ни нулевых столбцов, а $A[J_j]$, $j = 1, \dots, r$, $r \geqslant 2$, где $\bigcup_{j=1}^{r} J_j = \{1, 2, \dots, n\}$, – это ее неприводимые компоненты, то равенство*

$$y^T A x = v^T A u \tag{2.54}$$

выполняется в том и только том случае, когда справедливы соотношения

$$x[J_j] = \gamma_j u[J_j], \quad y[J_j] = \gamma_j^{-1} v[J_j], \ \ \gamma_j > 0, \ \ j = 1, \dots, r. \tag{2.55}$$

Доказательство. Применяя лемму 6, мы убеждаемся, что матрица A в действительности разложима. При этом, если диагональная матрица D определяется соотношением

$$Au = Du,$$

то D положительно определена, и вектор u является правым перроновским вектором матрицы $D^{-1}A$, которая разложима, поскольку разложима A. С другой стороны, рассуждение, использованное при доказательстве леммы 5 (см. (2.51)), показывает, что и вектор x также является правым перроновским вектором для $D^{-1}A$. Следовательно, подвекторы $u[J_j]$ и $x[J_j]$одновременно являются правыми перроновскими векторами для неприводимых компонент $(D^{-1}A)[J_j]$, $j = 1, \dots, r$, а поэтому они необходимо коллинеарны, т.е. выполняются соотношения

$$x[J_j] = \gamma_j u[J_j], \quad \gamma_j > 0, \quad j = 1, \dots, r.$$

Теперь соотношения

$$y[J_j] = \gamma_j^{-1} v[J_j], \quad j = 1, \dots, r,$$

тривиально следуют из (2.47).

Наконец, поскольку матрица A является разложимой, равенство (2.54) немедленно следует из соотношений (2.55). □

Литература

1. Yu. A. Alpin, L. Yu. Kolotilina, *Inequalities for the Perron root related to Levinger's theorem.* Linear Algebra Appl., **283** (1998), 99–113.
2. R. B. Bapat, *Two inequalities for the Perron root.* Linear Algebra Appl., **85** (1987), 241–248.
3. A. Berman, R. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences.* Academic Press, New York, 1979.
4. L. Elsner, C. R. Johnson, *Nonnegative marices, zero patterns, and spectral inequalities.* Linear Algebra Appl., **120** (1989), 225–236.
5. M. Fiedler, *Numerical range of matrices and Levinger's theorem.* Linear Algebra Appl., **220** (1995), 171–180.
6. S. Friedland, S. Karlin, *Some inequalities for the spectral radius of nonnegative matrices and applications.* Duke Math. J., **42** (1975), 459–490.
7. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* М., 1953.
8. B. W. Levinger, *An inequality for nonnegative matrices.* Notices Amer. Math. Soc., **17** (1970), 260.

Kolotilina L. Yu. Lower bounds for the Perron root of a sum of nonnegative matrices.

Let $A^{(l)}$ $(l = 1, \dots, k)$ be $n \times n$ nonnegative matrices with right and left Perron vectors $u^{(l)}$ and $v^{(l)}$, respectively, and let $D^{(l)}$ and $E^{(l)}$ $(l = 1, \dots, k)$ be positive-definite diagonal matrices of the same order. Extending known results, under the assumption that

$$u^{(1)} \circ v^{(1)} = \ldots = u^{(k)} \circ v^{(k)} \neq 0$$

(where "$\circ$" denotes the componentwise, i.e., the Hadamard product of vectors) but without requiring that the matrices $A^{(l)}$ be irreducible, for the Perron root of the sum $\sum_{l=1}^{k} D^{(l)} A^{(l)} E^{(l)}$ we derive a lower bound of the form

$$\rho\left(\sum_{l=1}^{k} D^{(l)} A^{(l)} E^{(l)}\right) \geqslant \sum_{l=1}^{k} \beta_l \rho(A^{(l)}), \quad \beta_l > 0.$$

Also we prove that, for arbitrary irreducible nonnegative matrices $A^{(l)}$ $(l = 1, \dots, k)$,

$$\rho\left(\sum_{l=1}^{k} A^{(l)}\right) \geqslant \sum_{l=1}^{k} \alpha_l \rho(A^{(l)}),$$

where the coefficients $\alpha_l > 0$ are specified using an arbitrarily chosen normalized positive vector. The cases of equality in both estimates are analyzed, and some other related results are established.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова

Поступило 20 января 2000 г.