Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 267, 2000 г.

К. Э. Фельдман

ЭКВИВАРИАНТНЫЙ АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ПУАНКАРЕ–ХОПФА

§1. Введение

Одной из важнейших проблем алгебраической топологии является задача о вычислении инвариантов гладких многообразий в терминах локальных инвариантов специальных подмногообразий таких, как подмногообразия нулей касательных векторных полей, подмногообразия неподвижных точек гладких действий групп и др. Классический пример дает нам теорема Пуанкаре–Хопфа [1], выражающая эйлерову характеристику гладкого многообразия через алгебраическое число нулей невырожденного касательного векторного поля на нем. Более нетривиальными примерами являются теорема Атьи–Ботта [2] о неподвижных точках действия окружности на многообразии и уравнения Коннера–Флойда [3] для многообразий, несущих действия циклических групп простого порядка. Оба примера дают возможность выражать характеристические числа многообразия через характеристические числа подмногообразий неподвижных точек действия группы.

В настоящей работе мы предлагаем новый подход для изучения многообразий, несущих действия компактных групп Ли. Мы доказываем обобщенное свойство локализации гомоморфизма Гизина. Полученный результат позволяет вычислять различные характеристики многообразия в терминах подмногообразий нулей инвариантного касательного векторного поля на нем. С этой точки зрения свойство локализации гомоморфизма Гизина может рассматриваться как эквивариантный аналог классической теоремы Пуанкаре–Хопфа. В качестве следствия мы проводим явное построение исчисления Шуберта [4] на многообразии флагов в комплексных кобордизмах. Индуктивное построение исчисления Шуберта в комплексных кобордизмах было впервые

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант номер 99-01-00090).

проведено в [5]. В предлагаемой заметке найдены явные формулы, вычисляющие гомоморфизм Гизина расслоения флагов, ассоциированного с комплексным векторным расслоением для произвольной комплексно-ориентированной теории когомологий. Полученные результаты позволяют построить естественные деформации аддитивного базиса симметрических функций, заданного полиномами Шура от n-переменных, в кольце $\Omega_U[[\sigma_1, \dots, \sigma_n]]$. Интерес к таким деформациям вызван, в частности, вопросом о реализации решений квантовых уравнений Калоджеро–Мозера в когомологиях многообразий флагов (см., например, [6]).

Кратко изложим содержание настоящей работы. В §2 мы даем сводку основных необходимых нам результатов из работы [7]. В §3 мы доказываем эквивариантный аналог теоремы Пуанкаре–Хопфа и устанавливаем ее связь с ранее полученными результатами работ [2, 3, 8, 9]. В §4 мы применяем результаты §3 для построения исчисления Шуберта в произвольной комплексно-ориентируемой теории когомологий.

Автор выражает глубокую признательность В. М. Бухштаберу за внимание к работе и стимулирующие обсуждения.

§2. Индекс эквивариантного векторного поля

В основе предлагаемого в заметке эквивариантного аналога теоремы Пуанкаре–Хопфа лежит понятие индекса эквивариантного векторного поля [7]. В этом параграфе мы приведем нужные нам определения из работы [7] и дадим формулировку основного технического средства настоящей работы – свойства локализации трансфера [7].

Нам потребуется понятие касательного векторного поля Морса–Ботта, частным случаем которого являются морсовские векторные поля.

Определение 2.1. *Касательное векторное поле s на гладком многообразии F называется полем Морса–Ботта, если выполняются следующие два условия:*

1) *нули поля s образуют конечный набор связных компактных замкнутых подмногообразий в F;*

2) *в точках подмногообразия нулей ядро матрицы Якоби поля s совпадает с касательным пространством к подмногообразию нулей.*

Рассмотрим компоненту связности F_l нулей векторного поля Морса–Ботта s. Обозначим через ν_l нормальное расслоение вложения $F_l \subset F$. Отметим, что пространство расслоения ν_l может быть отождествлено посредством экспоненциального отображения с трубчатой окрестностью U подмногообразия F_l в F. Ограничение поля s на U задает векторное поле на пространстве ν_l. В силу условия 2) последнее векторное поле обязано иметь всюду ненулевую проекцию на касательное пространство вдоль слоев расслоения ν_l в достаточно малой окрестности нулевого сечения. Поэтому без ограничения общности можно считать, что построенное на пространстве ν_l векторное поле всюду является касательным вдоль слоев расслоения ν_l. Обозначим это векторное поле через s_l:

$$s_l \colon \nu_l \to \widehat{\tau}(\nu_l),$$

где $\widehat{\tau}(\nu_l)$ – касательное расслоение вдоль слоев. Пусть p – проекция в расслоении ν_l. Тогда $\widehat{\tau}(\nu_l) \cong p^*\nu_l$. Таким образом, векторное поле s_l позволяет нам построить отображение

$$\psi_l^s \colon \nu_l \to \nu_l$$

по правилу

$$\psi_l^s(v) = \widehat{p}s(v),$$

где $\widehat{p}$ – отображение расслоений $\widehat{p}\colon p^*\nu_l \to \nu_l$.

