Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 266, 2000 г.

В. В. Донцов

СИСТОЛЫ НИЛЬМНОГООБРАЗИЙ С МЕТРИКАМИ КАРНО—КАРАТЕОДОРИ

Введение

Среди метрических пространств особое место занимают пространства с *внутренней метрикой* [1]. Важнейшими представителями этого класса являются римановы многообразия. Другой не менее интересный пример такого рода пространств представляют нильмногообразия [2] с метриками Карно–Каратеодори ([3]). Важной характеристикой пространств с внутренней метрикой является *систолическая константа* (см. ниже), которая представляет собой гомотопический инвариант [4].

Данная статья посвящена описанию систолических констант ряда важных примеров метрических пространств с внутренней метрикой.

Перейдем к более точным определениям и формулировкам.

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство с внутренней метрикой ρ, класс которых будем обозначать Int. Если хаусдорфова размерность X равна m, то на X определена ненулевая m-мерная мера Хаусдорфа $\mathcal{H}^m_\rho$, порожденная внутренней метрикой ρ. Определим систолическую константу σ следующим образом:

$$\sigma(X) = \inf_{\rho \in \mathrm{Int}} \frac{\mathcal{H}^m_\rho(X, \rho)}{(\mathrm{sys}(X, \rho))^m}, \tag{1}$$

где $\mathrm{sys}(X, \rho)$ есть, по определению, минимальная длина негомотопной нулю замкнутой петли на X. Поскольку в римановых пространствах мера Хаусдорфа совпадает с мерой Лебега [5], то для этих пространств определение (1) в точности совпадает с определением Берже [6] систолической константы компактного m-мерного риманова многообразия (M, g):

$$\sigma(M) = \inf_g \frac{\mathrm{Vol}(M, g)}{(\mathrm{sys}(M, g))^m}, \tag{2}$$

где $\mathrm{sys}(M, g)$ есть, по определению, минимальная длина негомотопной нулю замкнутой геодезической.

Вычисление систолической константы для произвольного риманова многообразия является сложной задачей, но для некоторых классических многообразий такие результаты уже получены [6].

1. Систолы двумерных замкнутых многообразий

В этом параграфе укажем без доказательства три теоремы, позволяющие найти систолические константы проективной плоскости $\mathbf{RP^2}$, тора $\mathbf{T^2}$, бутылки Клейна $\mathbf{K^2}$.

Теорема 1 (P. Pu [11]). *Пусть на* $\mathbf{RP^2}$ *задана риманова метрика* g. *Тогда*

$$\frac{\mathrm{Vol}(\mathbf{RP^2}, g)}{(\mathrm{sys}(\mathbf{RP^2}, g))^2} \geqslant \frac{2}{\pi},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда g *– метрика постоянной кривизны.*

Теорема 2 (Левнер, 1949, не опубликованная). *Пусть* $\mathbf{T^2}$ *– тор с римановой метрикой* g. *Тогда*

$$\frac{\mathrm{Vol}(\mathbf{T^2}, g)}{(\mathrm{sys}(\mathbf{T^{c2}}, g))^2} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $(\mathbf{T^2}, g)$ *– плоский экваториальный тор, то есть* $\mathbf{T^2} = \mathbf{R^2}/G$, *где* G *– гексогональная решетка в* $\mathbf{R}$.

Доказательство этих теорем можно найти в [7].

Теорема 3 (C. Bavard [10]). *Пусть* $\mathbf{K^2}$ *– бутылка Клейна с римановой метрикой* g. *Тогда*

$$\frac{\mathrm{Vol}(\mathbf{K^2}, g)}{(\mathrm{sys}(\mathbf{K^2}, g))^2} \geqslant \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

Таким образом, $\sigma(\mathbf{RP^2}) = \frac{2}{\pi}$, $\sigma(\mathbf{T^2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma(\mathbf{K^2}) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. На этом точные результаты заканчиваются. Хорошая оценка снизу для $\sigma(\mathbf{S^2_k})$, где $\mathbf{S^2_k}$ – сфера с k ручками, получена М. Громовым [8]. Ему же принадлежит более общий результат, позволяющий выделить многообразия с положительной систолической константой [9].

