Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 267, 2000 г.

М. А. Овчинников

СВОЙСТВА ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ВИРО–ТУРАЕВА ГРУППЫ ГОМЕОТОПИЙ ТОРА

§1. Предварительные сведения

1.1. Введение. В самых общих словах топологическую квантовую теорию поля (КТП) можно охарактеризовать как функтор из категории $n+1$-мерных кобордизмов между ориентируемыми n-мерными многообразиями с некоторой дополнительной структурой в категорию линейных отображений между линейными пространствами, некоторым образом порожденных этими структурами. В частности, любое замкнутое трехмерное многообразие рассматривается как кобордизм между "пустыми поверхностями", и ему сопоставляется линейное отображение в себя одномерного пространства – умножение на число – инвариант данного трехмерного многообразия.

Линейное представление группы гомеоморфизмов поверхности получается как образ кобордизмов поверхности, реализуемых на прямом произведении поверхности на отрезок. Тор, с одной стороны, является простейшей нетривиальной замкнутой ориентируемой поверхностью, с другой – любое замкнутое трехмерное многообразие можно получить из трехмерной сферы S^3 подходящей переклейкой полноторий. Сочетание этих свойств тора в значительной степени объясняет особое значение исследований свойств квантовых представлений группы классов отображений тора для изучения топологических КТП, хотя представления такого сорта построены и изучаются для произвольных поверхностей [1–5].

Значительным событием в исследованиях топологических КТП явилось построение в 1991 г. Виро и Тураевым [6, 7] инвариантов трехмерных многообразий и тесно связанных с ними представлений групп классов отображений поверхностей, основанное, с одной стороны, на q-аналоге применяемого в квантовой

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант No. 99-01-00813.

механике исчисления $6j$-символов, с другой – на представлении трехмерных многообразий простыми полиэдрами без края (простыми спайнами), а отображений поверхности на себя – некоторым способом – простыми полиэдрами с краем. Следует отметить, что инварианты Виро–Тураева строго слабее инвариантов Решетихина–Тураева [8]. Однако, для представлений групп поверхностей подобное "перекрытие" неизвестно.

В данной работе описывается матричная реализация представления Виро–Тураева группы гомеотопий тора, которая, с одной стороны, имеет свойства, свидетельствующие о ее естественности, с другой – не является прямым аналогом известных представлений, связанных с инвариантом Решетихина–Тураева [2, 3, 5].

В следующих двух параграфах излагаются конструкции инвариантов Виро–Тураева и представлений Виро–Тураева групп гомеотопий поверхностей. Далее описывается представление гомеотопий тора простыми полиэдрами, разработанное автором в [9], и являющееся основой матричной реализации представления Виро–Тураева группы тора.

Второй раздел посвящен фундаментальным свойствам построенного матричного представления. В частности, матрицы представления являются ортогональными и порождаются всего тремя инволютивными матрицами, две из которых являются матрицами перестановок, а элементами третьей являются непосредственно сами q-$6j$-символы. В §3 приводятся некоторые результаты вычислений, из которых следует конечность построенных матричных представлений группы тора уровней 3, 4, 5 и 6.

Напомним необходимые определения.

1.2. Простые полиэдры и простые спайны. Граф G называется *простым графом*, если все его вершины – валентности 3. Компоненты связности дополнения в G к множеству всех его вершин называются 1-*компонентами графа* G.

Ясно, что каждая 1-компонента простого графа является либо интервалом, либо окружностью, которая тогда является компонентой связности самого графа.

Полиэдр P называется *простым полиэдром (с краем)*, если у каждой его сингулярной точки линк является графом вида 1) окружность с диаметром, либо 2) одномерный остов тетраэдра, либо 3) отрезок, либо 4) триод (граф с одной вершиной валентности три, тремя вершинами валентности один и тремя ребрами). Множество точек типов 3) и 4) называется *краем* полиэдра P и обозначается ∂P.

Компоненты связности множества несингулярных точек называются 2-*компонентами* полиэдра P. Компоненты связности множества точек типа 1) называются *ребрами* или 1-*компонентами* полиэдра P. Точки типа 2) называются *вершинами* полиэдра P. Множество точек типов 3) и 4) называется *краем* полиэдра P и обозначается ∂P. Если все 2-компоненты P диски, $\partial P = \emptyset$ и множество всех сингулярных точек связно и не окружность, то P называется *специальным полиэдром*.

Очевидно, край простого полиэдра является простым графом.

Пусть M связное компактное трехмерное многообразие и P – 2-полиэдр. Говорят, что P является *спайном* многообразия M, если существует вложение $i : P \to M$ такое, что дополнение к $i(P)$ в M гомеоморфно $\partial M \times [0, 1)$, если край не пуст, и гомеоморфно открытому трехмерному шару, если M замкнуто.

Для несвязных трехмерных многообразий понятие обобщается очевидным образом. Именно, в этом случае спайн – просто несвязное объединение спайнов компонент связности многообразия.

Спайн P трехмерного многообразия M называется его *простым спайном*, если P является простым полиэдром без края.

Понятие простого спайна совпадает или почти совпадает с понятиями стандартного спайна и специального спайна. Именно под первым названием они были впервые определены Каслером [10], а под вторым исследовались С. В. Матвеевым, чьи результаты о специальных спайнах [11, 12] были использованы в работе Виро и Тураева [6].

1.3. Инварианты Виро–Тураева трехмерных многообразий. Виро и Тураев в [6] построили бесконечный набор вещественнозначных функций, параметризованный комплексными корнями целой степени $r > 2$ из 1, на множестве простых полиэдров. Для этих функций используем обозначение TV_q, где $q = \sqrt[r]{1} \in \mathbb{C}$. Каждая функция TV_q оказывается инвариантом трехмерного многообразия, поскольку на простых спайнах любого многообразия значения функции совпадают.

Приведем формулы для вычисления инвариантов Виро–Тураева.

Пусть P – простой полиэдр, G – простой граф, $F_1, \dots, F_s$ – 2-компоненты полиэдра P и $E_1, \dots, E_b$ – 1-компоненты графа G.