Рассмотрим гладкое компактное замкнутое многообразие F и некоторое векторное поле Морса–Ботта s на нем. Пусть $F_1, \dots, F_m$ – набор связных компактных замкнутых подмногообразий нулей поля s на F. Фиксируем вложение многообразия F в n-мерное евклидово пространство:

$$F_1, \dots, F_m \subset F \subset \mathbb{R}^n.$$

Сопоставим при помощи векторного поля s каждому подмногообразию F_l отображение

$$j_l \colon S^n \wedge F_l^+ \to S^n \wedge F_l^+$$

следующим образом. Вложение подмногообразий $F_l \subset F \subset \mathbb{R}^n$ индуцирует разложение тривиального n-мерного векторного расслоения над F_l в прямую сумму касательного расслоения τ_l к F_l, нормального расслоения ν_l вложения $F_l \subset F$ и сужения на F_l нормального расслоения ν вложения $F \subset \mathbb{R}^n$. Поле s задает отображение $\psi_l^s : \nu_l \to \nu_l$. Определим отображение j_l на подрасслоениях ν и τ_l тождественным, а на ν_l – равным ψ_l^s.

Как и выше, обозначим через π проекцию $S^n \wedge F_l^+ \to S^n$ на первый сомножитель.

Определение 2.2 [7]. *Элемент $\{\pi \circ j_l\} \in \pi_S^0(F_l^+)$ будем называть индексом $\mathrm{Ind}_s(F_l)$ векторного поля s в окрестности подмногообразия нулей F_l.*

Для любой мультипликативной теории когомологий $h^*(\,\cdot\,)$ с единицей существует каноническое преобразование спектров $\mu_h : \pi_S^*(\,\cdot\,) \to h^*(\,\cdot\,)$, которое позволяет определить понятие индекса нуля векторного поля в теории когомологий $h^*(\,\cdot\,)$. В дальнейшем под индексом нуля векторного поля в теории $h^*(\,\cdot\,)$ мы будем понимать образ элемента $\mathrm{Ind}_s(F) \in \pi_S^0(F^+)$ в группе $h^0(F^+)$ при преобразовании μ_h. В случае, когда надо подчеркнуть, о какой именно теории когомологий идет речь, мы будем обозначать этот индекс через $(\mathrm{Ind}_s(F))_h$.

Индексы векторных полей представляют собой коэффициенты, с которыми трансфер Беккера–Готтлиба гладкого расслоения [10] может быть представлен в виде линейной комбинации трансферов подрасслоений нулей послойного векторного поля [7]. Поясним это утверждение более подробно.

Рассмотрим гладкое главное G-расслоение $(\mathcal{E}, G, B, p)$, база которого – компактное связное многообразие, а G – компактная группа Ли. Пусть F – компактное замкнутое связное многообразие с гладким действием группы G. Предположим, что на многообразии F задано G-инвариантное касательное векторное поле Морса–Ботта s. Нули поля s представляют собой объединение неприводимых инвариантных подмногообразий $F_1, \ldots, F_m$ многообразия F. Заметим, что из неприводимости следует связность гладких многообразий

$$E_l = \mathcal{E} \times_G F_l.$$

Всякое G-инвариантное касательное векторное поле Морса–Ботта s на F позволяет нам построить векторное поле на $E = \mathcal{E} \times_G F$, которое будет касательным вдоль слоев расслоения E. Будем обозначать его также через s. Имеем

$$s \colon E \to \tau_F(E) = \mathcal{E} \times_G \tau(F).$$

Более того, векторное поле s на E также является полем Морса–Ботта. Нули поля s на E представляют собой подрасслоения $E_l = \mathcal{E} \times_G F_l$, $l = 1, \dots, m$, расслоения E. Пусть $\tau(p)$ – трансфер расслоения E. Обозначим через $\tau(p_l)$ трансфер расслоения E_l.

Теорема 2.1 (свойство локализации трансфера [7]). *В описанных выше условиях в любой мультипликативной теории когомологий $h^*(\,\cdot\,)$ имеет место соотношение:*

$$\tau(p)^* x = \sum_{i=1}^{m} \tau(p_l)^*((\mathrm{Ind}_s(E_l))_h \cdot i_l^* x),$$

где $x \in h^*(E^+)$ и $i_l : E_l \subset E$ – вложение расслоений, $l = 1, \dots, m$.

