Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 267, 2000 г.

В. И. Звонилов

ЖЕСТКИЕ ИЗОТОПИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ТРИГОНАЛЬНЫХ КРИВЫХ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ХИРЦЕБРУХА

§1. Введение

Понятие жесткой изотопии как пути в пространстве неособых плоских вещественных алгебраических кривых данной степени было введено в 1978 г. Рохлиным [1]. В более широком смысле под жесткой изотопией кривых некоторого класса понимается путь в пространстве таких кривых. К настоящему времени классификация неособых вещественных алгебраических кривых с точностью до жестких изотопий известна для кривых степени $m \le 6$ на $\mathbb{R}P^2$ (см. [1–3]), для кривых бистепеней $(m,1)$, $(m,2)$ и $(3,3)$ на гиперболоиде и эллипсоиде [11, 13, 4], а также для некоторых простейших классов особых кривых на тех же поверхностях [2, 5, 13, 4]. В настоящей работе доказывается, что *неособая вещественная алгебраическая кривая бистепени* $(m,3)$ *на поверхности Хирцебруха* Σ_1 *определена с точностью до жесткой изотопии своей вещественной схемой и типом комплексного сопряжения* (определения и обозначения см. в §2). При этом обобщается метод, предложенный Харламовым [2] для изучения жестких изотопий кривых степени 5 с особой точкой. Получены также некоторые следствия для особых кривых на гиперболоиде и на поверхности Σ_2.

§2. Кривые на поверхностях Хирцебруха

Нам потребуются следующие хорошо известные свойства поверхности Хирцебруха Σ_k, $k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ (см., напр., [6]). Это рациональная линейчатая поверхность, которая является пространством линейного расслоения $\pi\colon \Sigma_k \to P^1$. В частности, $\Sigma_0 =$

Работа поддержана грантом No. 97-0-1.2-41 Министерства образования России (конкурс на базе СПбГУ).

$P^1 \times P^1$, а Σ_1 есть P^2 с раздутой точкой. Для всех, кроме одного, голоморфных сечений этого расслоения образ R такого сечения имеет индекс самопересечения $R^2 = k$, а для образа E исключительного сечения (единственного при $k > 0$) $E^2 = -k$. Пусть L – один из слоев расслоения π. Тогда

$$\{mL + nR \mid m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \cup \{E = R - kL\}$$

есть множество всех простых дивизоров на Σ_k. *Бистепенью* кривой $F = mL + nR$ назовем пару (m, n); для всех, кроме E, неприводимых кривых числа m, n – неотрицательные целые. Род неособой неприводимой кривой бистепени (m, n) есть

$$g = (m-1)(n-1) + \frac{n(n-1)}{2}k. \tag{1}$$

Пусть conj – антиголоморфная инволюция на множестве $\mathbb{C}\Sigma_k$ комплексных точек поверхности Σ_k, такая, что $\forall z \in \mathbb{C}\Sigma_k$ точка $\pi\,\mathrm{conj}(z) = \overline{\pi(z)}$ комплексно сопряжена с $\pi(z)$ в $\mathbb{C}P^1$. Тогда вещественная часть $\mathbb{R}\Sigma_k = \mathrm{fix\,conj}$ поверхности гомеоморфна тору $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$ при четном k и бутылке Клейна $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ при нечетном k.

Пусть $C_{m,n}(\Sigma_k)$ – пространство всех вещественных алгебраических кривых бистепени (m, n) на Σ_k и пусть Δ – подпространство особых кривых. Компонента связности пространства $C_{m,n}(\Sigma_k) \setminus \Delta$ называется *жестким изотопическим классом неособых кривых*, или *камерой*. Пусть $S \subset \Delta$ есть множество особых кривых, имеющих более одной особенности или особенность, отличную от невырожденной двойной точки (с вещественными или мнимыми ветвями) и точки возврата. Тогда компонента связности пространства $\Delta \setminus S$ называется *стенкой*.

Вещественной схемой вещественной алгебраической кривой A на поверхности называется схема взаимного расположения вещественных ветвей кривой. Определим тип комплексного сопряжения кривой A. Если $\mathbb{C}A \setminus \mathbb{R}A$ несвязно, то A называется *разбивающей*, или кривой *типа* I, в противном случае – *неразбивающей*, или кривой *типа* II. Если A принадлежит типу I, естественные ориентации компонент U и V пространства $\mathbb{C}A \setminus \mathbb{R}A$ дают две противоположные ориентации кривой $\mathbb{R}A = \partial U = \partial V$; они называются *комплексными* ориентациями. В этой работе под *комплексной схемой* кривой понимается вещественная схема, наделенная типом. Комплексную схему отнесем к типу I (II), если все кривые с этой схемой имеют тип I (II), и к неопределенному типу в противном случае.

