Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 265, 1999 г.

А. А. Панин

О НИЖНЕЙ ГИРЛЯНДЕ РЕШЕТОК ПОДГРУПП В ЛИНЕЙНЫХ ГРУППАХ

Введение

Пусть S – ассоциативное кольцо с единицей и R – его унитальное подкольцо, содержащееся в центре кольца S. В [3] была сформулирована задача описания решетки промежуточных подгрупп

$$Lat\big(\mathrm{Aut}\,({}_SS), \mathrm{Aut}\,({}_RS)\big) = \big\{H : \mathrm{Aut}\,({}_SS) \leqslant H \leqslant \mathrm{Aut}\,({}_RS)\big\}.$$

В случае, когда S является левым свободным R-модулем ранга n, эта решетка изоморфна решетке матричных подгрупп

$$Lat(\mathrm{T}, \mathrm{GL}\,(n, R)) = \{H : \mathrm{T} \leqslant H \leqslant \mathrm{GL}\,(n, R)\},$$

где через $\mathrm{T} = \mathrm{T}\,(S)$ обозначен образ S^* при вложении, переводящем элемент $\alpha \in S^*$ в матрицу оператора умножения на этот элемент справа в выбранном базисе расширения колец.

Если R – коммутативное кольцо и $S = R^n$, то при диагональном вложении R в S мы получаем задачу описания подгрупп в $\mathrm{GL}\,(n, R)$, содержащих группу диагональных матриц $\mathrm{D}\,(n, R)$. Она решена для достаточно широкого класса колец (по поводу этих и других упоминаемых результатов см. обзоры [9, 10]).

Если в качестве R рассматривать поле k, а в качестве S – его конечное расширение, то достигнутый прогресс в описании решетки промежуточных подгрупп не столь значителен. Полностью или почти полностью исследованы (качественно или количественно) случаи, когда k – поле вещественных чисел, конечное или локальное. Остальные результаты преимущественно относятся к случаю, когда степень расширения равна двум.

Вместе с тем можно рассматривать и более общую задачу. Именно, пусть $G' \leqslant \mathrm{Aut}\,({}_RS)$. Тогда предлагается исследовать решетку подгрупп

$$Lat\big(\mathrm{Aut}\,({}_SS) \cap G', G'\big) = \big\{H : \mathrm{Aut}\,({}_SS) \cap G' \leqslant H' \leqslant G'\big\}.$$

Конечно, вряд ли можно надеяться получить какие-то содержательные результаты для произвольной подгруппы G'. Но такая постановка задачи имеет смысл, по крайней мере, для случая конечного расширения колец (или колец, близких по своим свойствам к полям) и классических групп G'.

В настоящей работе изучаются некоторые свойства подгруппы $\mathrm{Aut}\,({}_SS) \cap G'$. Именно, выводятся некоторые условия, достаточные для вычисления ее нормализатора в G'. При дополнительных ограничениях удается описать нижнюю гирлянду интересующей нас решетки промежуточных подгрупп. Полученные результаты применяются к случаю полной и специальной линейной группы.

Часть результатов этой статьи, относящихся к вычислению нормализатора подгруппы $\mathrm{Aut}\,({}_SS) \cap G'$, была приведена в [4], однако, в абсолютно незаконченном виде. Пользуясь случаем, автор приносит извинения читателям статьи [4].

Термин "кольцо" будет всегда означать ассоциативное кольцо с единицей. Все подкольца предполагаются унитальными.

§1. Понятие гирлянды

Пусть G – группа и G_0 – некоторая ее подгруппа. Нас будет интересовать решетка промежуточных подгрупп

$$Lat(G_0, G) = \{H : G_0 \leqslant H \leqslant G\}.$$

З. И. Боревичем (см., например, [3]) было предложено естественное расчленение этой решетки на попарно непересекающиеся отдельные части, что позволяет сводить задачу описания первоначальной решетки подгрупп к изучению каждой ее части в отдельности.

Именно, на множестве $Lat(G_0, G)$ вводится структура графа, называемого *графом нормальности* решетки $Lat(G_0, G)$. В качестве вершин этого графа принимаются все промежуточные подгруппы H. Ребрами соединяются те пары подгрупп (вершин), в которых одна из них есть нормальный делитель в другой.