§3. Эквивариантная теорема Пуанкаре–Хопфа

В этом параграфе мы докажем эквивариантный аналог теоремы Пуанкаре–Хопфа. Полученные результаты дают выражение для гомоморфизма Гизина расслоения E с гладким слоем через гомоморфизмы Гизина сужений расслоения E на компоненты множества нулей векторного поля, касательного вдоль слоев исходного расслоения E (или, что эквивалентно, в терминах неподвижных точек послойного действия прямой на пространстве расслоения).

Рассмотрим локально тривиальное расслоение (E, F, B, p), слой которого есть гладкое компактное замкнутое многообразие F. Предположим, что на расслоении E задано послойное действие положительной полупрямой $\mathbb{R}_+$:

$$g : \mathbb{R}_+ \times E \to E.$$

Этому действию соответствует векторное поле s, касательное вдоль слоев расслоения E, задаваемое по формуле

$$s(x) = \frac{dg}{dt}\bigg|_{t=0} \in \tau_F(E),$$

где $\tau_F(E)$ – касательное к E расслоение вдоль слоев. Предположим, что векторное поле s является полем Морса–Ботта. Обозначим через $E_1, \dots, E_m$ связные компоненты множества нулей поля s. Заметим, что E_j – подрасслоение расслоения E. Пусть p_j – проекция в расслоении E_j, а $i_j : E_j \to E$ – вложение расслоения E_j в расслоение E.

Предположим, что расслоения $E, E_1, \ldots, E_m$ – h-ориентируемы. Рассмотрим произвольный элемент $w \in h^*(E)$. Обозначим через $e(\tau_F(E))$ эйлеров класс расслоения $\tau_F(E)$. Предположим, что в кольце $h^*(B)$ существует элемент Δ такой, что $p^*\Delta \cdot w = e(\tau_F(E)) \cdot x$ для некоторого элемента $x \in h^*(E)$. Пусть $p_!, p_{1!}, \ldots, p_{m!}$ – гомоморфизмы Гизина для расслоений $E, E_1, \ldots, E_m$ соответственно.

Теорема 3.1 (эквивариантный аналог теоремы Пуанкаре–Хопфа). *В описанных выше предположениях имеет место формула:*

$$\Delta \cdot p_!(w) = \sum_{j=1}^{k} p_{j!}\left(\mathrm{Ind}_s(E_j) e(\tau_F(E_j)) i_j^* x\right). \tag{3.1}$$

Доказательство. Заметим, что гомоморфизм Гизина $p_!$ произвольного h-ориентируемого расслоения E и трансфер Беккера–Готтлиба $\tau(p)$ этого расслоения связаны соотношением:

$$\tau(p)^*(w) = p_!(e(\tau_F(E)) \cdot w) \tag{3.2}$$

для произвольного элемента $w \in h^*(E)$ [10]. Поэтому

$$\Delta \cdot p_!(w) = p_!(p^*(\Delta) \cdot w) = p_!(e(\tau_F(E)) \cdot x) = \tau(p)^* x. \tag{3.3}$$

В силу свойства локализации трансфера

$$\tau(p)^* x = \sum_{j=1}^{k} \tau(p_j)^*(\mathrm{Ind}_s(E_j) i_j^* x), \tag{3.4}$$

где $\tau(p_j)$ – трансфер расслоения $p\colon E_j \to B$. Из (3.2) и (3.4) получаем окончательный результат (3.1). □

Следствие 3.1. *Для замкнутого компактного ориентируемого гладкого многообразия M и векторного поля Морса–Ботта s на нем имеет место формула:*

$$\chi(M) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Ind}_s(M_j) \chi(M_j),$$

где $M_1, \ldots, M_k$ – связные компоненты подмногообразия нулей поля s, все подмногообразия нулей предполагаются ориентированными,

χ – эйлерова характеристика, а индексы принимают значения в группе целых чисел.

Доказательство. Достаточно применить теорему 3.1 в случае, когда G есть однопараметрическая группа диффеоморфизмов M, порожденная s, элемент w есть эйлеров класс касательного расслоения к M в целочисленных когомологиях, $\Delta = 1$, а база B всех рассматриваемых расслоений есть точка. $\square$

Пример 3.1. Пусть компактная группа Ли G действует на замкнутом компактном многообразии M полусвободно (т.е. стабилизатор любой точки из M есть либо вся группа G, либо только единичный элемент группы G). Обозначим через $M_1, \ldots, M_k$ связные компоненты подмногообразий неподвижных точек действия группы G. Будем предполагать, что $M_1, \ldots, M_k$ – замкнутые компактные подмногообразия.

