Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 267, 2000 г.

П. В. Светлов

ЗАЦЕПЛЕНИЯ НА T-ПОЛИЭДРАХ: ПРИМЕРЫ КУБИКОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ГУСАРОВА

Введение

Целью работы является построение теории инвариантов конечного типа для зацеплений на T-полиэдрах. "Конечность типа" определяется в смысле теории кубиковых пространств, созданной М. Н. Гусаровым [2].

С T-полиэдрами автор познакомился в 1996 г. благодаря своему научному руководителю профессору С. В. Буяло. Этот объект, и тоже в связи с теорией узлов, изучался также И. Дынниковым, работы которого, однако, изначально направлены на изучение узлов в $\mathbb{R}^3$, в то время как нас интересовала именно специфика полиэдра.

Структура работы. В §1 определяются интересующие нас геометрические объекты: канонический T-полиэдр T и множества L и LL зацеплений и двухцветных зацеплений на нем. В §2 описывается кодировка зацеплений $w\colon LL \to \Gamma$, принимающая значения в некоторой свободной группе Γ. В §3 описываются две различные кубиковые структуры на LL и индуцированные кодировкой w структуры на Γ. В §4 строится семейство изотопических инвариантов $\{\omega_n\}_{n\geq 0}$ двухцветных зацеплений на T, принимающих значения в некоторой алгебре Ли. В §5 устанавливается определяемая по индуцированной кубиковой структуре на Γ конечность типа этих инвариантов. Наконец, §6 содержит сводку нужных нам определений из теории М. Н. Гусарова.

§1. Объекты

1.1. Полиэдр T и кривые на T. Любой полиэдр, гомеоморфный полиэдру, полученному склеиванием трех полуплоскостей вдоль их краевых линий, называется T-полиэдром. С этого момента

Работа частично поддержана РФФИ (грант поддержки научных школ No. 00-15-96024).

мы фиксируем некоторый T-полиэдр T, ориентацию его существенного ребра l, и порядок связных компонент T_i множества $T \setminus l = T_1 \sqcup T_2 \sqcup T_3$.

Определение 1.1. *Образ вложения $f\colon S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \to T$ такого, что пересечение $f(S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1) \cap l$ конечно, называется* кривой *на T.*

1.2. Зацепления. Кривые на T естественно рассматривать с точностью до подходящего отношения эквивалентности.

Определение 1.2. *Говорят что кривая $c' \subset T$ получена из кривой $c \subset T$ с помощью* элементарной деформации, *если найдется такой номер $i = 1, 2, 3$ и такая окрестность $O \subset T$ множества $c \cap T_i$, что $c \cap T_i = c' \cap T_i$ и $c \cap (T \setminus T_i)$ изотопно $c' \cap (T \setminus T_i)$ в $T \setminus T_i \cong \mathbb{R}^2$ посредством некоторой изотопии, связанной на множестве $T \setminus (T_i \cup O)$.*

Определение 1.3. *Класс кривых, полученных из кривой c посредством произвольной последовательности элементарных деформаций, называется* зацеплением *на T и обозначается $|c|$. Множество таких классов мы будем обозначать через L.*

Замечание. Пусть $\iota\colon T \to \mathbb{R}^3$ – такое вложение, что существуют плоскости P_1, P_2, $P_3 \subset \mathbb{R}^3$ такие, что $\iota(T_i) \subset P_i$. Фиксируем некоторую плоскость $P \subset \mathbb{R}^3$ общего положения относительно $\iota(T)$. В этом случае любой кривой $c \subset T$ соответствует диаграмма $\pi(c)$ зацепления $\iota(c)$ полученная проекцией на плоскость P. Мы утверждаем, что $c' \in |c|$ в том и только в том случае, если возможно перейти от диаграммы $\pi(c)$ к диаграмме $\pi(c')$ посредством первого и второго преобразований Райдемайстера (см. [6]).