Определение. *Каждая связная компонента графа нормальности решетки $Lat(G_0, G)$ называется* гирляндой *этой решетки.*

В соответствии с этим определением решетка $Lat(G_0, G)$ распадается в дизъюнктное теоретико-множественное объединение своих гирлянд. Таким образом, описание решетки $Lat(G_0, G)$ сводится к перечислению всех ее гирлянд, а затем к изучению строения каждой отдельно взятой гирлянды.

Подгруппы G_0 и G являются одними из промежуточных и, следовательно, входят к некоторые гирлянды. Гирлянда, содержащая G_0, называется *нижней*, а содержащая G – *верхней* гирляндой решетки $Lat(G_0, G)$.

Многочисленные примеры разложения решеток $Lat(G_0, G)$ в объединение своих гирлянд приведены в [1].

§2. Общий случай

Будем использовать следующие обозначения. Пусть G – группа, $G_0 \leqslant G$. Если $G' \leqslant G$ (произвольная подгруппа), то пишем $G'_0 = G_0 \cap G'$.

Пусть S – кольцо и R – его подкольцо, содержащееся в центре S. Пусть M – левый S-модуль. Обозначим

$$G = \mathrm{Aut}\,({}_R M), \quad G = \mathrm{Aut}\,({}_S M).$$

Пусть $G' \leqslant G$.

Доказательства всех утверждений этого параграфа проводятся естественными рассуждениями, поэтому мы их опускаем.

Лемма 2.1. *Следующие два утверждения эквивалентны:*

1) $\mathcal{N}_{G'} G'_0 \subseteq \mathcal{N}_G G_0 \cap G'$;

2) *если* $G'_0 \trianglelefteq H' \leqslant G'$, *то* $H' \leqslant \mathcal{N}_G G_0$.

В оставшейся части параграфа мы будем предполагать, что выполнено одно из этих двух равносильных условий.

Следствие 1. $\mathcal{N}_{G'} G'_0 = \mathcal{N}_G G_0 \cap G'$.

Обозначим через L_0 решетку подгрупп $Lat(G_0, \mathcal{N}_G G_0)$, а через L'_0 решетку $Lat(G'_0, \mathcal{N}_{G'} G'_0)$. Также введем следующее обозначение:

$$L_0 \cap G' = \{H \cap G' : H \in L_0\}.$$

Следствие 2. $L'_0 = L_0 \cap G'$.

Пусть теперь S – коммутативное кольцо, $M = S$. Тогда группа $G_0 \approx S^*$ абелева.

Следствие 3. *Если G_0 – максимальная абелева подгруппа в G (это так, например, если S аддитивно порождается над R своими обратимыми элементами), то и G'_0 – максимальная абелева подгруппа в G'.*

§3. Вычисление нормализатора

Заметим, что $\mathrm{End}\,({}_SM)$ является левым R-модулем, так как R содержится в центре S. Будем предполагать, что выполнено следующее условие:

$$G'_0 \quad \text{аддитивно порождает (над } \ R) \ G_0. \qquad (+)$$

Лемма 3.1. $\mathcal{N}_{G'}G'_0 = \mathcal{N}_G G_0 \cap G'$.

Доказательство. Покажем, что

$$\mathcal{N}_{G'}G'_0 \subseteq \mathcal{N}_G G_0 \cap G'.$$

Пусть

$$h \in \mathcal{N}_{G'}G'_0, \quad t \in G_0.$$

Тогда

$$t = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i t_i, \quad \text{где} \quad \alpha_i \in R, \quad t_i \in G'_0.$$

Поэтому

$$h^{-1}th = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i h^{-1} t_i h = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i t'_i$$

для некоторых $t'_i \in G'_0$. Отсюда $h^{-1}th \in G_0$. Обратное включение верно всегда. Лемма доказана.

Теорема 3.2. *Пусть S – кольцо и R – его подкольцо, содержащееся в центре кольца S. Предположим, что S аддитивно порождается своими обратимыми элементами. Пусть M – левый свободный S-модуль конечного ранга, G' – подгруппа группы G, для которой выполнено условие $(+)$. Тогда нормализатор подгруппы G'_0 в группе G' совпадает с пересечением полупрямого произведения нормального делителя G_0 и подгруппы, изоморфной группе* $\mathrm{Aut}\,(S/R)$ *всех кольцевых автоморфизмов кольца S, тождественных на R, с группой G'.*

Доказательство. Для случая $G' = G$ теорема доказана в работе В. А. Койбаева [5]. Осталось применить лемму 3.1.