Обозначим через I множество из $r-1$ полуцелых 0, $1/2$, 1, $3/2$, $\dots$, $(r-2)/2$, называемых *цветами*.

Тройка $(i,j,k) \in I^3$ называется *допустимой*, если $i+j+k$ целое и

$$i \leqslant j+k, \quad j \leqslant i+k, \quad k \leqslant i+j, \quad i+j+k \leqslant r-2.$$

Функция $\varphi : \{F_1, \dots, F_s\} \to I$ называется *раскраской* полиэдра P. Цвет $\varphi(F_i)$, сопоставленный 2-компоненте F_i, называется *цветом 2-компоненты* F_i. Аналогично, функция $\alpha : \{E_1, \dots, E_b\} \to I$ называется *раскраской графа* G, и ее значение $\alpha(E_j)$ называется *цветом 1-компоненты* E_j. Раскраска графа называется *допустимой*, если для каждой его вершины цвета 1-компонент, инцидентных вершине, образуют допустимую тройку цветов. Раскраска полиэдра называется *допустимой*,если для каждого его ребра цвета 2-компонент, инцидентных ребру, образуют допустимую тройку. Множества всех допустимых раскрасок графа G и полиэдра P обозначаются $\operatorname{adm} G$ и $\operatorname{adm} P$ соответственно. Мы пишем $\alpha = \partial\varphi$, если $G = \partial P$ и $\alpha|_{\partial P \cap \partial F} = \varphi(F)$ для каждой 2-компоненты F полиэдра P, инцидентной краю ∂P. Мы пишем $\varphi = \alpha \sqcup \beta$, если φ, α, β раскраски графов G, G_1, G_2 соответственно такие, что $G = G_1 \sqcup G_2$, $\varphi|_{G_1} = \alpha$ и $\varphi|_{G_2} = \beta$.

Раскраска φ полиэдра P определяет раскрашенный линк T_x^φ для каждой вершины x полиэдра P. Раскраска 1-остова тетраэдра описывается шестеркой цветов (i,j,k,l,m,n), где пары i и l, j и m, k и n – цвета противоположных ребер и l, m, n цвета треугольника в раскрашенном линке T_x^φ.

Фиксируем комплексное число q_0 такое, что $q_0^2 = q$. Для целого $n \geqslant 1$ положим

$$[n] = \frac{q_0^n - q_0^{-n}}{q_0 - q_0^{-1}} \in \mathbb{R}, \qquad [n]! = [n][n-1]\dots[2][1], \quad [0]! = [0] = 1.$$

Пусть полиэдр P раскрашен посредством φ, x его вершина, и раскраска φ_x линка T_x вершины x описывается шестеркой (i,j,k,l,m,n). Тогда вершине x сопоставляется вещественное число $|T_x^\varphi|$ по формуле

$$|T_x^\varphi| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{vmatrix} =$$

$$= (\sqrt{-1})^{2(i+j+k+l+m+n)}\Delta(i,j,k)\ \Delta(i,m,n)\ \Delta(j,l,n)\ \Delta(k,l,m)$$

$$\times \sum_z (-1)^z [z+1]!\ \Big\{[z-i-j-k]!\ [z-i-m-n]!\ [z-j-l-n]!$$

$$\times[z-k-l-m]![i+j+l+m-z]!\ [i+k+l+n-z]!$$

$$\times[j+k+m+n-z]!\Big\}^{-1},$$

где z пробегает целые такие, что

$$z \geqslant \max(i+j+k, i+m+n, j+l+n, k+l+m),$$

$$z \leqslant \min(i+j+l+m, i+k+l+n, j+k+m+n),$$

и где

$$\Delta(i,j,k) = \left(\frac{[i+j-k]!\ [i+k-j]!\ [j+k-i]!}{[i+j+k+1]!}\right)^{1/2}.$$

Вещественное число $|P|_\varphi$ сопоставляется полиэдру P, раскрашенному посредством раскраски $\varphi \in \operatorname{adm} P$, по формуле

$$|P|_\varphi = w^{-2\chi(P)+\chi(\partial P)} \prod_{r=1}^{s} w_{\varphi(F_r)}^{2\chi(F_r)} \prod_{s=1}^{b} w_{\varphi(E_s)}^{\chi(E_s)} \prod_{t=1}^{d} |\, T_{x_t}^{\varphi}|,$$

где $w_i = (\sqrt{-1})^{2i}[2i+1]^{1/2}$, $w = \sqrt{2r}/|q_0 - q_0^{-1}|$.

Формулой

$$\Omega_P(\alpha) = \begin{cases} \sum_{\varphi:\ \partial(\varphi)=\alpha} |P|_\varphi, & \text{если } \{\varphi\colon \partial(\varphi)=\alpha\} \neq \emptyset, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

полиэдру P сопоставляется число, зависящее только от раскраски края.

Если P – спайн некоторого многообразия M, тогда край ∂P пуст и множество $\operatorname{adm} \partial P$ тривиально. Ключевым фактом является то, что в этом случае число Ω_P определяется только многообразием M, т.е. для любого другого спайна P' многообразия M имеет место равенство $\Omega_{P'} = \Omega_P$. Инвариант $TV_q(M)$ многообразия определяется как Ω_P.

Следующая лемма, доказанная в [6], позволяет для вычисления инвариантов использовать склейку спайна из полиэдров.

Лемма 1 [6]. *Пусть простой 2-полиэдр X является объединением простых 2-полиэдров Y и Z и пусть каждая компонента пересечения $T = Y \cap Z$ является компонентой края ∂Y и края ∂Z. Тогда для любой допустимой раскраски β края ∂X*

$$\Omega_X(\beta) = \sum_{\alpha \in \mathrm{adm}\ T} \Omega_Y(\alpha \cup (\beta|_{Y \cap \partial X}))\Omega_Z(\alpha \cup (\beta|_{Z \cap \partial X})),$$

где $\alpha \cup (\beta|_{Y \cap \partial X})$ и $\alpha \cup (\beta|_{Z \cap \partial X})$ – раскраски краев ∂Y и ∂Z, индуцированые раскрасками α и β.