Определение 1.4. *Рассмотрим множество упорядоченных пар (c_1, c_2) дизъюнктных ориентированных кривых на T. Для таких объектов очевидным образом определены элементарные деформации, а значит и классы эквивалентности. Класс, соответствующий (c_1, c_2), обозначается через $|c_1, c_2|$ и называется* двухцветным зацеплением. *Множество двухцветных зацеплений обозначается через LL.*

§2. Кодировка двухцветных зацеплений

2.1. Отображения $\hat{w}, \bar{w}$. Рассмотрим пару (c_1, c_2) ориентированных кривых из предыдущего определения. Каждой точке пересечения $c_j \cap l$ сопоставим букву из алфавита $A_j = \{a_{ji}^{\pm 1}\}_{i=1}^{3}$ согласно следующему правилу. Пусть $x \in c_j \cap l$. Возьмем столь малую окрестность $O(x)$ этой точки, что найдется номер $i = 1$, 2, 3, для которого $O(x) \cap T_i \cap c_j = \emptyset$ и $O(x) \cap l \cap c_j = \{x\}$. Ориентация кривой c_j индуцирует порядок на двух других листах T_m и T_k ($\{i,k,m\} = \{1,2,3\}$). Пусть в рассматриваемой точке кривая переходит с листа T_m на лист T_k. Положим по определению $\hat{w}(x) = a_{ji}^{s(i,m,k)}$, где $s(i,m,k)$ – знак перестановки $(1,2,3) \mapsto (i,m,k)$. Далее, пусть $\{x_1,\dots,x_n\}$ – точки множества $(c_1 \cup c_2) \cap l$, пронумерованные в соответствии с линейным порядком, индуцированным ориентацией существенного ребра l. По определению полагаем

$$\bar{w}(c_1,c_2) = \hat{w}(x_1)\dots\hat{w}(x_n).$$

Правая часть последнего равенства является словом в алфавите $A = A_1 \cup A_2$. Пример действия отображения $\bar{w}$ изображен на рис. 1.

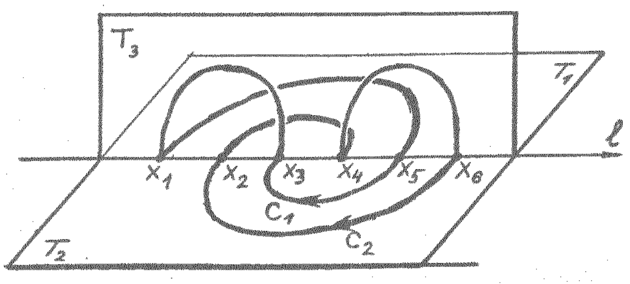

Рис. 1. $\bar{w}(c_1,c_2) = a_{12}a_{23}^{-1}a_{11}a_{22}^{-1}a_{13}a_{21}^{-1}$.

2.2. Отображение w. Пусть G – группа с копредставлением

$$G = \langle A \mid a_{i1}a_{i2} = a_{i2}a_{i1},\ a_{i1}a_{i2}a_{i3} = e;\ i = 1,2\rangle \cong \mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}^2$$

(где, как обычно, звездочка обозначает свободное произведение) и $\varphi\colon \langle A\rangle \to G$ – естественная проекция.

Лемма [6]. *Если $(c_1', c_2') \in |c_1,c_2|$, то $\varphi \circ \bar{w}(c_1',c_2') = \varphi \circ \bar{w}(c_1,c_2)$.*

Положим по определению $w = \varphi \circ \bar{w}\colon LL \to G$ и $\Gamma = w(LL)$. Группа Γ является нормальной подгруппой коммутанта (G,G).

В 1997 г. М. Н. Гусаров высказал предположение, что Γ является нормальным замыканием в G элемента, соответвующего изображенному на рис. 1 двухцветному зацеплению.

§3. Кубиковые структуры на LL

Краткая сводка определений теории кубиковых пространств дана в §6, обозначения и терминология которого используются далее без пояснений.

3.1. Вариационные схемы. Следующие два определения взяты *mutatis mutandis* из работы [1].

Определение 3.1. *Пусть (c_1, c_2) – упорядоченная пара ориентированных кривых на T.* Модификацией *v пары (c_1, c_2) в области $V \subset T$ называется замена $(c_1, c_2) \cap V$ на другой фрагмент (набор непересекающихся простых дуг в V, соединяющих точки $\partial V \cap c_i$ друг с другом), доставляющая новую пару $(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)$.*

Определение 3.2. Вариационной схемой *$\mathcal{S}(v_i, V_i; 1 \leqslant i \leqslant r)$ размерности r называется пара (c_1, c_2) как выше вместе со множеством ее модификаций $\{v_i\}_{i=1}^r$ в дизъюнктных областях $\{V_i\}_{i=1}^r$. Пара (c_1, c_2) называется при этом* базовым элементом *вариационной схемы $\mathcal{S}$.*

3.2. Кубиковые структуры. Теперь мы определим две кубиковых структуры на множестве LL.