Теорема 3.2. *На многообразии M существует G-инвариантное касательное векторное поле s, нули которого суть все неподвижные точки действия группы G и набор изолированных подмногообразий нулей, на каждом из которых G действует свободно. Индексы нулей этого поля в неподвижных точках действия равны $+1$.*

Доказательство. Пусть $N(M_j)$, $j = 1, \ldots, k$, – G-инвариантные трубчатые окрестности подмногообразий M_j в многообразии M. На многообразии $M^0 = M \setminus \bigcup_{j=1}^{k} N(M_j)$ группа G действует свободно. Следовательно, M^0/G есть гладкое многообразие с краем. Построим произвольное невырожденное касательное векторное поле s на M^0/G, которое на границе $\partial M^0/G$ будет направлено внутрь многообразия M^0/G. Поднятие этого векторного поля на многообразие M^0 по проекции $p\colon M^0 \to M^0/G$ может быть продолжено до касательного векторного поля на всем многообразии M. Для продолжения достаточно заметить, что $N(M_j)$ является G-деформационным ретрактом подмногообразия M_j, $j = 1, \ldots, k$. Пусть ϕ_t^j – соответствующая деформация. Тогда векторное поле $p^*(s)$ продолжается на каждую трубку $N(M_j)$ по формуле

$$\widehat{s}(x, u) = |u|\phi^j_{|u|*}(p^*(s(x, u/|u|))).$$

Нетрудно проверить, что построенное векторное поле удовлетворяет условиям теоремы. $\square$

Пусть $\pi\colon EG \to BG$ – универсальное G-расслоение. Обозначим через E расслоение $EG\times_G M$, пусть p – проекция в этом расслоении. Предположим, что расслоение E и многообразия $M_1,\dots,M_k$ ориентируемы в теории когомологий $h^*(\,\cdot\,)$. Допустим, что существует такой неделитель нуля $\Delta\in h^*(BG)$, что $p^*\Delta = e(\tau_F(E))\cdot x$, для подходящего $x\in h^*(E)$. Пусть нормальные расслоения ν_j подмногообразий $M_j\subset M$ также h-ориентируемы, и действие группы G сохраняет h-ориентацию в ν_j. Обозначим через ν_j^G расслоение $\pi_j\colon EG\times_G \nu_j \to BG\times M_j$, через E_j обозначим расслоения $p_j\colon M_j\times BG\to BG$, $j=1,\dots,k$. Кроме того, пусть $h^*(BG)_{\mathcal S}$, $h^*(E_j)_{\mathcal S}$ – кольца $h^*(BG)$, $h^*(E_j)$, локализованные по множеству всех неделителей нуля. Рассмотрим произвольный характеристический класс h-ориентированных векторных расслоений $w(\zeta)$.

Теорема 3.3 (обобщенные уравнения Коннера–Флойда)**.** *Для полусвободного действия компактной группы Ли G на компактном многообразии M в сформулированных выше условиях в кольце $h^0(BG)_{\mathcal S}$ имеет место равенство:*

$$p_!(w(\tau_F(E))) = \sum_{j=1}^{k}\frac{w(\tau(M_j)\oplus\nu_j^G)}{e(\nu_j^G)}\cap[M_j](\operatorname{mod} I(EG)),$$

где $[M_j]$ – фундаментальный класс многообразия M_j, $I(EG) = \tau(\pi)^*1$.

Доказательство. Построенное в теореме 3.2 векторное поле на многообразии с полусвободным действием группы G позволяет применить теорему 3.1 для расслоения $E\cong EG\times_G M$. Нули векторного поля, не являющиеся неподвижными точками действия G, разбиваются на множества, в каждое из которых входят точки одной орбиты. Соответствующие подрасслоения нулей в пространстве $EG\times_G M$ являются изолированными экземплярами пространства $EG\subset EG\times_G M$. Поскольку пространство EG стягиваемо, то ограничение на него любого класса когомологий из $h^*(EG\times_G M)$ размерности >0 является нулем. Поэтому ненулевой по модулю $I(EG)$ вклад в формулу (3.1) вносят только слагаемые, соответствующие неподвижным подмногообразиям действия группы G. Заметим, что элемент $e(\nu_j^G)$ обратим в кольце $h^*(E_j)_{\mathcal S}$ (см. [8]). Пусть $i_j : E_j\subset E$ – вложение расслоений, $j=1,\dots,k$. Нетрудно проверить, что $p_j^*(\Delta) = e(\tau_F(E_j))e(\nu_j^G)x$.