1.4 Матричные представления кобордизмов простых графов. В [6] под *кобордизмами* между простыми графами Γ и Δ понимаются тройки вида (X, i, j), где X простой 2-полиэдр, $i : \Gamma \to \partial X, j : \Delta \to \partial X$ – вложения такие, что $i(\Gamma) \cap j(\Delta) = \emptyset$, $i(\Gamma) \cup j(\Delta) = \partial X$. Композиция кобордизмов $(X, i, j) : \Gamma \to \Delta$ и $(Y, k, l) : \Delta \to \Sigma$ естественно определяется как кобордизм $(X \cup_{kj^{-1}: j(\Delta) \to k(\Delta)} Y; i, l)$. Простые графы являются объектами, а их кобордизмы – морфизмами категории, называемой *категорией простых* 2-*полиэдров* и обозначаемой $\underline{S}$.

Предположим, что для каждого простого графа Γ множество $\mathrm{adm}\ \Gamma$ как-то упорядочено. Тогда определяем отображение Φ как сопоставляющее каждому кобордизму $U = (X; i, j) : \Gamma \to \Delta$ матрицу Φ_U с элементами $\Omega(i(\alpha) \cup j(\beta))$, первый и второй индекс которых – допустимые раскраски первого и второго графов края $\alpha \in \mathrm{adm}\ \Gamma$ и $\beta \in \mathrm{adm}\ \Delta$ соответственно. Матричное равенство $\Phi_U \Phi_V = \Phi_{UV}$, где UV обозначает композицию кобордизмов U и V, следует непосредствено из леммы 1.

В [6] доказано, что число $\Omega_{P_1}(\alpha)$ равняется $\Omega_{P_2}(\alpha)$ для каждого полиэдра P_2, который может быть получен из полиэдра P_1 так называемыми *преобразованием Матвеева, лунным преобразованием* и *пузырьковым преобразованием*, примененными к $\mathrm{Int}\ P_1$. Следовательно, отображение Φ корректно определено для категории $\underline{Q}$, являющейся факторкатегорией категории $\underline{S}$ относительно этих преобразований.

Из трех названных преобразований в данной работе играет роль только лунное преобразование. Приведем его описание.

Пусть P – простой полиэдр. Предположим, что D – 2-компонента полиэдра P, гомеоморфная открытому диску и инцидентная ровно двум вершинам полиэдра P, и что замкнутая регулярная окрестность N диска D в полиэдре P такова, что $N-D$ гомеоморфно кольцу с двумя полукругами, приклеенными своими диаметрами. Граф ∂N представляет собой замкнутую цепочку из двух двойных и двух простых ребер. Обозначим через H полиэдр, гомеоморфный прямому произведению отрезка и графа гомеоморфного большой букве X. Он имеет такой же край, что и полиэдр N. Положим $P' = \mathrm{cl}\,(P-N) \cup_{\partial N = \partial H} H$. Тогда говорим, что полиэдр P' получен из полиэдра P *лунным преобразованием*. "Обратная" замена подполиэдра, гомеоморфного полиэдру H, полиэдром, гомеоморфным полиэдру N, также называется лунным преобразованием.

Инвариантность числа $\Omega_P(\alpha)$ относительно лунного преобразования для любого простого полиэдра P с раскрашенным краем следует из следующих соотношений ортогональности q-$6j$-символов.

Лемма 2 (свойство ортогональности [6]).

$$\sum_n \begin{Bmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} i' & j & n \\ l' & m & n' \end{Bmatrix} = \delta_{k,n'},$$

где n пробегает все цвета такие, что шестерки $(i,\, j,\, k,\, l,\, m,\, n)$ и $(i',\, j,\, n,\, l',\, m,\, n')$ допустимы. Здесь δ символ Кронекера.

1.5. Представление гомеотопий тора простыми полиэдрами с краем. Описываемое здесь представление разработано автором в [9].

Тэта-кривой называется граф, гомеоморфный окружности с диаметром. Тэта-кривую θ называем *размеченной*, если ее вершины и ребра пронумерованы. Вместо нумерации используется пометка символами v_1, v_2 и e_1, e_2, e_3 соответственно. Ребра считаются *ориентированными* от v_1 к v_2.

Полиэдр P с краем, состоящим из двух тэта-кривых, называем *ориентированным*, если одна из тэта-кривых края считается первой, другая – второй. Используем обозначения: θ_1, θ_2.

Полиэдр P называем *размеченным*, если его край состоит из тэта-кривых и тэта-кривые снабжены разметками (символически обозначаемыми m_1 и m_2, если тэта-кривых две). Чтобы избежать громоздкости в обозначениях, для ребер и вершин всех упоминаемых тэта-кривых используем один и тот же набор меток: e_1, e_2, e_3, v_1, v_2 – при необходимости оговаривая, о какой тэта-кривой идет речь. Размеченный ориентированный полиэдр P называем *произведением* размеченных ориентированных полиэдров P_1, P_2, если его можно получить склеиванием копий полиэдров P_1 и P_2 путем отождествления второй тэта-кривой из ∂P_1 с первой из ∂P_2 в соответствии с разметкой. Вообще говоря, свойства быть ориентированным и быть размеченным для полиэдра независимы. В данной работе разметка полиэдров используется только вместе с ориентацией. Поэтому для краткости далее под размеченностью полиэдра будем подразумевать также и его ориентированность, т. е. помеченность его тэта-кривых края символами θ_1 и θ_2.

Понятия размеченных полиэдров и их произведения являются частными случаями понятий кобордизмов и композиции кобордизмов. Отметим, что разметка тэта-кривой края задает вложение тэта-кривой в край простого полиэдра не непосредственно, а с точностью до изотопии – это, в частности, отличает данную конструкцию от примененной в [6].

Рассматриваем лишь полиэдры, получающиеся из следующего элементарного простого полиэдра.