Определение 3.3 ($\circ$-кубиковая структура). *Любой n-мерный кубик $\mathbf{c}$ определяется парой*

$$\bigl(r\text{-мерная вариационная схема}\quad \mathcal{S}(v_i, V_i; 1 \leqslant i \leqslant r),$$
$$\text{отображение}\quad k\colon \{1, \dots, r\} \to \{1, \dots, n\}\bigr).$$

В этом случае для всякого $\sigma \in \mathbf{2}^n$ имеем $\mathbf{c}(\sigma) = |c_1^\sigma, c_2^\sigma|$, где пара (c_1^σ, c_2^σ) получена из базового элемента (c_1, c_2) схемы $\mathcal{S}$ как результат проведения модификаций $\{v_i\}_{i \in I_\sigma}$, где $I_\sigma = \{i \in \{1, \dots, r\} \mid \sigma_{k(i)} = 1\}$. Множество всех n-кубиков обозначается LL_n°.

Определение 3.4 ($\star$-кубиковая структура). *Определим $LL_n^\star \subset LL_n^\circ$ как подмножество таких кубиков, что области V_i в их схемах имеют связные пересечения с существенным ребром l.*

Доказательство выполнения аксиом КП1–3 опускается.

3.3. Индуцированные структуры.

Лемма 3.5. 1. *Пусть U – кубиковое пространство и $f\colon U \to V$ – отображение "на". Тогда семейство множеств $V_n = \{f \circ \mathbf{c} \in \overline{V_n} \mid \mathbf{c} \in U_n\}$ определяет кубиковую структуру на множестве V.*

2. *Если u – инвариант конечного типа на V (по отношению к кубиковой структуре, определенной в п. 1), то $f^* u \equiv u \circ f$ – тоже инвариант конечного типа (и той же степени) на U.*

Доказательство получается прямой проверкой: для всякого кубика $\mathbf{c} \in U_n$ индуцированное отображение $f_* \mathbf{c} \equiv f \circ \mathbf{c}$ также является n-кубиком на V. Аналогично, $\operatorname{Alt}_n f^* u(\mathbf{c}) = \operatorname{Alt}_n u(f_* \mathbf{c}) = 0$. □

Кубиковые структуры, полученные описанным в лемме путем, называются *индуцированными*. Используя лемму 3.5 и отображение $w\colon LL \to \Gamma$, мы получаем индуцированные кубиковые структуры на множестве элементов группы Γ. Этот пункт мы закончим тем, что дадим их описание.

$\circ$-Кубики: Любой n-кубик $\mathbf{c}$ определяется парой

$$\bigl(\{g_i, h_i\}_{i=1}^r \subset G;\ k\colon \{1, \dots, r\} \to \{1, \dots, n\}\bigr),$$

где для всякого $\sigma \in \mathbf{2}^n$

$$\mathbf{c}(\sigma) = g_1^{\sigma_{k(1)}} h_1 \ \dots \ g_r^{\sigma_{k(r)}} h_r \in \Gamma.$$

$\star$-Кубики: Здесь n-кубики определены так же, и имеется лишь одно дополнительное условие: $g_1, g_2, \dots, g_r \in \Gamma$.

§4. Построение инвариантов ω_n

Алгебраические конструкции следующих двух пунктов можно найти в [5].

4.1. Кольцо Ли группы. Пусть G – та же группа, что и выше. Рассмотрим ее нижний центральный ряд:

$$G^0 = G \supset G^1 = (G, G) \supset \dots \supset G^n = (G, G^{n-1}) \supset \dots$$

Здесь $(\cdot, \cdot)$ – коммутатор в G. Обозначим абелев фактор G^n/G^{n+1} через $\operatorname{gr}_n G$ и рассмотрим прямую сумму $\bigoplus_{n \geq 0} \operatorname{gr}_n G$. Этот $\mathbb{Z}$-модуль имеет естественную структур кольца Ли. А именно, отображения

$$\phi_{nm}\colon \operatorname{gr}_n G \times \operatorname{gr}_m G \to \operatorname{gr}_{n+m} G, \quad (xG^{n+1}, yG^{m+1}) \mapsto (x, y) G^{m+n+1}$$

