Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 267, 2000 г.

Jean-Yves Welschinger

J-COURBES RÉELLES À NIDS PROFONDS SUR LES SURFACES RÉGLÉES

Résumé: Cet article est divisé en deux parties indépendantes. L'objet de la première partie (§2) est de présenter une nouvelle démonstration de la formule d'orientation complexe obtenue par S. Yu. Orevkov [9], qui permet de généraliser cette formule aux J-courbes à nids profonds sur les surfaces réglées. En particulier, il en découle un analogue de cette formule pour des courbes algébriques réelles séparantes de $\mathbb{C}P^2$ possédant deux nids.

Dans la seconde partie (§3) sont obtenues des inégalités analogues à celles d'Arnol'd [1] et de Rokhlin [11] pour des J-courbes réelles séparantes à nids profonds sur les surfaces réglées.

Introduction

Soit (X, J) une variété presque-complexe de classe C^1 de dimension réelle 4. Une *structure réelle* sur (X, J) est une involution c_X de classe C^1 dont la différentielle anti-commute avec J. L'ensemble des points fixes de c_X est alors une sous-variété de dimension deux de X notée $\mathbb{R}X$, et appelée *partie réelle* de X (cette terminologie provient de la géométrie algébrique réelle).

Une *J-courbe réelle* de X est un plongement dans X d'une surface de Riemann S munie d'une structure réelle c_S, où d'une part le plongement commute avec les involutions c_X et c_S, et d'autre part sa différentielle commute avec les structures presque-complexes de S et X.

Dans ce cas, le plongement restreint à $\mathbb{R}S$ est à image dans $\mathbb{R}X$ et un théorème de Harnack (v. [15] par exemple) affirme que le nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}S$ ne peut pas être supérieur à $g + \mu$ où g est le genre de S, et μ le nombre de composantes connexes de S. La J-courbe réelle S est alors dite *maximale*, ou M-courbe (resp. $(M - r)$-courbe), si le nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}S$ coïncide avec $g + \mu$ (resp. vaut $g + \mu - r$).

Par ailleurs, la J-courbe réelle S est dite *séparante* s'il existe une partie S^+ de S, bordée par $\mathbb{R}S$, telle que $S^+ \cup c_S(S^+) = S$ et $S^+ \cap c_S(S^+) = \mathbb{R}S$. Une telle partie S^+ (qui est canoniquement orientée, l'orientation provenant de la structure presque-complexe de S) induit une orientation sur $\mathbb{R}S$ appelée *orientation complexe*. Lorsque S est connexe, sa partie réelle $\mathbb{R}S$ possède exactement deux orientations complexes qui sont opposées. Notons que les surfaces de Riemann réelles maximales sont toujours séparantes.

Lorsque S est une J-courbe réelle séparante, la topologie du couple $(\mathbb{R}X, \mathbb{R}S)$ est soumise à des restrictions. Les premières restrictions ont été données par une congruence d'Arnol'd [1] et une formule de Rokhlin [10], ces restrictions s'appliquent aux courbes algébriques réelles séparantes non-singulières de degrés pairs de $\mathbb{C}P^2$. Depuis, plusieurs résultats sont apparus pour les courbes de $\mathbb{C}P^2$, de l'hyperboloïde ou de surfaces plus générales (v. [8, 16, 6, 7, 14]) et notament, S. Yu. Orevkov [9] a obtenu récement une nouvelle formule d'orientations complexes pour les courbes séparantes à nids profonds de $\mathbb{C}P^2$.

Dans cet article sont présentées une généralisation de la formule d'Orevkov aux courbes à nids profonds sur les surfaces réglées, ainsi que des inégalités apportant des restrictions sur la position de ces courbes dans le fibré. Le §1 contient des définitions préliminaires, en particulier celles des surfaces réglées en question et des courbes à nids profonds. Dans le §2 sont exposés les résultats liés à la formule d'Orevkov, ainsi que des applications de celle-ci, par exemple pour des courbes à deux nids de $\mathbb{C}P^2$. Enfin, le §3 contient les énoncés et démonstrations des inégalités, ainsi qu'une application de celles-ci.

Remerciement

Ce travail a été effectué sous la direction de V. Kharlamov. Je lui en suis vivement reconnaissant.

Notations:

$|A|$: cardinal de l'ensemble A.

$\chi(A)$, $\mu(A)$: caractéristique d'Euler, nombre de composantes connexes de la surface A.

$g(A)$: genre de la surface A.

$[A]$: classe d'homologie du cycle A.

$x \circ y$: forme bilinéaire d'intersection de Poincaré.

$b_i(\mathcal{T})$: i^{eme} nombre de Betti de la variété $\mathcal{T}$.

§1. Définitions préliminaires

1.1. Les surfaces réglées. Soient X une variété presque-complexe connexe de dimension réelle 4 et B une surface de Riemann réelle séparante. Supposons qu'il existe une application J-holomorphe $p\colon X \to B$ de classe

C^1, ainsi qu'une structure réelle c_X sur X telles que $\pi \circ c_X = c_B \circ \pi$. Supposons de plus que les fibres correspondant aux valeurs régulières de p sont des sphères J-holomorphes, que les valeurs singulières de p sont réelles (c'est-à-dire appartiennent à $\mathbb{R}B$), et que les fibres singulières associées sont constituées de deux sphères J-holomorphes réelles s'intersectant transversalement en un point. La variété X est alors appelée *surface réglée* de base B, et dans toute la suite de cet article, X sera supposé être une surface réglée qui possède une J-section réelle e, c'est-à-dire une section J-holomorphe invariante par c_X (cette hypothèse supplémentaire n'est pas automatique, comme le montre l'exemple donné en annexe B).

Munissons $\mathbb{R}B$ d'une orientation complexe et $e_{\mathbb{R}}$ de l'orientation induite. Si C est une courbe orientée dans une composante connexe de $\mathbb{R}X$ située au-dessus d'une composante B_0 de $\mathbb{R}B$, alors le degré de la projection $p|_C : C \to B_0$ est appelé *nombre d'enroulement* de C et noté $n(C)$.

Notons n le nombre de valeurs singulières de p, et v_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) les composantes des fibres singulières qui sont disjointes de e (l'intersection de e avec chaque fibre est réduite à un point qui est distinct de l'éventuel point singulier, ce qui justifie l'existence de v_i). La famille ($[v]$, $[e]$, $[v_1]$, $\dots$, $[v_n]$), où v est une fibre non-singulière de X, forme une base du réseau $H_2(X;\mathbb{Z})$ que nous fixons, de sorte que les éléments de $H_2(X;\mathbb{Z})$ seront identifiés à des éléments de $\mathbb{Z}^{2+n}$.

Remarquons que les courbes v_i satisfont $v_i \circ v_i = -1$. La surface obtenue après contraction de ces courbes est une surface réglée sans fibre singulière, et les composantes connexes de sa partie réelle sont alors des tores ou des bouteilles de Klein. Remarquons également qu'au-dessus de chaque composante de $\mathbb{R}B$ est située une et une seule composante de $\mathbb{R}X$. (Ceci signifie que le nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}X$ est maximal: certaines surfaces réglées ont une partie réelle possédant moins de composantes connexes que $\mathbb{R}B$, mais ces surface ne possédent alors pas de J-section réelles, comme c'est le cas dans l'exemple donné en annexe B).

1.2. Les termes $\pi^{\pm}$ et $\pi^{\pm}_{\pm}$. Une J-courbe réelle A de X, de classe $(a, b, a_1, \dots, a_n)$ dans $H_2(X;\mathbb{Z})$ (muni de la base définie au §1.1), est dite *à nids profonds* si toute fibre réelle intersecte $\mathbb{R}A$ en au moins $b-2$ points. Les composantes de $\mathbb{R}A$ qui sont bordées par des disques de $\mathbb{R}X$ sont appelées *ovales*. La J-courbe réelle à nids profonds A est dite *standard* si pour chaque composante de $\mathbb{R}X$ sur laquelle $\mathbb{R}A$ n'a pas d'ovale, les fibres réelles associées interectent $\mathbb{R}A$ en exactement b points. (Cette hypothèse supplémentaire va permettre de simplifier les énoncés et démonstrations qui suivent.)

Soit donc A une J-courbe réelle séparante connexe à nids profonds standard de X, de classe $(a, b, a_1, \ldots, a_n)$. Munissons $\mathbb{R}A$ d'une orientation complexe provenant d'une partie A^+ de $A \setminus \mathbb{R}A$.

Remarquons que si $n = 0$, quitte à effectuer une chirurgie sur la courbe A et à modifier la structure presque-complexe de X (de la même façon que dans [9], Proposition 3.5.1), on peut supposer que chaque ovale de $\mathbb{R}A$ n'est tangent aux fibres qu'en deux points, et que les autres composantes de $\mathbb{R}A$ sont transverses aux fibres. De plus, quitte à effectuer une isotopie le long des fibres de X, on peut supposer que les ovales de $\mathbb{R}A$ sont disjoints de $e_{\mathbb{R}}$. La forme de la courbe $\mathbb{R}A$ ainsi obtenue est une *forme normale* pour les J-courbes réelles à nids profonds de X.

Notons R l'ensemble des points en lesquels $\mathbb{R}A$ est tangente aux fibres de X, on peut supposer R disjoint des fibres singulières. Notons $\mathbb{R}A_+$ (resp. $\mathbb{R}A_-$) la réunion des composantes de $\mathbb{R}A \setminus R$ sur lesquelles la projection sur la base $\mathbb{R}B$ préserve (resp. renverse) l'orientation. Pour chaque couple de points "consécutifs" de R, bordant une même région de $\mathbb{R}X$ formée de fibres réelles qui n'intersectent $\mathbb{R}A$ qu'en $b-2$ points, on choisit un segment s_t de classe C^1 dans $\mathbb{R}X$, qui est transverse aux fibres et à $\mathbb{R}A$, et qui relie ces points sans couper $e_{\mathbb{R}}$. Si tous les points d'intersection d'une fibre singulière avec A sont réels, alors les segments s_t n'intersectent pas cette fibre. Sinon, une des deux composantes de la fibre singulière intersecte A en deux points imaginaires conjugués, et le segment s_t est choisi de sorte qu'il intersecte la fibre singulière en cette composante. Ces segments sont ainsi bien définis à isotopie de $\mathbb{R}X$ le long des fibres près, fixant les extrémités.

Rappelons que $\mathbb{R}A$ satisfait la propriété d'alternance (v. [3]). Cette propriété peut être énoncée comme suit: soient ξ_0, ξ_1 deux vecteurs tangents à $\mathbb{R}A$ aux deux extrémités d'un segment s_t, compatibles avec l'orientation de $\mathbb{R}A$. Ces vecteurs sont tangents aux fibres réelles, et il existe un champ de vecteurs continu ξ non nuls et tangents aux fibres réelles, défini sur s_t, et qui prolonge ξ_0, ξ_1.

En chaque point d'intersection x de $\mathbb{R}A_\pm$ avec ce segment s_t, l'espace tangent $T_x\mathbb{R}X$ privé de $T_x s_t$ est constitué de deux demi-plans. Posons $\epsilon(x) = +1$ si $\xi(x)$ et un vecteur tangent de $\mathbb{R}A_\pm$ en x sont situés dans un même demi-plan, et $\epsilon(x) = -1$ sinon. Notons alors $\pi^\pm = \sum_x \epsilon(x)$, la somme étant prise sur l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}A_\pm \cap \cup_t s_t$. En outre, le nombre de tels points x de $\mathbb{R}A_+$ de signe ϵ positif (resp. négatif) est noté π^+_+ (resp. π^+_-), et de même, le nombre de tels points x de $\mathbb{R}A_-$ de signe ϵ

positif (resp. négatif) est noté π_-^- (resp. π_+^-), de sorte que $\pi^+ = \pi_+^+ - \pi_-^+$ et $\pi^- = \pi_-^- - \pi_+^-$.