Определение. *Пусть θ_1 и θ_2 две размеченные тэта-кривые, $a \vee b$ – букет ориентированных окружностей a и b с вершиной $*$, и клеточное отображение $f : \theta_1 \sqcup \theta_2 \to a \vee b$ действует по правилу:*

$$f|_{\theta_1} : e_1 \to a, \quad e_2 \to b, \quad e_3 \to *;$$

$$f|_{\theta_2} : e_1 \to a, \quad e_2 \to -b, \quad e_3 \to *.$$

Цилиндр $\mathrm{Cyl}(f)$ отображения f, рассматриваемый вместе с разметкой тэта-кривых, называем полиэдром J.

Обозначение буквой J объясняется словом join – “соединение” (англ).

Через $\langle J \rangle$ обозначаем моноид, порожденный полиэдром J и размеченными полиэдрами, гомеоморфными прямому произведению тэта-кривой на отрезок $\theta \times I$. Единицей в нем является $\theta \times I$ с разметкой, подчиненной прямому произведению. Нетрудно убедиться, что полиэдр J простой и, значит, все полиэдры в $\langle J \rangle$ тоже простые.

Размеченные полиэдры, гомеоморфные $\theta \times I$, образуют группу, изоморфную прямому произведению $S_3 \times \mathbb{Z}_2$, и имеют естественное отождествление с ее элементами. Эту группу порождают 4 инволютивных размеченных полиэдра, в силу отождествления обозначаемые -1, (12), (23), (13). Так что образующими моноида являются эти 4 полиэдра и полиэдр J.

Несложно убедиться, что лунным преобразованием квадрат размеченного (канонически) полиэдра J превращается в тождественный полиэдр, обозначаемый 1.

В [9] доказано, что фактормоноид $\langle J \mid J^2\rangle$ является группой, изоморфной группе гомеотопий тора. Причем этот изоморфизм согласуется с гомологиями в следующем смысле. Каждый размеченный полиэдр P из $\langle J\rangle$ определяет автоморфизм P^* группы гомологий размеченной тэта-кривой. Под согласованностью понимается выполнение равенства $P_1P_2 = P_1^*P_2^*$ для любых P_1, $P_2 \in \langle J\rangle$.

Примечание. Обозначение $\langle J \mid J^2\rangle$ введено как единый символ. Оно только внешне напоминает обозначения, применяемые для копредставлений групп, поскольку по самому определению данная алгебраическая конструкция задается не только образующими и соотношениями, но существенную роль играет и топология образующих полиэдров. Не очевидно, вообще говоря, какие полиэдры достаточно взять образующими, и какие достаточно выписать соотношения, для них выполняющиеся, чтобы можно было “забыть” о топологии участвующих полиэдров.

2. Матричное J-представление Виро–Тураева группы тора и его свойства

Тройкой $(i,\ j,\ k)$ будем обозначать раскраску размеченной тэта-кривой, согласно которой i, j, k соответственно цвета 1-компонент e_1, e_2, e_3 тэта-кривой.

Обозначим 2-компоненты полиэдра J следующим образом. Через E_1, E_2, E_3, E_4 обозначим 2-компоненты, инцидентные соответственно обоим ребрам с меткой e_1 края ∂J, обоим ребрам с меткой e_2 края ∂J, ребру $e_3 \in \theta_1 \subset \partial J$, ребру $e_3 \in \theta_2 \subset \partial J$. Раскраска полиэдра J описывается четверкой цветов $(i,\ j,\ k,\ n)$, где i, j, k, n – цвета 2-компонент E_1, E_2, E_3, E_4 соответственно.

Обозначим через E_1, E_2, E_3 2-компоненты полиэдра $\theta \times I$, инцидентные ребрам e_1, e_2, e_3 первой тэта-кривой θ_1 края соответственно. Тогда каждая тройка цветов $(i,\ j,\ k)$ описывает раскраску размеченного полиэдра $\theta \times I$. Напомним, что каждый размеченный полиэдр, гомеоморфный $\theta \times I$, мы обозначаем как произведение вида $\varepsilon\sigma$, где $\varepsilon \in \{1, -1\} \cong \mathbb{Z}_2$, $\sigma \in S_3$ – перестановка степени 3. Очевидно, если (i, j, k) раскраска тэта-кривой $\theta_1 \subset \partial(\varepsilon\sigma)$, где $\varepsilon\sigma \in \langle \theta \times I \rangle_m \cong \mathbb{Z}_2 \times S_3$, то раскраска тэта-кривой $\theta_2 \subset \partial(\varepsilon\sigma)$ равна $\sigma(i, j, k)$, т. е. результату действия перестановки σ на упорядоченном множестве (i, j, k).

Предложение 1. *Пусть $P = \varepsilon\sigma$ – размеченный полиэдр, гомеоморфный $\theta \times I$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$, $\sigma \in S_3$, и (i, j, k) – раскраска полиэдра P.*

Тогда раскраска $(i, j, k) \in \operatorname{adm} P$ тогда и только тогда, когда тройка (i, j, k) – допустимая. Если $(i, j, k) \in \operatorname{adm} P$, то $|P|_{(i,j,k)} = 1$.

$$\Omega_P((i, j, k) \sqcup (l, m, n)) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \ \ (l, m, n) = \sigma(i, j, k), \\ 0 & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Раскраска $(i, j, k, n) \in \operatorname{adm} J$ тогда и только тогда, когда тройки (i, j, k), (i, j, n) – допустимые.

$$|J|_{(i,j,k,n)} = \begin{Bmatrix} i & j & k \\ i & j & n \end{Bmatrix}.$$

$$\Omega_J((i, j, k) \sqcup (l, m, n)) = \begin{cases} \begin{Bmatrix} i & j & k \\ i & j & n \end{Bmatrix}, & \textit{если} \ \ (i, j) = (l, m), \\ 0 & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Предположим, что множество всех упорядоченных допустимых троек цветов $(i,\ j,\ k)$ в свою очередь тоже как-то упорядочено. Составим вещественнозначную симметричную матрицу Φ_J с элементами $\Omega_J((i, j, k) \sqcup (l, m, n)) = |J|_{(i,j,k,n)}$, используя раскраски $(i,\ j,\ k)$ первой тэта-кривой θ_1 как первый индекс и раскраски $(l,\ m,\ n)$ второй тэта-кривой θ_2 как второй индекс элементов матрицы. Заметим, что из предложения 1 следует, что каждый элемент $\Omega_J((i, j, k) \sqcup (l, m, n))$ матрицы Φ_J нулевой, если $(i, j) \neq (l, m)$. Следовательно, Φ_J имеет естественную структуру прямой суммы подматриц, соответствующих упорядоченным парам цветов (i, j).

