Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 267, 2000 г.

А. В. Малютин

УПОРЯДОЧЕНИЯ НА ГРУППАХ КОС, ОПЕРАЦИИ НАД ЗАМКНУТЫМИ КОСАМИ И ПОДТВЕРЖДЕНИЕ ГИПОТЕЗ МЕНАСКО

Определения используемых понятий и объектов, таких как фундаментальные косы Δ и δ, характеристики кос и классов сопряженных кос sp (summit power), inf и sup, можно найти в работах [2, 3, 4]. Замыкание косы β будем обозначать через $\widehat{\beta}$, а ее зеркальный образ – через β^*.

§1. Введение

1.1. Классификация Нильсена–Терстона. Группа кос B_n изоморфна группе изотопических классов неподвижных на границе диффеоморфизмов диска D^2 с n выколотыми точками. (Как хорошо известно, эта группа канонически изоморфна группе классов отображений $MCG(D^2_n)$ – mapping class group.) Поэтому классификация Нильсена–Терстона диффеоморфизмов поверхностей [19] индуцирует разбиение множества всех кос на три типа (ср. [13]):

(а) периодические,

(б) псевдоаносовские и

(в) разложимые.

При этом сопряженные косы относятся к одному типу.

Если $\beta \in B_n$ – *периодическая* коса, то для некоторого p коса β^n равна p полным оборотам всех своих нитей ($\beta^n = \Delta^{2p}$) [15], и, следовательно, $\widehat{\beta}$ представляет торическое зацепление типа (p, n). Будем говорить, что β – периодическая коса типа (p, n).

Если коса β *псевдоаносовская*, то с ней тоже можно связать некоторое торическое зацепление: его образуют внешние особенности инвариантного трэйн-трэка соответствующего ей диффеоморфизма [13]. Тип этого зацепления обозначим (p_β, q_β) и будем говорить, что β – псевдоаносовская коса типа (p_β, q_β).

Работа частично поддержана РФФИ, грант № 00-15-96024.

1.2. Операции над замкнутыми косами. В силу известной связи между косами и зацеплениями [1, 16] представляют интерес следующие операции над замкнутыми косами, не меняющие тип представляемого косой зацепления и не увеличивающие индекса (числа нитей) косы:

(d) дестабилизация (индекс косы уменьшается на 1) (рис. 1),

(e) операция замены ((e) – от exchange move) (рис. 2),

(f) обобщенная операция замены ((f) – от flip) (рис. 3).

(операция (e) – частный случай операции (f)).

Некоторые связанные с этими операциями результаты можно найти в работах [5–10, 14, 17, 18].

1.3. Гипотезы Менаско. Менаско предложил следующие гипотезы (см. [13], Problem 1.84):

(C) Пусть β – периодическая коса типа (p,n). Если $|p/n|>1$, то $\widehat{\beta}$ не допускает операций (d), (e), (f).

Пусть β – псевдоаносовская коса типа (p_β, q_β). Тогда:

(D) Если $\widehat{\beta}$ допускает операцию (d), то $|p_\beta/q_\beta|\le 1$.

(E) Если $\widehat{\beta}$ допускает операцию (e), то $|p_\beta/q_\beta|\le 2$.

(F) Если $\widehat{\beta}$ допускает операцию (f), то $|p_\beta/q_\beta|\le 4$.

Главная цель этой заметки – анонс доказательства уточнений этих гипотез (все они верны, кроме части гипотезы (C), касающейся операции (f), причем утверждения гипотез (E) и (F) верны в усиленном варианте).