Нас в первую очередь будет интересовать случай $M = S$ (см. Введение). Но даже в этой ситуации проверка условия (+) для большого класса колец не представляется возможной. К тому же это условие не позволяет получить дальнейшую информацию о строении нижней гирлянды решетки $Lat(G'_0, G')$. В связи с этим мы несколько сузим класс рассматриваемых колец и наложим на них другое ограничение.

Пусть S – кольцо и R – его целостное подкольцо, содержащееся в центре S. Также пусть S является левым свободным R-модулем конечного ранга с базисом $\omega_1, \ldots, \omega_n$.

Рассмотрим вложение кольца S в матричное кольцо $\mathrm{M}\,(n, R)$: каждому элементу $\alpha = \alpha_1\omega + \ldots + \alpha_n\omega_n \in S$ (где $\alpha_i \in R$) ставится в соответствие матрица $t(\alpha) = (t_{ij}(\alpha))$, где

$$\omega_i\alpha = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}(\alpha)\omega_j.$$

Обозначим образ S^* при этом вложении через T. Пусть k – поле частных кольца R, а $\overline{k}$ – его алгебраическое замыкание. Распространим отображение t на аффинное пространство $\mathbb{A}^n$, заменив R на $\overline{k}$, а S на $\overline{k} \otimes_R S$. Из определения отображения t следует, что $t(\alpha\beta) = t(\beta)t(\alpha)$ для любых $\alpha,\ \beta \in \overline{k} \otimes_R S$. Обозначим $\widetilde{\mathrm{T}} = t((\overline{k} \otimes_R S)^*)$. Очевидно, что $\widetilde{\mathrm{T}}$ – группа.

Лемма 3.3. $\widetilde{\mathrm{T}}$ *– связная k-определенная группа.*

Доказательство. Очевидно, что $\widetilde{\mathrm{T}} = t(U)$, где U – открытое по Зарисскому подмножество $\mathbb{A}^n$, а именно, множество ненулей определителя. Поэтому $\widetilde{\mathrm{T}}$ – связная алгебраическая группа.

Перейдем к S^{op}. При этом множество U не изменится, а $t\big|_U : U \to \mathrm{GL}\,(n, \overline{k})$ будет определенным над k морфизмом k-групп. Тогда его образ есть k-подгруппа $\mathrm{GL}\,(n, \overline{k})$.

Пусть G' – произвольная подгруппа $\mathrm{GL}\,(n, R)$. Положим $\mathrm{T}' = \mathrm{T} \cap G'$. Наложим следующее ограничение (считая $\overline{k}$ вложенным в $\overline{k} \otimes_R S$ естественным образом):

$\overline{\mathrm{T}}$ аддитивно порождается над $\overline{k}$ компонентой единицы $\overline{\mathrm{T}'}$. $(*)$

Лемма 3.4. $\mathcal{N}_{G'}T' = \mathcal{N}_{\mathrm{GL}\,(n,R)}\mathrm{T} \cap G'$.

Доказательство. Пусть $g \in \mathcal{N}_{G'}\mathrm{T}'$, то есть $g\mathrm{T}'g^{-1} = \mathrm{T}'$. Так как сопряжение является изоморфизмом алгебраических групп, то $g\overline{\mathrm{T}'}g^{-1} = \overline{\mathrm{T}'}$. По условию $(*)$

$$g\mathrm{T}\,g^{-1} \subseteq g\,\overline{\mathrm{T}}\,g^{-1} \subseteq \widetilde{\mathrm{T}}\,.$$

Переходя к "R-точкам", получаем $g \in \mathcal{N}_{\mathrm{GL}\,(n,R)}\mathrm{T}$.

Замечание. При доказательстве этой леммы мы пользовались лишь тем, что $\overline{\mathrm{T}}$ аддитивно порождается над $\overline{k}$ всей группой $\overline{\mathrm{T}'}$.

Сформулируем теперь аналог теоремы 3.2.