Remarque. Tous ces termes ne dépendent clairement que du triplet $(\mathbb{R}X; \mathbb{R}A, e_{\mathbb{R}})$ à isotopie "fibrée" de $\mathbb{R}X$ près, c'est-à-dire à isotopie de $\mathbb{R}X$ qui commute avec la projection sur la base B. Les derniers termes $\pi_+^+, \pi_-^+, \pi_-^-$ et π_+^- n'interviendront que dans la seconde partie de cet article (au §3). Pour ce qui est des termes π^+ et π^-, on étudie en annexe A leur invariance par isotopie de $\mathbb{R}X$ quelconque, préservant $e_{\mathbb{R}}$.

1.3. Les cycles $\mathcal{A}_\pm$. L'intersection de A avec la restriction du fibré X au-dessus de $\mathbb{R}B$ est constituée de $\mathbb{R}A$, ainsi que d'une réunion de cercles O_t $(1 \leq t \leq T)$ invariants par c_X, qui seront appelés *ovales imaginaires*. Chacun de ces ovales est stable par c_X et intersecte $\mathbb{R}X$ en deux points "consécutifs" de l'ensemble R, reliés par le segment s_t (défini au §1.2, on utilise ici le fait que A est standard). Notons A_+^+ (resp. A_-^+) la partie de A^+ qui se projette sur B^+ (resp. sur $B^- = c_B(B^+)$). Le bord des surfaces $A_+^+ - c(A_+^+)$, $A_-^+ - c(A_-^+)$ est la réunion des ovales O_t.

On peut supposer que les ovales O_t ne rencontrent pas e. Pour chacun de ces ovales, il existe un disque D_t de X au-dessus de $p(O_t)$, bordé par cet ovale, disjoint de e et qui intersecte $\mathbb{R}X$ en le segment s_t. De plus, ce disque peut être choisi en sorte qu'il n'a aucun espace tangent stable par J (c'est un disque *totalement réel*).

Notons $\mathcal{A}_+$ (resp. $\mathcal{A}_-$) la somme de $A_+^+ - c(A_+^+)$ (resp. $A_-^+ - c(A_-^+)$) et de ces disques (resp. de leurs opposés), en les munissant d'orientations telles que $\mathcal{A}_+$ et $\mathcal{A}_-$ soient des 2-cycles entiers de X. Ces cycles $\mathcal{A}_\pm$ sont stables par c_X et contiennent pour seules singularités des "plis" et des points doubles.

On note $\chi(\mathcal{A}_\pm)$ la caractéristique d'Euler de $\mathcal{A}_\pm$ auquel on ajoute le nombre de points doubles de $\mathcal{A}_\pm$, c'est-à-dire la caractéristique d'Euler de la normalisation de $\mathcal{A}_\pm$. On note également $\mu^\pm$ le nombre de composantes connexes, et $g^\pm$ le genre de cette normalisation, de sorte que $\chi(\mathcal{A}_\pm) = 2\mu^\pm - 2g^\pm$. Enfin, notons $a^\pm, b^\pm, a_i^\pm$ les entiers tels que

$$[\mathcal{A}_\pm] = a^\pm[v] + b^\pm[e] - \sum_i a_i^\pm [v_i] \in H_2(X; \mathbb{Z}), \quad \text{et} \quad b^\pm = n^\pm + 1.$$

Remarque. Il est facile de voir que:

$$a^+ + a^- = a, \quad a^\pm + \nu b^\pm = [e_{\mathbb{R}}] \circ [\mathbb{R}\mathcal{A}_\pm] \mod (2)$$

et

$$|e_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{R}\mathcal{A}_{\pm}| \leq a^{\pm} + \nu b^{\pm} \leq a + \nu b - |e_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{R}\mathcal{A}_{\mp}|,$$

où $\nu = e \circ e$.

Lemme 1.1. *Supposons que $n = 0$ et que $\mathbb{R}A$ est sous forme normale. Alors, le genre $g^{\pm}$ est minoré par le nombre $c^{\pm}$ de composantes de $\mathbb{R}A_{\pm}$ autres que les ovales, et satisfait $g^{+} + g^{-} \leq c^{+} + c^{-} + \mu(\mathbb{R}X) + 2r - 1$ si A est une $(M - 2r)$-courbe.*

De plus, les nombres $\mu^{\pm}$ satisfont les inégalités $1 \leq \mu^{\pm} \leq \mu(\mathbb{R}X)$ et $\mu^{+} + \mu^{-} \leq \mu(\mathbb{R}X) + 1$.

(Le nombre d'enroulement est défini au §1.1.)

Démonstration. S'il n'y a pas d'ovale imaginaire O_t, un des cycles $\mathcal{A}_{\pm}$ est vide, alors que l'autre coïncide avec A. L'inégalité $g^{+} + g^{-} \leq c^{+} + c^{-} + \mu(\mathbb{R}X) + 2r - 1$ est donc satisfaite. Sinon, chaque point de $\mathcal{A}_{\pm}$ peut être relié par un arc de $\mathcal{A}_{\pm}$ à un ovale imaginaire O_t, et donc à un segment s_t. Ainsi, le nombre $\mu^{\pm}$ est majoré par le nombre de composantes de $\mathbb{R}\mathcal{A}_{\pm}$ contenant des segments s_t, et donc majoré par $\mu(\mathbb{R}X)$. En effet, remarquons que chaque ovale privé de ses deux points de tangence avec les fibres réelles, est constitué de deux segments transverses aux fibres dont un a une orientation compatible avec celle de la base, et l'autre l'orientation opposée. Dans chaque composante X_1 de $\mathbb{R}X$, la courbe $\mathbb{R}\mathcal{A}_{+} \cap X_1$ (resp. $\mathbb{R}\mathcal{A}_{-} \cap X_1$) possède une composante formée de ces segments dont l'orientation est compatible avec (resp. opposée à) celle de la base, et des segments s_t de X_1, et ses autres composantes sont les composantes de $\mathbb{R}A \cap X_1$ de nombre d'enroulement strictement positif (resp. négatif). Ceci justifie en particulier que $\mu^{\pm} \leq \mu(\mathbb{R}X)$. La minoration de $g^{\pm}$ provient alors du fait que pour la normalisation $\widetilde{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$, et d'après le théorème de Harnack, $\mu(\mathbb{R}\widetilde{\mathcal{A}}_{\pm}) \leq g^{\pm} + \mu^{\pm}$.

Enfin, enlevons à A les ovales O_t. Chaque ovale enlevé a pour effet soit de disconnecter la courbe, soit de faire diminuer son genre de un. Or on remarque que si les ovales O_t sont associés à une même composante de $\mathbb{R}X$, seul le dernier peut disconnecter la surface, de sorte que

$$\mu^{+} + \mu^{-} \leq \mu(\mathbb{R}X) + 1, \quad \text{et} \quad g^{+} + g^{-} \leq c^{+} + c^{-} + \mu(\mathbb{R}X) + 2r - 1. \qquad \square$$

§2. Formules d'orientations complexes

2.1. Enoncés des résultats.

Théorème 2.1. *Soit X une surface réglée de base B possédant une J-section réelle e, et A une $(M-2r)$ J-courbe réelle séparante connexe à nids profonds standard de classe $(a, b, a_1, \dots, a_n)$ dans $H_2(X;\mathbb{Z})$. Soient $\pi^\pm$, $a_i^\pm$, $n^\pm$ les termes définis aux §§1.2, 1.3, et $\nu = e \circ e$. Alors:*

$$\pi^\pm + n^\pm a^\pm = \frac{1}{2} b^\pm(\chi(B) - \nu n^\pm) + g^\pm - \mu^\pm + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^\pm(a_i^\pm - 1)$$

Ce théorème admet les corollaires suivants:

Corollaire 2.2. *Sous les hypothèses et notations du théorème 2.1, on a les encadrements:*

$$n^\pm |e_\mathbb{R} \cap \mathbb{R}\mathcal{A}_\pm| \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^\pm(a_i^\pm - 1) + \frac{1}{2} b^\pm(\chi(B) + \nu n^\pm) + g^\pm - \mu^\pm - \pi^\pm$$
$$\leq n^\pm(a + \nu b - |e_\mathbb{R} \cap \mathbb{R}\mathcal{A}_\mp|)$$

En particulier, si $e \circ A = 0$,

$$\pi^\pm = \frac{1}{2} b^\pm(\chi(B) + \nu n^\pm) + g^\pm - \mu^\pm + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^\pm(a_i^\pm - 1). \qquad \square$$

Le Théorème 2.1 et le Corollaire 2.2 tiennent compte de la position relative de la courbe $\mathbb{R}A$ avec la section $e_\mathbb{R}$, voire de la position par rapport aux fibres (v. annexe A).

Si B est de genre nul, $\nu = -1$, et A est une courbe obtenue à partir d'une courbe algébrique réelle séparante non-singulière de $\mathbb{C}P^2$ telle que $\mathbb{R}A$ possède un nid profond (après éclatement d'un point réel au centre du nid), alors $e \circ A = 0$ et les formules données par le corollaire 2.2 sont les formules d'Orevkov ([9], Théorème 1.5A).

Les corollaires suivants sont des résultats topologiques: ils ne tiennent compte que de a, b, $a_i^\pm$ et de la courbe $\mathbb{R}A$ à isotopie de $\mathbb{R}X$ près:

Corollaire 2.3. *Sous les hypothèses et notations du Théorème 2.1, on a:*

$$n^-(\pi^+ - g^+ + \mu^+) + n^+(\pi^- - g^- + \mu^-)$$
$$= \frac{1}{2} n^+ n^-(2\chi(B) - 2a - \nu b) - \frac{1}{2}\chi(B)(b-2)$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\big(n^+ a_i^-(a_i^- - 1) + n^- a_i^+(a_i^+ - 1)\big)\pi^\pm$$

$$= \frac{1}{2} b^{\pm}(\chi(B) + \nu n^{\pm}) + g^{\pm} - \mu^{\pm} - n^{\pm}[e_{\mathbb{R}}] \circ [\mathbb{R}A_{\pm}]$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i^{\pm}(a_i^{\pm} - 1) \mod (2n^{\pm}). \qquad \square$$

Corollaire 2.4. *Sous les hypothèses et notations du Théorème* 2.1, *on a la congruence:*

$$T + \pi^+ + \pi^- = b^-(a + \nu b^-) - \sum_{i=1}^{n} a_i^+ a_i^- + n(\mathbb{R}A)[e_{\mathbb{R}}] \circ [\mathbb{R}\mathcal{A}_-] \mod (2n(\mathbb{R}A)).$$

Rappelons que si A est sous forme normale, T correspond au nombre d'ovales de $\mathbb{R}A$. La congruence donnée par ce dernier corollaire implique dans ce cas le Corollaire 2.6 de [14]. Les Corollaires 2.2 et 2.3 découlent du Théorème 2.1 et de la remarque faite au §1.3. Nous ne donnons ici qu'une démonstration du Corollaire 2.4.