§2. Упорядочения на группе кос и число вращения (замкнутой) косы

2.1. Упорядочение $\preceq$. Поднимая петли из D_n^2 в универсальное накрывающее, мы получаем отображение $\pi_1(D_n^2)\setminus\{e\}\to S^1\setminus \mathrm{pt}=\mathbb{R}$, при котором петле соответствует поднятие ее конца. Тем самым на $\pi_1(D_n^2)$ определен естественный линейный порядок ($\leqslant$). В свою очередь, этот порядок определяет каноническое двусторонне-инвариантное частичное упорядочение на $MCG(D_n^2)$ и, тем самым, на B_n:

$$f\preceq g,\quad \text{если}\quad \forall\alpha\in\pi_1(D_n^2):\ f(\alpha)\leqslant g(\alpha).$$

Замечание. Двусторонне-инвариантного линейного порядка на B_n при $n>2$ не существует. Порядок $\leqslant$ на $\pi_1(D_n^2)$ позволяет получать различные односторонне-инвариантные линейные порядки на B_n, расширяющие упорядочение $\preceq$, которое является в точности их пересечением. Эти линейные порядки “по Терстону” описываются и изучаются в работе [21]. Ср. [11, 20].

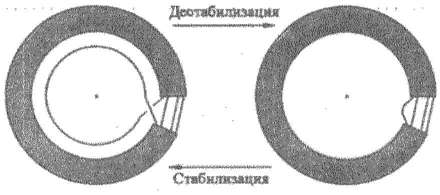

Рис.1

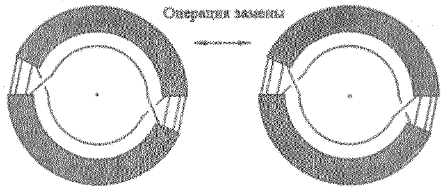

Рис.2

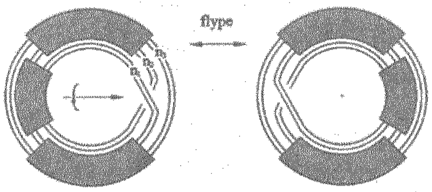

Рис.3

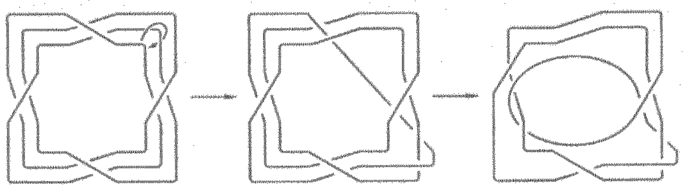

Рис.4

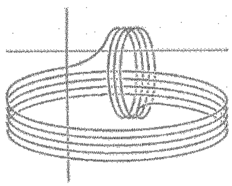

Рис.5

2.2. Число вращения косы. Пусть $p = \Delta^2 = \delta^n$ – полный оборот косы. Рассмотрим следующую бесконечную в обе стороны последовательность:

$$\ldots \prec p^{-1} \prec p^0 \prec p^1 \prec p^2 \prec \ldots$$

Оказывается, что по отношению к введенному упорядочению $\preceq$ произвольная коса может быть несравнима не более чем с одним элементом этой последовательности. Вследствие этого, например, корректно определена следующая функция:

$$\mathrm{w}(\beta) = k, \quad \text{если} \quad p^k \preceq \beta \prec p^{k+1} \quad \text{либо} \quad \beta \quad \text{несравнима с} \quad p^k.$$

Из двусторонней инвариантности упорядочения $\preceq$ следует, что на сопряженных косах функция w принимает равные значения.

Оказывается, последовательность $\{\mathrm{w}(\beta^i)/i\}$ сходится. Мы называем ее предел *числом вращения* косы β и обозначаем ω_β:

$$\omega_\beta := \lim_{i\to\infty} \frac{\mathrm{w}(\beta^i)}{i}.$$

2.3. Свойства числа вращения.

1) *У сопряженых кос числа вращения равны. Таким образом, число вращения определено и для замкнутых кос.*

2) *Если коса β несравнима с p^k, то $\omega_\beta = k$; если $p^k \preceq \beta \preceq p^{k+1}$, то $\mathrm{w}(\beta) \in [k, k+1]$.*

3) *Число вращения косы связано с ее характеристиками* inf, sup *и* sp *следующими неравенствами:*

$$\inf(\beta) \leqslant n\omega_\beta \leqslant \sup(\beta), \qquad \mathrm{sp}(\beta) \leqslant 2\omega_\beta \leqslant -\mathrm{sp}(\beta^*).$$

В силу свойства 1), *аналогичные неравенства верны и для замкнутых кос.*

4) *Если β – периодическая коса типа (p, n), то $\omega_{\widehat{\beta}} = p/n$. Если β – псевдоаносовская коса, то $\omega_{\widehat{\beta}} = p_\beta/q_\beta$.*

5) *Число вращения принимает лишь рациональные значения, причем если $\beta \in B_n$, то $\omega_\beta = p/q$, где p, q – целые, $1 \leqslant q \leqslant n$.*

Свойство 5) позволяет легко вычислять числа вращения (замкнутых) кос.

