Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 266, 2000 г.

В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов

ДЕЙСТВИЯ ТОРА, ЭКВИВАРИАНТНЫЕ МОМЕНТ-УГОЛ-КОМПЛЕКСЫ И КОНФИГУРАЦИИ КООРДИНАТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ

1. Введение

В данной работе мы применяем результаты нашей предыдущей статьи [6] для описания топологии дополнений конфигураций комплексных координатных подпространств. Конфигурация координатных подпространств $\mathcal{A}$ (или просто координатная конфигурация) – это некоторое множество координатных подпространств L комплексного пространства $\mathbb{C}^m$, а ее дополнение – это множество $U(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{L\in\mathcal{A}} L$. Дополнение $U(\mathcal{A})$ всегда представляется в виде $U(\mathcal{A}) = U(\mathcal{A}') \times (\mathbb{C}^*)^k$, где $\mathcal{A}'$ – координатная конфигурация в $\mathbb{C}^{m-k}$, не содержащая гиперплоскостей. Имеется взаимно-однозначное соответствие между конфигурациями координатных подпространств в $\mathbb{C}^m$ без гиперплоскостей и симплициальными комплексами на m вершинах $v_1, \dots, v_m$: каждая конфигурация $\mathcal{A}$ определяет симплициальный комплекс $K(\mathcal{A})$ и наоборот. А именно, пусть $|\mathcal{A}|$ обозначает носитель $\bigcup_{L\in\mathcal{A}} L$ координатной конфигурации $\mathcal{A}$; тогда подмножество $v_I = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ является $(k-1)$-симплексом комплекса $K(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда $(m-k)$-мерное координатное подпространство $L_I \subset \mathbb{C}^m$, задаваемое уравнениями $z_{i_1} = \dots = z_{i_k} = 0$, не принадлежит $|\mathcal{A}|$. Конфигурация $\mathcal{A}$ очевидным образом восстанавливается из ее симплициального комплекса $K(\mathcal{A})$; поэтому в нашей работе мы используем обозначение $U(K)$ вместо $U\big(\mathcal{A}(K)\big)$ (более подробная информация о связи координатных конфигураций и симплициальных комплексов приводится в начале раздела 2).

Конфигурации подпространств и их дополнения играют ключевую роль во многих конструкциях комбинаторики, алгебраической и симплектической геометрии, механики и т.д.; они также возникают как конфигурационные пространства различных клас-

Работа поддержана РФФИ, грант 99-01-00090, и INTAS, грант 96-0770.

сических систем. В связи с этим топология дополнений конфигураций привлекала многих математиков на протяжении последних двух десятилетий. Первые важные результаты здесь связаны с конфигурациями гиперплоскостей (не обязательно координатных) в $\mathbb{C}^m$. Арнольдом [1] и Брискорном [4] было показано, что алгебра когомологий соответствующего дополнения $U(\mathcal{A})$ изоморфна алгебре дифференциальных форм, порожденной замкнутыми формами $\frac{1}{2\pi i}\frac{dF_A}{F_A}$, где F_A – линейная форма, задающая гиперплоскость A, принадлежащую конфигурации. Орлик и Соломон [18] доказали, что алгебра когомологий дополнения конфигурации гиперплоскостей зависит только от комбинаторики пересечений гиперплоскостей, и представили $H^*\big(U(\mathcal{A})\big)$ в виде образующих и соотношений. В общей ситуации имеется теорема Горески–Макферсона [15, Часть III], выражающая группы когомологий $H^i\big(U(\mathcal{A})\big)$ (без кольцевой структуры) как сумму групп гомологий подкомплексов некоторого симплициального комплекса. Этот комплекс, называемый *порядковым* (или *флаговым*) комплексом, определяется в терминах комбинаторики пересечений подпространств из $\mathcal{A}$. Доказательство этого результата использует методы стратифицированной теории Морса, развитые в [15]. Другой способ описания алгебры когомологий дополнения конфигурации подпространств был недавно предложен де Кончини и Прочези [12]. Они доказали, что рациональное кольцо когомологий дополнения $U(\mathcal{A})$ также определяется комбинаторикой пересечений. Эти результаты были развиты Юзвинским в [23]. В случае конфигураций координатных подпространств порядковый комплекс является барицентрическим подразделением некоторого симплициального комплекса $\widetilde{K}$, а слагаемые в формуле Горески–Макферсона являются группами гомологий линков симплексов из $\widetilde{K}$. Комплекс $\widetilde{K}$ имеет то же множество вершин $v_1, \dots, v_m$, что и наш симплициальный комплекс K, и "двойственен" последнему в следующем смысле: множество $v_I = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ порождает симплекс комплекса $\widetilde{K}$ если и только если дополнение $\{v_1, \dots, v_m\} \setminus v_I$ не порождает симплекс K. Операция умножения классов когомологий дополнения конфигурации координатных подпространств была описана в [13] в комбинаторных терминах при помощи комплекса $\widetilde{K}$ и описанной выше интерпретации формулы Горески–Макферсона.

В нашей работе мы предпочитаем использовать для описания координатной конфигурации симплициальный комплекс K вместо $\widetilde{K}$, так как такой подход раскрывает новые взаимосвязи топологии дополнений конфигураций подпространств с коммутативной алгеброй и геометрией *торических многообразий*. Мы показываем, что дополнение $U(K)$ гомотопически эквивалентно так называемому *момент-угол-комплексу* $\mathcal{Z}_K$, определяемому симплициальным комплексом K. Комплекс $\mathcal{Z}_K$ представляет собой компактное подмножество единичного поли-диска $(D^2)^m \subset \mathbb{C}^m$, инвариантное относительно стандартного действия тора T^m на $(D^2)^m$. В то же время, $\mathcal{Z}_K$ является гомотопическим слоем клеточного вложения $i : \widetilde{B_T K} \hookrightarrow BT^m$, где BT^m – классифицирующее пространство для тора T^m со стандартной клеточной структурой, а $\widetilde{B_T K}$ – клеточный подкомплекс, когомологии которого изоморфны *кольцу Стэнли–Райснера* (также известному как *кольцо граней*) $\mathbf{k}(K)$ симплициального комплекса K. Затем мы вычисляем алгебру когомологий $\mathcal{Z}_K$ (или $U(K)$) при помощи спектральной последовательности Эйленберга–Мура. В качестве результата мы получаем алгебраическое описание алгебры когомологий $U(K)$ как биградуированной алгебры когомологий $\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}\big(\mathbf{k}(K),\mathbf{k}\big)$ кольца граней $\mathbf{k}(K)$. При помощи стандартной резольвенты Кошуля последняя алгебра может быть выражена как алгебра когомологий дифференциальной биградуированной алгебры $\mathbf{k}(K) \otimes \Lambda[u_1,\ldots,u_m]$, где $\Lambda[u_1,\ldots,u_m]$ – внешняя алгебра, а дифференциал отображает внешнюю образующую u_i в $v_i \in \mathbf{k}(K) = \mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]/I$. Рациональные модели де Кончини и Прочези [12] и Юзвинского [23] можно также интерпретировать как приложение резольвенты Кошуля к когомологиям дополнений конфигураций подпространств, однако роль кольца граней стала ясна лишь после нашей работы [6].