§3. Комплексные схемы неособых кривых бистепени $(m, 3)$ на Σ_1

Поскольку, любая такая кривая получается раздутием невырожденной двойной точки кривой бистепени $(m+2, 3)$ на Σ_0 и последующим стягиванием прямой бистепени $(1, 0)$, проходившей через эту точку, искомые комплексные схемы содержатся среди указанных на рис. 1. Реализуемость последних доказана в лемме о симметричных кривых (см. §6). Прямоугольники на рис. 1 изображают поверхность $\mathbb{R}\Sigma_1$, гомеоморфную бутылке Клейна, которая получается стандартным склеиванием сторон прямоугольника. В схеме b число овалов l принимает значения от 0 до $2m+1$, причем она имеет тип I при $l = 2m + 1$ (M-схема), тип II при четных l (поскольку $l \equiv g \pmod 2$ для кривых типа I) и неопределенный тип в остальных случаях. Схемы a и c состоят из двух компонент и имеют тип I: схема a – потому что любая кривая с этой схемой имеет только вещественные точки пересечения со слоями отображения π, схема c – потому что любая кривая с этой схемой имеет только вещественные точки пересечения со всеми кривыми бистепени (0,1), проходящими через внутреннюю точку овала.

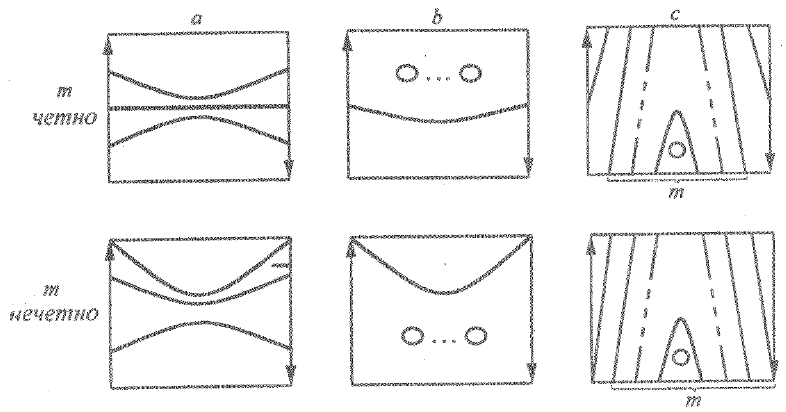

Рис. 1. Комплексные схемы кривых бистепени $(m, 3)$ на Σ_1.

§4. Пространства вещественных тригональных кривых

Вещественной тригональной кривой называется тройка (X, f, t), где X – компактная комплексно аналитическая кривая, $t\colon X \to X$ – антиголоморфная инволюция и $f\colon X \to \mathbb{C}P^1$ – голоморфное отображение степени 3 с $f(t(x)) = \overline{f(x)}$ $\forall x \in X$. Профакторизуем множество вещественных кривых рода g, отождествив тройки (X_1, f_1, t_1), (X_2, f_2, t_2), для которых существует биголоморфное отображение $\varphi\colon X_1 \to X_2$ с $f_2\varphi = f_1$ и $\varphi t_1 = t_2\varphi$, и обозначим через T_g полученное множество. Введем в T_g топологию, следуя [7], §4. Для этого метризуем ориентированную замкнутую поверхность P рода g так, чтобы ее топология стала метрической. Тогда множество пар (f, t), где $f\colon P \to \mathbb{C}P^1$ – трилистное разветвленное накрытие, согласованное с ориентациями поверхностей P и $\mathbb{C}P^1$, а $t\colon P \to P$ – обращающая ориентацию инволюция, станет метрическим пространством. Профакторизуем его, отождествив пары (f_1, t_1), (f_2, t_2), для которых существует гомеоморфизм $\varphi\colon P \to P$ с $f_2\varphi = f_1$ и $\varphi t_1 = t_2\varphi$, и обозначим полученное пространство через P_g. Согласно [7], теорема 4.1, пара $(f, t) \in P_g$ однозначно определяет структуру вещественной тригональной кривой на P. Поэтому существует биекция между P_g и T_g, которая превращает T_g в топологическое пространство. Факторизация, отождествляющая кривые (X, f_1, t), $(X, f_2, t) \in T_g$, для которых существует $\psi \in PGL(2;\mathbb{R})$ с $\psi \circ f_1 = f_2$, превращает T_g в пространство M_g модулей вещественных тригональных кривых рода g. Согласно [7], теорема 4.2, $\dim T_g = 2g + 4$ и потому $\dim M_g = 2g+1$. Кроме того, *компонента связности пространства M_g, содержащая кривую (X, f, t), однозначно определяется типом кривой X* (см. §2) *и набором степеней $n_i \geq 0$ отображений $f\,|_{X_i}$, где X_i – компоненты связности кривой $\mathbb{R}X = \mathrm{fix}\ t$* (см. [7], §5).