2. Существенные многообразия

Пусть (M, g) – замкнутое m-мерное многообразие с римановой метрикой g и ненулевой фундаментальной группой. Рассмотрим отображение

$$F : M \to \mathbf{K}(\pi_1(M), 1),$$

индуцирующее изоморфизм фундаментальных групп. Пусть F_* – индуцированное отображение m-мерных гомологий,

$$F_* : \mathbf{H_m}(M, k) \to \mathbf{H_m}(\mathbf{K}(\pi_1(M), 1), k),$$

где $k = \mathbf{Z}$, если M ориентируемо, и $k = \mathbf{Z}_2$, если M неориентируемо.

Определение 1 (М. Громов). Многообразие M называется *существенным*, если $F_*([M]) \neq 0$, где $[M]$ – фундаментальный класс M.

Примерами существенных многообразий являются $\mathbf{T^2}$, $\mathbf{RP^2}$, $\mathbf{K^2}$, $\mathbf{S^2_k}$, $\mathbf{RP^2_{n-1}}$ (проективная плоскость с $n-1$ пленками Мебиуса), $\mathbf{RP^n}$, $\mathbf{T^n}$, замкнутые многообразия, допускающие метрику неположительной кривизны[1].

Теорема 4 (М. Громов [9]). *Если M – существенное многообразие, то $\sigma(M) > 0$. В случае, когда M ориентируемо, верно и обратное утверждение.*

Систолическая константа является гомотопическим инвариантом многообразия, а именно:

Теорема 5 (И. Бабенко [4]). *Если M_1 и M_2 гомотопически эквивалентны, то $\sigma(M_1) = \sigma(M_2)$.*

3. Систолы нильмногообразий с метриками Карно–Каратеодори

3.1 (Высшие) группы Гейзенберга.

[1]Последний пример следует из теоремы Адамара–Картана, поскольку в этом случае многообразие имеет гомотопический тип $\mathbf{K}(\pi, 1)$.

Рассмотрим алгебру Ли L, порожденную $2n+1$ матрицами:

$$\bar{e}_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & 0 & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_{n+i} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & 0 & & 1 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{e}_{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ & & & & \vdots \\ & & 0 & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n, \qquad (3)$$

с соотношениями: $[\bar{e}_i, \bar{e}_{n+i}] = \bar{e}_{2n+1}$, $[\bar{e}_k, \bar{e}_j] = \bar{0}$, $|k-j| \neq n$, где $[\cdot, \cdot]$ – коммутатор в алгебре матриц.

Пусть $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ – координаты на $L \simeq \mathbf{R}^{2n+1}$. Следуя Мальцеву [2], по формуле Кэмпбэлла–Хаусдорфа, введем групповую операцию на алгебре L:

$$h \cdot g = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{y}_n, \dots, \bar{y}_n, \bar{z}) =$$

$$= \left(x_1 + \bar{x}_1, \dots, x_n + \bar{x}_n, y_1 + \bar{y}_1, \dots, y_n + \bar{y}_n, z + \bar{z} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ \bar{x}_i & \bar{y}_i \end{vmatrix} \right) \qquad (4)$$

Группа с операцией (4) называется (высшей) группой Гейзенберга и обозначается H_{2n+1}. Она изоморфна группе верхнетреугольных матриц вида

$$H_{2n+1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_n & c \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_i, b_i, c \in \mathbf{R}, \ i = 1, \dots, n \right\},$$

однако умножение (4) не совпадает с умножением матриц.

Напомним, что подгруппа G в группе Ли H называется *равномерной*, если факторпространство по ее замыканию $H/\bar{G}$ компактно.

Предложение 1. *Все равномерные дискретные подгруппы H_{2n+1} ц точностью до автоморфизма H_{2n+1} описываются некоторым упорядоченным набором $(k_1, \dots, k_n)$ натуральных параметров k_i:*

$$G(k_1, \dots, k_n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & k_1 a_1 & \dots & k_n a_n & c \\ & 1 & & 0 & b_1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & 1 & b_n \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. a_i, b_i, c \in \mathbf{Z},\ i = 1, \dots, n \right\}.$$

Основную идею доказательства этого утверждения можно найти в работе Мальцева [2].

Определение 2 [2]**.** Многообразие, на котором транзитивно действует связная односвязная нильпотентная группа Ли, называется *нильмногообразием*.