В случае, когда K является $(n-1)$-мерной симплициальной сферой (например, если K является граничным комплексом n-мерного выпуклого симплициального многогранника), наш момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_K$ оказывается гладким $(m+n)$-мерным многообразием (таким образом, $U(K)$ имеет гомотопический тип гладкого многообразия). Этот важный частный случай наших конструкций был подробно изучен в работах [5, 6]. Топологические свойства таких многообразий $\mathcal{Z}_K$ представляют большой интерес благодаря их взаимосвязям с комбинаторикой многогранников, симплектической геометрией и геометрией торичeских многообразий; последний момент был отправной точкой в нашем изучении конфигураций координатных подпространств. Классическое определение торических многообразий (см. [10, 14]) основано на комбинаторном понятии *веера*. Однако, как недавно было показано несколькими авторами (см., например, [2, 3, 9]), в случае когда веер, определяющий торическое многообразие M, является симплициальным, M можно также определять как геометрический фактор дополнения $U(K)$ относительно некоторого действия алгебраического тора $(\mathbb{C}^*)^{m-n}$ (здесь K – симплициальный комплекс, определяемый веером). Наше момент-угол-многообразие $\mathcal{Z}_K$ представляет собой прообраз регулярной точки в образе отображения моментов $U(K) \to \mathbb{R}^{m-n}$ для гамильтонова действия компактного тора $T^{m-n} \subset (\mathbb{C}^*)^{m-n}$.

В работе [11] Дэвисом и Янушкевичем было введено понятие квазиторического многообразия (также известного как унитарное торическое многообразие), которое можно рассматривать как естественное топологическое обобщение понятия гладкого торического многообразия. Квазиторическое многообразие M^{2n} допускает гладкое действие тора T^n, которое локально выглядит как стандартное действие T^n на $\mathbb{C}^n$; при этом требуется, чтобы пространство орбит являлось n-мерным шаром, снабженным комбинаторной структурой простого выпуклого многогранника при помощи множеств неподвижных точек соответствующих подторов. Квазиторические многообразия обладают замечательными топологическими, геометрическими и комбинаторными свойствами; после пионерской работы [11] многочисленные новые взаимосвязи были обнаружены различными авторами (см. [7, 8, 5, 6, 19, 20], и дополнительные ссылки в этих работах). Комплекс, двойственный к граничному комплексу простого многогранника в пространстве орбит квазиторического многообразия, является симплициальной сферой. Поэтому многие результаты настоящей работы можно рассматривать как обобщение наших предыдущих конструкций с симплициальными сферами на случай общих симплициальных комплексов. Отметим также, что некоторые наши определения и конструкции (например, конструкция Бореля B_TP) впервые появились в работе [11] в том или ином виде; в таких случаях мы старались сохранить изначальные обозначения.

Авторы выражают особую благодарность Найджелу Рэю за стимулирующие обсуждения и плодотворное сотрудничество, которые вдохновили некоторые идеи и конструкции из нашей работы. Мы также благодарны Наталье Добринской, которая обратила наше внимание на работу [3], открывающую некоторые взаимосвязи между торическими многообразиями и конфигурациями координатных подпространств, и Сергею Юзвинскому, который указал нам на результаты препринта [13].

2. Гомотопическая реализация дополнения конфигурации координатных подпространств

Пусть $\mathbb{C}^m$ – комплексное m-мерное пространство с координатами $z_1, \ldots, z_m$. Для любого подмножества индексов $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ обозначим через L_I $(m-k)$-мерное координатное подпространство, задаваемое уравнениями $z_{i_1} = \cdots = z_{i_k} = 0$. Заметим, что $L_{\{1,\ldots,m\}} = \{0\}$ и $L_\varnothing = \mathbb{C}^m$.

Определение 2.1. *Конфигурацией координатных подпространств (или координатной конфигурацией) $\mathcal{A}$ называется произвольное множество координатных подпространств L_I. Дополнением конфигурации $\mathcal{A}$ называется подмножество*

$$U(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{L_I \in \mathcal{A}} L_I \subset \mathbb{C}^m.$$

В дальнейшем мы будем различать координатную конфигурацию $\mathcal{A}$, рассматриваемую как абстрактное множество подпространств, и ее носитель $|\mathcal{A}|$ – подмножество $\bigcup_{L_I \in \mathcal{A}} L_I \subset \mathbb{C}^m$. Если $I \subset J$ и $L_I \subset |\mathcal{A}|$, то $L_J \subset |\mathcal{A}|$. Если координатная конфигурация $\mathcal{A}$ содержит гиперплоскость $z_i = 0$, то ее дополнение $U(\mathcal{A})$ представляется в виде $U(\mathcal{A}_0) \times \mathbb{C}^*$, где $\mathcal{A}_0$ – конфигурация координатных подпространств в гиперплоскости $\{z_i = 0\}$ и $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Таким образом, для любой координатной конфигурации $\mathcal{A}$ ее дополнение $U(\mathcal{A})$ представляется в виде

$$U(\mathcal{A}) = U(\mathcal{A}') \times (\mathbb{C}^*)^k,$$

где $\mathcal{A}'$ – координатная конфигурация в $\mathbb{C}^{m-k}$, не содержащая гиперплоскостей. С учетом этого замечания, мы ограничимся рассмотрением координатных конфигураций, не содержащих гиперплоскостей.

Конфигурация координатных подпространств $\mathcal{A}$ в $\mathbb{C}^m$ (без гиперплоскостей) определяет симплициальный комплекс $K(\mathcal{A})$ с m вершинами $v_1, \dots, v_m$ следующим образом: скажем, что подмножество $v_I = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ является $(k-1)$-симплексом комплекса $K(\mathcal{A})$, если и только если $L_I \not\subset |\mathcal{A}|$.

Пример 2.2. 1) Пусть $\mathcal{A} = \varnothing$; тогда $K(\mathcal{A})$ представляет собой $(m-1)$-мерный симплекс Δ^{m-1}.

2) Пусть $\mathcal{A} = \{0\}$; тогда $K(\mathcal{A}) = \partial\Delta^{m-1}$ – граница $(m-1)$-симплекса.

С другой стороны, симплициальный комплекс K на множестве вершин $\{v_1, \dots, v_m\}$ определяет координатную конфигурацию $\mathcal{A}(K)$, такую что $L_I \subset |\mathcal{A}|$ если и только если $v_I = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ не является симплексом K. Заметим, что если $K' \subset K$ – подкомплекс, то $\mathcal{A}(K) \subset \mathcal{A}(K')$. Итак, мы имеем обращающее порядок взаимно-однозначное соответствие между симплициальными комплексами на m вершинах и конфигурациями координатных подпространств в $\mathbb{C}^m$ без гиперплоскостей.

Обозначим теперь через $U(K) = \mathbb{C}^m \setminus |\mathcal{A}(K)|$ дополнение координатной конфигурации $\mathcal{A}(K)$.

Пример 2.3. 1) Пусть $K = \Delta^{m-1}$ есть $(m-1)$-симплекс; тогда $U(K) = \mathbb{C}^m$.

2) Пусть $K = \partial\Delta^{m-1}$; тогда $U(K) = \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$.

3) Пусть K представляет собой несвязное объединение m вершин; тогда $U(K)$ получается удалением из $\mathbb{C}^m$ всех координатных подпространств коразмерности два, т.е. вида $z_i = z_j = 0$, $i, j = 1, \dots, m$.

Пусть теперь $\mathbf{k}$ – произвольное поле, которое мы будем называть основным полем. Образуем кольцо многочленов $\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]$, где v_i рассматриваются как переменные.

Определение 2.4. *Кольцом граней (или кольцом Стэнли–Райснера) (обозначается $\mathbf{k}(K)$) симплициального комплекса K называется факторкольцо $\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]/I$ кольца многочленов, где*

$$I = (v_{i_1} \cdots v_{i_s} : \{v_{i_1}, \dots, v_{i_s}\} \text{ не порождает симплекс } K).$$

Таким образом, кольцо граней является факторкольцом кольца многочленов по некоторому идеалу, порожденному мономами степени $\geqslant 2$, не содержащими квадратов. Мы превратим $\mathbf{k}(K)$ в градуированное кольцо, полагая $\deg v_i = 2$, $i = 1, \dots, m$.