Деля левую и правую части равенства (3.1) на Δ, получаем

$$p_!(w(\tau_F(E))) = \sum_{j=1}^{k} p_{j!}\left(\frac{w(\tau_F(E_j)\oplus\nu_j^G)}{e(\nu_j^G)}\right).$$

Для завершения доказательства достаточно заметить, что $p_{j!}(x) = x\cap[M_j]$, $j=1,\ldots,k$. $\square$

Следствие 3.2 (ср. [9]). *Для полусвободного действия компактной группы Ли G на замкнутом компактном ориентируемом многообразии M с ориентируемыми замкнутыми компактными подмногообразиями неподвижных точек имеет место тождество*

$$\chi(M) \equiv \sum_{j=1}^{k} \chi(M_j)\ (\mathrm{mod}\chi(G)).$$

Доказательство. Достаточно применить теорему 3.3 в случае, когда w есть эйлеров класс. $\square$

Замечание 3.1. Нетрудно проверить, что следствие 3.2 непосредственно вытекает из теоремы 3.2 и классической теоремы Пуанкаре–Хопфа даже без предположения ориентируемости. Поэтому доказательство следствия 3.2, обобщающего результат работы [9], не требует привлечения сложной техники из работы [9].

Пример 3.2. Для любого гладкого действия тора на компактном многообразии существует инвариантное векторное поле, нулями которого являются все неподвижные точки действия. Это векторное поле задается однопараметрической подгруппой тора, порождающей плотную обмотку. Аналогично доказательству теоремы 3.3 может быть получена теорема Атьи–Ботта о неподвижных точках действия окружности и ее обобщение для торов.

Замечание 3.2. Примеры 3.1 и 3.2 показывают, что теорема 3.1 представляет собой обобщение классических результатов – уравнений Коннера–Флойда и теоремы Атьи–Ботта – на случай действия произвольных компактных групп Ли. Как видно из формулировки теоремы 3.1, корректное обобщение (ср. [8]) этих результатов требует учета дополнительных слагаемых, не сводимых к подмногообразиям неподвижных точек.

§4. Исчисление Шуберта

В этом параграфе на основании результатов §3 будет построено исчисление Шуберта в произвольной комплексно-ориентированной теории когомологий. Мы воспользуемся результатами [11], где были исследованы стандартные функции высоты на матричных группах Ли. При наличии дополнительной симметрии у таких функций их поведение в окрестности критических точек определяет структуру кольца когомологий инвариантных (относительно присоединенного действия) подмногообразиий группы Ли.

Зафиксируем комплексно-ориентируемую теорию когомологий $h^*(\cdot)$. Обозначим кольцо коэффициентов этой теории через $\Lambda^* = \sum \Lambda^n$, где $\Lambda^n = h^n(\mathrm{pt})$. Пусть $f(u,v)$ – формальная группа в $h^*(\cdot)$:

$$f(u,v) = u + v + \sum_{i,j \geqslant 1} \alpha_{ij} u^i v^j,$$

где $\alpha_{ij} \in \Lambda^{-i-j+2}$. Пусть

$$g(u) = u + \sum_{i>1} \beta_i u^i, \quad \beta_i \in \Lambda^{-i+1}$$

– логарифм формальной группы $f(u,v)$.

Пусть $\lambda = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ – конечная последовательность неотрицательных целых чисел.

Теорема 4.1. *Элемент кольца частных* $\Lambda^*([[x_1, \dots, x_n]])$

$$s_\lambda^h(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)}^{\mu_i}}{\prod\limits_{i<j} g^{-1}(g(x_{\sigma(j)}) - g(x_{\sigma(i)}))}$$

является формальным рядом из кольца $\Lambda^*[[x_1, \dots, x_n]]$, *симметричным по переменным* x_i.

Доказательство. Симметричность функций $s_\lambda^h(x_1, \dots, x_n)$ по переменным x_i очевидна. Докажем, что эти функции являются формальными рядами. Заметим, что

$$g^{-1}(g(x_j) - g(x_j)) = f(x_j, \bar{x}_i) = f(x_j, \bar{x}_i) - f(x_i, \bar{x}_i)$$

$$= (x_j - x_i)\left(1 + \sum_{k,l\geqslant 1} \alpha_{kl}\left(\frac{x_j^k - x_i^k}{x_j - x_i}\right)\bar{x}_i^l\right) = (x_j - x_i)\phi(x_j, x_i).$$

Ряд $\phi(x_j, x_i)$ обратим, поскольку начинается с единицы. Обозначим ряд $1/\phi(x_j, x_i)$ через $\psi(x_j, x_i)$. Нам достаточно показать, что ряд

$$\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)}^{\mu_i}\prod_{i<j}\psi(x_{\sigma(j)} - x_{\sigma(i)})$$