§5. Стратификация пространства M_g

Нам понадобится только случай нечетного g, однако для полноты мы рассмотрим M_g с произвольным g. Хорошо известна (см., например [9], III.3) стратификация пространства M_g: страт, определяемый числом k, состоит из кривых $X \in M_g$, которые вкладываются в Σ_k в качестве кривых бистепени $(m, 3)$, причем, согласно (1), $g = 2(m-1) + 3k$. Опишем это вложение.

При $g < 3$ канонический дивизор не дает вложения, однако кривую X при $g = 0$ можно, очевидно, вложить в Σ_0 в качестве кривой бистепени $(1,3)$; при $g=1$ ее можно сначала превратить в неособую плоскую кубику, а затем поднять в кривую бистепени $(0,3)$ на Σ_1, раздув на P^2 точку, не лежащую на кубике; при $g=2$, использовав ее гиперэллиптичность и тригональность, – вложить в Σ_0 в качестве кривой бистепени $(2,3)$.

Пусть теперь $g \geq 3$. Тогда в силу тригональности кривая X не может быть гиперэллиптической, иначе она вкладывалась бы в $P^1 \times P^1$ в качестве кривой бистепени $(3,2)$ и, следовательно, имела бы род $g=2$. Поэтому X канонически вкладывается в P^{g-1} (см. [10], IV.5.2). При $g=3$ ее образ есть неособая квартика на P^2, которая при раздутии точки на квартике поднимается в кривую бистепени $(1,3)$ на Σ_1. При $g=4$ образ кривой X есть либо кривая бистепени $(3,3)$ на Σ_0, либо кривая на квадратичном конусе, поднимающаяся в кривую бистепени $(0,3)$ на Σ_2 при раздутии вершины конуса. При $g \geq 5$ образ кривой X есть кривая бистепени $(m,3)$ на одной из поверхностей Σ_k, причем, согласно (1),

$$0 \leq k \leq \frac{g+2}{3}, \quad k \equiv g \pmod 2, \quad m = \frac{g-3k+2}{2}.$$

Страт $M_{g,k}$, составленный из кривых рода g, образы которых при каноническом вложении лежат на Σ_k, имеет размерность $2g-k+2$ при $k>0$ и $2g+1$ при $k=0$ (см., например, [8], п. 1).

§6. Основная теорема

Теорема. *Для неособых вещественных алгебраических кривых бистепени $(m,3)$ на Σ_1 множество камер пространства $C_{m,3}(\Sigma_1)$ находится в естественном взаимно однозначном соответствии с множеством комплексных схем.*

Доказательство. В силу сказанного в §5, утверждение теоремы при $g=1$ следует из жесткой изотопической классификации неособых вещественных кубик, а при $g=3$ – из жесткой изотопической классификации неособых вещественных пунктированных квартик, которая легко получается из леммы о перестановке овалов в [4].