Теорема 3.5. *Пусть S – кольцо и R – его целостное подкольцо, содержащееся в центре кольца S. Предположим, что S является левым свободным R-модулем ранга и аддитивно порождается своими обратимыми элементами. Пусть G' – подгруппа группы $\mathrm{GL}\,(n,R)$, для которой выполнено условие $(*)$. Тогда нормализатор подгруппы T' в группе G' совпадает с пересечением полупрямого произведения нормального делителя T и группы $\mathrm{Aut}\,(S/R)$ всех кольцевых автоморфизмов кольца S, тождественных на R, с группой G'.*

Следствие. *Если группа $\mathrm{Aut}\,(S/R)$ конечна, то индекс подгруппы T' в ее нормализаторе $\mathcal{N}_{G'}\mathrm{T}'$ конечен.*

§4. Вычисление нижней гирлянды

Пусть, как и раньше, S – кольцо и R – его целостное подкольцо, содержащееся в центре S. Предположим, что S является левым свободным R-модулем конечного ранга.

Пусть $G' = \widetilde{G}(R)$ для некоторой замкнутой подгруппы $\widetilde{G} \leqslant \mathrm{GL}\,(n,\overline{k})$.

Теорема 4.1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) *$\widetilde{G}$ – связная редуктивная группа;*

2) *$\widetilde{\mathrm{T}} \cap \widetilde{G}$ – максимальный тор в $\widetilde{G}$;*

3) *группа T' плотна в $\widetilde{\mathrm{T}} \cap \widetilde{G}$ в топологии Зарисского.*

Тогда нижняя гирлянда решетки $Lat(\mathrm{T}', G')$ совпадает с интервалом $Lat(\mathrm{T}', \mathcal{N}_{G'}\mathrm{T}')$.

Доказательство. Нужно показать, что если $\mathrm{T}' \leqslant H \leqslant \mathcal{N}_{G'}\mathrm{T}'$, то $\mathcal{N}_{G'}H \leqslant \mathcal{N}_{G'}\mathrm{T}'$.

Пусть $g \in \mathcal{N}_{G'}H$. Тогда $g\mathrm{T}'g^{-1} \subseteq H \subseteq \mathcal{N}_{G'}\mathrm{T}'$. Так как сопряжение является изоморфизмом алгебраических групп, то $\mathcal{N}_{G'}\mathrm{T}' \subseteq$

$\mathcal{N}_{\widetilde{G}}\overline{\mathrm{T}'}$. Последняя группа является замкнутой, поэтому имеем $g\overline{\mathrm{T}'}g^{-1} \subseteq \mathcal{N}_{\widetilde{G}}\overline{\mathrm{T}'}$. Вспоминая, что группа T' плотна в $\widetilde{\mathrm{T}} \cap \widetilde{G}$, получаем $g(\widetilde{\mathrm{T}} \cap \widetilde{G})g^{-1} \subseteq \mathcal{N}_{\widetilde{G}}(\widetilde{\mathrm{T}} \cap \widetilde{G})$. Так как $\widetilde{\mathrm{T}} \cap \widetilde{G}$ – максимальный тор, то он регулярен и, значит, совпадает со своим централизатором в $\widetilde{G}$. Но тогда компонента единицы нормализатора $\mathcal{N}_{\widetilde{G}}(\widetilde{\mathrm{T}} \cap \widetilde{G}))^o$ совпадает с $\widetilde{\mathrm{T}} \cap \widetilde{G}$. Так как морфизм алгебраических групп переводит компоненту единицы в компоненту единицы, то $g \in \mathcal{N}_{\widetilde{G}}(\widetilde{\mathrm{T}} \cap \widetilde{G})$. Переходя к "$R$-точкам", получаем $g \in \mathcal{N}_{G'}\mathrm{T}'$. Теорема доказана.

Заметим, что при доказательстве этой теоремы мы никак не использовали явный вид нормализатора подгруппы T'. Это повлекло за собой наложение ряда ограничений, в частности, мы требовали, чтобы $\widetilde{\mathrm{T}} \cap \widetilde{G}$ была максимальным тором в $\widetilde{G}$. Ниже мы докажем аналог теоремы 4.1 при других предположениях, что позволит нам получить следствия, которые невозможно вывести из теоремы 4.1.

Теорема 4.2. *Пусть кольцо S аддитивно порождается своими обратимыми элементами и группа $\mathrm{Aut}\,(S/R)$ кольцевых автоморфизмов S, постоянных на R, конечна. Пусть для G' выполнено условие $(*)$. Тогда нижняя гирлянда решетки $Lat(\mathrm{T}', G')$ совпадает с интервалом $Lat(\mathrm{T}', \mathcal{N}_{G'}\mathrm{T}')$.*

Доказательство. Ключевой момент в доказательстве теоремы 4.1 состоит в проверке того, что компонента единицы нормализатора $\overline{\mathrm{T}'}$ совпадает с подгруппой $\overline{\mathrm{T}'}$. В нашей ситуации группа $\overline{\mathrm{T}'}$ может не быть связной, но схема доказательства остается той же самой.