билинейны и кососимметричны. Через $[\cdot,\cdot]$ обозначим билинейную кососимметрическую операцию на $\bigoplus_{n\geq 0} \operatorname{gr}_n G$ такую, что ее сужение на $\operatorname{gr}_n G\times \operatorname{gr}_m G$ – ϕ_{nm}. Эта операция и дает искомую структуру кольца Ли. Подмодуль $\operatorname{gr}_0 G\cong \mathbb{Z}^4$ порождает это кольцо. Заметим, что для рангов свободных модулей $\operatorname{gr}_n G$ имеется формула, аналогичная формуле Витта для случая, когда $G=\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ – свободная группа.

4.2. Группа Магнуса $\mathcal{G}$. Положим по определению

$$\mathcal{G}=\prod_{n\geq 0}(\operatorname{gr}_n G\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}).$$

Это множество является $\mathbb{Q}$-алгеброй Ли. На нем имеется еще одна групповая структура – умножение Магнуса. А именно, произведение элементов $x,y\in\mathcal{G}$ дается формулой Кэмпбелла–Хаусдорфа:

$$x\circ y=x+y+\frac{[x,y]}{2}+\frac{[x,[x,y]]+[y,[y,x]]}{12}+\dots.$$

Легко видеть, что $x\circ 0=x$, $x\circ(-x)=0$. Через $(\mathcal{G},\circ)$ обозначим группу Магнуса алгебры $\mathcal{G}$.

4.3. Гомоморфизм Ω. Определим отображение $\Omega\colon G\to(\mathcal{G},\circ)$ так, чтобы его сужение на множество образующих $\{a_{ij}\}$ (см. п. 2.2) совпадало с сужением на то же множество естественного гомоморфизма $\pi\colon G\to \operatorname{gr}_0 G\subset\mathcal{G}$, и продолжим его на всю группу G согласно формуле

$$\Omega(g_1g_2)=\Omega(g_1)\circ\Omega(g_2).$$

Очевидно, Ω является гомоморфизмом, так как сохраняет определяющие соотношения группы G.

4.4. Разложение гомоморфизма Ω. Ввиду естественной градуировки на $\mathcal{G}$, корректно определено разложение

$$\Omega=\prod_{n\geq 0}\frac{\varpi_n}{n!},\quad \varpi_n: G\to \operatorname{gr}_n G\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}.$$

Из формулы Кэмпбелла–Хаусдорфа можно получить следующие тождества:

$$\varpi_0(g_1\cdot\ldots\cdot g_s)=\sum_i\varpi_0(g_i),$$

$$\varpi_1(g_1\cdot\ldots\cdot g_s)=\sum_i\varpi_1(g_i)+\frac{1}{2}\sum_{i<j}[\varpi_0(g_i),\varpi_0(g_j)],$$

$$\varpi_2(g_1\cdot\ldots\cdot g_s)=\sum_i\varpi_2(g_i)$$

$$+\sum_{i<j}\big([\varpi_0(g_i),\varpi_1(g_j)]+[\varpi_1(g_i),\varpi_0(g_j)]\big)$$

$$+\frac{1}{3}\sum_{i<j<k}\big([\varpi_0(g_i),[\varpi_0(g_j),\varpi_0(g_k)]]+[[\varpi_0(g_i),\varpi_0(g_j)],\varpi_0(g_k)]\big)$$

$$+\frac{1}{6}\sum_{i,j}\big[\varpi_0(g_i),[\varpi_0(g_i),\varpi_0(g_j)]\big],$$

$$\varpi_1(w_l a_{ij}^k a_{ls}^m w_r)-\varpi_1(w_l a_{ls}^m a_{ij}^k w_r)=km[\varpi_0(a_{ij}),\varpi_0(a_{ls})]\ ,$$

$$\varpi_2(w_l a_{ij}^k a_{ls}^m w_r)-\varpi_2(w_l a_{ls}^m a_{ij}^k w_r)$$

$$=km\big[[\varpi_0(a_{ij}),\varpi_0(a_{ls})],\varpi_0(w_r)-\varpi_0(w_l)\big].$$

Здесь g_i, w_r, w_l – произвольные элементы группы G и a_{ij} – ее образующие (см. п. 2.2).