Таким образом, мы получаем нильмногообразия

$$N(k_1, \dots, k_n) = H_{2n+1}/G(k_1, \dots, k_n),$$

зависящие от характеристического набора $(k_1, \dots, k_n)$.

3.2 Метрики Карно–Каратеодори на H_{2n+1}**.**

Нечетномерные пространства $\mathbf{R}^{2n+1}$ $(n \geqslant 1)$ имеют естественные контактные структуры, порожденные групповой структурой соответствующей группы Гейзенберга $H_{2n+1} \simeq \mathbf{R}^{2n+1}$. Такую структуру, с точностью до автоморфизма H_{2n+1}, задает невырожденная, левоинвариантная 1-форма ω_h на H_{2n+1}, не обращающаяся в ноль на центре $Z_{2n+1} \simeq \mathbf{R}$ группы H_{2n+1}:

$$w_h = \frac{1}{2} y_1 dx_1 - \frac{1}{2} x_1 dy_1 + \dots + \frac{1}{2} y_n dx_n - \frac{1}{2} x_n dy_n + dz,$$

где $h = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z) \in H_{2n+1}$.

Условие невырожденности имеет вид

$$\underbrace{d\omega_h \wedge \dots \wedge d\omega_h}_{n \text{ raz}} \wedge \omega_h \neq 0, \quad \forall h \in H_{2n+1}.$$

Аннулятор V_h 1-формы ω_h порождает левоинвариантное неголономное распределение $2n$-мерных плоскостей. В $V_h \simeq \mathbf{R}^{2n}$ определен класс стандартных эвклидовых метрик $g_{ij}(h)$, который в V_e

имеет вид

$$g_{ij}(e) = \sum_{i=1}^{h} (dx_i^2 + dy_i^2),$$

где $e = (0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0)$ – единица группы H_{2n+1}.

Пусть $\gamma(t) : [0; 1] \to H_{2n+1}$ кусочно-дифференцируемый путь, соединяющий единицу группы с некоторым элементом

$$h = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z) \in H_{2n+1} :$$

$\gamma(0) = e$; $\gamma(1) = h$.

Определение 3. Кривая $\gamma(t)$ называется допустимой в (H_{2n+1}, ω) если в каждый момент времени t она касается контактной гиперплоскости $V_{\gamma(t)}$, т.е. $\dot{\gamma}(t) \in V_{\gamma(t)}$.

По теореме Рашевского–Чжоу [13, 14] в (H_{2n+1}, ω_h) любые две точки соединимы допустимой кривой.

Определим длину допустимой кривой $\gamma(t)$

$$|\gamma| := \int_0^1 \sqrt{g_{ij}(\gamma(t))\dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t)}dt$$

и новую левоинвариантную метрику в (H_{2n+1}, ω)

$$\rho = \rho(e, h) := \inf_{\gamma \in D(e,h)} |\gamma| \,,$$

где $D(e, h)$ – класс допустимых кривых, соединяющих точки e и h в H_{2n+1}.

Определение 4. Метрика ρ называется метрикой Карно–Каратеодори (К–К) на (H_{2n+1}, ω_h).

Замечание 1. Метрика ρ связана с $g_{ij}(e)$, т. е. при выборе другой положительно определенной квадратичной формы g_{ij} в единице группы метрика также изменится. В этой работе будет рассматриваться только метрика К–К ρ.

Метрика ρ имеет прозрачный геометрический смысл. Расстояние от единицы группы e до некоторого элемента $h = (x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_n^0, z)$, есть длина $T = \rho(e, h)$ дуги кругового сектора с хордой

$$l = \sqrt{(x_1^0)^2 + (y_1^0)^2 + \dots + (x_n^0)^2 + (y_n^0)^2}$$

и площади z в $\mathbf{R}^2$. Если $h=(x_1^0,\dots,x_n^0,y_1^0,\dots,y_n^0,0)$, то $\rho(e,h)=l$. Это следует из решения вариационной задачи

$$\begin{cases} \int\limits_0^T \sqrt{\dot{x}_1^2(t)+\dot{y}_1^2(t)+\dots+\dot{x}_n^2(t)+\dot{y}_n^2(t)}dt \to \inf \\ \int\limits_0^T \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^n \begin{vmatrix} \dot{x}_i(t) & \dot{y}_i(t) \\ x_i(t) & y_i(t) \end{vmatrix} dt = z \\ x_i(0)=y_i(0)=0 \\ x_i(T)=x_i^0;\ y_i(T)=y_i^0, \quad i=1,\dots,n. \end{cases}$$

Замечание 2. Факторизацией ρ по G мы индуцируем метрику К–К на нильмногообразии N. Таким образом, каждое нильмногообразие с метрикой К–К характеризуется набором $(k_1,\dots,k_n)$, с точностью до автоморфизма H_{2n+1}.