Предложение 2. *J^2 и 1, рассматриваемые как полиэдральные кобордизмы категории $\underline{S}$, эквивалентны относительно лунного преобразования.*

Доказательство. Рассмотрим 2-компоненты: E_4 – первой копии J в J^2 и E_3 – второй копии J. Очевидно, $E_4 \cap \partial J = e_3 \subset \theta_2$ и $E_3 \cap \partial J_d = e_3 \subset \theta_1$, значит, объединение этих компонент является диском – обозначим его D – лежащим в $\mathrm{Int}\, J^2$ и инцидентным обеим вершинам полиэдра J^2. Обозначим N замкнутую окрестность диска D в полиэдре J^2. $N-D$ является кольцом, к которому два полукруга приклеены своими диаметрами. Следовательно, к J^2 применимо лунное преобразование вдоль N, и оно превращает J^2 в тот размеченный полиэдр вида $\theta \times I$, который является единицей 1 моноида $\langle J \rangle$. •

Как следствие, группу $\langle J \mid J^2 \rangle$ можно рассматривать как подкатегорию категории $\underline{Q}$.

Предложение 3. $\Phi_J^2 = E$.

Доказательство. Рассмотрим "скалярное произведение" строки, соответствующей раскраске (i, j, k) размеченной тэта-кривой, и столбец, соответствующий раскраске (l, m, n) размеченной тэта-кривой. Как было замечено, ненулевые элементы в таком произведении встречаются только если $i = l$, $j = m$. Применяя "свойство ортогональности", получаем требуемое равенство. •

Как следствие, имеем, что полученное матричное представление моноида $\langle J \rangle$ является также представлением группы $\langle J \mid J^2 \rangle$, изоморфной группе гомеотопий тора, а значит и представлением самой группы гомеотопий тора. Будем называть построенное матричное представление J-*представлением* группы гомеотопий тора и группу матриц – образ этого представления – обозначать $\Phi(\mathrm{Homeot}\,(T^2))$.

Предложение 4. *Матричный образ моноида* $\langle J \rangle$ *порождается тремя инволютивными матрицами*

$$\Phi_J,\ \Phi_{(12)},\ \Phi_{(23)}.$$

Доказательство. Утверждение немедленно следует из того, что образующими моноида $\langle J \rangle$ являются размеченные полиэдры J, (12), (23), -1, и что $\Phi_{-1} = E$. •

Матричный образ моноида является образом группы $\langle J \mid J^2 \rangle$, изоморфной группе гомеотопий тора, и поэтому с нашей стороны корректным будет обозначать этот образ $\Phi(\mathrm{Homeot}\,(T^2))$.

Пусть A – квадратная матрица размера $n > 1$ и $I_b = \{i_1, \dots, i_k\}$, $I_c = \{i_{k+1}, \dots, i_n\}$ – подмножества в $\{1, \dots, n\}$, $0 < k < n$. Обозначим через B и C подматрицы матрицы A, чьи элементы соответственно a_{ij}, $i \in I_b$, $j \in I_b$ и a_{ij}, $i \in I_c$, $j \in I_c$. Предположим, что

$a_{ij} = 0$ для каждого $i \in I_b$, $j \in I_c$ и для каждого $i \in I_c$, $j \in I_b$. Тогда мы говорим, что матрица A является *прямой суммой матриц* B *и* C, и символически выражаем это равенством $A = B \dotplus C$.

Обозначим через I_{01} подмножество множества всех упорядоченных допустимых троек, состоящее из единственной тройки $(0, 0, 0)$. Через I_{02} обозначим подмножество, состоящее из 3 упорядоченных троек с цветами 0, $\frac{r-2}{2}$, $\frac{r-2}{2}$. Через I_1 обозначим подмножество, состоящее из троек, содержащих только целые цвета и не входящих в подмножества I_{01}, I_{02}. Через I_2 обозначим подмножество, состоящее из троек, содержащих два истинно полуцелых цвета.

Предложение 5. *Каждая матрица группы* $\Phi(\mathrm{Homeot}\,(T^2))$ *является прямой суммой матриц относительно разбиения множества допустимых троек на подмножества* I_{01}, I_{02}, I_1, I_2.

Доказательство. Хорошо известно, что если две матрицы являются прямой суммой своих подматриц относительно одинакового разбиения индексов элементов, то их произведение является прямой суммой подматриц того же сорта. Следовательно, утверждение справедливо, поскольку, как легко убедиться, оно справедливо для образующих матриц образа представления: $\Phi_{(12)}$, $\Phi_{(23)}$, Φ_J. $\bullet$

Предложение 6. *Подгруппа* H *группы* $\langle J \mid J^2 \rangle$, *порожденная полиэдрами* -1, J, $(23)J(23)$, $(13)J(13)$, *имеет индекс* 6.

Это следует из того, что факторгруппа группы $\langle J \mid J^2 \rangle$ по H изоморфна симметрической группе S_3. $\bullet$

Следствие 1. *Если группа матриц* $\Phi(H)$ *конечна, то и группа матриц* $\Phi(\mathrm{Homeot}\,(T^2))$ *конечна.*

Обозначим I_0 объединение множеств $I_{01} \cup I_{02}$. Обозначим I_{21}, I_{22}, I_{23} подмножества множества I_2, чьи тройки содержат целый цвет на первой, второй и третьей позиции соответственно.