Положим по определению

$$\omega_n=\varpi_n\circ w\colon LL\to \mathrm{gr}_n\,G\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}.$$

4.5. Геометрический смысл отображений ω_n. В этом пункте мы опишем интересные свойства отображений ω_1 и ω_2. Доказательства см. в [6].

4.5.1. Коэффициент зацепления. Пусть $\iota\colon T\to\mathbb{R}^3$, π и $P\subset\mathbb{R}^3$ – те же, что и в замечании из §1. Если c – образ некоторого погружения $f\colon S^1\sqcup\cdots\sqcup S^1\to T$ и $c\cap l$ – конечное множество, то c называется s-кривой на T. Рассмотрим упорядоченную пару (c_1,c_2) ориентированных s-кривых на T. Легко видеть, что элемент $\varphi\circ\bar{w}(c_1,c_2)\in G$ можно определить так же, как в п. 2.2 это сделано для обычных кривых. Диаграмма $\pi(c_1,c_2)$ пары s-кривых является уже виртуальным зацеплением.

Предложение 4.1. 1. *Существует разложение модуля* $\mathrm{gr}_1 G \cong \mathbb{Z}^4$ *в прямую сумму* $\langle \xi_{1/2} \rangle \oplus \langle \xi_{2/1} \rangle \oplus \Xi$ *такое, что*

$$\varpi_1\bigl(\varphi \circ \bar{w}(c_1, c_2)\bigr) = \mathrm{lk}_{1/2}\bigl(\pi(c_1, c_2)\bigr)\xi_{1/2} + \mathrm{lk}_{2/1}\bigl(\pi(c_1, c_2)\bigr)\xi_{2/1} \bmod \Xi,$$

где $\mathrm{lk}_{1/2}$ *и* $\mathrm{lk}_{2/1}$ *– два независимых варианта коэффициента зацепления (см.* [3]*).*

2. *Пусть* (c_1, c_2) *– представитель зацепления* $|c_1, c_2|$ *на* T*. Тогда*

$$\omega_1(|c_1, c_2|) = \mathrm{lk}\bigl(\iota(c_1), \iota(c_2)\bigr)\xi_1.$$

Здесь $\xi_1 = \xi_{1/2} + \xi_{2/1}$*, а* lk *– обычный коэффициент зацепления в* $\mathbb{R}^3$*.*

4.5.2. Инвариант Θ. Пусть c – ориентированная кривая на T, а $O(c)$ – ее достаточно малая окрестность. Положим по определению $T_c = T \setminus O(c)$.

Лемма 4.2. *Отображение* $w_c = \phi \circ \bar{w}(c, \cdot) \colon H_1(T_c; \mathbb{Z}) \to \Gamma$ *корректно определено.*

Нетрудно видеть, что любая кривая $c \subset T$ ограничивает вложенную компактную поверхность $M_c \subset T$. Эта поверхность единственна и может оказаться неориентируемой.

Предложение 4.3. 1. *Существует такой элемент* $\xi_2 \in \mathrm{gr}_2 G$*, что для любой пары дизъюнктных кривых* (c_1, c_2)

$$\omega_2(|c_1, 2c_2|) - 2\omega_2(|c_1, c_2|) = 2Q_{c_1}(c_2) \cdot \xi_2 \bmod [\mathrm{gr}_0 G, \xi_1], \quad Q_{c_1}(c_2) \in \mathbb{Z}.$$

2. $Q_c \colon H_1(M_c; \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ *– корректно определенная квадратичная форма.*

Положим по определению $\Theta(c) = 1$, если M_c гомеоморфна диску, и $\Theta(c) = |\det Q_c|$ – в остальных случаях.

Предложение 4.4. *Если* $c' \in |c|$*, то* $\Theta(c) = \Theta(c')$*. То есть корректно определен целочисленный инвариант* $\Theta \colon L \to \mathbb{N}$ *зацеплений на полиэдре* T*.*

Основным результатом работы [6] является следующее утверждение.

Теорема [6]**.** *Существуют две кривых* c_1*,* c_2 *на* T *такие, что для произвольного вложения* $\iota \colon T \to \mathbb{R}^3$ *(описанного в замечании к §1) обычные узлы* $\iota(c_1)$*,* $\iota(c_2)$ *изотопны, но* $\Theta(c_1) \neq \Theta(c_2)$*.*

Замечание. Как заметил И. Дынников, на одноточечной компактификации полиэдра T произвольная кривая $c \subset T$ ограничивает *четыре* различных поверхности. Последние два предложения остаются верными и для этих поверхностей, таким образом мы имеем *четыре* инварианта зацеплений на T.