3.3 Мера Хаусдорфа на H_{2n+1}.

Пусть $X\subset H_{2n+1}\simeq\mathbf{R}^{2n+1}$ некоторое множество. Рассмотрим всевозможные покрытия $\mathcal{P}_\delta(X)$ множества X счетными семействами $\{\mathcal{U}^\delta\}_\alpha\subset\mathcal{P}_\delta(A):\operatorname{diam}_\rho(\mathcal{U}_\alpha^\delta)\leqslant\delta>0$ непустых подмножеств пространства H_{2n+1} с метрикой К–К ρ.

Следуя Федереру [5], определим левоинвариантную *m-мерную меру Хаусдорфа* $\mathcal{H}_\rho^m$:

$$\mathcal{H}_\rho^m(X):=\lim_{\delta\to 0}\inf_{\mathcal{P}(X)}\sum_\alpha\frac{V_m}{2^m}(\operatorname{diam}_\rho(\mathcal{U}^\delta)_\alpha)^m, \tag{5}$$

где V_m – объем шара единичного радиуса в $\mathbf{R}^m$.

Аналогично определяется *m-мерная сферическая мера* $\mathcal{R}_\rho^m$, если в качестве семейств $\{\mathcal{U}^\delta\}_\alpha:\operatorname{diam}_\rho(\mathcal{U}_\alpha^\delta)\leqslant\delta>0$, покрывающих некоторое множество X, берутся семейства всех замкнутых шаров в H_{2n+1}, а далее применяется конструкция (5).

Мера Хаусдорфа и сферическая мера связаны соотношениями

$$\frac{1}{2^m}\mathcal{R}_\rho^m\leqslant\mathcal{H}_\rho^m\leqslant\mathcal{R}_\rho^m, \tag{6}$$

которые вполне очевидны, поскольку семейство всех непустых подмножеств содержит семейство всех замкнутых шаров. С другой стороны, всякое множество конечного диаметра d содержится в шаре диаметра $2d$. Следует заметить, что оценка снизу не является наилучшей. Например, в $\mathbf{R}^n$, более точную оценку доставляет неравенство Шварца (см. [5]). Аналогичная оценка для геометрии К–К пока неизвестна.

Пусть $\phi \neq X \subset (H_{2n+1}, \rho)$, тогда $\mathcal{H}_\rho^{2n+2}(X) \neq 0$ и $\mathcal{L}^{2n+1}(X) \neq 0$. Поскольку и мера Хаусдорфа и мера Лебега являются мерами Хаара на H_{2n+1}, то они отличаются друг от друга на некоторую мультипликативную константу μ_n:

$$\mathcal{H}_\rho^{2n+2} = \mu_n \cdot \mathcal{L}^{2n+1}.$$

Для оценки константы μ_n сосчитаем лебегову меру шара $\mathcal{B}_\varepsilon(e)$ радиуса ε в канонической метрике ρ в H_{2n+1}, с центром в единице группы

$$\mathcal{L}^{2n+1}(\mathcal{B}_\varepsilon) := V_{2n} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{2\varepsilon}{s} \sin \frac{s}{2}\right)^{2n} \cdot \varepsilon^2 \cdot \frac{2 \sin s - s - s \cos s}{2s^3} ds =$$

$$= \varepsilon^{2n+2} \cdot V_{2n} \cdot \int\limits_0^{2\pi} \frac{(1-\cos s)^{n-1}}{s^{2n-2}} \cdot \frac{2 \sin s(1-\cos s) - s \sin^2 s}{2s^5} ds =$$

$$= \varepsilon^{2n+2} \cdot V_{2n} \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^{2n} t \cdot \cos t}{t^{2n}} \cdot \frac{\sin t - t \cos t}{t^3} dt.$$