делится на $\prod\limits_{i<j}(x_j - x_i)$. Последнее утверждение достаточно проверить для случая двух переменных. Имеем

$$s^h_{(\mu_1,\mu_2)}(x_1, x_2) = \frac{x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}}{(x_2 - x_1)\phi(x_2, x_1)} + \frac{x_2^{\mu_1}x_1^{\mu_2}}{(x_1 - x_2)\phi(x_1, x_2)},$$

откуда

$$(x_2 - x_1)s^h_{(\mu_1,\mu_2)}(x_1, x_2) = \frac{x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}}{\phi(x_2, x_1)} - \frac{x_2^{\mu_1}x_1^{\mu_2}}{\phi(x_1, x_2)}.$$

Поскольку при $x_1 = x_2$ правая часть последнего равенства равна 0, то она делится на $x_1 - x_2$. Отсюда следует требуемое. $\square$

Обозначим через $\Delta^h(x_1, \ldots, x_n)$ формальный ряд

$$\prod_{i<j} g^{-1}(g(x_j) - g(x_i)).$$

Определение 4.1. *Обобщенным полиномом Шура с индексом λ в комплексно-ориентируемой теории когомологий $h^*(\,\cdot\,)$ называется симметрический формальный ряд*

$$s^h_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma\in S_n}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)}^{\mu_i}}{\Delta^h(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})}.$$

Замечание 4.1. В теории целочисленных когомологий формальная группа тривиальна. Поэтому обобщенные полиномы Шура в $H^*(\cdot,\mathbb{Z})$ совпадают с обыкновенными полиномами Шура

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \det(x_j^{\mu_i+n-i})/\det(x_j^{n-i}).$$

Пример 4.1. Вычислим обобщенные полиномы Шура в комплексной K-теории. Формальная группа имеет вид

$$f(u,v) = u + v + \beta uv,$$

где β – элемент Ботта. Обратным к элементу u в этой формальной группе будет элемент $(-u)(1+\beta u)^{-1}$. Поэтому

$$s_\lambda^K(x_1,\dots,x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)}^{\mu_i}}{\Delta^K(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)}^{\mu_i}}{\prod\limits_{i<j}(x_{\sigma(j)} - x_{\sigma(i)})} \prod_{i=1}^{n} (1+\beta x_{\sigma(i)})^{n-i}$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{n(n-1)}{2}} \beta^k \sum_{\gamma\leqslant\delta;|\gamma|=k} \left(\prod_{i=1}^{n} \binom{n-i}{\gamma_i}\right) s_{\lambda+\gamma-\delta}(x_1,\dots,x_n),$$

где $\delta = (n-1, n-2, \dots, 0)$, под $\gamma \leqslant \delta$ мы понимаем, что $\gamma_i \leqslant i$ для всех $i = 1,\dots,n$.

Заметим, что поскольку обобщенные полиномы Шура представляют собой симметрические функции кольца $\Lambda^*[[x_1,\dots,x_n]]$, они могут быть записаны как ряды от элементарных симметрических многочленов. Пусть $P_\lambda^h(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ – соответствующие ряды:

$$s_\lambda^h(x_1,\dots,x_n) = P_\lambda^h(\sigma_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\sigma_n(x_1,\dots,x_n)),$$

где $\sigma_k(x_1,\dots,x_n)$ – k-й элементарный симметрический многочлен от $x_1,\dots,x_n$.

Рассмотрим комплексное n-мерное векторное расслоение η над базой B. Будем обозначать через $s_\lambda^h(\eta)$ характеристический класс расслоения η, равный $P_\lambda^h(c_1(\eta),\dots,c_n(\eta))$, где $c_k(\eta)$ – k-й класс Чженя расслоения η в теории $h^*(\,\cdot\,)$.

Пусть F_ω – многообразие комплексных флагов, соответствующее упорядоченному разбиению $\omega = (n_1,\dots,n_k)$ числа n. Пусть $F_\omega(\eta)$ – расслоение со слоем F_ω, ассоциированное с расслоением η. Обозначим через p_ω проекцию в этом расслоении, а через $p_{\omega!}$ – гомоморфизм Гизина. Пусть $\eta(n_i)$ – i-е тавтологическое расслоение над $F_\omega(\eta)$, $i = 1,\dots,k$.

Теорема 4.2. *Для любых обобщенных полиномов Шура $s^h_{\lambda_1}, \ldots, s^h_{\lambda_k}$ в комплексно-ориентированной теории когомологий $h^*(\,\cdot\,)$ имеет место формула*

$$p_{\omega!}\left(\prod_{i=1}^{k} s^h_{\lambda_i}(\eta(n_i))\right) = s^h_{\lambda_1 \cup \cdots \cup \lambda_k}(\eta),$$

где под $\cup$ понимается упорядоченное объединение.