§5. Конечность инвариантов ω_n

5.1. Возьмем произвольный n-кубик $\mathbf{c}$ на Γ (по отношению к $\circ$- или $\star$-кубиковой структуре). Рассмотрим выражение

$$\varpi_n\Big(\mathbf{c}(\sigma)\Big) = \varpi_n\Big(\prod_i g_i^{\sigma_{k(i)}} h_i\Big).$$

Его правая часть, с точностью до числовых коэффициентов, – сумма членов вида

$$\Big\{\varpi_{n_1}(g_{i_1}^{\sigma_{k(i_1)}}),\dots,\varpi_{n_d}(g_{i_d}^{\sigma_{k(i_d)}}),\varpi_{n_{d+1}}(h_{i_{d+1}}),\dots,\varpi_{n_{d+s}}(h_{i_{d+s}})\Big\}, \quad (*)$$

где $\sum_{i=1}^{d+s}(n_i+1)=n+1$ и $\{a,\dots,b\}$ обозначает некоторую расстановку скобок Ли между элементами $a,\dots,b\in\mathcal{G}$. Таким образом $\varpi_n\big(\mathbf{c}(\sigma)\big)$ является полиномом по σ, и член $(*)$ имеет степень $\le d$.

Если $\mathbf{c}$ является $\circ$-кубиком, то степень выражения $\varpi_n\big(\mathbf{c}(\sigma)\big)$ по σ не превосходит $n+1$. Это так, поскольку старшие коэффициенты этого выражения имеют вид

$$\prod_{j=1}^{n+1}\sigma_{k(i_j)}\cdot\Big\{\varpi_0(g_{i_1}),\dots,\varpi_0(g_{i_{n+1}})\Big\}.$$

Если же $\mathbf{c}$ является $\star$-кубиком, то степень выражения $\varpi_n\big(\mathbf{c}(\sigma)\big)$ по σ не превосходит $\big[\frac{n+1}{2}\big]$ (целая часть $\frac{n+1}{2}$). Это так, поскольку старшие коэффициенты этого выражения имеют вид

$$\prod_{j=1}^{k}\sigma_{k(i_j)}\cdot\Big\{\varpi_1(g_{i_1}),\dots,\varpi_1(g_{i_k})\Big\},$$

если $n=2k-1$, и

$$\prod_{j=1}^{k}\sigma_{k(i_j)}\cdot\Big\{\varpi_1(g_{i_1}),\dots,\varpi_1(g_{i_k}),\varpi_0(h_{i_{k+1}})\Big\}$$

или

$$\prod_{j=1}^{k}\sigma_{k(i_j)}\cdot\Big\{\varpi_1(g_{i_1}),\dots,\varpi_1(g_{i_{k-1}}),\varpi_2(g_{i_k})\Big\},$$

если $n = 2k$.

Степень инварианта u конечного типа (см. п. 6.3) на LL^x обозначим через $\deg^x u$; $x \in \{\circ, \star\}$.

Предложение 5.1. $\deg^\circ \omega_n \le n+1$, $\deg^\star \omega_n \le \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Доказательство. Во-первых, заметим что $\mathrm{Alt}_N F = 0$ (обозначения см. в п. 6.3) для всякой полиномиальной по σ функции F с $\deg F < N$. Таким образом для всякого $N > n+1$ (соответственно, $N > \left[\frac{n+1}{2}\right]$) и для всякого N-кубика $\mathbf{c} \in w_*(LL_N^\circ)$ (соответственно, $\mathbf{c} \in w_*(LL_N^\star)$) имеем $\mathrm{Alt}_N \varpi_n(\mathbf{c}) = 0$. Теперь вторая часть леммы 3.5 завершает доказательство. $\square$

Положим по определению

$$[\omega_n, \omega_m](c_1, c_2) = [\omega_n(c_1, c_2), \omega_m(c_1, c_2)].$$

Из предложения 6.3 следует, что

$$\deg^x[\omega_n, \omega_m] \le \deg^x \omega_n + \deg^x \omega_m, \quad x \in \{\circ, \star\}.$$

Таким образом семейство $\{\omega_n\}$ порождает кольцо Ли инвариантов на LL, а рассмотренные выше кубиковые структуры на LL задают на этом кольце две различных градуировки.