Обозначим $\theta_n := \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^{2n} t \cdot \cos t}{t^{2n}} \cdot \frac{\sin t - t \cos t}{t^3} dt$. Поскольку функция $g(t) = \frac{\sin t - t \cos t}{t^3}$ монотонна на интервале $0 \leqslant t \leqslant \pi$, то $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant \pi} g(t) = g(0) = \frac{1}{3}$; $\min\limits_{0 \leqslant t \leqslant \pi} g(t) = g(\pi) = \frac{1}{\pi^2}$ и θ_n допускает оценку:

$$\frac{1}{2\pi^2} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^{2n} t \cos t}{t^{2n}} dt < \theta_n < \frac{1}{6} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^{2n} t \cdot \cos t}{t^{2n}} dt. \tag{7}$$

Окончательно: $\mathcal{L}^{2n+1}(\mathcal{B}_\varepsilon) = \varepsilon^{2n+2} \cdot V_{2n} \cdot \theta_n$, где θ_n допускает оценки (7).

Найдем соотношение между лебеговой и сферической мерами на H_{2n+1}. Для этого покроем $\mathcal{B}_1(e)$ шарами К–К радиусов $\varepsilon_i < \varepsilon < 1$ следующим образом: зафиксируем $\varepsilon_1 < \varepsilon$ и замостим $\mathcal{B}_1(e)$ непересекающимися шарами радиуса ε_1, полученными из шара

$\mathcal{B}_{\varepsilon_1}(e)$ левыми сдвигами. Далее зафиксируем $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ и замостим оставшуюся свободной часть $\mathcal{B}_1(e)$ непересекающимися шарами радиуса ε_2, полученными из шара $\mathcal{B}_{\varepsilon_2}(e)$ левыми сдвигами, и т.д. Тогда:

$$\mathcal{R}_\rho^{2n+2}(\mathcal{B}_1(e)) = \lim_{\varepsilon\to 0}\inf_{\varepsilon_i}\sum \frac{V_{2n+2}}{2^{2n+2}}(2\varepsilon_i)^{2n+2}$$

Так как $\mathcal{L}^{2n+1}(\mathcal{B}_{\varepsilon_i}) = \varepsilon_i^{2n+2}V_{2n}\cdot\theta_n$, то

$$\mathcal{R}_\rho^{2n+2}(\mathcal{B}_1(e)) = \frac{V_{2n+2}2^{2n+2}}{V_{2n}\theta_n 2^{2n+2}}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum \mathcal{L}^{2n+1}(\mathcal{B}_{\varepsilon_i}) = \frac{V_{2n+2}}{V_{2n}\theta_n}\mathcal{L}^{2n+1}(\mathcal{B}_1(e)),$$

где суммы берутся по всем шарам.

Таким образом, $\mathcal{R}_\rho^{2n+2} = \frac{\pi}{(n+1)\theta_n}\mathcal{L}^{2n+1}$. Воспользовавшись неравенствами (6), получим оценки:

$$\frac{1}{2^{2n+2}}\frac{\pi}{(n+1)\theta_n} \leqslant \mu_n \leqslant \frac{\pi}{(n+1)\theta_n}, \tag{8}$$

где

$$\theta_n = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2n}\cdot\frac{\cos t}{t}\cdot\frac{\sin t - t\cos t}{t^2}dt$$

и допускает оценку (7).

3.4 Систолическая задача на H_{2n+1}.

Пусть $G\subset H_{2n+1}$ – равномерная решетка. Положим $\mathcal{H}_\rho^{2n+2}(G) := h_\rho^{2n+2}(V_G)$, где V_G – фундаментальная область решетки $G = (f_1,\ldots,f_{2n+1})$.

Определим систолу решетки:

$$\operatorname{sys}(G,\rho) := \inf_{\substack{g\in G,\\ g\neq e}}\rho(e,g). \tag{9}$$

Рассмотрим нильмногообразие $N^{2n+1} = H_{2n+1}/G$. Метрика К–К ρ на H_{2n+1} факторизацией по G индуцирует метрику на N^{2n+1}. Любой замкнутой кривой на N^{2n+1} будет соответствовать некоторая кривая на H_{2n+1}. В силу левоинвариантности метрики ρ, начало этой кривой можно перенести в единицу группы $e\in G$, тогда конец этой кривой попадает на решетку G. Таким образом, определение систолы решетки (9) совпадает с определением (1) систолы многообразия.