Пример 2.5. 1) Пусть $K = \Delta^{m-1}$; тогда $\mathbf{k}(K) = \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]$.

2) Пусть $K = \partial\Delta^{m-1}$ – граничный комплекс $(m-1)$-симплекса; тогда $\mathbf{k}(K) = \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]/(v_1 \cdots v_m)$.

Компактный тор T^m действует на $\mathbb{C}^m$ диагонально; при этом, так как конфигурация $\mathcal{A}(K)$ состоит из координатных подпространств, это действие также определено на $U(K)$. Обозначим через $B_T K$ соответствующую конструкцию Бореля:

$$B_T K = ET^m \times_{T^m} U(K), \tag{1}$$

где ET^m стягиваемое пространство универсального T^m-расслоения $ET^m \to BT^m$ над классифицирующим пространством $BT^m = (\mathbb{C}P^\infty)^m$. Таким образом, $B_T K$ является тотальным пространством расслоения $B_T K \to BT^m$ со слоем $U(K)$.

Пространство BT^m имеет каноническое клеточное разбиение (каждый сомножитель $\mathbb{C}P^\infty$ имеет по одной клетке в каждой четной размерности). Для любого множества индексов $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ имеется клеточный подкомплекс $BT^k_I = BT^k_{i_1,\dots,i_k} \subset BT^m$, гомеоморфный BT^k.

Определение 2.6. *Для данного симплициального комплекса K с множеством вершин $\{v_1, \dots, v_m\}$ введем клеточный подкомплекс $\widetilde{B_T K} \subset BT^m$, представляющий собой объединение подкомплексов BT^k_I по всем I, таким что v_I является симплексом K.*

Пример 2.7. Пусть K представляет собой несвязное объединение m вершин $v_1, \dots, v_m$. Тогда $\widetilde{B_T K}$ есть букет m экземпляров $\mathbb{C}P^\infty$.

Кольцо когомологий пространства BT^m изоморфно кольцу многочленов $\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]$ (все когомологии рассматриваются с коэффициентами в основном поле $\mathbf{k}$).

Лемма 2.8. *Кольцо когомологий комплекса $\widetilde{B_T K}$ изоморфно кольцу граней $\mathbf{k}(K)$. Вложение $i : \widetilde{B_T K} \hookrightarrow BT^m$ индуцирует проекцию на факторкольцо $i^* : \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m] \to \mathbf{k}(K) = \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]/I$ в когомологиях.*

Доказательство. Доказательство проведем по индукции по числу симплексов K. Если K представляет собой несвязное объединение вершин $v_1, \dots, v_m$, то $\widetilde{B_T K}$ есть букет m экземпляров $\mathbb{C}P^\infty$ (см. пример 2.7). В размерности ноль $H^*(\widetilde{B_T K})$ есть просто

$\mathbf{k}$, а в размерностях $\geqslant 1$ это кольцо изоморфно $\mathbf{k}[v_1]\oplus\cdots\oplus\mathbf{k}[v_m]$. Следовательно, $H^*(\widetilde{B_T K}) = k[v_1,\dots,v_m]/I$, где I – идеал, порожденный всеми мономами степени $\geqslant 2$ не содержащими квадратов, а i^* представляет собой проекцию на факторкольцо. Итак, лемма доказана в случае $\dim K = 0$.

Предположим теперь, что симплициальный комплекс K получен из симплициального комплекса K' добавлением одного $(k-1)$-мерного симплекса $v_I = \{v_{i_1},\dots,v_{i_k}\}$. По предположению индукции, лемма выполнена для комплекса K', то есть

$$i^*H^*(BT^m) = H^*(\widetilde{B_T K'}) = \mathbf{k}(K') = \mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]/I'.$$

В силу определения 2.6, комплекс $\widetilde{B_T K}$ есть объединение комплекса $\widetilde{B_T K'}$ и подкомплекса $BT^k_{i_1,\dots,i_k}\subset BT^m$. Тогда

$$H^*(\widetilde{B_T K'}\cup BT^k_{i_1,\dots,i_k}) = \mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]/I = \mathbf{k}(K'\cup v_I),$$

где идеал I порожден I' и $v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_k}$. □

Пусть I^m – стандартный m-мерный куб в $\mathbb{R}^m$:

$$I^m = \{(y_1,\dots,y_m)\in\mathbb{R}^m \,:\, 0\leqslant y_i\leqslant 1,\, i=1,\dots,m\}.$$

Симплициальный комплекс K с m вершинами $v_1,\dots,v_m$ определяет кубический комплекс $\mathcal{C}_K$, канонически вложенный в граничный комплекс куба I^m.

Определение 2.9. *Для $(k-1)$-мерного симплекса $v_J = \{v_{j_1},\dots,v_{j_k}\}$ комплекса K обозначим через C_J грань размерности k куба I^m, выделяемую $m-k$ уравнениями*

$$y_i = 1,\quad i\notin\{j_1,\dots,j_k\}.$$

Далее, определим кубический подкомплекс $\mathcal{C}_K\subset I^m$ как объединение граней C_J по всем симплексам v_J комплекса K.

Замечание. Наш кубический подкомплекс $\mathcal{C}_K\subset I^m$ является геометрической реализацией абстрактного кубического комплекса в конусе над барицентрическим подразделением комплекса K (см. [11, стр. 434]). Действительно, пусть Δ^{m-1} есть $(m-1)$-мерный симплекс с множеством вершин $\{v_1,\dots,v_m\}$, а $\hat\Delta^{m-1}$ – барицентрическое подразделение Δ^{m-1}, то есть вершины $\hat\Delta^{m-1}$ соответствуют симплексам $v_J\subset\Delta^{m-1}$. Построим отображение

$\iota : \hat{\Delta}^{m-1} \to I^m$ следующим образом: отобразим вершину v_J комплекса $\hat{\Delta}^{m-1}$ в вершину куба I^m с координатами $y_j = 0$ для $j \in J$ и $y_j = 1$ для $j \notin J$, а затем продолжим отображение линейно на каждом симплексе комплекса $\hat{\Delta}^{m-1}$. Образом $\hat{\Delta}^{m-1}$ при этом отображении является объединение граней куба I^m, содержащих нуль. Затем построим отображение $C\iota$ из конуса $C\hat{\Delta}^{m-1}$ над $\hat{\Delta}^{m-1}$ в I^m отправляя вершину конуса в вершину $(1, \ldots, 1)$ куба и продолжая линейно на симплексах комплекса $C\hat{\Delta}^{m-1}$. Образом $C\hat{\Delta}^{m-1}$ при отображении $C\iota$ является весь куб I^m. Пусть теперь K – симплициальный комплекс на множестве вершин $\{v_1, \ldots, v_m\}$. Как только мы зафиксировали нумерацию вершин, мы можем рассматривать K как симплициальный подкомплекс в Δ^{m-1}. Тогда наш кубический комплекс $\mathcal{C}_K \subset I^m$ из определения 2.9 есть просто образ $C\iota(C\hat{K})$ конуса над барицентрическим подразделением комплекса K при отображении $C\iota$.

Пример 2.10. На рис. 1 а) и б) изображен кубический комплекс $\mathcal{C}_K$ в случаях, когда K есть несвязное объединение 3 вершин и граничный комплекс 2-симплекса соответственно.

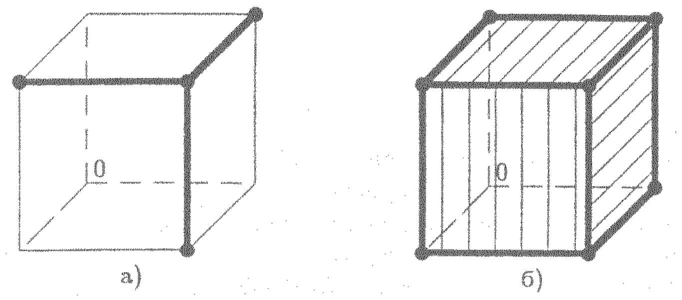

Рис. 1. Кубический комплекс $\mathcal{C}_K$

Замечание. В случае, когда K является двойственным комплексом к граничному комплексу n-мерного простого многогранника P^n, кубический комплекс $\mathcal{C}_K$ совпадает с кубическим разбиением P^n, изучавшимся в работе [6].