Démonstration du Corollaire 2.4. En sommant les égalités données par le Théorème 2.1, on obtient:

$$\pi^+ + \pi^- = \frac{1}{2}\chi(B)b - \frac{1}{2}\nu n^+ b + \frac{1}{2}\nu n(\mathbb{R}A) b^-$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \big(a_i^+(a_i^+ - 1) + a_i^-(a_i^- - 1)\big) + g(A) - 1 - T - n^+ a + n(\mathbb{R}A) a^-.$$

Or

$$g(A) = (a + \frac{\nu}{2} b)(b - 1) - \frac{1}{2}\chi(B) b + 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i(a_i - 1).$$

L'égalité se réécrit donc:

$$T + \pi^+ + \pi^- = (a + \frac{\nu}{2} b)(b-1) - \frac{1}{2}\nu n^+ b - \frac{1}{2}\nu b^- n(\mathbb{R}A) - n^+ a - \sum_{i=1}^{n} a_i(a_i - 1)$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \big(a_i^+(a_i^+ - 1) + a_i^-(a_i^- - 1)\big) + n(\mathbb{R}A)\big(a^- + \nu b^-\big)$$
$$= (a + \frac{\nu}{2} b) b^- - \frac{1}{2}\nu b^- n(\mathbb{R}A) - \sum_{i=1}^{n} a_i^+ a_i^- + n(\mathbb{R}A)\big(a^- + \nu b^-\big)$$
$$= (a + \nu b^-) b^- - \sum_{i=1}^{n} a_i^+ a_i^- + n(\mathbb{R}A)[e_{\mathbb{R}}] \circ [\mathbb{R}A_-] \mod (2n(\mathbb{R}A)). \qquad \square$$

2.2. Démonstration du Théorème 2.1. Le Théorème 2.1 repose sur le lemme suivant:

Lemme 2.5. *Les cycles $\mathcal{A}_+$, $\mathcal{A}_-$ satisfont la formule d'adjonction:*

$$[\mathcal{A}_\pm] \circ [\mathcal{A}_\pm] = c_1(X) \circ [\mathcal{A}_\pm] - \chi(\mathcal{A}_\pm) - 2\pi^\pm.$$

Une formule analogue est déjà apparue dans [5, 2]. Nous présentons toutefois ici une démonstration:

Démonstration. Choisissons un champ ξ de vecteurs non nuls tangents aux ovales O_t, et un champ ζ normal à ces ovales et tangent aux disques D_t. Ces champs sont prolongés aux cycles $\mathcal{A}_+$, $\mathcal{A}_-$, de sorte qu'ils soient tangents aux disques D_t, que ξ soit tangent aux J-courbes et ζ normal à ces J-courbes. Ce prolongement est choisi de sorte que les champs n'aient pas de zéros communs et soient linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$ en dehors de leurs zéros. Le produit exterieur $\xi \wedge J(\zeta)$ forme une section du fibré vectoriel $\bigwedge^2 TX$ au-dessus des cycles $\mathcal{A}_+$, $\mathcal{A}_-$, qui s'annule en les points où un des champs s'annule. Or l'indice d'intersection de cette section avec la section nulle vaut par définition $c_1(X) \circ [\mathcal{A}_\pm]$. Cet indice est la somme des contributions des zéros du champs ξ et du champ $J(\zeta)$. Comme l'orientation des cycles sur les J-courbes coïncide avec l'orientation canonique de celles-ci, et que les disques D_t sont totalement réels, on s'aperçoit que la contribution du champ ξ est $\chi(\mathcal{A}_\pm)$, et celle du champ $J(\zeta)$ est le nombre normal d'Euler $\nu(\mathcal{A}_\pm) = [\mathcal{A}_\pm] \circ [\mathcal{A}_\pm] + 2\pi^\pm$. □

La classe de Chern $c_1(X)$ est duale à

$$(\chi(B) - \nu)[v] + 2[e] - \sum_i [v_i], \quad \text{et} \quad \chi(\mathcal{A}_\pm) = 2\mu^\pm - 2g^\pm.$$

D'après 2.5,

$$\begin{aligned} &2a^\pm b^\pm + \nu(b^\pm)^2 - \sum_i (a_i^\pm)^2 \\ &= (\chi(B) - \nu)b^\pm + 2a^\pm + 2\nu b^\pm - \sum_i a_i^\pm - 2\mu^\pm + 2g^\pm - 2\pi^\pm, \end{aligned}$$

ce qui se réécrit:

$$n^\pm a^\pm = \frac{1}{2} b^\pm(\chi(B) - \nu n^\pm) + g^\pm - \mu^\pm - \pi^\pm + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i^\pm(a_i^\pm - 1). \qquad \square$$

2.3. Applications.

2.3.1. Courbes sur les surfaces réglées.

Proposition 2.6. *Soit X une surface réglée de base B sans fibre singulière, possédant une J-section réelle e et telle que $\mathbb{R}X$ est un tore. Soit A une J-courbe réelle maximale de X telle que $e \circ A = 0$, $v \circ A = 4$ où v est une fibre, et telle que $\mathbb{R}A$ contienne une composante de nombre d'enroulement $+1$ et une composante de nombre d'enroulement -1. Chaque ovale se situant dans le cylindre de $\mathbb{R}X$ bordé par $e_{\mathbb{R}}$ et la composante de nombre d'enroulement positif, sépare ce cylindre en un disque et un cylindre troué. Notons α_+ (resp. α_-) le nombre d'ovales pour lesquels il existe (resp. n'existe pas) une orientation du cylindre troué qui induit sur son bord l'orientation de l'ovale et de la composante de nombre d'enroulement positif. Alors, on a $\alpha_- - \alpha_+ = \frac{1}{2}(\chi(B) + \nu)$.* $\square$

Pour les surfaces pour lesquelles la partie réelle est une bouteille de Klein, on peut énoncer la proposition suivante:

Proposition 2.7. *Soit X une surface réglée de base S sans fibre singulières, possédant une J-section réelle e et telle que $\mathbb{R}X$ est une bouteille de Klein. Soit A une J-courbe réelle maximale de X telle que $e \circ A = 0$, $v \circ A = 6$ où v est une fibre, et telle que $\mathbb{R}A$ contienne une composante de nombre d'enroulement $+2$ et une composante de nombre d'enroulement -2. Alors son schéma complexe est*

$$\langle \gamma \sqcup 1 \langle \beta_+ \sqcup \beta_- \sqcup 1_+ \langle \alpha_+ \sqcup \alpha_- \rangle\rangle\rangle,$$

avec

$$\alpha_+ - \alpha_- = \frac{1}{2}(3 + 3\nu - 3g(B)) \text{ et } \beta_+ - \beta_- = -3 - 3\nu + 3g(B). \quad \square$$

Dans la Proposition 2.7, les définitions et notations de schémas complexes sont celles de [12], après avoir contracté la section $e_{\mathbb{R}}$ de la bouteille de Klein. Ces deux propositionss découlent du Corollaire 2.2.

2.3.2. Courbes planes projectives.

Proposition 2.8. *Soit A une $(M - 2r)$-courbe algébrique réelle nonsingulière de degré $d = 2k$ de $\mathbb{C}P^2$, telle que la partie réelle $\mathbb{R}A$ possède deux nids dont un, noté N_1, est de profondeur $k-2$ et l'autre, noté N_2, est de profondeur 2. Notons k_1^- (resp. k_1^+) le nombre d'ovales non-vides du nid N_1 homologues (dans le premier groupe d'homologie de $\mathbb{R}P^2$ privé du centre du nid) à l'ovale extèrieur (resp. à son opposé, de sorte que*

$k_1^+ + k_1^- = k - 3$). Supposons de plus qu'au centre de chacun de ces nids se situent deux ovales, et pour chacun des deux ovales x_i ($i \in \{2,4\}$) situés au centre du nid N_1, on pose $\delta_i^- = +1$ (resp. $\delta_i^+ = +1$) si l'ovale x_i est homologue (dans le premier groupe d'homologie de $\mathbb{C}P^2$ privé du centre de cet ovale) à l'ovale extèrieur (resp. à son opposé), et $\delta_i^- = 0$ (resp. $\delta_i^+ = 0$) sinon. Enfin, notons E^- (resp. E^+) le nombre d'ovales vides homologues à l'ovale extèrieur du nid N_1 dans le faisceau de droite centré en x_1, à l'exterieur du nid N_2 et strictement entre les ovales x_2 et x_4, et supposons que les ovales sont positionnés comme sur la figure suivante:

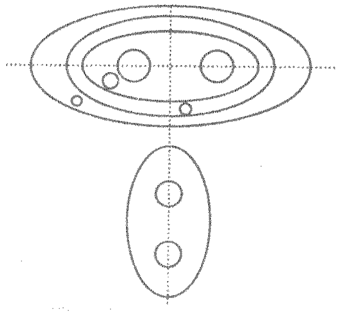

Fig. 1.

On a:

$$2(\pi_-^+ - \pi_+^+)^{N_1} + (\pi_+^- - \pi_-^-)^{N_2} + (E^- - E^+) = 2k_1^+(k_1^+ + 1) + \delta_2^+ + \delta_4^+ - 2r^+,$$

$$2(\pi_+^- - \pi_-^-)^{N_1} + (\pi_+^- - \pi_-^-)^{N_2} + (E^+ - E^-) = 2k_1^-(k_1^- + 1) + \delta_2^- + \delta_4^- - 2r^-.$$

Où $0 \leq r^+, r^- \leq r$ et $r^+ + r^- = r$.

Démonstration. Considérons le faisceau de coniques centré en les quatre points $x_1, \dots x_4$, et éclatons ces quatre points. La surface obtenue est une surface réglée X possédant trois fibres singulières et dont la base est $\mathbb{C}P^1$. Attribuons à la base $\mathbb{R}P^1$ du fibré $\mathbb{R}X$ l'orientation opposée de celle induite par l'ovale extèrieur au nid N_1. Notons $\delta_i^+ = +1$ (resp. $\delta_i^- = +1$) si l'ovale x_i ($i \in \{1,2,3,4\}$) a un nombre d'enroulement $+2$ (resp. -2), et $\delta_i^+ = 0$ (resp. $\delta_i^- = 0$) sinon (cette définition prolonge celle donnée dans l'énoncé). Choisissons comme section e du fibré le diviseur exceptionnel se situant au dessus de x_1 (en particulier $\nu = -1$), et appliquons le cas d'égalité du Corollaire 2.2. Pour calculer le membre de droite, on s'aperçoit que

$$n^{\pm} = 4k_1^{\pm} + 2\delta_1^{\pm} + 2\delta_2^{\pm} + 2\delta_3^{\pm} + 2\delta_4^{\pm} + 1,$$

que $\chi(S) = 2$, que

$$g^{\pm} = k_1^{\pm} + \delta_1^{\pm} + \delta_2^{\pm} + \delta_3^{\pm} + \delta_4^{\pm} + 2r_{\pm} \quad \text{avec} \quad r_+ + r_- = r \quad r_+, r_- \geq 0),$$

et enfin que

$$\{a_i^{\pm} \mid i \in \{1,2,3\}\} = \{2k_1^{\pm} + 2\delta_2^{\pm} + 2\delta_3^{\pm} + 1(\pm 1);$$
$$2k_1^{\pm} + 2\delta_2^{\pm} + 2\delta_4^{\pm} + 1; 2k_1^{\pm} + 2\delta_3^{\pm} + 2\delta_4^{\pm} + 1(\pm 1)\}$$

(ces valeurs dépendent en fait de la position de l'ovale extèrieur au nid N_2 par rapport au faisceau, ce qui explique les termes entre parenthèses). Le membre de gauche se calcule directement, et vaut

$$2(\pi_{\pm}^{\pm} - \pi_{\mp}^{\pm})^{N_1} - 4k_1^{\pm}(2\delta_1^{\pm} - 1) + 4\delta_2^{\pm}(\delta_2^{\pm} - \delta_1^{\pm}) + 4\delta_3^{\pm}(\delta_3^{\pm} - \delta_1^{\pm})$$
$$+4\delta_4^{\pm}(\delta_4^{\pm} - \delta_1^{\pm}) + (E^{\pm} - E^{\mp}) + (\pi_-^{-} - \pi_-^{+})^{N_2} + (\delta_2^{\pm} + \delta_4^{\pm} - 2\delta_1^{\pm})$$

(ce qui s'obtient en faisant intervenir les faisceaux de droites centrés en x_3 et x_4). $\square$

Corollaire 2.9. *Si le schéma réel d'une courbe algébrique réelle non-singulière maximale de degré 8 de $\mathbb{C}P^2$ est $\langle 1 \sqcup 1\langle\alpha\rangle \sqcup 1\langle\beta\rangle\rangle$, où α est pair et β impair, alors son schéma complexe est:*

$$\left\langle 1 \sqcup 1\left\langle \left(\frac{\alpha}{2}+1\right)_+ \sqcup \left(\frac{\alpha}{2}-1\right)_- \right\rangle \sqcup 1\left\langle \left(\frac{\beta+1}{2}\right)_+ \sqcup \left(\frac{\beta-1}{2}\right)_- \right\rangle\right\rangle.$$

Démonstration.