§3. Основная теорема и подтверждение гипотез Менаско

3.1. Теорема. *Пусть $\beta \in B_n$, $\widehat{\beta}$ – замыкание β. Тогда:*

1) *Если $\beta \succeq p$ или $\beta \preceq p^{-1}$, то $\widehat{\beta}$ не допускает операций* (d) *и* (e).

2) *Если $\beta \succeq p^2$ или $\beta \preceq p^{-2}$, то $\widehat{\beta}$ не допускает операции* (f).

Упорядочение $\preceq$ включает в себя простейшее упорядочение на основе положительных кос, используемое в [3, 4] при определении inf и sup, поэтому верно:

3.2. Следствие. *Пусть $\beta \in B_n$, $\widehat{\beta}$ – замыкание β. Тогда:*

1) *Если $\widehat{\beta}$ допускает операцию* (d) *или* (e), *то выполняются неравенства:*

$$\inf(\widehat{\beta}) \leqslant n-1, \quad \sup(\widehat{\beta}) \geqslant -n+1,$$

и, следовательно,

$$\operatorname{sp}(\widehat{\beta}) \leqslant 1, \quad \operatorname{sp}(\widehat{\beta}^*) \geqslant -1.$$

2) *Если $\widehat{\beta}$ допускает операцию* (f), *то выполняются неравенства:*

$$\inf(\widehat{\beta}) \leqslant 2n-1, \quad \sup(\widehat{\beta}) \geqslant -2n+1$$

и, следовательно,

$$\operatorname{sp}(\widehat{\beta}) \leqslant 3, \quad \operatorname{sp}(\widehat{\beta}^*) \geqslant -3.$$

Из теоремы 3.1 и свойства 2) числа вращения следует

3.3. Теорема. *Пусть $\beta \in B_n$, $\widehat{\beta}$ – замыкание β. Тогда:*

1) *Если $\widehat{\beta}$ допускает операцию* (d) *или* (e), *то $|\omega_{\widehat{\beta}}| \leqslant 1$.*

2) *Если $\widehat{\beta}$ допускает операцию* (f), *то $|\omega_{\widehat{\beta}}| \leqslant 2$.*

Эта теорема в сочетании со свойством числа вращения 4) позволяет верифицировать гипотезы Менаско. Получаем:

3.4. Следствие (уточненные гипотезы Менаско).

Пусть β – периодическая коса типа (p,n). Тогда:

(C)$_{(d)}$ *Если $|p/n| > 1$, то $\widehat{\beta}$ не допускает операции* (d).

(C)$_{(e)}$ *Если $|p/n| > 1$, то $\widehat{\beta}$ не допускает операции* (e).

(C)$_{(f)}$ *Если $|p/n| > 2$, то $\widehat{\beta}$ не допускает операции* (f).

Пусть β – псевдоаносовская коса типа (p_β, q_β). Тогда:

(D) *Если $\widehat{\beta}$ допускает операцию* (d), *то $|p_\beta/q_\beta| \leq 1$.*

$((E)_+)$ *Если* $\widehat{\beta}$ *допускает операцию* (e), *то* $|p_\beta/q_\beta| \leq 1$.

$((F)_{++})$ *Если* $\widehat{\beta}$ *допускает операцию* (f), *то* $|p_\beta/q_\beta| \leq 2$.

Замечание 1. Утверждение $(C)_{(d)}$ в действительности следует из известного результата Шуберта о минимальности замкнутой торической косы типа (p, q) с $p < q$.