Определим систолическую константу решетки G:

$$\sigma(G) := \inf_{\rho} \frac{h_{\rho}^{2n+2}(G)}{(\operatorname{sys}(G,\rho))^{2n+2}},$$

которая совпадает с систолической константой (1) нильмногообразия $\sigma(N^{2n+1})$ с индуцированной метрикой.

Поскольку $\sigma(G) = \sigma(\delta_t G)$, где

$$\delta_t : (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z) \to (tx_1, \ldots, tx_n, ty_1, \ldots, ty_n, t^2 z), \ \ t \in \mathbf{R}_+,$$

то достаточно рассматривать решетки единичного, по мере Лебега, объема.

Таблица 1

k_1	$\varepsilon(k_1) = \frac{t_{k_1}/2}{\sin t_{k_1}/2}$	t_{k_1} – корень уравнения $\frac{k_1}{\sqrt{3}} = \frac{1-\cos t_{k_1}}{t_{k_1} - \sin t_{k_1}}$
2	1.23	2.18
3	1.11	1.59
4	1.07	1.23
5	1.04	1.00
6	1.03	085
7	1.02	0.73
8	1.02	064
9	1.01	0.57
10	1.01	0.52

Теорема 6. *В классе решеток $G(k_1, \ldots, k_n)$ единичного объема имеют место оценки:*

(1) $\max\limits_{(1,1,k_3,\ldots,k_n)} \operatorname{sys} G(1,1,k_3,\ldots,k_n) = \operatorname{sys} G(1,1,\ldots,1)$, *причем*

$$\frac{2}{\sqrt[4]{3}} < \operatorname{sys} G(1,\ldots,1) < \sqrt{\pi}. \tag{10}$$

(2) $\max\limits_{\substack{(1,k_2,\ldots,k_n),\\ k_2>1}} \operatorname{sys} G(1,k_2,\ldots,k_n) = \operatorname{sys} G(1,2,\ldots,2) = \varepsilon_0 \cdot 2^{-\frac{n-1}{2n+2}}$, *где $\varepsilon_0 = 1{,}78$ с точностью до второго знака после запятой.*

(3) $\max\limits_{\substack{(k_1,\ldots,k_n)\\ k_1>1}} \operatorname{sys} G(k_1,\ldots,k_n) = \operatorname{sys} G(k_1,\ldots,k_1) = \varepsilon_{k_1} \cdot \frac{\sqrt{2k_1}}{\sqrt[4]{3}} \cdot k_1^{-\frac{n}{2n+2}}$, *где $k_1 = 2,\ldots,10$, а значения ε_{k_1} приведены в таблице 1.*

(4) $\max\limits_{\substack{(k_1,\ldots,k_n)\\ k_1>10}} \operatorname{sys} G(k_1,\ldots,k_n) = 2\sqrt{\pi} \cdot 11^{-\frac{n}{2n+2}}$.

Доказательство этой теоремы носит чисто технический характер и поэтому будет опубликовано в другой статье.

Таблица 2

$k = k_1 \dots k_n$	$\sigma(k_1, \dots, k_n)/\mu_n$	t_{k_1}	$\min_{(k_1,\dots,k_n)}(\sigma/\mu_n)$
$k \geqslant 1$, $k_1 = k_2 = 1$	$\frac{k}{\pi^{n+1}} < \frac{\sigma(k)}{\mu_n} < \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n k$	–	$\frac{1}{\pi^{n+1}} < \frac{\sigma(k)}{\mu_n} < \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n$
$k \geqslant 2^{n-1}$, $k_1 = 1$	$W(t_{k_1})k$	–	$\frac{1}{4}(0.63)^{n+1}$
$k \geqslant 2^n$, $k_1 = 2$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{n+1} W(t_{k_1})k$	2.18	$\frac{1}{2}(0.57)^{n+1}$
$k \geqslant 3^n$, $k_1 = 3$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^{n+1} W(t_{k_1})k$	1.58	$\frac{1}{3}(0.70)^{n+1}$
$k \geqslant 4^n$, $k_1 = 4$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)^{n+1} W(t_{k_1})k$	1.23	$\frac{1}{4}(0.76)^{n+1}$
$k \geqslant 5^n$, $k_1 = 5$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{10}\right)^{n+1} W(t_{k_1})k$	1.00	$\frac{1}{5}(0.80)^{n+1}$
$k \geqslant 6^n$, $k_1 = 6$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{12}\right)^{n+1} W(t_{k_1})k$	0.85	$\frac{1}{6}(0.82)^{n+1}$
$k \geqslant 7^n$, $k_1 = 7$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{14}\right)^{n+1} W(t_{k_1})k$	0.73	$\frac{1}{5}(0.83)^{n+1}$
$k \geqslant 8^n$, $k_1 = 8$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{16}\right)^{n+1} W(t_{k_1})k$	0.64	$\frac{1}{8}(0.83)^{n+1}$
$k \geqslant 9^n$, $k_1 = 9$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{18}\right)^{n+1} W(t_{k_1})k$	0.57	$\frac{1}{9}(0.85)^{n+1}$
$k \geqslant 10^n$, $k_1 = 10$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{20}\right)^{n+1} W(t_{k_1})k$	0.52	$\frac{1}{10}(0.85)^{n+1}$
$k \geqslant 11^n$, $k_1 = 11$	$\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{n+1} k$	–	$\frac{1}{11}(0.88)^{n+1}$