Пространство орбит диагонального действия тора T^m на $\mathbb{C}^m$ представляет собой положительный конус

$$\mathbb{R}^m_+ = \{(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m : y_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, m\}.$$

Проекция $\mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^m_+$ на пространство орбит задается как $(z_1, \dots, z_m) \to (|z_1|^2, \dots, |z_m|^2)$. Пространством орбит ограничения этого действия на стандартный поли-диск

$$(D^2)^m = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : : |z_i| \leqslant 1,\, i = 1, \dots, m\} \subset \mathbb{C}^m$$

является стандартный куб $I^m \subset \mathbb{R}^m_+$.

Пусть $U_{\mathbb{R}}(K) \subset \mathbb{R}^m_+$ обозначает пространство орбит $U(K)/T^m$. Заметим, что если мы рассматриваем $\mathbb{R}^m_+$ как подмножество в $\mathbb{C}^m$, то $U_{\mathbb{R}}(K)$ есть просто “вещественная часть”: $U_{\mathbb{R}}(K) = U(K) \cap \mathbb{R}^m_+$.

Определение 2.11. *Эквивариантный момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_K \subset \mathbb{C}^m$, соответствующий симплициальному комплексу K, есть T^m-пространство, определяемое из коммутативной диаграммы*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Z}_K \arrow[r] \arrow[d] & (D^2)^m \arrow[d] \\
\mathcal{C}_K \arrow[r] & I^m,
\end{tikzcd}$$

где правая вертикальная стрелка обозначает проекцию на пространство орбит для диагонального действия тора T^m, а нижняя вертикальная стрелка обозначает вложение кубического комплекса $\mathcal{C}_K$ в I^m.

Лемма 2.12. *$\mathcal{C}_K \subset U_{\mathbb{R}}(K)$ и $\mathcal{Z}_K \subset U(K)$.*

Доказательство. Определение 2.11 показывает, что второе утверждение следует из первого. Для доказательства первого утверждения заметим, что если точка $a = (y_1, \dots, y_m) \in \mathcal{C}_K$ имеет координаты $y_{i_1} = \dots = y_{i_k} = 0$, то $v_I = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ является симплексом K, следовательно, $L_I \not\subset |\mathcal{A}(K)|$. □

Лемма 2.13. *Дополнение $U(K)$ эквивариантно гомотопически эквивалентно момент-угол-комплексу $\mathcal{Z}_K$.*

Доказательство. Мы построим ретракцию $r : U_{\mathbb{R}}(K) \to \mathcal{C}_K$, которая накрывается эквивариантной ретракцией $U(K) \to \mathcal{Z}_K$. Последняя ретракция и будет требуемой гомотопической эквивалентностью.

Ретракцию $r : U_{\mathbb{R}}(K) \to \mathcal{C}_K$ будем строить индуктивно, начиная с граничного комплекса $(m-1)$-мерного симплекса и последовательно удаляя симплексы положительной размерности, пока не получим K. На каждом шаге мы будем строить некоторую ретракцию, и композиция этих ретракций будет давать требуемую ретракцию r. Если $K = \partial\Delta^{m-1}$ является граничным комплексом $(m-1)$-симплекса, то $U_{\mathbb{R}}(K) = \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}$ и ретракция r показана на Рис. 2.

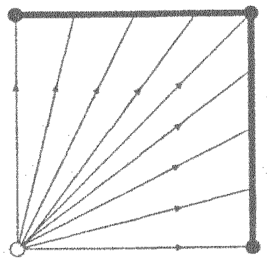

Рис. 2. Ретракция $r : U_{\mathbb{R}}(K) \to \mathcal{C}_K$ для $K = \partial\Delta^{m-1}$

Теперь предположим, что симплициальный комплекс K получен удалением одного $(k-1)$-мерного симплекса $v_J = \{v_{j_1}, \dots, v_{j_k}\}$ из симплициального комплекса K'. По предположению индукции, лемма доказана для K', то есть имеется ретракция $r' : U_{\mathbb{R}}(K') \to \mathcal{C}_{K'}$ с требуемыми свойствами. Рассмотрим грань $C_J \subset I^m$ (см. определение 2.9). Так как v_J не является симплексом K, точка a с координатами $y_{j_1} = \dots = y_{j_k} = 0$, $y_i = 1$, $i \notin \{j_1, \dots, j_k\}$, не принадлежит $U(K)$. Поэтому мы можем применить ретракцию, изображенную на Рис. 2, на грани C_J с начальной точкой a. Обозначим эту ретракцию r_J. Положим теперь $r = r_J \circ r'$. Легко проверить, что r есть в точности требуемая ретракция. $\square$

Пример 2.14. 1) Пусть $K = \partial\Delta^{m-1}$ – граничный комплекс $(m-1)$-мерного симплекса; тогда $\mathcal{Z}_K$ гомеоморфно $(2m-1)$-мерной сфере S^{2m-1}.

2) Если K является комплексом, двойственным к граничному комплексу n-мерного простого многогранника P^n, то $\mathcal{Z}_K$ гомеоморфно гладкому $(m+n)$-мерному многообразию. Это многообразие, обозначаемое $\mathcal{Z}_P$, является главным объектом исследования в работе [6].

Следствие 2.15. *Конструкция Бореля $ET^m \times_{T^m} \mathcal{Z}_K$ гомотопически эквивалентна B_TK.*

Доказательство. Ретракция $r : U(K) \to \mathcal{Z}_K$, построенная при доказательстве леммы 2.13, эквивариантна относительно действий тора T^m на $U(K)$ и $\mathcal{Z}_K$. Тогда следствие вытекает из определения $B_TK = ET^m \times_{T^m} U(K)$. □

В дальнейшем мы не будем различать пространства (конструкции Бореля) $ET^m \times_{T^m} \mathcal{Z}_K$ и $B_TK = ET^m \times_{T^m} U(K)$.

Теорема 2.16. *Клеточное вложение $i : \widetilde{B_TK} \hookrightarrow BT^m$ (см. определение 2.6) и расслоение $p : B_TK \to BT^m$ (см. (1)) гомотопически эквивалентны. В частности, $\widetilde{B_TK}$ и B_TK имеют один гомотопический тип.*

Доказательство. Пусть $\pi : \mathcal{Z}_K \to \mathcal{C}_K$ обозначает проекцию на пространство орбит для действия тора на момент-угол комплексе $\mathcal{Z}_K$ (см. определение 2.11). Для каждого подмножества $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, m\}$ обозначим через B_I следующее подмножество поли-диска $(D^2)^m$: $B_I = B_1 \times \cdots \times B_m \subset D^2 \times \cdots \times D^2 = (D^2)^m$, где B_i есть диск D^2, если $i \in I$, и B_i есть граница S^1 диска D^2, если $i \notin I$. Таким образом, $B_I \cong (D^2)^k \times T^{m-k}$, $k = |I|$. Легко видеть, что если C_I является гранью кубического комплекса $\mathcal{C}_K$ (см. определение 2.9), то $\pi^{-1}(C_I) = B_I$. Если мы имеем $I \subset J$, то B_I канонически отождествляется с подмножеством B_J. Следовательно, комплекс $\mathcal{Z}_K$ склеивается из подмножеств B_I, соответствующих симплексам v_I комплекса K. (Эта идея может быть также использована для доказательства того факта, что $\mathcal{Z}_K$ является гладким многообразием при условии, что K является двойственным комплексом к граничному комплексу простого многогранника, см. [6, теорема 2.4].)