Сужение проекции $\pi\colon \Sigma_1 \to P^1$ на неособую кривую бистепени $(m,3)$ дает, очевидно, тригональную кривую. Следовательно, определено непрерывное отображение $\tau\colon C_{m,3}(\Sigma_1) \to M_{g,1}$ с $g=2m+1$. Согласно §5, τ сюръективно и при $g \geq 5$ отождествляет $M_{g,1}$ с фактор-пространством пространства $C_{m,3}(\Sigma_1)$ по действию группы G вещественных автоморфизмов поверхности Σ_1, поскольку, как известно (см. [10], гл. IV), для таких g кривая рода g допускает не более одного, с точностью до автоморфизма прямой $\mathbb{C}P^1$, отображения степени 3 на $\mathbb{C}P^1$. Кроме того, согласно §4, τ устанавлиает биекцию между множеством комплексных схем кривых из $C_{m,3}(\Sigma_1)$ и множеством компонент связности прстранства M_g. С другой стороны, компонента пространства M_g однозначно определяет компоненту пространства $M_{g,1}$, поскольку M_g неособо (см. [12], 5.3.14), $M_{g,1}$ – старший страт в M_g, а остальные страты имеют коразмерность > 1 (см. §5).

Для завершения доказательства осталось $\forall \mu \in M_{g,1}$ установить связность множества $\tau^{-1}(\mu)$, т.е. орбиты действия группы G. Нетрудно проверить, используя, например, описание действия группы G в некоторой локальной системе координат на Σ_1 (см. [8], п. 1), что G состоит из двух компонент: в одной из них автоморфизмы сохраняют ориентацию кривой $\mathbb{R}E \subset \mathbb{R}\Sigma_1$, а в другой – обращают ее. Поэтому связность орбиты $\tau^{-1}(\mu)$ следует из леммы: $\square$

Лемма о симметричных кривых. *Для любой комплексной схемы бистепени $(m, 3)$ (см. рис. 1) существуют кривая A с этой схемой и автоморфизм поверхности Σ_1, обращающий ориентацию кривой $\mathbb{R}E$ и переводящий A в себя.*

Доказательство. Как известно (см., например, [8], п. 1), на Σ_1 существует локальная система координат x, y, в которой всякая кривая из $C_{m,3}(\Sigma_1)$ задается многочленом, многоугольник Ньютона которого содержится в трапеции с вершинами $(0;0)$, $(0;3)$, $(m;3)$, $(m+3;0)$. Кроме того, автоморфизм, задаваемый в этой системе формулой $(x;y) \mapsto (-x;y)$, обращает ориентацию кривой $\mathbb{R}E$. Поэтому каждую комплексную схему рис. 1 достаточно реализовать многочленом $g(x^2, y)$. Схема a, очевидно, реализуется многочленом

$$g(x^2, y) = (2y+1)(x^2-y^2+1)(x^m+1)+ty^3(x^m+2) \quad \text{при четном} \quad m$$

и

$$g(x^2, y) = (x^2-y+2)(x^2-y^2+1)(x^{m-1}+1)+ty^3(x^{m-1}+2)$$

$$\text{при нечетном} \quad m,$$

где t достаточно мало.

Для схемы b при $l = 2m+1$ (M-кривая) и схемы c многочлен $g(x,y)$ строится склеиванием по Виро [14, 15] как многочлен T-кривой (см. рис. 2, где указано построение кривых $g(x,y) = 0$ лишь при $x \geq 0$).

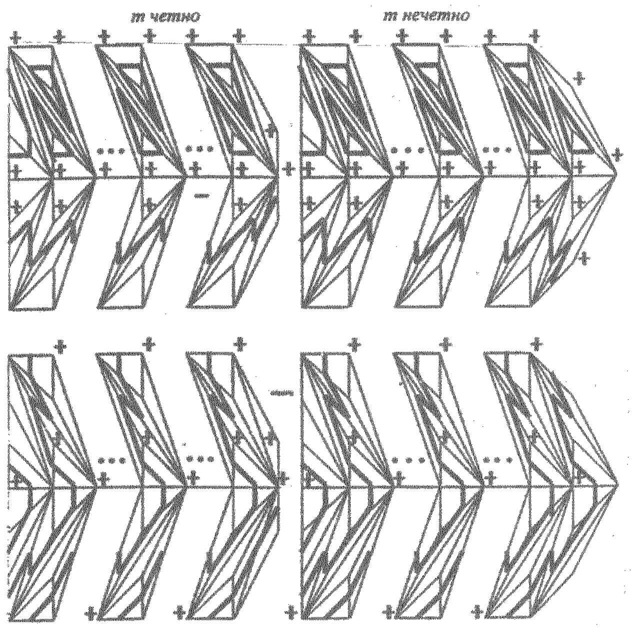

Рис. 2. Построение кривых со схемами b и c.