Предложение 7. *Восемь подпространств, соответствующих четырем элементам множества* I_0 *и четырем множествам* I_1, I_{21}, I_{22}, I_{23}, *инвариантны относительно действия элементов подгруппы* H.

Следствие 2. *Каждая матрица группы матриц $\Phi(H)$ является прямой суммой восьми матриц, соответствующих подмножествам*

$$\{0\,0\,0\},\quad \left\{0\ \frac{r-2}{2}\ \ \frac{r-2}{2}\right\},\quad \left\{\frac{r-2}{2}\ 0\,\frac{r-2}{2}\right\},$$

$$\left\{\frac{r-2}{2}\ \frac{r-2}{2}\ 0\right\},\quad I_1,\quad I_{21},\quad I_{22},\quad I_{23}$$

множества всех упорядоченных допустимых троек. Первая матрица (1), *вторая, третья и четвертая матрицы имеют вид* (± 1). *Матричная группа, порожденная первым матричным слагаемым, тривиальна. Вторая, третья и четвертая группы изоморфны друг другу и тривиальной группе, либо группе* $\mathbb{Z}_2$. *Шестая, седьмая и восьмая группы изоморфны между собой.*

Следует отметить, что идея различения раскрасок, содержащих и не содержащих полуцелые цвета, заимствована из работы Соколова [13] о разложении инварианта Виро–Тураева в сумму трех инвариантов.

§3. Конечность J-представлений группы тора уровней $r \leqslant 6$

Случаи $r = 3,\ 4,\ 5,\ 6$ рассматриваются последовательно. По сути, это рассмотрение сводится к механическому применению формул п. 1.3, конструкции матричной группы $\Phi(\mathrm{Homeot}\,(T^2))$ из §2 и использованию свойств этой конструкции, выведенных в §3. Результаты вычислений приведены лишь для одного значения $q = \sqrt[r]{1}$ для каждого r. Матричные группы, получаемые для разных q при фиксированном r, оказываются изоморфными. Можно еще заметить, что у элемента $-1 \in \langle J\rangle$ матричный образ всегда тривиален, и следовательно, представление может рассматриваться как представление группы $PSL(2,\mathbb{Z}) = SL(2,\mathbb{Z})/\{E,-E\}$. Во всех случаех конечность группы $\Phi(\mathrm{Homeot}\,(T^2))$ выводится из конечности группы $\Phi(H)$.

3.1. Случай $r = 3$. Данные для вычислений:

$$[1] = 1,\qquad w_0^2 = 1,\qquad w_{\frac12}^2 = -1,\qquad \begin{vmatrix} \frac12 & \frac12 & 0\\ \frac12 & \frac12 & 0\end{vmatrix} = -1.$$

Упорядоченное множество упорядоченных допустимых троек распадается на следующие инвариантные подмножества:

$$I_0 = \left\{000,\ 0\frac{1}{2}\,\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0\right\}, \qquad I_1 = I_{21} = I_{22} = I_{23} = \emptyset.$$

Матрицы, порождающие группу $\Phi(\mathrm{Homeot}\,(T^2))$:

$$\Phi_J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{(13)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_{(23)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы, порождающие вместе с Φ_J подгруппу $\Phi(H)$:

$$\Phi_{(13)J(13)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Phi_{(23)J(23)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $\Phi(H) \cong \mathbb{Z}_2^3$.

3.2. Случай $r = 4$**.** Данные для вычислений:

$$[1] = [3] = 1, \qquad [2] = \sqrt{2},$$

$$w_0^2 = w_1^2 = 1, \quad w_1 w_0 = -1, \quad w_{\frac{1}{2}}^2 = -1,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Упорядоченное множество упорядоченных допустимых троек цветов распадается на следующие инвариантные подмножества:

$$I_0 = \{000,\ 011,\ 101,\ 110\}; \quad I_1 = \emptyset;$$

$$I_{21} = \left\{0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2},\ 1\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right\}; \quad I_{22} = \left\{\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\,1\,\frac{1}{2}\right\}; \quad I_{23} = \left\{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0,\ \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,1\right\}.$$

$$\Phi_J = E \dotplus A \dotplus A \dotplus B,$$

$$\Phi_{(13)J(13)} = E \dotplus B \dotplus A \dotplus A,$$

$$\Phi_{(23)J(23)} = E \dotplus A \dotplus B \dotplus A,$$

где

$$E = (1) \dotplus (1) \dotplus (1) \dotplus (1), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, группа $\Phi(H)$ изоморфна подгруппе в прямом произведении трех копий матричной группы G, порожденной двумя матрицами A и B. Легко убедиться, что группа G изоморфна диэдральной группе D_8. Следовательно, $\Phi(H)$ конечна.

3.3. Случай $r = 5$. Данные для вычислений:

$$[1] = [4] = 1, \quad [2] = [3] = \varepsilon = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

$$w_0^2 = 1,\ w_1 w_0 = -\varepsilon^{\frac{1}{2}},\ w_1^2 = \varepsilon,\ w_{\frac{1}{2}}^2 = -\varepsilon,\ w_{\frac{3}{2}}^2 = -1,\ w_{\frac{1}{2}} w_{\frac{3}{2}} = \varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\varepsilon^{-2}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \varepsilon^{-1},$$

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \varepsilon^{-2}, \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} = \varepsilon^{-1},$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\varepsilon^{-1}.$$