Для каждого симплекса $v_I \subset K$ подмножество $B_I \subset \mathcal{Z}_K$ инвариантно относительно действия тора T^m на $\mathcal{Z}_K$. Следовательно, конструкция Бореля $B_TK = ET^m \times_{T^m} \mathcal{Z}_K$ также склеивается из конструкций Бореля $ET^m \times_{T^m} B_I$ (сравните это с локальной конструкцией B_TP из [11, стр. 435]). Последнее пространство может быть разложено как $ET^m \times_{T^m} B_I = \left(ET^k \times_{T^k} (D^2)^k\right) \times ET^{m-n}$, что гомотопически эквивалентно BT^k_I. Следовательно, ограничение проекции $p : B_TK \to BT^m$ на $ET^m \times_{T^m} B_I$ гомотопически эквивалентно вложению $BT^k_I \hookrightarrow BT^m$. Эти гомотопические эквивалентности для всех симплексов $v_I \subset K$ склеиваются вместе в требуемую гомотопическую эквивалентность между $p : B_T K \to BT^m$ и $i : \widetilde{B_T K} \hookrightarrow BT^m$. □

Следствие 2.17. *Дополнение $U(K)$ конфигурации координатных подпространств является гомотопическим слоем клеточного вложения $i : \widetilde{B_T K} \hookrightarrow BT^m$.* □

Следствие 2.18. *Кольцо $H^*_{T^m}\big(U(K)\big)$ T^m-эквивариантных когомологий дополнения $U(K)$ изоморфно кольцу граней $\mathbf{k}(K)$.*

Доказательство. Мы имеем $H^*_{T^m}\big(U(K)\big) = H^*\big(ET^m \times_{T^m} U(K)\big) = H^*(B_T K)$. Теперь следствие вытекает из леммы 2.8 и теоремы 2.16. □

3. Кольцо когомологий $U(K)$

Пусть имеется $\mathbf{k}[v_1, \ldots, v_m]$-свободная резольвента кольца граней $\mathbf{k}(K)$ как градуированного модуля над кольцом многочленов $\mathbf{k}[v_1, \ldots, v_m]$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to R^{-h} & \xrightarrow{d^{-h}} & R^{-h+1} & \xrightarrow{d^{-h+1}} & \cdots & & \\ \cdots \to R^{-1} & \xrightarrow{d^{-1}} & R^0 & \xrightarrow{d^0} & \mathbf{k}(K) \to 0 & & \end{array} \tag{2}$$

(заметим, что в силу теоремы Гильберта о сизигиях, в предыдущей формуле $h \leqslant m$). Применяя функтор $\otimes_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}\mathbf{k}$ к (2), мы получаем коцепной комплекс:

$$0 \longrightarrow R^{-h} \otimes_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]} \mathbf{k} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R^0 \otimes_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]} \mathbf{k} \longrightarrow 0,$$

когомологии которого обозначаются $\mathrm{Tor}^{-i}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}\big(\mathbf{k}(K), \mathbf{k}\big)$. Так как все R^{-i} в резольвенте (2) являются градуированными $\mathbf{k}[v_1, \ldots, v_m]$-модулями,

$$\mathrm{Tor}^{-i}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}\big(\mathbf{k}(K), \mathbf{k}\big) = \bigoplus_j \mathrm{Tor}^{-i,j}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}\big(\mathbf{k}(K), \mathbf{k}\big)$$

является градуированным $\mathbf{k}$-модулем, а

$$\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}\big(\mathbf{k}(K), \mathbf{k}\big) = \bigoplus_{i,j} \mathrm{Tor}^{-i,j}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}\big(\mathbf{k}(K), \mathbf{k}\big) \tag{3}$$

является *биградуированным* $\mathbf{k}$-модулем. Заметим, что у его ненулевых элементов первая градуировка всегда неположительна, а вторая – неотрицательна и четна (так как $\deg v_i 2$). Биградуированный $\mathbf{k}$-модуль (3) можно также рассматривать как просто градуированный модуль относительно полной степени $-i+j$. Числа Бетти

$$\beta^{-i}\big(\mathbf{k}(K)\big) = \dim_{\mathbf{k}} \operatorname{Tor}^{-i}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}\big(\mathbf{k}(K),\mathbf{k}\big)$$

и

$$\beta^{-i,2j}\big(\mathbf{k}(K)\big) = \dim_{\mathbf{k}} \operatorname{Tor}^{-i,2j}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}\big(\mathbf{k}(K),\mathbf{k}\big)$$

представляют большой интерес для геометрической комбинаторики; они изучались различными авторами (см., например, [22]). Мы упомянем лишь один результат Хохстера, который сводит вычисление $\beta^{-i,2j}\big(\mathbf{k}(K)\big)$ к вычислению гомологий подкомплексов симплициального комплекса K.

Теорема 3.1 (Хохстер [16, 22]). *Ряд Гильберта*

$$\sum_j \beta^{-i,2j}\big(\mathbf{k}(K)\big)t^{2j}$$

модуля $\operatorname{Tor}^{-i}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}\big(\mathbf{k}(K),\mathbf{k}\big)$ *вычисляется по формуле*

$$\sum_j \beta^{-i,2j}\big(\mathbf{k}(K)\big)t^{2j} = \sum_{I\subset\{v_1,\ldots,v_m\}} \big(\dim_{\mathbf{k}} \widetilde{H}_{|I|-i-1}(K_I)\big)t^{2|I|},$$

где K_I – подкомплекс K, состоящий из всех симплексов с вершинами в I. □

Заметим, что вычисление чисел $\beta^{-i,2j}\big(\mathbf{k}(K)\big)$, основанное на этой теореме, становится весьма сложным даже для небольших комплексов K.

Оказывается, что модуль $\operatorname{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}\big(\mathbf{k}(K),\mathbf{k}\big)$ допускает естественную структуру биградуированной *алгебры*, и соответствующая градуированная алгебра есть в точности алгебра когомологий $H^*\big(U(K)\big)$:

Теорема 3.2. *Имеет место следующий изоморфизм градуированных алгебр:*

$$H^*\big(U(K)\big) \cong \operatorname{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}\big(\mathbf{k}(K),\mathbf{k}\big).$$

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \widetilde{U(K)} \arrow[r] \arrow[d] & ET^m \arrow[d] \\ \widetilde{B_T K} \arrow[r, "i"] & BT^m, \end{tikzcd} \tag{4}$$

где левая вертикальная стрелка обозначает индуцированное расслоение. Следствие 2.17 показывает, что $\widetilde{U(K)}$ гомотопически эквивалентно $U(K)$.