Доказательство. Заметим, что "флагизация" комплексного векторного расслоения может быть получена последовательным выполнением "грассманизаций" исходного расслоения, а затем возникающих тавтологических расслоений над соответствующими "грассманизациями". Поэтому утверждение теоремы достаточно доказать для случая простейшего многообразия флагов – многообразия Грассмана. В силу принципа расщепления можно считать, что база исходного расслоения есть $BT^n = \mathbb{C}P^\infty \times \cdots \times \mathbb{C}P^\infty$, а исходное расслоение есть декартово произведение $\zeta \cong \eta_1 \times \cdots \times \eta_n$ тавтологических одномерных комплексных векторных расслоений над $\mathbb{C}P^\infty$. Обозначим через x_i первый класс Чженя расслоения η_i в теории когомологий $h^*(\,\cdot\,)$.

В работе [11] построена минимальная функция Морса на многообразии Грассмана. Она имеет вид

$$f(\mathfrak{X}) = \mathrm{Re}\mathrm{Tr}(AX), \quad \mathfrak{X} \in \mathbb{C}G^n_k,$$

где A – диагональная матрица с попарно различными вещественными положительными собственными значениями, а X – оператор отражения относительно k-мерного подпространства $\mathfrak{X}$. Эта функция инвариантна относительно действия структурной группы T^n расслоения ζ. Поэтому градиентный поток функции f дает нам векторное поле s на $\mathbb{C}G^n_k(\zeta)$, касательное вдоль слоев. Нулями поля s будут подрасслоения

$$\mathbb{C}G^n_k\left(\prod_{i \in I} \eta_i\right),$$

где I – произвольное подмножество из k различных элементов множества $\{1, \ldots, n\}$. Поскольку отрицательное подпространство матрицы $\mathrm{Hes}(f)$ в критической точке функции f наделено канонической комплексной структурой [11], то индексы всех нулей векторного поля s равны $+1$. Кроме того, касательное расслоение вдоль слоев расслоения $\mathbb{C}G_k^n(\zeta)$ изоморфно расслоению $\bar{\eta}(k)\otimes\eta(n-k)$.

Заметим, что $h^*(BT^n)$ не содержит делителей нуля. Построим такой элемент $\Delta\in h^*(BT^n)$, что $p_k^*(\Delta)$ делится на эйлеров класс $e(\bar{\eta}(k)\otimes\eta(n-k))$. Представим $e(\bar{\eta}(k)\otimes\eta(n-k))$ в виде ряда $P(e_1,\dots,e_k)$ от образующих Ву расслоения $\eta(k)$. Пусть $e_{k+1},e_{k+2},\dots,e_n$ – образующие Ву расслоения $\eta(n-k)$. Рассмотрим ряд

$$G(e_1,\dots,e_n)=\prod_{\{i_1,\dots,i_k\}\subset\{1,\dots,n\}}P(e_{i_1},\dots,e_{i_k}).$$

Этот ряд делится на $e(\bar{\eta}(k)\otimes\eta(n-k))$. Поскольку вся совокупность $(e_1,\dots,e_n)$ является совокупностью образующих Ву расслоения $p_k^*(\zeta)\cong\eta(k)\oplus\eta(n-k)$, а ряд G симметричен по e_j, то $G(e_1,\dots,e_n)$ лежит в $p_k^*(h^*(BT^n))$ и, следовательно, искомый Δ существует.

Применим теорему 3.1 к построенному векторному полю s. Деля на Δ, получаем

$$p_{k!}(s^h_{\lambda_1}(\eta(k))s^h_{\lambda_2}(\eta(n-k)))=$$
$$\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\},\\ \#I=k}}\frac{s^h_{\lambda_1}(\prod\limits_{i\in I}\eta_i)s^h_{\lambda_2}(\prod\limits_{j\notin I}\eta_j)}{\prod\limits_{i\in I,j\notin I}f(\eta_j,\bar{\eta}_i)}=$$
$$=\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\},\\ \#I=k}}\frac{s^h_{\lambda_1}(x_I)s^h_{\lambda_2}(x_{\bar{I}})}{\prod\limits_{i\in I,j\notin I}g^{-1}(g(x_j)-g(x_i))}=s^h_{\lambda_1\cup\lambda_2}(\zeta),$$

что завершает доказательство теоремы 4.2. □

Замечание 4.2. Теорема 4.2 может быть доказана только с использованием теоремы Атьи–Ботта о неподвижной точке. Однако, приведенное выше доказательство может быть обобщено на широкий класс симметрических пространств, исследованных в [11]. Это позволяет вычислять мультипликативную структуру колец когомологий некоторых однородных пространств, для которых теорема Атьи–Ботта не применима.