Lemme 2.10. *Une courbe satisfaisant les hypothèses du Corollaire 2.9 mais n'ayant pas le schéma complexe*

$$\left\langle 1 \sqcup 1\left\langle \left(\frac{\alpha}{2}+1\right)_+ \sqcup \left(\frac{\alpha}{2}-1\right)_- \right\rangle \sqcup 1\left\langle \left(\frac{\beta+1}{2}\right)_+ \sqcup \left(\frac{\beta-1}{2}\right)_- \right\rangle\right\rangle$$

possède nécéssairement quatre ovales disposés comme sur la figure suivante:

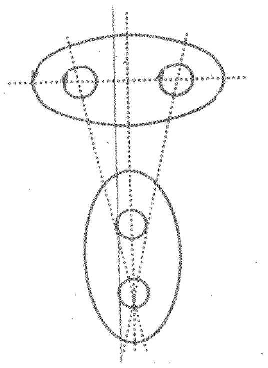

Fig. 2.

De plus, les points x_2 et x_4 sont de type β, ils séparent le faisceau de droite centré en x_1 en deux parties, et l'ovale exterieur ne se situe pas dans la même partie que x_3.

Démonstration du Lemme 2.10. Si $\alpha_+ - \alpha_-$ est strictement supérieur à deux, on considère le faisceau de droite centré en un point intérieur à un ovale de type β. D'après la propriété d'alternance, les orientations complexes des ovales dans ce faisceau sont alternées et dans le nid contenant les ovales de type α, ce faisceau effectue forcément à deux reprises un saut entre deux ovales positifs. Comme il n'y a qu'un ovale exterieur, un de ces deux sauts est de la forme recherchée. De même, si $\alpha_+ - \alpha_-$ est strictement inférieur à deux, alors d'après la formule de Rokhlin ([10]) $\beta_+ - \beta_-$ est supérieur ou égal à trois et en considérant le faisceau de droite centré en un point intérieur à un ovale de type α, on conclut de la même façon.

Pour démontrer la seconde partie du lemme, considérons le faisceau de coniques centré en les quatre points $x_1, \dots, x_4$. D'après le théorème de Bezout, chaque conique coupe la courbe réelle en au plus seize points. Par conséquent, les ovales vides autres que $x_1, \dots, x_4$ se situent nécessairement dans la partie hachurée:

En particulier, le faisceau de droites centré en x_1 rencontre tous les ovales de même type que x_1 entre x_2 et x_4. Ce nombre d'ovales est donc nécessairement impair, d'où le résultat. □

En appliquant à présent la Proposition 2.8, on en déduit que si le

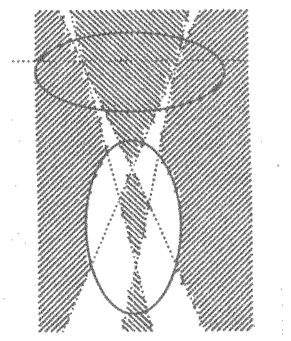

Fig. 3.

schéma complexe de la courbe donnée par le Corollaire 2.9 n'est pas

$$\left\langle 1 \sqcup 1 \left\langle \left(\frac{\alpha}{2}+1\right)_+ \sqcup \left(\frac{\alpha}{2}-1\right)_- \right\rangle \sqcup 1 \left\langle \left(\frac{\beta+1}{2}\right)_+ \sqcup \left(\frac{\beta-1}{2}\right)_- \right\rangle \right\rangle,$$

alors cette courbe satisfait:

$$2(\beta_- - \beta_+) + (\alpha_- - \alpha_+) = -4,$$

$$(\alpha_- - \alpha_+) = -2,$$

ce qui mène à une contradiction. □

§3. Inégalités supplémentaires

Dans cette partie, nous construisons des revêtements doubles ramifiés en les cycles $\mathcal{A}_\pm$ définis au §1.3 (après quelques éclatements de ces cycles), et obtenons des inégalités en étudiant le second groupe d'homologie réelle de ces revêtements. Pour alléger les notations, fixons un signe $\eta \in \{\pm\}$, et notons $\mathcal{A}$ le cycle $\mathcal{A}_\eta$. De même, lorsque les groupes d'homologies seront à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, nous omettrons de mentionner ce groupe de coefficients.

Les rédactions des §3.2, 3.3 et 3.4 sont inspirées de [15,4] et [17] respectivement. Par ailleurs, la méthode que nous utilisons ici est analogue à celle déjà utilisée par Rokhlin [11], Arnol'd [1] (voir aussi le survey [15]), et Viro [13].

3.1. Construction d'un revêtement double ramifié en $\widetilde{\mathcal{A}}$. Notons N_+ (resp. N_-) le nombre de points doubles positifs (resp. négatifs) de $\mathcal{A}$, et $N = N_+ + N_-$ le nombre total de points doubles. Remarquons que si $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+$ (resp. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_-$), alors avec les notations du §1.2, $N_+ = \pi_-^+$ (resp. $N_+ = \pi_+^-$) et $N_- = \pi_+^+$ (resp. $N_- = \pi_-^-$).

Soit $\widetilde{X}$ l'éclatement de X en les N points doubles de $\mathcal{A}$. Supposons à présent que les disques D_t construits au §1.3 ont été choisis de sorte qu'ils soient *tangents aux fibres en chaque point double.* De cette façon, la transformée stricte $\widetilde{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ est une surface de $\widetilde{X}$ ayant pour seules singularités des plis. La structure presque-complexe J et l'involution c_X se relèvent en une structure presque-complexe sur $\widetilde{X}$ et une structure réelle $c_{\widetilde{X}}$ pour laquelle $\widetilde{\mathcal{A}}$ est invariant.

L'objet de ce paragraphe est de construire un revêtement double Y de $\widetilde{X}$ ramifié en $\widetilde{\mathcal{A}}$ sur lequel $c_{\widetilde{X}}$ se relève. Un tel revêtement n'existe que sous des hypothèses supplémentaires, comme l'indique la proposition suivante:

Proposition 3.1. *S'il existe un revêtement double de $\widetilde{X}$ ramifié en $\widetilde{\mathcal{A}}$ sur lequel $c_{\widetilde{X}}$ se relève, alors les classes d'homologies de $\widetilde{\mathcal{A}}$ et $\mathbb{R}\widetilde{\mathcal{A}}$ sont nulles dans $H_2(\widetilde{X})$ et $H_1(\mathbb{R}\widetilde{X})$ respectivement. Réciproquement, si ces deux classes d'homologies sont nulles, un tel revêtement double existe.*

Démonstration. L'existence d'un tel revêtement Y équivaut à l'existence d'un élément de $H_3(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}})$ invariant par $c_{\widetilde{X}}$ et dont le bord est $[\widetilde{\mathcal{A}}] \in H_2(\widetilde{X})$, ce qui justifie que la condition $[\widetilde{\mathcal{A}}] = 0 \in H_2(\widetilde{X})$ est nécéssaire. Par ailleurs, l'involution $c_{\widetilde{X}}$ se relève en deux involutions c_+, c_- qui diffèrent l'une de l'autre par l'automorphisme du revêtement. Les ensembles des points fixes de ces involutions sont notés Y_+ et Y_- respectivement, ils sont stables par l'automorphisme du revêtement et leur projection dans $\mathbb{R}\widetilde{X}$ a pour bord $\mathbb{R}\widetilde{\mathcal{A}}$, ce qui justifie que la seconde condition est également nécéssaire.

Le fait que dans le cas des surfaces réglées, ces conditions sont suffisantes, est donné par le Lemme 3.2. $\square$

Lemme 3.2. *Soit $\widetilde{\mathcal{A}}$ un 2-cycle entier dans une surface réglée $(\widetilde{X}, c_{\widetilde{X}})$ qui possède une J-section réelle e. On suppose que $\widetilde{\mathcal{A}}$ est stable par $c_{\widetilde{X}}$, et que les classes d'homologies de $\widetilde{\mathcal{A}}$ et $\mathbb{R}\widetilde{\mathcal{A}}$ sont nulles dans $H_2(\widetilde{X})$ et $H_1(\mathbb{R}\widetilde{X})$, respectivement. Alors il existe un 2-cycle entier E, ainsi qu'une 3-chaîne entière H dans $\widetilde{X}$, tous deux stables par $c_{\widetilde{X}}$, tels que $\partial H = \widetilde{\mathcal{A}} - 2E$.*

Démonstration. On peut supposer que $\widetilde{X}$ n'a pas de fibre singulière. En effet, en contractant des diviseurs exceptionnels, chaque surface réglée se ramène à une surface sans fibre singulière. Si le résultat est démontré pour ce type de surfaces, il l'est dans les surfaces réglées quelconques pour les cycles $\widetilde{\mathcal{A}}$ n'intersectant pas les diviseurs exceptionnels (en relevant les homologies construites). Or, on peut toujours se ramener à ce cas: chaque 2-cycle qui intersecte un diviseur exceptionnel (ici nécéssairement en un nombre pair de points), est homologue à un 2-cycle n'intersectant pas le diviseur exceptionnel moins un multiple (nécéssairement pair ici) du diviseur exceptionnel, l'homologie pouvant être choisie invariante par $c_{\widetilde{X}}$. En effet, ceci se vérifie localement et provient du fait que c'est le cas dans $\overline{\mathbb{C}P}^2$ privé d'un point.

Supposons donc que $\widetilde{X}$ n'a pas de fibre singulière, et fixons un difféomorphisme entre $(\widetilde{X} \setminus e,\ c_{\widetilde{X}})$, et un fibré vectoriel de rang 2 sur $\mathbb{R}$ au-dessus de B, muni d'un endomorphisme involutif c. En particulier, la section nulle de ce fibré correspond à une section différentiable $\tilde{e}$ de $\widetilde{X}$, stable par $c_{\widetilde{X}}$, et satisfaisant $\tilde{e} \circ e = 0$.