Из (4) мы получаем, что алгебры клеточных коцепей $C^*(\widetilde{B_T K})$ и $C^*(ET^m)$ являются модулями над $C^*(BT^m)$. Как следует из доказательства леммы 2.8, мы имеем $C^*(\widetilde{B_T K}) = \mathbf{k}(K)$, а $i^* : C^*(BT^m) = \mathbf{k}[v_1, \ldots, v_m] \to \mathbf{k}(K) = C^*(\widetilde{B_T K})$ является эпиморфизмом на факторкольцо. Так как пространство ET^m стягиваемо, мы имеем цепную эквивалентность $C^*(ET^m) \to \mathbf{k}$. Следовательно, имеет место изоморфизм

$$\operatorname{Tor}_{C^*(BT^m)}\bigl(C^*(\widetilde{B_T K}), C^*(ET^m)\bigr) \cong \operatorname{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}\bigl(\mathbf{k}(K), \mathbf{k}\bigr). \tag{5}$$

Спектральная последовательность Эйленберга–Мура (см. [21, теорема 1.2]) коммутативного квадрата (4) имеет член E_2 следующего вида

$$E_2 = \operatorname{Tor}_{H^*(BT^m)}\bigl(H^*(\widetilde{B_T K}), H^*(ET^m)\bigr)$$

и сходится к $\operatorname{Tor}_{C^*(BT^m)}(C^*(\widetilde{B_T K}), C^*(ET^m))$. Так как

$$\operatorname{Tor}_{H^*(BT^m)}(H^*(\widetilde{B_T K}), H^*(ET^m)) = \operatorname{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}\bigl(\mathbf{k}(K), \mathbf{k}\bigr),$$

из (5) вытекает, что спектральная последовательность вырождается в члене E_2, то есть $E_2 = E_\infty$. Далее, предложение 3.2 из [21] показывает, что модуль $\operatorname{Tor}_{C^*(BT^m)}\bigl(C^*(\widetilde{B_T K}), C^*(ET^m)\bigr)$ является алгеброй, изоморфной алгебре когомологий $H^*\bigl(\widetilde{U(K)}\bigr)$, что завершает доказательство. $\square$

Наша следующая теорема дает явное описание алгебры $H^*\bigl(U(K)\bigr)$ как алгебры когомологий простой дифференциальной биградуированной алгебры. Рассмотрим тензорное произведение

$\mathbf{k}(K) \otimes \Lambda[u_1, \ldots, u_m]$ кольца граней $\mathbf{k}(K) = \mathbf{k}[v_1, \ldots, v_m]/I$ и внешней алгебры $\Lambda[u_1, \ldots, u_m]$ с m образующими, и превратим его в дифференциальную биградуированную алгебру, полагая

$$\begin{gathered} \operatorname{bideg} v_i = (0, 2), \quad \operatorname{bideg} u_i = (-1, 2), \\ d(1 \otimes u_i) = v_i \otimes 1, \quad d(v_i \otimes 1) = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

и требуя, чтобы d был дифференцированием алгебр.

Теорема 3.3. *Имеет место следующий изоморфизм градуированных алгебр:*

$$H^*\bigl(U(K)\bigr) \cong H\bigl[\mathbf{k}(K) \otimes \Lambda[u_1, \ldots, u_m], d\bigr]$$

(правая часть является градуированной алгеброй относительно полной степени).

Доказательство. Превратим $\mathbf{k}$ в $\mathbf{k}[v_1, \ldots, v_m]$-модуль при помощи гомоморфизма, который отображает 1 в 1 и v_i в 0. Рассмотрим резольвенту Кошуля (см., например, [17, Глава VII, §2]) $\mathbf{k}[v_1, \ldots, v_m]$-модуля $\mathbf{k}$:

$$\bigl[\mathbf{k}[v_1, \ldots, v_m] \otimes \Lambda[u_1, \ldots, u_m], d\bigr],$$

где дифференциал d определен как в (6). Так как биградуированное периодическое произведение $\operatorname{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}(\ ,\ )$ является симметрической функцией своих аргументов, мы имеем

$$\operatorname{Tor}_\Gamma\bigl(\mathbf{k}(K), \mathbf{k}\bigr) = H\bigl[\mathbf{k}(K) \otimes_\Gamma \Gamma \otimes \Lambda[u_1, \ldots, u_n], d\bigr] = \bigl[\Gamma \otimes \Lambda[u_1, \ldots, u_m], d\bigr],$$

где мы обозначили $\Gamma = \mathbf{k}[v_1, \ldots, v_m]$. Так как в силу теоремы 3.2 $H^*\bigl(U(K)\bigr) \cong \operatorname{Tor}_\Gamma\bigl(\mathbf{k}(K), \mathbf{k}\bigr)$, мы получаем требуемый изоморфизм. □

Заметим, что предыдущая теорема не только вычисляет алгебру когомологий дополнения $U(K)$, но также превращает последнюю в *биградуированную* алгебру.

Следствие 3.4. *Спектральная последовательность Лере–Серра расслоения $\widetilde{U(K)} \to \widetilde{B_T K}$ со слоем T^m (см. [4]) вырождается в члене E_3.*

Доказательство. Рассматриваемая спектральная последовательность сходится к $H^*\bigl(\widetilde{U(K)}\bigr) = H^*\bigl(U(K)\bigr)$ и имеет

$$E_2 = H^*(\widetilde{B_T K}) \otimes H^*(T^m) = \mathbf{k}(K) \otimes \Lambda[u_1, \ldots, u_m].$$

Легко видеть, что дифференциал в члене E_2 действует как в (6). Следовательно, $E_3 = H[E_2, d] = H\big[\mathbf{k}(K) \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_m]\big] = H^*\big(U(K)\big)$, в силу теоремы 3.3. $\square$

Предложение 3.5. *Предположим, что моном*

$$v_{i_1}^{\alpha_1} \dots v_{i_p}^{\alpha_p} u_{j_1} \dots u_{j_q} \in \mathbf{k}(K) \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_m],$$

где $i_1 < \dots < i_p$, $j_1 < \dots < i_q$, представляет нетривиальный класс когомологий в $H^*\big(U(K)\big)$. Тогда $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 1$, $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_p}\}$ порождает симплекс K и $\{i_1, \dots, i_p\} \cap \{j_1, \dots, j_q\} = \varnothing$.

Доказательство. См. [6, лемма 5.3]. $\square$

Как уже отмечалось выше (см. пример 2.14), если K является граничным комплексом выпуклого симплициального многогранника (или, эквивалентно, K является двойственным комплексом к граничному комплексу простого многогранника), или по крайней мере симплициальной сферой, то $U(K)$ имеет гомотопический тип гладкого многообразия $\mathcal{Z}_K$. Как показано в [6, Теорема 2.10], соответствующая гомотопическая эквивалентность может быть интерпретирована как проекция $U(K) \to U(K)/\mathbb{R}^{m-n} \cong \mathcal{Z}_K$ на пространство орбит для некоторого действия $\mathbb{R}^{m-n}$ на $U(K)$.

Конфигурации координатных подпространств $\mathcal{A}(K)$ и их дополнения $U(K)$ играют важную роль в теории торических многообразий и симплектической геометрии (см., например, [2, 3, 9]). А именно, каждое n-мерное симплициальное торическое многообразие M, определяемое (симплициальным) веером Σ в $\mathbb{Z}^n$ с m одномерными конусами, может быть получено как геометрический фактор $U(K_\Sigma)/G$. Здесь G есть некоторая подгруппа комплексного тора $(\mathbb{C}^*)^m$, изоморфная $(\mathbb{C}^*)^{m-n}$, а K_Σ есть симплициальный комплекс, определяемый веером Σ (i-симплексы комплекса K_Σ соответствуют $(i+1)$-мерным конусам веера Σ). Гладкое проективное торическое многообразие M является симплектическим многообразием вещественной размерности $2n$. Это многообразие может быть получено в результате процесса *симплектической редукции* следующим образом. Пусть $G_\mathbb{R} \cong T^{m-n}$ – максимальная компактная подгруппа G, а $\mu : \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^{m-n}$ – отображение моментов для гамильтонова действия группы $G_\mathbb{R}$ на $\mathbb{C}^m$. Тогда для любого регулярного значения $a \in \mathbb{R}^{m-n}$ отображения μ имеет место диффеоморфизм

$$\mu^{-1}(a)/G_\mathbb{R} \longrightarrow U(K_\Sigma)/G = M$$

(подробности см. в [9]). В этой ситуации легко видеть, что $\mu^{-1}(a)$ есть в точности наше многообразие $\mathcal{Z}_K$ для $K = K_\Sigma$.