При нечетных $l < 2m+1$ схема b реализуется кривыми типа I индуктивно по l и m. База индукции – построенные М-кривые. Пусть прямая $y = c$ не пересекает, а прямые $x = \pm\epsilon$ пересекают без касания средний овал кривой $g(x^2, y) = 0$ типа I, имеющей l овалов. Тогда кривая бистепени $(m+2, 3)$, задаваемая уравнением

$$(x^2 - \epsilon^2)g(x^2, y) + t(y-c)^3(x^m + 1) = 0 \quad \text{при четном} \quad m$$

и

$$(x^2 - \epsilon^2)g(x^2, y) + t(y-c)^3(x^{m-1} + 1) = 0 \quad \text{при нечетном } m,$$

принадлежит типу I и имеет при малых $|t|$, в зависимости от знака t, либо l, либо $l+2$ овалов. Если же прямая $y = c$ пересекает прямые $x = \pm\epsilon$ внутри овала, то кривая, задаваемая тем же уравнением, принадлежит типу II и имеет l овалов. Кривые типа II с четным положительным числом овалов строятся так же, как M-кривые, с заменой знаков внутри соответствующего числа овалов T-кривой. Наконец, кривая

$$(y+1)(x^2+y^2+1)(x^m+1)+ty^3(x^m+2)=0 \quad \text{при четном} \quad m$$

и

$$(x^2-y)(x^2+y^2+1)(x^{m-1}+1)+ty^3(x^{m-1}+2)=0 \quad \text{при нечетном} \quad m,$$

где t достаточно мало, имеет тип II и не содержит овалов. □

§7. Следствия

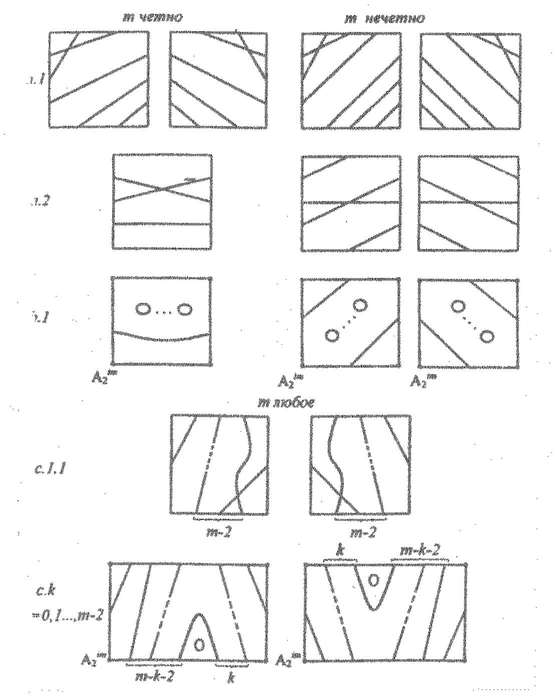

Рис. 3. Некоторые стенки пространства $C_{m,3}(\Sigma_0)$.

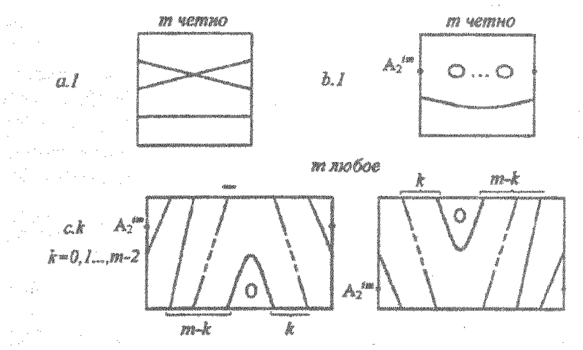

Рис. 4. Некоторые стенки пространства $C_{m,3}(\Sigma_2)$.