Упорядоченное множество упорядоченных троек цветов распадается на следующие 5 инвариантных подмножеств:

$$I_0 = \left\{000, 0\frac{3}{2}\frac{3}{2}, \frac{3}{2}0\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\frac{3}{2}0\right\}; \qquad I_1 = \{011, 101, 110, 111\};$$

$$I_{21} = \left\{0\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\frac{3}{2}, 1\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 1\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\}; \qquad I_{22} = \left\{\frac{1}{2}0\frac{1}{2}, \frac{3}{2}1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}1\frac{3}{2}\right\};$$

$$I_{23} = \left\{\frac{1}{2}\frac{1}{2}0, \frac{3}{2}\frac{1}{2}1, \frac{1}{2}\frac{1}{2}1, \frac{1}{2}\frac{3}{2}1\right\}.$$

$$\Phi_J = E_4 \dotplus A_1 \dotplus B_2 \dotplus B_3 \dotplus B_1,$$

$$\Phi_{(13)J(13)} = E_2 \dotplus A_2 \dotplus B_1 \dotplus B_2 \dotplus B_2,$$

$$\Phi_{(23)J(23)} = E_3 \dotplus A_3 \dotplus B_3 \dotplus B_1 \dotplus B_3,$$

где

$$E_2 = (1) \dotplus (-1) \dotplus (1) \dotplus (1),$$

$$E_3 = (1) \dotplus (1) \dotplus (-1) \dotplus (1),$$

$$E_4 = (1) \dotplus (1) \dotplus (1) \dotplus (-1),$$

A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 соответственно следующие матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-1} & -\varepsilon^{-1/2} \\ 0 & 0 & -\varepsilon^{-1/2} & -\varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 & 0 & -\varepsilon^{-1/2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon^{-1/2} & 0 & 0 & -\varepsilon^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} & 0 & -\varepsilon^{-1/2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon^{-1/2} & 0 & -\varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -\varepsilon^{-1} & 0 & \varepsilon^{-1/2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \varepsilon^{-1/2} & 0 & \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-1/2} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1/2} & -\varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-1/2} \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-1/2} & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}.$$

$\Phi(H)$ – подгруппа в прямом произведении пяти конечных матричных групп. Первая группа изоморфна группе $\mathbb{Z}_2^3$. Вторая группа изоморфна бинарной группе икосаэдра. 3-я, 4-я и 5-я группы порождаются одинаковыми матрицами с точностью до сопряжения, и изоморфны прямому произведению бинарной группы икосаэдра и группы $\mathbb{Z}_2$. Следовательно, группа $\Phi(H)$ конечна.

3.4. Случай $r = 6$. Данные для вычислений:

$$[1] = [5] = 1, \quad [2] = [4] = \sqrt{3}, \quad [3] = 2,$$

$$w_0^2 = w_0 w_2 = w_2^2 = 1, \quad w_1^2 = 2, \quad w_0 w_1 = w_1 w_2 = -\sqrt{2},$$

$$w_{\frac{1}{2}}^2 = w_{\frac{3}{2}}^2 = -\sqrt{3}, \quad w_{\frac{1}{2}} w_{\frac{3}{2}} = \sqrt{3},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

Упорядоченное множество упорядоченных допустимых троек распадается на следующие инвариантные подмножества:

$$I_0 = \{000,\ 022,\ 202,\ 220\}; \quad I_1 = \{011,\ 101,\ 110,\ 111,\ 211,\ 121,\ 112\};$$

$$I_{21} = \left\{2\frac{1}{2}\frac{3}{2},\ 2\frac{3}{2}\frac{1}{2},\ 1\frac{1}{2}\frac{3}{2},\ 1\frac{3}{2}\frac{1}{2},\ 1\frac{1}{2}\frac{1}{2},\ 1\frac{3}{2}\frac{3}{2},\ 0\frac{1}{2}\frac{1}{2},\ 0\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\};$$

$$I_{22} = \left\{\frac{1}{2}2\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}2\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}1\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}1\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}1\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}1\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}0\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}0\frac{3}{2}\right\};$$

$$I_{23} = \left\{\frac{1}{2}\frac{3}{2}2,\ \frac{3}{2}\frac{1}{2}2,\ \frac{1}{2}\frac{3}{2}1,\ \frac{3}{2}\frac{1}{2}1,\ \frac{1}{2}\frac{1}{2}1,\ \frac{3}{2}\frac{3}{2}1,\ \frac{1}{2}\frac{1}{2}0,\ \frac{3}{2}\frac{3}{2}0\right\}.$$

$$\Phi_J = E \dotplus A_0 \dotplus A_1 \dotplus A_2 \dotplus A_3,$$

$$\Phi_{(13)J(13)} = E \dotplus B_0 \dotplus B_1 \dotplus B_2 \dotplus B_3,$$

$$\Phi_{(23)J(23)} = E \dotplus C_0 \dotplus C_1 \dotplus C_2 \dotplus C_3,$$

$$\text{где} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = A_2 = C_3$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \dot{+} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \dot{+} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = B_3 = C_1$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \dot{+} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \dot{+} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = B_1 = C_2$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

$$A_3 = B_1 = C_2$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Матрицы A_i, B_i, C_i $(i = 1, 2, 3)$ представлены как прямые суммы матриц сугубо для краткости.

Исследуемая подгруппа матриц является подгруппой в прямом произведении 5 матричных групп. Первая группа – тривиальна.

Вторая группа. Заменим базис e_{011}, e_{101}, e_{110}, e_{111}, e_{211}, e_{121}, e_{121} на

$$\frac{e_{211} - e_{011}}{\sqrt{2}}, \quad \frac{e_{121} - e_{101}}{\sqrt{2}}, \quad \frac{e_{112} - e_{110}}{\sqrt{2}}, \quad e_{111},$$
$$\frac{e_{211} + e_{011}}{\sqrt{2}}, \quad \frac{e_{121} + e_{101}}{\sqrt{2}}, \quad \frac{e_{112} + e_{110}}{\sqrt{2}}.$$

В каждой матрице $\Phi(J)$, $\Phi((13)J(13))$, $\Phi((23)J(23))$ второе матричное слагаемое превращается в матрицу, которая переставляет вектор e_{111} и один из первых трех новых базисных векторов. Так что вторая группа изоморфна симметрической группе S_4.

Ясно, что последние три матричные группы изоморфны матричной группе $\langle A_2, B_2, C_2 \rangle$, порожденной тремя матрицами. Исследуем эту группу.