Пример 3.6. Пусть $G \cong \mathbb{C}^*$ – диагональная подгруппа в $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$, а K_Σ – граничный комплекс n-симплекса. Тогда $U(K_\Sigma) = \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}$, а $M = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/\mathbb{C}^*$ есть комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$. Отображение моментов $\mu : \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}$ переводит $(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m$ в $\frac{1}{2}(|z_1|^2 + \dots + |z_m|^2)$, и для $a \neq 0$ мы имеем $\mu^{-1}(a) \cong S^{2n+1} \cong \mathcal{Z}_K$ (см. пример 2.14).

В случае, когда K является симплициальной сферой (таким образом, $U(K)$ гомотопически эквивалентно гладкому многообразию $\mathcal{Z}_K$), в кольце когомологий $H^*\bigl(U(K)\bigr)$ имеет место двойственность Пуанкаре.

Предложение 3.7. *Пусть K – симплициальная сфера размерности $n-1$, то есть $U(K)$ гомотопически эквивалентно гладкому многообразию $\mathcal{Z}_K$. Тогда*

1) Двойственность Пуанкаре в кольце $H^*\bigl(U(K)\bigr)$ уважает биградуированную структуру, определяемую теоремой 3.3. А именно, если $\alpha \in H^{-i,2j}\bigl(U(K)\bigr)$ – некоторый класс когомологий, то его двойственный по Пуанкаре класс $D\alpha$ принадлежит $H^{-(m-n)+i,2(m-j)}$.

2) Пусть $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_n}\}$ – некоторый $(n-1)$-симплекс K и пусть $j_1 < \dots < j_{m-n}$, $\{i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_{m-n}\} = \{1, \dots, m\}$. Тогда значение элемента

$$v_{i_1} \cdots v_{i_n} u_{j_1} \cdots u_{j_{m-n}} \in H^{m+n}\bigl(U(K)\bigr) \cong H^{m+n}(\mathcal{Z}_K)$$

на фундаментальном классе многообразия $\mathcal{Z}_K$ равно ± 1.

3) Пусть $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_n}\}$ и $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-1}}, v_{j_1}\}$ – некоторые два $(n-1)$-симплекса K, имеющих общую грань $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-1}}\}$ размерности $(n-2)$, а $j_1, \dots, j_{m-n}$ – такие же, как и в 2). Тогда

$$v_{i_1} \cdots v_{i_n} u_{j_1} \cdots u_{j_{m-n}} = v_{i_1} \cdots v_{i_{n-1}} v_{j_1} u_{i_n} u_{j_2} \cdots u_{j_{m-n}}$$

в $H^{m+n}\bigl(U(K)\bigr)$.

Доказательство. Доказательство 1) и 2) см. в [6, лемма 5.1]. Для доказательства 3) заметим, что

$$d(v_{i_1} \cdots v_{i_{n-1}} u_{i_n} u_{j_1} u_{j_2} \cdots u_{j_{m-n}}) =$$
$$= v_{i_1} \cdots v_{i_n} u_{j_1} \cdots u_{j_{m-n}} - v_{i_1} \cdots v_{i_{n-1}} v_{j_1} u_{i_n} u_{j_2} \cdots u_{j_{m-n}}$$

в алгебре $\mathbf{k}(K)\otimes\Lambda[u_1,\dots,u_m]$ (см. (6)). □

Симплициальный комплекс K называется *комплексом Коэна–Маколея*, если его кольцо граней $\mathbf{k}(K)$ является алгеброй Коэна–Маколея, то есть $\mathbf{k}(K)$ является конечномерным свободным модулем над кольцом многочленов $\mathbf{k}[t_1,\dots,t_n]$ (здесь n – максимальное число алгебраически независимых элементов кольца $\mathbf{k}(K)$). Эквивалентно, кольцо $\mathbf{k}(K)$ является алгеброй Коэна–Маколея, если оно допускает *регулярную последовательность* $\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$, то есть набор из n однородных элементов, таких что λ_{i+1} не является делителем нуля в $\mathbf{k}(K)/(\lambda_1,\dots,\lambda_i)$ для $i=0,\dots,n-1$. Если K является комплексом Коэна–Маколея, а поле $\mathbf{k}$ имеет бесконечную характеристику, то кольцо $\mathbf{k}(K)$ допускает регулярную последовательность элементов степени два (напомним, что мы положили $\deg v_i=2$ в $\mathbf{k}(K)$), то есть $\lambda_i=\lambda_{i1}v_1+\lambda_{i2}v_2+\dots+\lambda_{im}v_m$, $i=1,\dots,n$.

Теорема 3.8. *Предположим, что K является комплексом Коэна–Маколея и $J=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ – идеал в $\mathbf{k}(K)$, порожденный регулярной последовательностью. Тогда имеет место следующий изоморфизм биградуированных алгебр.*

$$H^*\bigl(U(K)\bigr)\cong H\bigl[\mathbf{k}(K)/J\otimes\Lambda[u_1,\dots,u_{m-n}],d\bigr],$$

где градуировки и дифференциал в правой части определены следующим образом:

$$\operatorname{bideg} v_i=(0,2),\quad \operatorname{bideg} u_i=(-1,2);$$
$$d(1\otimes u_i)=\lambda_i\otimes 1,\quad d(v_i\otimes 1)=0.$$

Таким образом, если K является комплексом Коэна–Маколея, то когомологии $U(K)$ можно вычислять используя конечномерную дифференциальную алгебру $\mathbf{k}(K)/J\otimes\Lambda[u_1,\dots,u_{m-n}]$ вместо бесконечномерной алгебры $\mathbf{k}(K)\otimes\Lambda[u_1,\dots,u_m]$ из теоремы 3.3.

Пример 3.9. Пусть K представляет собой граничный комплекс $(m-1)$-мерного симплекса. Тогда $\mathbf{k}(K)=\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]/(v_1\cdots v_m)$. Легко видеть, что нетривиальные классы когомологий в алгебре $H\bigl[\mathbf{k}(K)\otimes\Lambda[u_1,\dots,u_m],d\bigr]$ (см. теорему 3.3) представляются лишь коциклами 1 и $v_1v_2\cdots v_{m-1}u_m$, или их кратными. Мы имеем $\deg(v_1v_2\cdots v_{m-1}u_m)=2m-1$, и предложение 3.7 показывает, что $v_1v_2\cdots v_{m-1}u_m$ является фундаментальным когомологическим классом $\mathcal{Z}_K\cong S^{2m-1}$ (см. пример 2.14 1)).

Пример 3.10. Пусть K представляет собой несвязное объединение m вершин. Тогда $U(K)$ получается удалением из $\mathbb{C}^m$ всех координатных подпространств коразмерности два (то есть вида $z_i = z_j = 0, i, j = 1, \dots, m$, см. пример 2.3), и $\mathbf{k}(K) = \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]/I$, где I – идеал порожденный всеми мономами $v_i v_j$, $i \neq j$. Как следует из теоремы 3.3 и предложения 3.5, любой класс когомологий из $H^*\big(U(K)\big)$ представляется в виде линейной комбинации коциклов-мономов $v_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} \cdots u_{i_k} \subset \mathbf{k}(K) \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_m]$, таких что $k \geqslant 2$, $i_p \neq i_q$ при $p \neq q$. Для каждого k имеется $m\binom{m-1}{k-1}$ таких мономов, и между ними имеется $\binom{m}{k}$ соотношений (каждое соотношение получается из вычисления дифференциала элемента $u_{i_1} \cdots u_{i_k}$). Так как $\deg(v_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} \cdots u_{i_k}) = k+1$, мы имеем

$$\dim H^0\big(U(K)\big) = 1, \quad H^1\big(U(K)\big) = H^2\big(U(K)\big) = 0,$$
$$\dim H^{k+1}\big(U(K)\big) = m\tbinom{m-1}{k-1} - \tbinom{m}{k}, \quad 2 \leqslant k \leqslant m,$$
$$\dim H^{k+1}\big(U(K)\big) = 0, \quad k > m,$$

и умножение в когомологиях тривиально.