Замечание 2. Можно показать, что замыкание периодической косы β типа (p, n) при $1 < |p/n| < 2$ допускает операцию (f) (пример – рис. 4).

Замечание 3. Из теоремы 3.3 также следует, что в общем случае операций (d), (e) и (f) недостаточно для того, чтобы свести косу, представляющую некоторое зацепление, к косе минимального возможного для этого зацепления индекса (к минимальной косе).

На рис. 5 приведен пример неминимальной косы, которая имеет число вращения > 2 и, следовательно, не допускает операций (d), (e) и (f).

Литература

1. J. W. Alexander, *A lemma on system of knotted curves.* — Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **9** (1923), 93–95.
2. J. S. Birman, *Braids, Links and Mapping Class Groups.* Ann. Math. Studies 82, Princeton, N. J., Princeton Univ. Press, 1974.
3. J. S. Birman, K. H. Ko, and S. J. Lee, *A new approach to the word and conjugacy problem in the braid groups.* — Adv. Math. **139** (1998), 322–353.
4. J. S. Birman, K. H. Ko, and S. J. Lee, *The infimum, supremum, and geodesic length of a braid conjugacy class.* preprint.
5. J. Birman and W. Menasco, *Studying links via closed braids* I: *A finiteness theorem.* — Pacific J. Math. **154** (1992), 17–36.
6. J. Birman and W. Menasco, *Studying links via closed braids* II: *On a theorem of Bennequin.* — Topology Appl. **40** (1991), 71–82.
7. J. Birman and W. Menasco, *Studying links via closed braids* III: *Classifying links which are closed 3-braids.* — Pacific J. Math. **161** (1993), 25–113.
8. J. Birman and W. Menasco, *Studying links via closed braids* IV: *Split links and composite links.* — Invent. Math. **102** (1990), 115–139.
9. J. Birman and W. Menasco, *Studying links via closed braids* V: *Closed braid representations of the unlink.* — Trans. Am. Math. Soc. **329** (1992), 585–606.
10. J. Birman and W. Menasco, *Studying links via closed braids* VI: *A non-finiteness theorem.* — Pacific J. Math. **156** (1992), 265–285.
11. P. Dehornoy, *Braid groups and left distributive operations.* — Trans. Am. Math. Soc. **345** (1994), 115–151.
12. J. Harer and R. C. Penner, *Combinatorics of Train Tracks.* Ann. Math. Studies 125, Princeton, N. J., Princeton University Press, 1992.

13. R. Kirby, *Problems in Low-Dimensional Topology.* Berkeley University Press.
14. J. Los, *Knots, braid index, and dynamical type.* — Topology **33** (1994), 257–270.
15. J. Los, *Pseudo-Anosov maps and invariant train tracks in the disc: a finite algorithm.* — Proc. London Math. Soc. **66** (1993), 400–430.
16. А. А. Марков, *Uber die freie Äquivalenz der geschlossenen Zöpfe.* — Мат. сб. **1 (43)** (1936), 73–78.
17. W. Menasco, *On iterated torus knots and transversal knots.* preprint.
18. H. Morton, *An irreducible 4-string braid with unknotted closure.* — Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **93** (1983), 259–261.
19. W. P. Thurston, *On the geometry and dynamics of diffeomorfisms of surfaces.* — Bull. Am. Math. Soc. **19** (1988), 417–432.
20. R. Fenn, M. T. Greene, D. Rolfsen, C. Rourke, and B. Wiest, *Ordering the braid groups.* — Pacific J. Math. **191** (1999), 41–74.
21. H. Short and B. Wiest, *Orderings of mapping class groups after Thurston.* preprint `http://www.pims.math.ca/ bertw/`.

Malyutin A. V. Orderings on braid groups, operations on closed braids, and confirmation of Menasco's conjectures.

Conditions are described necessary for certain operations on closed braids to be admissible. Menasco's conjectures are proved as a corollary.

С.-Петербургский государственный университет
email mobraid@mail.ru
mo@ao1415.spb.edu

Поступило 1 августа 2000 г.