Теорема 7. *Систолическая константа нильмногообразия* $N^{2n+1} = H_{2n+1}/G$ *с метрикой К–К* ρ *допускает оценки:*

$$\begin{aligned} &1)\ n = 1: \quad \sigma(N_3) = \frac{11}{16\pi^2} \cdot \mu_1, \\ &2)\ n > 1: \quad \frac{\mu_n}{(\pi)^{n+1}} < \sigma(N_{2n+1}, \rho) < \frac{\mu_n}{(4/\sqrt{3})^{n+1}}, \end{aligned} \tag{11}$$

где μ_n *допускает оценки (8).*

Доказательство. Воспользовавшись результатами предыдущей теоремы, найдем минимальное значение систолической константы в метрике ρ по всем значениям $k = k_1 \cdot \ldots \cdot k_n$. Эти данные приведены в таблице 2. Выбрав для каждого n минимальное значение, получим оценки (11).

Литература

1. А. Д. Александров, В. Н. Берестовский, И. Г. Николаев, *Обобщенные римановы пространства*. — Успехи мат. наук. **41**, № 3 (1986), 8–11.

2. А. И. Мальцев, *Об одном классе однородных пространств.* — Изв. АН СССР. Сер. мат. **13**, № 1 (1949), 9–32.
3. А. М. Вершик, В. Я. Гершкович, *Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи.* — Итоги науки и техн. Сер: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. **16** (1987), 5–221, М., ВИНИТИ.
4. И. К. Бабенко, *Асимптотические инварианты гладких многообразий.* — Изв. АН СССР. Сер. мат. **56**, № 4 (1992), 707–751.
5. Г. Федерер, *Геометрическая теория меры.* М., Наука, 1987.
6. M. Berger, *Systoles et applications selon Gromov.* — Exposé 771. Seminaire N. Bourbaki. Asterisque **216**, 279–310, Sociétè Mathématiques de France.
7. Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, *Геометрические неравенства.* Л., Наука, 1980.
8. M. Gromov, *Systoles and intersystolic inequalities.* — Preprint IHES (1992).
9. M. Gromov, *Filling riemannian manifolds.* — J. Diff. Geom. **18** (1983), 1–17.
10. C. Bavard, *Inégalités isosystoliques conformes pour la bouteille de Klein.* — Geometriae Dedicata (1988), 146–166, Preprint IHES (1992).
11. P. Pu, *Some inequalities in certain nonorientable manifolds.* — Pacific J. Math. **2** (1952), 55–71.
12. В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики.* М., Наука, 1979.
13. П. К. Рашевский, *О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией.* — Уч. зап. пед. ин-та. им. Либкнехта. Сер. физ. мат. наук. № 2 (1938), 83–94.
14. W. L. Chow, *Systeme von linearen partiellen differential gleichungen erster ordnung.* — Math. Ann. **117** (1939), 98–105.

Dontsov V. V. Nilmanifolds with Carnot–Carathéodory metrics.

We describe systolic constants for some important examples of metric spaces with inner metric.

Российский государственный
университет нефти и газа
им. И. М. Губкина

Поступило 17 октября 1999 г.