В частности, при $m = 3$ мы имеем 6 трехмерных классов когомологий $v_i u_j$, $i \neq j$, связанных тремя соотношениями $v_i u_j = v_j u_i$, и 3 четырехмерных класса когомологий $v_1 u_2 u_3$, $v_2 u_1 u_3$, $v_3 u_1 u_2$, связанных одним соотношением

$$v_1 u_2 u_3 - v_2 u_1 u_3 + v_3 u_1 u_2 = 0.$$

Следовательно,

$$\dim H^3\big(U(K)\big) = 3, \quad \dim H^4\big(U(K)\big) = 2,$$

и умножение тривиально.

Пример 3.11. Пусть K – граничный комплекс m-угольника ($m \geqslant 4$). Тогда, как мы уже отмечали выше, момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_K$ является гладким многообразием размерности $m+2$, а $U(K)$ гомотопически эквивалентно $\mathcal{Z}_K$. Мы имеем $\mathbf{k}(K) = \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]/I$, где I порожден мономами $v_i v_j$, такими что $i \neq j \pm 1$ (здесь мы используем соглашение $v_{m+i} = v_i$ и $v_{i-m} = v_i$). Кольца когомологий таких многообразий были вычислены в работе [6]. Мы имеем

$$\dim H^k\big(U(K)\big) = \begin{cases} 1 \quad \text{при} \quad k = 0 \quad \text{или} \quad m+2; \\ 0 \quad \text{при} \quad k = 1, 2, m \quad \text{или} \quad m+1; \\ (m-2)\tbinom{m-2}{k-2} - \tbinom{m-2}{k-1} - \tbinom{m-2}{k-3} \\ \text{при} \;\; 3 \leqslant k \leqslant m-1. \end{cases}$$

Например, в случае $m = 5$ имеется 5 образующих группы $H^3\big(U(K)\big)$, представленных коциклами

$$v_i u_{i+2} \in \mathbf{k}(K) \otimes \Lambda[u_1, \ldots, u_5], \quad i = 1, \ldots, 5,$$

и 5 образующих группы $H^4\big(U(K)\big)$, представленных коциклами $v_j u_{j+2} u_{j+3}$, $j = 1, \ldots, 5$. Как следует из предложения 3.7, произведение коциклов $v_i u_{i+2}$ и $v_j u_{j+2} u_{j+3}$ представляет нетривиальный класс когомологий в $H^7\big(U(K)\big)$ (а именно, фундаментальный класс с точностью до знака) тогда и только тогда, когда $\{i, i+2, j, j+2, j+3\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Следовательно, для каждого класса когомологий $[v_i u_{i+2}]$ имеется единственный (двойственный по Пуанкаре) класс когомологий $[v_j u_{j+2} u_{j+3}]$, такой что произведение $[v_i u_{i+2}] \cdot [v_j u_{j+2} u_{j+3}]$ нетривиально.

Литература

1. В. И. Арнольд, *Кольцо когомологий группы крашенных кос.* — Мат. Заметки **5** (1969), 227–231.
2. M. Audin, *The topology of torus actions on symplectic manifolds.* — Progress in Math. **93** (1991), Boston Basel Berlin, Birkhäuser.
3. V. V. Batyrev, *Quantum cohomology rings of toric manifolds.* — Journées de Géométrie Algébrique d'Orsay (Juillet 1992), Astérisque **218** (1993), 9–34, Paris, Sociéte Mathématique de France, доступно в Интернет http://xxx.lanl.gov/abs/alg-geom/9310004.
4. E. Brieskorn, *Sur le groupes de tresses.* Séminare Bourbaki 1971/72, Lect. Notes in Math. **317**. Berlin-New York, Springer-Verlag, 1973, pp. 21–44.
5. В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Алгебраическая топология многообразий, определяемых простыми многогранниками.* — Успехи мат. наук **53**, № 3 (1998), 195–196.
6. В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Действия тора и комбинаторика многогранников.* — Труды МИ РАН им. Б. А. Стеклова **225** (1999), 96–131, доступно в Интернет http://xxx.lanl.gov/abs/math.AT/9909166.
7. В. М. Бухштабер, Н. Рай, *Торические многообразия и комплексные кобордизмы.* — Успехи мат. наук **53**, № 2 (1998), 139–140.
8. V. M. Buchstaber, N. Ray, *Tangential structures on toric manifolds, and connected sums of polytopes.* — Preprint UMIST, Manchester (1999).
9. D. A. Cox, *Recent developments in toric geometry.* Algebraic geometry (Proc. of the Summer Research Institute, Santa Cruz, CA, USA, July 9–29, 1995), J. Kollar (ed.) et al. Providence, RI, Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math. **62** (pt.2), 389–436 (1997). доступно в Интернет http://xxx.lanl.gov/abs/alg-geom/9606016.
10. Б. Данилов, *Геометрия торических многообразий.* — Успехи мат. наук **33**, № 2 (1978), 85–134.
11. M. Davis, T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions.* — Duke Math. J. **62** no. 2 (1991), 417–451.

12. C. De Concini, C. Procesi, *Wonderful models of subspace arrangements.* — Selecta Math., New Series **1** (1995), 459–494.
13. M. De Longueville, *The ring structure on the cohomology of coordinate subspace arrangements.* — preprint (1999), доступно в Интернет http://www.math.tu-berlin.de/~ziegler.
14. W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties.* Princeton Univ. Press, 1993.
15. М. Горески, Р. Макферсон, *Стратифицированная теория Морса.* М., Мир, 1991.
16. M. Hochster, *Cohen–Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes.* Ring Theory II (Proc. Second Oklahoma Conference) (B. R. McDonald and R. Morris, eds.), New York, Dekker, 1977, pp. 171–223.
17. С. Маклейн, *Гомология.* М., Мир, 1966.
18. P. Orlik, L. Solomon, *Combinatorics and Topology of Complements of Hyperplanes.* — Invent. Math. **56** (1980), 167–189.
19. Т. Е. Панов, *Комбинаторные формулы для χ_y-рода полиориентированного квазиторического многообразия.* — Успехи мат. наук **54**, № 5 (1999), 169–170.
20. T. E. Panov, *Hirzebruch genera of manifolds with torus action.* — preprint (1999), доступно в Интернет http://xxx.lanl.gov/abs/math.AT/9910083.
21. L. Smith, *Homological Algebra and the Eilenberg–Moore Spectral Sequence.* — Trans. Amer. Math. Soc. **129** (1967), 58–93.
22. R. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra.* — Progress in Math. **41** (1983), Boston, Birkhäuser.
23. S. Yuzvinsky, *Small rational model of subspace complement.* — preprint (1999), доступно в Интернет http://xxx.lanl.gov/abs/math.CO/9806143.

Buchstaber V. M., Panov T. E. Torus actions, equivariant moment-angle complexes, and coordinate subspace arrangements.

We show that the cohomology algebra of the complement of a coordinate subspace arrangement in m-dimensional complex space is isomorphic to the cohomology algebra of Stanley–Reisner face ring of a certain simplicial complex on m vertices. Then we calculate the latter cohomology algebra by means of the standard Koszul resolution of polynomial ring. To prove these facts we construct an equivariant with respect to the torus action homotopy equivalence between the complement of a coordinate subspace arrangement and the moment-angle complex defined by the simplicial complex, then investigate the equivariant topology of the moment-angle complex and apply the Eilenberg–Moore spectral sequence.

Механико-математический
факультет МГУ,
Москва 119899, Россия
Email tpanov@mech.math.msu.su
buchstab@mech.math.msu.su

Поступило 1 декабря 1999 г.