5.2. Неравенства предложения 5.1 на самом деле являются равенствами. Чтобы это доказать, нам понадобится следующая теорема из [4]:

Лемма 5.2. *Пусть h – произвольный элемент группы H. Тогда $h \in H^n$ (n-й коммутант группы H) в том и только в том случае, если существуют его представление в виде произведения $h = h_1 \cdot \ldots \cdot h_N$ и такая функция $k\colon \{1, \ldots, N\} \mapsto \{1, \ldots, n+1\}$, что $h^\sigma = h_1^{\sigma_{k(1)}} \cdot \ldots \cdot h_N^{\sigma_{k(N)}}$ является единицей группы H для всех $\sigma \in \mathbf{2}_-^{n+1}$.*

Наконец, докажем

Предложение 5.3. $\deg^\circ \omega_n = n+1$, $\deg^\star \omega_n = \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Доказательство. Во-первых заметим, что сужение $\varpi_n|_{G^{n+1}}$ – тривиальное отображение (тождественный нуль). Это доказывается индукцией по n:

База. Используя равенства п. 4.4, легко показать, что сужения $\varpi_0|_{G^1}$ и $\varpi_1|_{G^2}$ тривиальны.

Шаг. Предположим, что $\varpi_k|_{G^{k+1}}$ тривиально для всех $k \le n$, и пусть $g_n \in G^n$ и $g \in G$. Тогда

$$\begin{aligned}\Omega(g_n^{-1}g^{-1}g_ng) &= \Omega(g_n^{-1}) \circ \Omega(g^{-1}g_ng)\\ &= \big(-\Omega(g_n)\big) \circ \big(\Omega(g_n) + [\Omega(g_n), \Omega(g)] + \dots\big)\\ &= -\Omega(g_n) + \Omega(g_n) + [\Omega(g_n), \Omega(g)] + \dots\\ &= [\Omega(g_n), \Omega(g)] + \dots\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\varpi_n(g_n^{-1}g^{-1}g_ng) &= \sum_{k+l=n-1} \frac{n!}{k!\,l!}[\varpi_k(g_n), \varpi_l(g)]\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!\,(n-1-k)!}[\varpi_k(g_n), \varpi_{n-1-k}(g)] = 0\end{aligned}$$

по предположению индукции.

Во-вторых, покажем, что сужение $\varpi_n|_{G^n\cap\Gamma}$ не тривиально. Действуем аналогично:

База. $\varpi_1|_{G^1\cap\Gamma}$ нетривиально.

Шаг. Пусть $\varpi_{n-1}|_{G^{n-1}\cap\Gamma}$ нетривиально, $g_{n-1} \in G^{n-1} \cap \Gamma$ и $g \in G \setminus G^1$. Тогда

$$\varpi_n(g_{n-1}^{-1}g^{-1}g_{n-1}g) = n[\varpi_{n-1}(g_{n-1}), \varpi_0(g)] \not\equiv 0.$$

Далее, используя предыдущую лемму, возьмем элемент $h \in G^n \cap \Gamma$, $\circ$-кубик $\mathbf{c}\colon \mathbf{2}^{n+1} \to \Gamma$ такой, что сужение $\mathbf{c}|_{\mathbf{2}_-^{n+1}}$ тривиально (отображение в единицу группы), $\mathbf{c}(1_{n+1}) = h$ и $h \notin \ker\varpi_n$. Таким образом, $\mathrm{Alt}_{n+1}\varpi_n(\mathbf{c}) = (-1)^{n+1}\varpi_n(h) \ne 0$, что доказывает первое равенство. Второе равенство доказывается аналогично. $\square$

§6. Теория Гусарова: краткий обзор

Все определения и утверждения этого параграфа взяты из [2].