Notons alors $\widetilde{H} = \{tx \,|\, t \in [0,1],\ x \in \widetilde{\mathcal{A}}\}$, qui est compact si l'on convient que lorsque $x \in \widetilde{\mathcal{A}} \cap e$, l'ensemble $\{tx \,|\, t \in [0,1]\}$ est toute la fibre associée, comptée avec multiplicité. Ce complexe $\widetilde{H}$ est de dimension 3, stable par c, et son bord est constitué de $\widetilde{\mathcal{A}}$ moins un multiple pair de $\tilde{e}$ et la somme des fibres passant par les points d'intersection de e avec $\widetilde{\mathcal{A}}$ (comptées avec multiplicités). Or dans chaque composante de $\mathbb{R}\widetilde{X}$ est contenu un nombre pair de telles fibres, puisque par hypothèse $[\mathbb{R}\widetilde{\mathcal{A}}] = 0$. Ces fibres sont donc homologues à un multiple pair d'une fibre réelle, l'homologie pouvant être choisie invariante par c. De même, les fibres imaginaires sont couplées par deux avec c, et sont donc homologues à un multiple pair d'une fibre réelle, l'homologie pouvant également être choisie invariante par c. L'homologie totale H construite convient, le cycle E étant constitué de la demi-somme des fibres réelles, et d'un multiple de $\tilde{e}$. $\square$

3.2. Calculs de dimensions. Supposons à présent que $[\widetilde{\mathcal{A}}] = 0 \in H_2(\widetilde{X})$, et que $[\mathbb{R}\widetilde{\mathcal{A}}] = 0 \in H_1(\mathbb{R}\widetilde{X})$, et notons Y le revêtement double de $\widetilde{X}$ ramifié en $\widetilde{\mathcal{A}}$ construit au §3.1. Par construction, $c_{\widetilde{X}}$ se relève en deux involutions c_+ et c_- sur Y qui commutent. Ces involutions préservent l'orientation de Y et induisent donc une décomposition de $H_2(Y;\mathbb{R})$ en huit sous-espaces deux à deux orthogonaux ${}_{\pm 1}E^{\pm}_{\pm 1}$, notés de façon que, par exemple, l'espace ${}_{-1}E^{+}_{1}$ est un sous-espace maximal de $H_2(Y;\mathbb{R})$ sur lequel la forme d'intersection se restreint en une forme définie positive, l'involution c_+ agit comme l'identité, et l'involution c_- comme moins l'identité.

L'objet de ce paragraphe est de calculer les dimensions de ces sous-espaces. Notons Y_+, Y_- les ensembles des points fixes de c_+ et c_- respectivement. Ces parties sont stables par l'involution du revêtement, leurs projections dans $\widetilde{X}$, notées $\mathbb{R}\widetilde{X}_+$ et $\mathbb{R}\widetilde{X}_-$ ont pour réunion $\mathbb{R}\widetilde{X}$, et pour intersection $\mathbb{R}\widetilde{\mathcal{A}}$. Soit ξ le champ de vecteurs non nuls défini sur $\mathbb{R}\widetilde{\mathcal{A}}$ de sorte qu'en dehors de $\cup_t s_t$, ξ est tangent à $\mathbb{R}\widetilde{\mathcal{A}}$ et compatible avec son orientation, et sur $\cup_t s_t$, le champ est prolongé en un champ tangent aux fibres réelles (le fait que le champ se recolle est la propriété d'alternance, v. §1.2).

Notons alors $\chi_\xi(\mathbb{R}\widetilde{X}_+)$ (resp. $\chi_\xi(\mathbb{R}\widetilde{X}_-)$) la somme des indices des zéros du champ ξ prolongé à $\mathbb{R}\widetilde{X}_+$ (resp. $\mathbb{R}\widetilde{X}_-$). Notons également

$$\chi^1_\pm = 2\chi(B) - \chi(\mathcal{A}) - 2\chi_\xi(\mathbb{R}\widetilde{X}_\pm), \quad \text{et}$$

$$\chi^2_\pm = 2\chi(\mathbb{R}\widetilde{X}_\pm) - \frac{1}{2}\mathcal{A}\circ\mathcal{A}.$$

Proposition 3.3. *Soit A une J-courbe réelle séparante connexe à nids profonds standard de la surface réglée X, telle que $[\widetilde{\mathcal{A}}] = 0 \in H_2(\widetilde{X})$, et $[\mathbb{R}\widetilde{\mathcal{A}}] = 0 \in H_1(\mathbb{R}\widetilde{X})$. Soit Y le revêtement double construit au §3.1, et ${}_{\pm1}E^{\pm}_{\pm1}$ les huit sous-espaces orthogonaux définis ci-dessus. Les dimensions de ces sous-espaces sont:*

$$\dim({}_{+1}E^+_{+1}) = \dim({}_{+1}E^-_{+1}) = 0,$$

$$\dim({}_{-1}E^+_{-1}) = 1, \quad \dim({}_{-1}E^-_{-1}) = N + n + 1,$$

$$\dim({}_{-1}E^+_{+1}) = \frac{1}{4}\big(2N_+ + \chi^1_+ + \chi^2_+ + 2h_+(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}})\big),$$

$$\dim({}_{+1}E^+_{-1}) = \frac{1}{4}\big(2N_+ + \chi^1_- + \chi^2_- + 2h_-(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}})\big),$$

$$\dim({}_{-1}E^-_{+1}) = \frac{1}{4}\big(\chi^1_- - \chi^2_- + 2h_+(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}) - 2N_+\big),$$

$$\dim({}_{+1}E^-_{-1}) = \frac{1}{4}\big(\chi^1_+ - \chi^2_+ + 2h_-(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}) - 2N_+\big),$$

où $h_\pm(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}) \geq 0$ et

$$h_+(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}) + h_-(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}) \leq 4\dim(H_1(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}})) - 2\mu(\widetilde{\mathcal{A}}) + 2.$$

Corollaire 3.4.

$$-\chi^1_\pm - \chi^2_\pm - 2h_\pm(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}) \leq 2N_+ \leq \chi^1_\pm - \chi^2_\pm + 2h_\pm(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}). \quad \square$$

Remarque. Lorsque la base B est une sphère, $h_\pm(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}) = 0$, ce qui découle de $H_1(\widetilde{X}) = 0$ et de la connexité de $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Nous donnons à présent deux lemmes qui seront utiles dans la démonstration de la Proposition 3.3. Ces lemmes fournissent quelques calculs préliminaires concernant le revêtement Y.

Lemme 3.5.

$$\chi(Y_+) = 2\chi(\mathbb{R}\widetilde{X}_+),$$

$$b_2(Y) = 2(N+n) - \chi(\mathcal{A}) + 2b_1(Y) - 2 + 4\chi(B),$$

$$\sigma(Y) = -2n - \frac{1}{2}\mathcal{A}\circ\mathcal{A} - 2N_-,$$

$$\sigma_{c_+}(Y) = -2\chi_\xi(\mathbb{R}\widetilde{X}_+).$$

Démonstration du Lemme 3.5. D'après la dualité de Poincaré, $b_1(Y) = b_3(Y)$, et $b_0(Y) = b_4(Y) = 1$. Par conséquent, $b_2(Y) = \chi(Y) - 2 + 2b_1(Y)$ et les deux premières formules découlent de l'additivité de la caractéristique d'Euler qui fournit les relations $\chi(Y_+) = 2\chi(\mathbb{R}\widetilde{X}_+)$, $\chi(Y) = 2\chi(\widetilde{X}) - \chi(\mathcal{A})$, et

$$\chi(\widetilde{X}) = \chi(X) + N = N + n + 4 - 4g(B).$$

Les deux dernières relations sont données par la formule d'Atiyah–Singer–Hirzebruch appliquée à l'automorphisme du revêtement et c_+ respectivement. En effet, cette formule fournit les relations:

$$\sigma(Y) = 2\sigma(\widetilde{X}) - \frac{1}{2}(\widetilde{\mathcal{A}}\circ\widetilde{\mathcal{A}})_{\widetilde{X}}$$

et $\sigma_{c_+}(Y) = Y_+\circ Y_+$. Or $\sigma(\widetilde{X}) = -n - N$, et $\widetilde{\mathcal{A}}\circ\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}\circ\mathcal{A} - 4N_+$.

Enfin, $Y_+\circ Y_+ = -2\chi_\xi(\mathbb{R}\widetilde{X}_+)$, ce qui peut se vérifier en effectuant un calcul géométrique de ce nombre d'intersection: prolongeons le champ ξ en un champ de classe C^1 tangent à $\mathbb{R}\widetilde{X}_+$. Le champ $J(\xi)$ se relève en un champ normal à la surface Y_+. L'indice $Y_+\circ Y_+$ vaut alors l'indice des zéros de ce champ de vecteurs (vu comme section du fibré normal de Y_+ dans Y), c'est-à-dire deux fois l'indice des zéros du champ $J(\xi)$ sur

$\mathbb{R}\widetilde{X}_+$ (vu comme section du fibré normal de $\mathbb{R}\widetilde{X}_+$ dans $\widetilde{X}$). Or ce dernier indice vaut $-\chi_\xi(\mathbb{R}\widetilde{X}_+)$. $\square$

Par ailleurs, l'espace $H_1(Y;\mathbb{R})$ (resp. $H_3(Y;\mathbb{R})$) se décompose en une somme directe orthogonale $H_1^+(Y;\mathbb{R}) \oplus H_1^-(Y;\mathbb{R})$ (resp. $H_3^+(Y;\mathbb{R}) \oplus H_3^-(Y;\mathbb{R})$) des sous-espaces associés aux valeurs propres $+1$ et -1 de l'involution du revêtement.

Lemme 3.6.

$$\dim(H_1^+(Y;\mathbb{R})) = \dim(H_3^+(Y;\mathbb{R})) = 2g(B),$$

$$\dim(H_1^-(Y;\mathbb{R})) = \dim(H_3^-(Y;\mathbb{R})) \leq 2\dim(H_1(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}})) - \mu(\widetilde{\mathcal{A}}) + 1$$

et

$$\mathrm{tr}\,(c_+|H_1^+(Y;\mathbb{R})) = \mathrm{tr}\,(c_+|H_3^+(Y;\mathbb{R})) = 0.$$

Démonstration du Lemme 3.6. Le transfert $p^* : H_*(\widetilde{X};\mathbb{R}) \to H_*(Y;\mathbb{R})$ identifie $H_1^+(Y;\mathbb{R})$ (resp. $H_3^+(Y;\mathbb{R})$) avec $H_1(\widetilde{X};\mathbb{R})$ (resp. $H_3(\widetilde{X};\mathbb{R})$). Or $b_1(\widetilde{X}) = b_3(\widetilde{X}) = 2g(B)$, et

$$\mathrm{tr}\,(c_{\widetilde{X}}|H_1(\widetilde{X};\mathbb{R})) = \mathrm{tr}\,(c_{\widetilde{X}}|H_3(\widetilde{X};\mathbb{R})) = \mathrm{tr}\,(c_B|H_1(B;\mathbb{R})) = 0,$$

cette dernière égalité provenant de la formule des points fixes de Lefschetz appliquée à c_B.

Par ailleurs, la formule des coefficients universels fournit

$$\dim_{\mathbb{R}}(H_1(Y;\mathbb{R})) \leq \dim(H_1(Y)).$$

La suite exacte de Smith appliquée à l'involution du revêtement s'écrit:

$$\xrightarrow{\gamma} H_1(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}) \oplus H_1(\widetilde{\mathcal{A}}) \xrightarrow{\alpha} H_1(Y) \xrightarrow{\beta} H_1(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}) \to H_0(\widetilde{\mathcal{A}}) \to H_0(\widetilde{X}) \to 0$$

Par conséquent,

$$\dim(H_1(Y)) = 2\dim(H_1(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}})) + \dim(H_1(\widetilde{\mathcal{A}})) - \dim \mathrm{Im}(\gamma) - \mu(\widetilde{\mathcal{A}}) + 1.$$

Or $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2$ où $\gamma_2 : H_2(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}) \to H_1(\widetilde{\mathcal{A}})$ est le morphisme de bord. Le lemme provient alors de l'inégalité $\dim \mathrm{Im}(\gamma) \geq \dim \mathrm{Im}(\gamma_2)$, puisque $\dim(H_1(\widetilde{\mathcal{A}})) - \dim \mathrm{Im}(\gamma_2) \leq \dim H_1(\widetilde{X})$. $\square$

Remarque. Dans la démonstration, on a vu que

$$\dim(H_1(Y)) \leq 2\dim(H_1(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}})) - \mu(\widetilde{\mathcal{A}}) + 1 + 2g(B).$$

Il en découle que

$$\dim(\mathrm{Tors}\, H_1(Y;\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \leq 2\dim(H_1(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}})) - \mu(\widetilde{\mathcal{A}}) + 1,$$

ce qui sera utile dans la suite.