Раздутие точки $C \in \Sigma_k$ и последующее стягивание слоя проекции $\pi\colon \Sigma_k \to P^1$, проходящего через эту точку, дает бирациональный изоморфизм $\Sigma_k \to \Sigma_{k+1}$, если $P \in E$, и $\Sigma_k \to \Sigma_{k-1}$, если $P \notin E$. Поэтому жесткие изотопии неособых пунктированных кривых, т.е. пар (A, C), где A – неособая вещественная кривая на Σ_k и C – точка на $\mathbb{R}A$, дают жесткие изотопии кривых из $\Delta \setminus S$, лежащих на Σ_{k-1} или на Σ_{k+1}. При этом указанный бирациональный изоморфизм сохраняет, очевидно, тип кривой. Из теоремы п. 6, таким образом, легко вывести, что *для каждой комплексной схемы на рис. 3, 4 все кривые с этой схемой жестко изотопны, т.е. образуют одну стенку*. Буква в обозначении стенки пространства $C_{m,3}(\Sigma_0)$ на рис. 3 (пространства $C_{m,3}(\Sigma_2)$ на рис. 4) совпадает с буквой в обозначении камеры, или, что то же, комплексной схемы пространства $C_{m-2,3}(\Sigma_1)$ (соответственно, $C_{m+1,3}(\Sigma_1)$) на рис. 1, из которой она получается. Каждый прямоугольник на рис. 3, 4 изображает поверхность $\mathbb{R}\Sigma_0$ или $\mathbb{R}\Sigma_2$, гомеоморфную тору, получаемому стандартным склеиванием сторон прямоугольника. При этом на рис. 4 горизонтальные стороны прямоугольника склеиваются в $\mathbb{R}E$. Символ A_2^{im} обозначает изолированную особую точку кривой, склеиваемую на рис. 3 из вершин прямоугольника, а на рис. 4 – из двух точек на его вертикальных сторонах.

Литература

1. В. А. Рохлин, *Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых.* — УМН **33**, № 5 (1978), 77–89.

2. В. М. Харламов, *Жесткая изотопическая классификация вещественных плоских кривых степени* 5. — Функцион. анализ и его прил. **15**, № 1 (1981), 88–89.
3. В. В. Никулин, *Целочисленные квадратичные формы и некоторые их геометрические приложения.* — Изв. АН СССР, Сер. мат. **43**, № 1 (1979), 111–177.
4. А. И. Дегтярев, В. И. Звонилов, *Жесткая изотопическая классификация вещественных алгебраических кривых бистепени* (3,3) *на квадриках.* — Матем. заметки **66**, № 6 (1999), 810–815.
5. И. В. Итенберг, *Жесткая изотпическая классификация кривых степени* 6 *с невырожденной двойной точкой.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **193** (1991), 72–89.
6. Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии.* Мир, М., 1982.
7. С. М. Натанзон, *Топология двумерных накрытий и мероморфные функции на вещественных и комплексных алгебраических кривых. I, II.* — Труды семинара по век и тенз. анализу **XXIII** (1988), 79–103 **XXIV** (1991), 104–132.
8. K.-O. Stohr, P. Viana, *Weierstrass gap sequences and moduli varieties of trigonal curves.* — J. Pure Appl. Algebra **81** (1992), 63–82.
9. A. Arbarello, M. Cornalba, Ph. Griffits, J. Harris, *Geometry of algebraic curves.* N.Y., Springer, 1985.
10. Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия.* Мир, М., 1981.
11. A. Degtyarev, V. Kharlamov, *Topological properties of real algebraic varieties: Rokhlin's way.* в печати, — УМН.
12. M. Namba, *Families of meromorphic functions on compact Riemann surfaces.* Berlin, Springer, 1979.
13. V. I. Zvonilov, *Stratified spaces of real algebraic curves of bidegree* $(m,1)$ *and* $(m,2)$ *on a hyperboloid.* — Am. Math. Soc. Transl. (2) **173** (1996), 253–264.
14. Виро О. Я., *Склеивание алгебраических гиперповерхностей, устранения особенностей и построения кривых.* — В кн.: Труды Ленинградской международной топологической конференции (авг. 1982). Наука, Л., 1983.
15. I. Itenberg, *Counter-examples to Ragsdale conjecture and T-curves.* — Contemporary Math. **182** (1995), 55–72.

Zvonilov. V. I. Rigid isotopies of real trigonal curves on the Hirzebruch surfaces.

A rigid isotopy of nonsingular real algebraic curves on a scroll is a path in the space of such curves of a given bidegree. For real algebraic curves of bidegree $(m,3)$ on the Hirzebruch surface Σ_1 (the projective plane with a point blown up) we obtain the rigid isotopy classification of nonsingular curves and give some corollaries for the space of curves with a single node or a cusp on a hyperboloid and on Σ_2.

Сыктывкарский
государственный
университет
email zvonilov@ssu.edu.komi.ru

Поступило 31 октября 1999 г.