Замечание 4.3. В силу замечания 4.1 в теории целочисленных когомологий результат теоремы 4.2 совпадает с аналогичным результатом [12].

В заключение сформулируем теорему, в которой вычисляется трансфер Беккера–Готтлиба для грассманизации комплексного векторного расслоения. Пусть $\lambda = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ – невозрастающая последовательность неотрицательных целых чисел длины $l(\lambda) = n$, $\lambda(i)$ – число элементов в λ, равных i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Обозначим через $m_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ симметрический полином, равный сумме всевозможных различных мономов вида $\prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)}^{\mu_i}$, где $\sigma \in S_n$. Пусть $\tau(p_{(k,n-k)})$ – трансфер расслоения $\mathbb{C}G_k^n(\eta)$, а $m_\lambda(\eta)$ – характеристический класс расслоения η, соответствующий симметрическому полиному m_λ $(\dim_{\mathbb{C}} \eta = l(\lambda))$.

Теорема 4.3. *В произвольной комплексно-ориентируемой теории когомологий имеет место формула*

$$\begin{aligned}\tau(p_{(k,n-k)})^*(m_{\lambda_1}(\eta(k))m_{\lambda_2}(\eta(n-k)))\\ = \left(\prod_{i=0}^{\infty} \binom{\lambda_1(i) + \lambda_2(i)}{\lambda_1(i)}\right) m_{\lambda_1 \cup \lambda_2}(\eta),\end{aligned}$$

где $l(\lambda_1) = k$, $l(\lambda_2) = n - k$.

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 4.2. □

§5. Заключение

Построенные в работе обобщенные полиномы Шура зависят от коэффициентов формальной группы соответствующей теории когомологий $h^*(\cdot)$. Эти коэффициенты можно рассматривать как параметры деформации аддитивного базиса пространства симметрических рядов с коэффициентами в $h^*(\mathrm{pt})$, заданного обыкновенными полиномами Шура. Если формальная группа теории $h^*(\cdot)$ тривиальна, то соответствующие обобщенные полиномы Шура совпадают с обыкновенными. Это соответствует равенству нулю всех параметров деформации. Интересно выяснить, какие параметрические семейства симметрических функций можно получить из обобщенных полиномов Шура при произвольном выборе значений параметров деформации.

Литература

1. Дж. Милнор, А. Уоллес, *Дифференциальная топология. Начальный курс.* М., Мир, 1972.

2. М. Атья, Р. Ботт, *Заметки о теореме Лефшеца о неподвижной точке.* — Сб. перев. "Математика" **10:4** (1966), 101–139.
3. П. Коннер, Э. Флойд, *Гладкие периодические отображения.* М., Мир, 1969.
4. В. Фултон, *Теория пересечений.* М., Мир, 1989.
5. P. Bressler, S. Evens, *Shubert calculus in complex cobordism.* — Trans. Am. Math. Soc. **331** no. 2 (1992), 799–811.
6. H. Nakajima, *Jack polynomials and Hilbert schemes of points on surfaces.* preprint.
7. В. М. Бухштабер, К. Э. Фельдман, *Индекс эквивариантного векторного поля и теоремы сложения для характеристических классов Понтрягина.* — Изв. РАН, сер. матем. **64**, № 2 (2000), 3–28.
8. И. М. Кричевер, *Формальные группы и неподвижные подмногообразия действий компактных групп Ли.* Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, М., МГУ, 1974.
9. Т. Е. Панов, *Вычисление родов Хирцебруха многообразий, несущих действие группы $\mathbb{Z}_p$, через инварианты действия.* — Изв. РАН, сер. матем. **62**, № 3 (1998), 87–120.
10. J. C. Becker, D. H. Gottlieb, *The transfer map and fiber bundles.* — Topology **14** (1975), 1–12.
11. А. П. Веселов, И. А. Дынников, *Интегрируемые градиентные потоки и теория Морса.* — Алгебра и анализ **8**, № 3 (1996), 78–103.
12. T. Jozefiak, A. Lascoux, P. Pragacz, *Классы детерминантных многообразий, ассоциированных с симметрической и кососимметрической матрицами.* — Изв. АН СССР, сер. матем. **45**, № 3 (1981), 662–674.

Fel'dman K. E. An equivariant analog of the Poincaré–Hopf theorem.

A new method for localization of algebro-topological invariants of smooth manifolds is given in terms of equivariant tangent vector fields. Main realizations of direct image constructions – the Gysin map and the Becker–Gottlieb transfer map – are calculated for Grassmannizations of complex vector bundles and for a complex-oriented cohomology theory.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
email kot@feb.uupc.chg.ru

Поступило 17 октября 1999 г.