6.1. Базовым объектом является двухточечное множество, обозначаемое $\mathbf{2} = \{0, 1\}$. Таким образом $\mathbf{2}^n$ – множество n-строк нулей и единиц. Строки $(0, \dots, 0)$ и $(1, \dots, 1)$ обозначаются 0_n и 1_n соответственно. Наконец, положим $\mathbf{2}_-^n = \mathbf{2}^n \setminus 1_n$. Отображение

$\varphi\colon \mathbf{2}^m \to \mathbf{2}^n$ называется *аффинным*, если оно индуцируется аффинным отображением $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Аффинное отображение $\varphi\colon \mathbf{2}^m \to \mathbf{2}^n$ называется *изометрией*, если

$$\sum_{i\in\overline{1,m}} |\sigma_i - \mu_i| = \sum_{i\in\overline{1,n}} |\varphi(\sigma)_i - \varphi(\mu)_i|$$

для всех $(\sigma_1,\dots,\sigma_m)$, $(\mu_1,\dots,\mu_m) \in \mathbf{2}^m$.

6.2. Пусть U – произвольное множество и $\overline{U}_n$ – множество всех отображений $\mathbf{2}^n \to U$, $n \geq 0$. Семейство $\{U_n\}_{n\geq 0}$ подмножеств $U_n \subset \overline{U}_n$ называется *кубиковой структурой* на множестве U, если выполняются следующие аксиомы:

КП1. $U_0 = \overline{U}_0 \cong U$.

КП2. Если $\mathbf{c} \in U_n$ и $\varphi\colon \mathbf{2}^m \to \mathbf{2}^n$ – произвольное аффинное отображение, то $\mathbf{c}\circ\varphi \in U_m$.

КП3. Если $\hat{\mathbf{c}}\colon \mathbf{2}^n_- \to U$ и $\hat{\mathbf{c}}\circ\varphi \in U_{n-1}$ для всех изометрий $\varphi\colon \mathbf{2}^{n-1} \to \mathbf{2}^n$ таких, что $\varphi(\mathbf{2}^{n-1}) \cap 1_n = \emptyset$, то существует элемент $\mathbf{c} \in U_n$ такой, что $\mathbf{c}|_{\mathbf{2}^n_-} = \hat{\mathbf{c}}$.

Множество снабженное кубиковой структурой, называется *кубиковым пространством*. Элементы $\mathbf{c} \in U_n$ называются *n-кубиками*.

6.3. Инварианты конечного типа. Пусть U – кубиковое пространство и A – модуль.

Определение 6.1. *Функция $u\colon U \to A$ называется* инвариантом конечного типа на *U, если для некоторого n и всякого $m > n$*

$$\mathrm{Alt}_m\, u(\mathbf{c}) \equiv \sum_{\sigma\in\mathbf{2}^m} (-1)^{\sigma_1+\dots+\sigma_m} u\big(\mathbf{c}(\sigma)\big) = 0 \quad \text{для всех} \quad \mathbf{c} \in U_m.$$

Если последнее равенство не имеет места при $m = n$, то целое число n называется *степенью* инварианта u.

Предложение 6.2. *Если u_1, u_2 – инварианты конечного типа, принимающие свои значения в модулях A_1, A_2, соответственно, то для всякого билинейного отображения $b\colon A_1 \times A_2 \to A$ в некоторый модуль A индуцированная функция $b(u_1,u_2)\colon U \to A$ также является инвариантом конечного типа, степень которого не превосходит суммы степеней инвариантов u_1 и u_2.*

Литература

1. M. Goussarov, *Interdependent modifications of links and invariants of finite degree.* U.U.D.M. Report 1995:26.
2. М. Н. Гусаров, *Аксиоматическая теория кубиковых пространств.* неопубликовано.
3. M. Goussarov, M. Poliak, O. Viro, *Finite type invariants of classical and virtual knots.* preprint.
4. Ka Yi Ng, T. Stanford, *On Gusarov's groups of knots.* preprint.
5. J.-P. Serre, *Lie Algebras and Lie Groups.* New York, Benjamin, 1965.
6. П. В. Светлов, *Инварианты узлов и зацеплений на T-полиэдрах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **252** (1998), 231–246.

Svetlov P. V. Links on T-polyhedra: examples of Gusarov's cubic spaces.

Any link in $\mathbb{R}^3$ is isotopic to a link lying on the union T of three half-planes with common boundary line. In an earlier paper, the author developed a nontrivial theory of links and knots on T. In the present paper, the results are interpreted in the context of M. Gusarov's theory of invariants of finite degree (the theory of "cubic spaces").

Российский государственный
педагогический университет
им. А. И. Герцена
email svetlov@svetlov.pdmi.ras.ru

Поступило 31 октября 1999 г.