Démonstration de la Proposition 3.3. Le transfert identifie la partie de $H_2(Y;\mathbb{R})$ stable par l'automorphisme du revêtement avec $H_2(\widetilde{X};\mathbb{R})$. Le calcul des quatres premières dimensions découle donc du fait que $c_{\widetilde{X}}$ agit comme moins l'identité sur $H_2(\widetilde{X};\mathbb{R})$ et que $b_2^+(\widetilde{X}) = 1$, $b_2^-(\widetilde{X}) = N + n + 1$.

Les autres formules découlent des relations suivantes:

$$\dim({}_{-1}E^+_{+1})+\dim({}_{-1}E^-_{+1})+\dim({}_{+1}E^+_{-1})+\dim({}_{+1}E^-_{-1})+N+n+2=b_2(Y),$$

$$\dim({}_{-1}E^+_{+1})-\dim({}_{-1}E^-_{+1})+\dim({}_{+1}E^+_{-1})-\dim({}_{+1}E^-_{-1})-N-n = \sigma(Y),$$

$$\dim({}_{-1}E^+_{+1})-\dim({}_{-1}E^-_{+1})-\dim({}_{+1}E^+_{-1})+\dim({}_{+1}E^-_{-1})+N+n = \sigma_{c_+}(Y),$$

$$\dim({}_{-1}E^+_{+1})+\dim({}_{-1}E^-_{+1})-\dim({}_{+1}E^+_{-1})-\dim({}_{+1}E^-_{-1})-N-n-2 =$$
$$= \chi(Y_+) - 2 + tr(c_+|H_1(Y;\mathbb{R})\oplus H_3(Y;\mathbb{R}))$$

(la dernière relation est la formule des points fixes de Lefschetz appliquée à l'involution c_+).

Remarquons que, puisque c_+ préserve la forme d'intersection et que celle-ci est non-dégénérée, $\mathrm{tr}(c_+|H_1(Y;\mathbb{R})) = \mathrm{tr}(c_+|H_3(Y;\mathbb{R}))$. Par ailleurs, les membres de droite des quatre relations précédentes ont été calculés dans le Lemme 3.5. Pour terminer la démonstration de la Proposition 3.3, il suffit donc de résoudre le système d'équations précédent, et d'utiliser les estimations données par le Lemme 3.6. En effet, d'après ce lemme,

$$b_1(Y) \pm tr(c_+|H_1(Y;\mathbb{R})) = 2g(B) + h_\pm(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}),$$

avec

$$h_\pm(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}) = \dim(H_1^-(Y;\mathbb{R})) \pm \mathrm{tr}(c_+|H_1^-(Y;\mathbb{R})),$$

et ces quantités sont positives et satisfont l'inégalité:

$$h_+(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}) + h_-(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}) \leq 4\dim(H_1(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}})) - 2\mu(\widetilde{\mathcal{A}}) + 2. \quad \square$$

3.3. Les formes quadratiques f^ϵ. Notons $D^1_\epsilon, \dots, D^m_\epsilon$ les composantes connexes de $\mathbb{R}\widetilde{X}_\epsilon \setminus \mathbb{R}\widetilde{S}$, telles que les adhérences des surfaces $p^{-1}(D^i_\epsilon)$ de Y associées soient orientables. Ici, $\widetilde{S}$ désigne la réunion des diviseurs exceptionnels situés au-dessus des points doubles de $\mathcal{A}$, et notons $S = p^{-1}(\widetilde{S})$. Les adhérences des surfaces $p^{-1}(D^i_\epsilon)$ seront notées $\mathcal{D}^i_\epsilon$, leurs bords sont des réunions de cercles, chacun plongé dans une sphère de S, qui sépare donc cette sphère en deux demi-sphères canoniquement orientées (comme revêtements doubles des diviseurs exceptionnels de $\widetilde{X}$ ramifiés en deux points).

Munissons $\mathcal{D}^i_\epsilon$ d'une orientation quelconque, et recollons à son bord la réunion des demi-sphères (munies de leur orientation canonique) induisant une orientation opposée de celle du bord, de façon à former un cycle entier, dont la classe d'homologie dans $H_2(Y;\mathbb{R})$ est notée β^i_ϵ. Le projeté de β^i_ϵ sur le sous-espace propre de c_ϵ associé à la valeur propre $+1$ est alors noté α^i_ϵ, de sorte que $\alpha^i_\epsilon = \frac{1}{2}(\beta^i_\epsilon + c_\epsilon(\beta^i_\epsilon))$.

Nous allons définir une forme quadratique f^ϵ sur $\mathbb{R}^m$, et montrer dans le Lemme 3.7 qu'elle correspond à la forme quadratique de Poincaré de $H_2(Y;\mathbb{R})$ dans la famille α^i_ϵ.

Soit s un point double du cycle $\mathcal{A}$ et supposons que s joint les composantes D^i_ϵ et D^j_ϵ de $\mathbb{R}\widetilde{X}_\epsilon$, où $1 \leq i, j \leq m$ (éventuelement $i = j$). Posons $\delta_s = +1$ (resp. $\delta_s = -1$) si les surfaces orientées $\mathcal{D}^i_\epsilon$, $\mathcal{D}^j_\epsilon$ associées induisent une orientation opposée (resp. la même orientation) sur le cercle situé au-dessus de s, bordant $\mathcal{D}^i_\epsilon$ et $\mathcal{D}^j_\epsilon$. Définissons alors la forme quadratique f^ϵ_s sur $\mathbb{R}^m$ par

$$f^\epsilon_s(x_1, \dots, x_m) = -\frac{1}{2}(x_i^2 + x_j^2) + \delta_s x_i x_j.$$

Dans le cas où le point double s ne borde pas deux composantes D^i_ϵ et D^j_ϵ, mais une composante D^i_ϵ et une composante de $\mathbb{R}\widetilde{X}_\epsilon \setminus \mathbb{R}\widetilde{S}$, n'appartenant pas à $\cup_j D^j_\epsilon$, on pose $f^\epsilon_s(x_1, \dots, x_m) = -\frac{1}{2}x_i^2$.

Enfin, remarquons que le champ ξ défini au §3.2 s'étend à tout le bord des parties D^i_ϵ, en imposant que sur la partie commune avec $\mathbb{R}\widetilde{S}$, le champ est normal à cette partie et tangent à $\mathbb{R}\widetilde{X}_\epsilon$. On note alors $\chi_\xi(D^i_\epsilon)$ la somme des indices des zéros d'un prolongement de ξ à D^i_ϵ tout entier, et la forme quadratique f^ϵ est définie comme la somme des f^ϵ_s où s décrit l'ensemble des points doubles de $\mathcal{A}$, et de la forme diagonale

$$-2\sum_{i=1}^{m} \chi_\xi(D^i_\epsilon) x_i^2,$$

c'est-à-dire:

$$f^\epsilon = \sum_s f_s^\epsilon - 2\sum_{i=1}^m \chi_\xi(D_\epsilon^i)x_i^2.$$

Notons $\sigma_+(f^\epsilon)$ (resp. $\sigma_-(f^\epsilon)$) la dimension maximale d'un sous-espace de $\mathbb{R}^m$ sur lequel la forme quadratique f^ϵ associée ($\epsilon = \pm 1$) se restreint en une forme définie positive (resp. définie négative), et notons $\sigma_0(f^\epsilon)$ la dimension du noyau de cette forme.

Lemme 3.7. *La forme d'intersection de Poincaré de Y dans la famille $(\alpha_\epsilon^i)_{1\leq i\leq m}$ est la forme f^ϵ.*

Démonstration. Rappelons que

$$\alpha_\epsilon^i = \frac{1}{2}(\beta_\epsilon^i + c_\epsilon(\beta_\epsilon^i)),$$

de sorte que

$$(\alpha_\epsilon^i)^2 = \frac{1}{4}(\beta_\epsilon^i - c_\epsilon(\beta_\epsilon^i))^2 + \beta_\epsilon^i \circ c_\epsilon(\beta_\epsilon^i).$$

Le terme $\beta_\epsilon^i - c_\epsilon(\beta_\epsilon^i)$ est la somme des diviseurs de carré -2 se situant au-dessus des points doubles s bordant D_ϵ^i, le diviseur étant compté deux fois si D_ϵ^i se situe de part et d'autre de s. Le terme $\beta_\epsilon^i \circ c_\epsilon(\beta_\epsilon^i)$ peut se calculer géométriquement: le champ $J(\xi)$ (ξ est le champ défini au §3.3) se relève en un champ normal à $\mathcal{D}_\epsilon^i$, qui s'étend en un champ normal à β_ϵ^i, dont l'indice des zéros vaut -1 sur chaque demi-sphère, et vaut $-2\chi_\xi(D_\epsilon^i)$ sur $\mathcal{D}_\epsilon^i$. En décalant ce cycle à l'aide d'un flot associé à ce champ de vecteurs, on obtient alors un cycle transverse à $c_\epsilon(\beta_\epsilon^i)$, et dont l'indice d'intersection avec $c_\epsilon(\beta_\epsilon^i)$ vaut $-2\chi_\xi(D_\epsilon^i)$ auquel s'ajoute deux fois le nombre de points doubles s bordant D_ϵ^i de part et d'autre et pour lesquels $\delta_s = +1$. En sommant ces contributions, on s'aperçoit donc que $(\alpha_\epsilon^i)^2$ vaut exactement $f^\epsilon(e_i)$, où e_i est le i^{eme} vecteur coordonnée de $\mathbb{R}^m$.

Pour effectuer un calcul géométrique de $\alpha_\epsilon^i \circ \alpha_\epsilon^j$ avec $i \neq j$, on décale le cycle β_ϵ^i comme précédement, de façon à le rendre transverse à β_ϵ^j. Ainsi, les seuls points d'intersections entre ces deux cycles sont situés sur les diviseurs de carré -2 et la somme des indices est exactement la somme des δ_s où s décrit l'ensemble des points doubles bordant D_i^ϵ et D_j^ϵ, ce qui coïncide avec $f^\epsilon(e_i, e_j)$. $\square$

3.4. Résultat principal.

Théorème 3.8. *Soit A une J-courbe réelle séparante connexe à nids profonds standard de la surface réglée X. On a, en conservant les notations de la Proposition 3.3, pour $\epsilon \in \{\pm\}$:*

$$\max(0, \tilde{\sigma}_0(f^\epsilon)) + \sigma_+(f^\epsilon) \leq \frac{1}{4}\big(2N_+ + \chi^1_\epsilon + \chi^2_\epsilon + 2h_\epsilon(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}})\big),$$

$$\max(0, \tilde{\sigma}_0(f^\epsilon)) + \sigma_-(f^\epsilon) \leq \frac{1}{4}\big(\chi^1_{-\epsilon} - \chi^2_{-\epsilon} + 2h_\epsilon(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}}) - 2N_+\big),$$

où

$$\tilde{\sigma}_0(f^\epsilon) = \sigma_0(f^\epsilon) - 2\dim(H_1(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}})) - 4g(B) - 1.$$

Remarque. Rappelons que $N_+ = \pi^+_-$ (resp. $N_+ = \pi^-_+$) si $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+$ (resp. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_-$). Par ailleurs, lorsque la réunion des D^i_ϵ n'est pas toute la surface $\mathbb{R}\widetilde{X}_\epsilon \setminus \mathbb{R}\widetilde{S}$, le terme -1 peut être enlevé dans la définition de $\tilde{\sigma}_0(f^\epsilon)$; et lorsque la base B est une sphère, les termes $g(B)$ et $\dim(H_1(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}}))$ sont nuls.