Удобным оказывается заменить базис

$$e_{\frac{1}{2}2\frac{3}{2}}, \quad e_{\frac{3}{2}2\frac{1}{2}}, \quad e_{\frac{1}{2}1\frac{3}{2}}, \quad e_{\frac{3}{2}1\frac{1}{2}}, \quad e_{\frac{1}{2}1\frac{1}{2}}, \quad e_{\frac{3}{2}1\frac{3}{2}}, \quad e_{\frac{1}{2}0\frac{1}{2}}, \quad e_{\frac{3}{2}0\frac{3}{2}}$$

на

$$\frac{e_{\frac12 2\frac32}+e_{\frac32 2\frac12}}{\sqrt2},\quad \frac{e_{\frac12 2\frac32}-e_{\frac32 2\frac12}}{\sqrt2},\quad \frac{e_{\frac12 1\frac32}+e_{\frac32 1\frac12}}{\sqrt2},\quad \frac{e_{\frac12 1\frac32}-e_{\frac32 1\frac12}}{\sqrt2},$$

$$\frac{e_{\frac12 2\frac32}+e_{\frac32 2\frac12}}{\sqrt2},\quad \frac{e_{\frac12 2\frac32}-e_{\frac32 2\frac12}}{\sqrt2},\quad \frac{e_{\frac12 1\frac32}+e_{\frac32 1\frac12}}{\sqrt2},\quad \frac{e_{\frac12 1\frac32}-e_{\frac32 1\frac12}}{\sqrt2},$$

$$\frac{e_{\frac12 1\frac12}+e_{\frac32 1\frac32}}{\sqrt2},\quad \frac{e_{\frac12 1\frac12}-e_{\frac32 1\frac32}}{\sqrt2},\quad \frac{e_{\frac12 0\frac12}+e_{\frac32 0\frac32}}{\sqrt2},\quad \frac{e_{\frac12 0\frac12}-e_{\frac32 0\frac32}}{\sqrt2}.$$

Тогда мы получаем, что матрица A_2 принимает вид прямой суммы матриц $A_{21}\dotplus A_{22}$, матрица B_2 принимает вид $B_{21}\dotplus B_{22}$, C_2 – вид $C_{21}\dotplus C_{22}$, где $A_{21}=B_{21}=A_{22}$, $C_{21}=C_{22}$,

$$A_{22}=(-1)\dotplus\begin{pmatrix}\frac12 & -\frac{\sqrt3}{2}\\ -\frac{\sqrt3}{2} & -\frac12\end{pmatrix}\dotplus(1),$$

$$B_{22}=(-1)\dotplus\begin{pmatrix}\frac12 & \frac{\sqrt3}{2}\\ \frac{\sqrt3}{2} & -\frac12\end{pmatrix}\dotplus(1),$$

$$C_{22}=\begin{pmatrix}\sqrt{\frac13} & \sqrt{\frac23}\\ \sqrt{\frac23} & -\sqrt{\frac13}\end{pmatrix}\dotplus\begin{pmatrix}\sqrt{\frac13} & \sqrt{\frac23}\\ \sqrt{\frac23} & -\sqrt{\frac13}\end{pmatrix}.$$

Матричная группа $\langle A_2,B_2,C_2\rangle$ является подгруппой в прямом произведении $\langle A_{21},C_{21}\rangle\times\langle A_{22},B_{22},C_{22}\rangle$. Первая группа изоморфна подгруппе во второй группе. Обозначим через F вторую группу. Нетрудно убедиться, что орбита первого и четвертого базисных векторов пространства $\mathbb{R}^4$ относительно действия группы F на $\mathbb{R}^4$ общая и состоит из 16 векторов. Аналогично, общая орбита второго и третьего векторов состоит из 48 векторов.

Следовательно, группа F конечна, и группа $\langle A_2,B_2,C_2\rangle$ конечна, и значит группа $\Phi(H)$ конечна.

Автор благодарит С. В. Матвеева за постановку задач и поддержку в работе.

Литература

1. М. Атья, *Геометрия и физика узлов*. Мир. М., 1995.
2. G. Wright, *The Reshetikhin–Turaev representation of the mapping class group*. — J. Knot Theory and Its Ramification **3** (1994), 547–574.

3. G. Wright, *The Reshetikhin–Turaev representation of the mapping class groups at sixth root of unity.* — J. Knot Theory and Its Ramification **5** (1996), 721–741.
4. T. Kohno, *Topological invariants of 3-manifolds using representations of mapping class group.* — Topology **31** (1992), 203–230.
5. L. C. Jeffrey, *Chern–Simons–Witten invariants of lens spaces and torus bundles, and the semiclassical approximation.* — Commun. Math. Phys. **147** (1992), 563–604.
6. V. G. Turaev, O. Y. Viro, *State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols.* — Topology **31** (1992), 865–902.
7. V. G. Turaev, *Quantum invariants of knots and 3-manifolds.* vol. 18, de Gruyter Studies in Math., 1994.
8. J. Roberts, *Skein-theory and the Turaev–Viro invariants.* preprint.
9. М. А. Овчинников, *Представление гомеотопий тора простыми полиэдрами с краем.* — Мат. заметки **66**, № 4 (1999), 593–540.
10. B. G. Casler, *An embedding theorem for connected 3-manifolds with boundary.* — Proc. Am. Math. Soc. **16** (1965), 559–566.
11. С. В. Матвеев, *Специальные остовы кусочно линейных многообразий.* — Мат. сб. **92 (134)**, № 2 (1973), 282–293.
12. С. В. Матвеев, *Преобразования специальных спайнов и гипотеза Зимана.* — Изв. АН СССР **51**, № 5 (1987), 1104–1115.
13. M. V. Sokolov, *The Turaev–Viro invariant for 3-manifold is a sum of three invariants.* — Canad. Math. Bull. **39** no. 4 (1996), 468–475.

Ovchinnikov M. A. On properties of Viro–Turaev representations of a mapping class group of a torus.

Matrix realizations for the Viro–Turaev representations of the mapping class group of a torus are constructed. Each of the representations is generated by three involutive matrices. For the levels $r = 3, 4, 5, 6$, the finiteness of the representations is proved.

Челябинский государственный университет
ovch@cgu.chel.su

Поступило 19 июня 2000 г.