Pour démontrer ce théorème, nous allons calculer la dimension ρ du sous-espace de $H_2(Y;\mathbb{R})$ engendré par les cycles α^i_ϵ, calcul effectué dans le Lemme 3.10, puis utiliser le Lemme 3.7, pour enfin conclure.

Commençons donc par donner deux lemmes préliminaires. Rappelons que $S = p^{-1}\widetilde{S}$ où $\widetilde{S}$ est la réunion des diviseurs exceptionnels de $\widetilde{X}$ situés au-dessus des points doubles de $\mathcal{A}$. L'image des cycles α^i_ϵ dans le groupe $H_2(Y, S; \mathbb{R})$, est réalisée par les surfaces $\mathcal{D}^i_\epsilon$ ($i \in \{1, \dots, m\}$), elle peut donc être considérée dans $H_2(Y, S; \mathbb{Z})$ et $H_2(Y, S)$.

Lemme 3.9. *Le rang de la famille $(\alpha^i_\epsilon)_{1\leq i\leq m}$ dans $H_2(Y, S)$ est supérieur ou égal à $m - \mu(\widetilde{\mathcal{A}}) - 2g(B)$.*

Démonstration. Considérons la suite exacte de Smith:

$$\dots \to H_3(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}} \cup \widetilde{S}) \xrightarrow{\gamma} H_2(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}} \cup \widetilde{S}) \oplus H_2(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mathcal{A}} \cap \widetilde{S}) \xrightarrow{\alpha} H_2(Y, S) \to \dots$$

Le rang des éléments $\tilde{\alpha}^i_\epsilon$ de $H_2(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}} \cup \widetilde{S})$ réalisés par les parties D^i_ϵ de $\mathbb{R}\widetilde{X}_\epsilon$ est au moins $m - \mu(\widetilde{\mathcal{A}})$. En effet, l'image de ces éléments par le morphisme de bord est de rang m dans $H_1(\mathbb{R}\widetilde{\mathcal{A}} \cup \mathbb{R}\widetilde{S})$, et en composant par le morphisme d'inclusion $H_1(\mathbb{R}\widetilde{\mathcal{A}} \cup \mathbb{R}\widetilde{S}) \to H_1(\widetilde{\mathcal{A}} \cup \widetilde{S})$, il ne peut apparaitre qu'un noyau de dimension inférieure à $\mu(\widetilde{\mathcal{A}})$ (et de dimension exactement $\mu(\widetilde{\mathcal{A}})$ seulement dans le cas où la réunion des parties D^i_ϵ est toute la surface $\mathbb{R}\widetilde{X}_\epsilon \setminus \mathbb{R}\widetilde{S}$).

Le résultat découle alors de l'inégalité suivante:

$$\dim\big(H_2(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}\cup\widetilde{S})\cap \operatorname{Ker}(\alpha)\big)\leq 2g(B).$$

Pour démontrer cette inégalité, écrivons $\gamma=\gamma_1\oplus\gamma_2$, γ_2 étant le morphisme de bord associé à la triade $(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}\cup\widetilde{S},\widetilde{\mathcal{A}}\cap\widetilde{S})$. La suite exacte associée à cette triade est:

$$0\to H_3(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}\cap\widetilde{S})\to H_3(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}\cup\widetilde{S})\xrightarrow{\gamma_2} H_2(\widetilde{\mathcal{A}}\cup\widetilde{S},\widetilde{\mathcal{A}}\cap\widetilde{S})\to\dots$$

Donc le noyau de γ_2 est formé des éléments de $H_3(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}\cap\widetilde{S})=H_3(\widetilde{X})$, et est de dimension inférieure ou égale à $2g(B)$. $\square$

Lemme 3.10. *Le rang de la famille $(\alpha_\epsilon^i)_{1\leq i\leq m}$ dans $H_2(Y;\mathbb{R})$ est supérieur ou égal à $m-1-4g(B)-2\dim(H_1(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}))$.*

Démonstration. Les composantes S_i de S engendrent un sous-espace de $\big(H_2(Y;\mathbb{Z})/\operatorname{Tors}H_2(Y;\mathbb{Z})\big)\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de dimension supérieure ou égale à $N-2g(B)$. En effet, il suffit de voir qu'ils engendrent un sous-espace de dimension supérieure ou égale à $N-2g(B)$ dans $H_2(Y)$ puisque l'intersection de ce sous-espace avec $\operatorname{Tors}H_2(Y;\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est réduite à $\{0\}$. La suite exacte de Smith appliquée à l'involution du revêtement donne:

$$\dots\to H_3(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}})\xrightarrow{\gamma} H_2(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}})\oplus H_2(\widetilde{\mathcal{A}})\xrightarrow{\alpha} H_2(Y)\to\dots$$

Les diviseurs exceptionnels $\widetilde{S}_i$ sont linéairement indépendants dans $H_2(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}})$, il suffit donc de voir que

$$\dim\big(H_2(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}})\cap\operatorname{Ker}(\alpha)\big)\leq 2g(B),$$

ce qui se démontre de façon analogue à ce qui a été fait au Lemme 3.9: $\gamma=\gamma_1\oplus\gamma_2$ où γ_2 étant le morphisme de bord associé à la paire $(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}})$, et la suite exacte associée est:

$$0\to H_3(\widetilde{X})\xrightarrow{\beta} H_3(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}})\xrightarrow{\gamma_2} H_2(\widetilde{\mathcal{A}})\to\dots$$

Le noyau de γ_2, qui est égal à l'image de β, est donc de dimension inférieure ou égale à $2g(B)$.

En choisissant une famille d'éléments $\widetilde{S}_i$ linéairement indépendants dans $H_2(Y)$, on s'aperçoit que cette famille engendre un facteur direct dans $H_2(Y;\mathbb{Z})/\operatorname{Tors}H_2(Y;\mathbb{Z})$. En effet, supposons le contraire et choisissons $x\in H_2(Y;\mathbb{Z})$ et $k,l_1,\dots,l_n$ des entiers premiers entre eux tels que $kx = \sum_i l_i S_i$ avec $k \neq \pm 1$. En intersectant avec les S_i, on s'aperçoit que k divise $2l_i$ quel que soit i, donc que k peut être supposé pair. On en déduit que $0 = \sum_i l_i S_i \in H_2(Y;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et puisque les éléments $\widetilde{S}_i$ sont linéairement indépendants dans $H_2(Y)$, que les entiers l_i sont pairs, ce qui est une contradiction.

Comme une telle famille d'éléments $\widetilde{S}_i$ peut être choisie de rang au moins $N - 2g(B)$, on en déduit que

$$\dim(\mathrm{Tors}(H_2(Y,S;\mathbb{Z})) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \leq \dim(\mathrm{Tors}\, H_2(Y;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) + 2g(B),$$

en considérant la suite exacte

$$\cdots \to H_2(S;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha} H_2(Y;\mathbb{Z}) \to H_2(Y,S;\mathbb{Z}) \to 0$$

et le fait que $\mathrm{Im}(\alpha) \cap \mathrm{Tors}\, H_2(Y;\mathbb{Z}) = \{0\}$.

Par ailleurs, d'après la formule des coefficients universels,

$$\mathrm{Tors}\, H_2(Y;\mathbb{Z}) = \mathrm{Tors}\, H_1(Y;\mathbb{Z}),$$

et d'après la remarque qui suit le lemme 3.6,

$$\dim\, \mathrm{Tors}\, H_1(Y;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \leq 2\dim(H_1(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}})) - \mu(\widetilde{\mathcal{A}}) + 1.$$

Ainsi, on a démontré l'inégalité:

$$\dim(\mathrm{Tors}(H_2(Y,S;\mathbb{Z})) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \leq 2g(B) + 2\dim(H_1(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}})) - \mu(\widetilde{\mathcal{A}}) + 1,$$

et il suit du Lemme 3.9 que le rang de la famille $(\alpha_\epsilon^i)_{1 \leq i \leq m}$ dans $H_2(Y,S;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$ est au moins $m - 1 - 4g(B) - 2\dim(H_1(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}}))$. Le résultat en découle. $\square$

Démonstration du Théorème 3.8. Le sous-espace de $H_2(Y;\mathbb{R})$ engendré par la famille $(\alpha_\epsilon^i)_{1 \leq i \leq m}$, isomorphe à $\mathbb{R}^\rho$ avec

$$\rho \geq m - 1 - 4g(B) - 2\dim(H_1(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}}))$$

d'après le Lemme 3.10, est inclus dans le sous-espace propre ${}_{-1}E_{+1}^{+} \oplus_{-1} E_{+1}^{-}$ de c_ϵ associé à la valeur propre $+1$. Par conséquent, le noyau de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^\rho$ sur ${}_{-1}E_{+1}^{+}$ (resp. ${}_{-1}E_{+1}^{-}$) est inclus dans ${}_{-1}E_{+1}^{-}$ (resp. ${}_{-1}E_{+1}^{+}$), et d'après le Lemme 3.7, la forme f_ϵ est définie négative (resp. définie positive) sur ce noyau. Il en découle que la dimension de l'image de cette projection est au moins

$$\max\left(0, \sigma_0(f^\epsilon) - 2\dim(H_1(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}})) - 4g(B) - 1\right) + \sigma_+(f^\epsilon)$$

(resp.

$$\max\big(0, \sigma_0(f^\epsilon) - 2\dim(H_1(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}})) - 4g(B) - 1\big) + \sigma_-(f^\epsilon)),$$

et par suite que:

$$\max(0, \tilde{\sigma}_0(f^\epsilon)) + \sigma_+(f^\epsilon) \leq \dim({}_{-1}E^+_{+1}),$$

$$\max(0, \tilde{\sigma}_0(f^\epsilon)) + \sigma_-(f^\epsilon) \leq \dim({}_{-1}E^-_{+1}).$$

Le Théorème 3.8 provient alors de la Proposition 3.3. $\square$

3.5. Une application.

Théorème 3.11. *Soit A une courbe algébrique réelle maximale à nids profonds de classe $8k[v]+4[e]$ sur la surface réglée X_{2k} de base $\mathbb{C}P^1$, avec k impair (v est une fibre, et e est la section holomorphe de carré négatif $-2k$). Supposons que $\mathbb{R}A$ possède deux composantes homologues à $\pm e_{\mathbb{R}}$. Ces deux composantes séparent le tore $\mathbb{R}X$ en deux cylindres, dont un est divisé en deux moitiés par $e_{\mathbb{R}}$. Supposons que les ovales de $\mathbb{R}A$ se situant dans ce dernier cylindre se situent en fait dans une même moitié.*

Alors $[\mathbb{R}A] = 0 \in H_1(\mathbb{R}X;\mathbb{Z})$, et en orientant la base de sorte que la composante séparant les ovales soit de nombre d'enroulement $+1$, on a:

$$\pi^+_- \leq 2k+2.$$

Remarque. Il est facile de voir que dès que $k > 1$, ce théorème fournit des restrictions sur les courbes qui ne sont pas données par les théorèmes précédents.

Démonstration du Théorème 3.11. Le fait que $[\mathbb{R}A] = 0 \in H_1(\mathbb{R}X;\mathbb{Z})$ provient de la Proposition 4.1 de [14] (c'est ici qu'on utilise le fait que k est impair).

Appliquons ensuite le Théorème 3.8 au cycle $\mathcal{A}_+$. Notons $\mathbb{R}X_+$ la moitié de $\mathbb{R}X$ formée de N disques, où N est le nombre de points doubles de $\mathcal{A}_+$. La courbe possède $12k-4$ ovales,

$$[\mathcal{A}_+] = 4k[v] + 2[e], \quad \chi^1_- = 4 + 2N \quad \text{et} \quad \chi^2_- = -2N - 4k.$$

D'après le Théorème 3.8, on a donc:

$$\sigma_-(f^+) \leq N + k + 1 - \frac{1}{2}\pi^+_-.$$

Or la matrice de f^+ dans la famille associée aux N disques est de la forme (a_{ij}) avec $a_{ii} = -1$, $a_{ij} = \frac{1}{2}$ si $|i-j| = 1$ et $a_{ij} = 0$ sinon (on utilise ici le fait que la classe caractéristique du revêtement Y au-dessus de $\mathbb{R}\widetilde{X}$ est $[\mathbb{R}E]$ où $E = 2kv + e$ est donné par le Lemme 3.2). Cette forme est donc définie négative, de sorte que $\sigma_-(f^+) = N$. D'où le résultat. $\square$

3.6. Remarque finale. Les résultats de cet article s'appliquent également aux J-courbes à nids profonds possédant des points réels multiples ordinaires en dehors des fibres singulières, puisqu'un éclatement en ces points rend la courbe non-singulière et que la surface reste réglée. Mieux, nous aurions pu effectuer des hypothèses moins fortes sur les surfaces réglées, et admettre que les fibres singulières soient des arbres quelconques de J-sphères (les énoncés des résultats auraient alors été encore plus longs). Il en découle donc que les résultats s'appliquent également à toutes les J-courbes à nids profonds dont les singularités sont réelles. Remarquons toutefois que le fait d'être à nids profonds impose de fortes conditions sur la nature de ces singularités.

Annexes

A. Dépendance des termes π^+ et π^-

Soit L une courbe orientée sur un tore ou une bouteille de Klein muni de sa structure de fibré en cercle sur S^1. On suppose que les composantes non-contractiles de L sont transverses aux fibres, que les ovales ne sont tangents aux fibres qu'en deux points et que chaque fibre ne rencontre au plus qu'un seul ovale, et enfin que ces ovales n'intersectent pas la section $e_{\mathbb{R}}$ et satisfont la propriété d'alternance. Pour une telle courbe, on définit de la même façon que dans §1.2 un entier π. Cette définition utilise la structure de fibré de la surface, et le problème est de savoir si pour deux courbes L_1 et L_2 isotopes par une isotopie de la surface préservant $e_{\mathbb{R}}$, les termes π_1 et π_2 associés sont égaux. Pour répondre à cette question, nous allons distinguer le cas du tore de celui de la bouteille de Klein, et interpréter le terme π comme une intégrale sur un ensemble fini mesuré K. L'invariance de π en découlera immédiatement. Toutefois, dans le cas du tore, une telle construction ne sera valable que si $e_{\mathbb{R}} \circ L = 0$, et dans le cas contraire il s'avère que π n'est pas invariant. Par soucis de concision, aucune démonstration ne sera donnée (elles sont directes).

A.1. Cas du tore. Dans ce cas, on munit le tore d'une orientation quelconque, et le complémentaire de $e_{\mathbb{R}}$ est un cylindre qui lui aussi est orienté. La courbe L privée de ses ovales est une courbe à bord dans ce cylindre, et on note $\{C_k \mid k \in K\}$ l'ensemble des composantes connexes de son complémentaire.

Lemme A.1. *Si $L \circ e_{\mathbb{R}} = 0$, il existe une mesure μ sur l'ensemble K possédant la propriété suivante: si C_1 et C_2 sont deux composantes voisines, et γ un chemin orienté infinitésimal transverse à L reliant C_1 à C_2, alors $\mu(C_2) = \mu(C_1) + 2L \circ \gamma$. De plus, deux telles mesures diffèrent d'une constante.* $\square$

Chaque ovale de L borde un disque orienté, et cet ovale est dit positif (resp. négatif) si l'orientation de ce disque coïncide (resp. ne coïncide pas) avec l'orientation du tore. On définit alors la fonction g sur K en posant $g(k)$ égal au nombre algébrique d'ovales situés dans C_k. Il découle de la propriété d'alternance que $\sum_k g(k) = 0$, ce qui peut se réinterpréter comme le fait que l'intégrale de g sur K muni d'une mesure constante est nulle.

Lemme A.2. *Si $L \circ e_{\mathbb{R}} = 0$, et que μ est une mesure donnée par le Lemme* A.1, *alors $\int_K g d\mu$ est indépendante du choix de μ et:*

$$\pi = \int_K g \, d\mu. \qquad \square$$

Par contre, si $L \circ e_{\mathbb{R}} \neq 0$, le terme π n'est pas invariant comme le montre l'exemple suivant de deux courbes isotopes sur le tore, pour lesquelles π vaut ± 1:

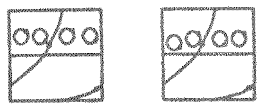

Fig. 4.

A.3. Cas d'une bouteille de Klein. Dans ce cas, le complémentaire de $e_{\mathbb{R}}$ est un ruban de Mœbius, et on introduit le même ensemble $\{C_k \mid k \in K\}$. Trois cas sont à distinguer: le cas où une composante C_k n'est pas orientable, le cas où toutes les composantes C_k sont orientables du fait de la présence d'une composante l de L homologue à l'âme du ruban de Mœbius, et le cas où toutes les composantes C_k sont orientables du fait de la présence d'une composante l à bord de $L \setminus e_{\mathbb{R}}$, de classe d'homologie non nulle. Fixons dans le premier cas une orientation du complémentaire de la composante non orientable, et dans les deux autres cas l'orientation du complémentaire de l qui induit sur l la multiplicité $+2l$ (l est orientée comme incluse dans L qui est orientée).

A présent, définissons dans les deux premiers cas une mesure μ sur l'ensemble K, qui possède la propriété énoncée dans le Lemme A.1 et qui valle 0 sur la composante non orientable dans le premier cas, et 1 sur la composante voisine de l dans le second. Remarquons qu'ici, $L \circ \gamma$ est également bien défini, puisque seule une composante peut être non-orientable, et que le complémentaire de cette composante est orienté. Dans le troisième cas, on définit dans un premier temps une mesure μ' sur K qui possède la propriété énoncée dans le Lemme A.1 et qui valle 0 sur la composante située d'un coté de l. Dans ce cas, la mesure μ' de la composante située de l'autre coté de l est de la forme $2m$ ($m \in \mathbb{Z}$), et on définit μ comme la somme de μ' et de la mesure constante $1 - m$, de façon que μ valle $1 - m$ et $1 + m$ de part et d'autre de l.

Enfin, de la même façon que dans le paragraphe précédent, chaque ovale de L situé dans une composante orientable a un signe, et on définit la fonction g sur K comme étant nulle sur l'éventuelle composante non orientable, et comme valant le nombre algébrique d'ovales sur les autres composantes.

Lemme A.3. *Dans tous les cas décrits ci-dessus, et pour les mesures μ et fonctions g définies, on a:*

$$\pi = \int_K g \, d\mu. \qquad \square$$

B. Une surface réglée sans J-section réelle

Soit $X = T^2 \times \mathbb{C}P^1$ où T^2 est un tore, et p la projection $X \to T^2$. Notons U^1 le groupe des nombres complexes de module un, et (x, y) les coordonnées sur $T^2 = U^1 \times U^1$. On munit alors T^2 de la structure réelle $c_T : (x, y) \mapsto (\overline{x}, y)$, et on définit:

$$\begin{aligned} c_X &: X \to X \\ (x, y; z) &\mapsto \left(\overline{x}, y; \frac{(1+x)\overline{z} + i(1-x)}{(1-x)\overline{z} + i(1+x)} i\right) \end{aligned}$$

Proposition B.1. *L'involution c_X est une structure réelle sur la surface réglée $X \to T^2$. La partie réelle $\mathbb{R}T$ a deux composantes connexes, alors que $\mathbb{R}X$ est connexe.* $\square$

Une conséquence immédiate de cette proposition est que X ne possède pas de section continue invariante par c_X.

References

1. V. I. Arnol'd, *Distribution of ovals of the real plane algebraic curves, involutions of four-dimensional smooth manifold, and the arithmetic of integral quadratic forms.* — Funct. Anal. Appl. **5** (1971), 169–176.
2. J. Eliashberg, V. Kharlamov, *Some remarks on the number of complex points of a real surface in the complex one.* Proc. Internat. Top. Conf. Leningrad. 1983, pp. 31–38.
3. T. Fiedler, *Pencils of lines and the topology of real algebraic curves.* — Math. USSR-Izvestia **21** (1983), 161–170.
4. V. Kharlamov, *Topology of real algebraic manifolds.* dans I. G. Petrovsky Selected works, (Classics of Soviet Math. Series, Vol. 5). 1996, pp. 509–550.
5. H. F. Lai, *Characteristic classes of real manifolds immersed in complex manifolds.* — Trans. Amer. Math. Soc. **172** (1972), 1–33.
6. S. Matsuoka, *Congruences for M and $(M-1)$-curves with odd branches on a hyperboloid.* — Bull. London Math. Soc. **24** no. 1 (1992), 61–67.
7. G. Mikhalkin, *The complex separation of real surfaces and extensions of Rokhlin congruence.* — Invent. Math. **118** (1994), 197–222.
8. N. M. Mishachev, *Complex orientations of plane M-curves of odd degree.* — Funct. Anal. Appl. **9** (1975), 342–343.
9. S. Yu. Orevkov, *Link theory and oval arrangements of real algebraic curves.* — Topology **38** (1999), 779–810.
10. V. A. Rokhlin, *Complex orientations of real algebraic curves.* — Funct. Anal. Appl. **8** (1974), 331–334.
11. V. A. Rokhlin, *New inequalities in the topology of plane algebraic curves.* — Funct. Anal. Appl. **14** (1980), 29–33.
12. O. Ya. Viro, *Progress in the topology of real algebraic varieties over the last six years.* — Russian Math. Surveys **41** no. 3 (1986), 55–82.
13. O. Ya. Viro, *Generalization of the inequalities of Petrovsky and Arnol'd to curves with singularities.* — Uspekhi Mat. Nauk **33** no. 3 (1978), 145–146.
14. J. Y. Welschinger, *Forme d'intersection tordue et extension de la congruence d'Arnol'd.* preprint.
15. G. Wilson, *Hilbert's sixteen problem.* — Topology **17** (1978), 53–74.
16. V. I. Zvonilov, *Complex topological characteristics of real algebraic curves on surfaces.* — Funct. Anal. Appl. **16** (1982), 202–204.
17. V. I. Zvonilov, *Refinement of the Petrovsky–Arnol'd inequality for curves of odd degree.* — Funct. Anal. Appl. **13** (1979), 262–268.

Welschinger J.-Y. Real J-curves with deep nests on ruled surfaces.

The paper is divided in two independent parts. The goal of the first part (§2) is to present a new proof of the complex orientation formula obtained by S. Yu. Orevkov's [9], which allows one to generalize this formula to J-curves with deep nests on ruled surfaces. In particular, this

yields an analog of this formula for separating real algebraic curves in $\mathbb{C}P^2$ with two nests.

In the second part (§3), analogs of the inequalities of Arnol'd [1] and Rokhlin [11] are obtained for separating real J-curves with deep nests on ruled surfaces.

Institut de Recherche
Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur
email welsch@math.u-strasbg.fr

Поступило 6 декабря 1999 г.