Пусть $g \in \mathcal{N}_{G'}H$. По следствию из теоремы 3.5

$$\mathcal{N}_{G'}\mathrm{T}' = \bigcup_{i=1}^{s}{}^{\varnothing}\ \mathrm{T}'A_i$$

для некоторых $A_i \in \mathrm{GL}\,(n, R)$, причем $A_1 = 1$. Имеем

$$g\overline{\mathrm{T}'}g^{-1} \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} \overline{\mathrm{T}'}A_i.$$

Последнее множество является (замкнутой) подгруппой $\mathrm{GL}\,(n, \overline{k})$, причем подгруппа $(\overline{\mathrm{T}'})^o$ имеет в ней конечный индекс, то есть является ее компонентой единицы. Отсюда, как уже отмечалось выше, $g(\overline{\mathrm{T}'})^o g^{-1} \subseteq (\overline{\mathrm{T}'})^o$. Вспоминая условие $(*)$, получаем $g\mathrm{T}'g^{-1} \subseteq \widetilde{\mathrm{T}} \cap \widetilde{G}$. Переходя к "$R$-точкам", имеем $g \in \mathcal{N}_{G'}\mathrm{T}'$.

Следствие. *В предположениях теорем* 4.1 *или* 4.2

$$\mathcal{N}_{G'}\mathcal{N}_{G'}\mathrm{T}' = \mathcal{N}_{G'}\mathrm{T}'.$$

Замечание. Из двух доказанных теорем обычно не удается получить никакой информации о строении нижней гирлянды в случае, когда кольцо S некоммутативно: в теореме 4.1 $\widetilde{\mathrm{T}} \cap \widetilde{G}$ может не быть тором, а в теореме 4.2 может не выполняться условие о конечности группы $\mathrm{Aut}\,(S/R)$, в которую входят внутренние автоморфизмы.

§5. Сепарабельные алгебры

В этом параграфе будут приведены без доказательства необходимые нам в дальнейшем результаты. Подробнее с теорией сепарабельных алгебр можно познакомиться, например, по книге [6].

Пусть k – поле. Все k-алгебры предполагаются конечномерными.

Определение. *k-алгебра A называется* сепарабельной *(над полем k), если при любом расширении K поля k K-алгебра $K \otimes_k A$ полупроста. В частности, сепарабельная алгебра сама должна быть полупростой.*

Лемма 5.1. *k-алгебра A сепарабельна тогда и только тогда, когда $\overline{k}$-алгебра $\overline{k} \otimes_k A$ полупроста.*

Теорема 5.2. *Пусть $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_s$ – разложение полупростой k-алгебры A в прямую сумму простых алгебр $\{A_i\}$ с центрами $\{C_i\}$. Тогда A сепарабельна в том и только том случае, если все C_i являются сепарабельными расширениями поля k.*

§6. Случай полной линейной группы

Лемма 6.1. *Пусть S – коммутативное кольцо и R – его целостное подкольцо. Предположим, что S является левым свободным R-модулем ранга n. Если $\overline{k}$-алгебра $\overline{k} \otimes_R S$ является полупростой, то группа $\widetilde{\mathrm{T}}$ – максимальный k-определенный тор в $\mathrm{GL}\,(n, \overline{k})$.*

Доказательство. Пользуясь леммой 3.3 и соображениями размерности, достаточно показать, что группа $\widetilde{\mathrm{T}}$ является диагонализируемой.

Из условий леммы вытекает, что $\overline{k} \otimes_R S$ изоморфна прямой сумме n копий поля $\overline{k}$. Поэтому группа $\widetilde{\mathrm{T}}$ сопряжена с группой диагональных матриц $\mathrm{D}(n, \overline{k})$.

Замечание. Если $\overline{k}$-алгебра $\overline{k} \otimes_R S$ содержит нильпотенты, то в $\widetilde{\mathrm{T}}$ окажутся унипотентные элементы, поэтому она не будет тором.

Теорема 6.2. *Пусть S – коммутативное кольцо и R – его целостное подкольцо. Предположим, что S является левым свободным R-модулем ранга n, а $\overline{k}$-алгебра $\overline{k} \otimes_R S$ является полупростой. Пусть, наконец, группа T плотна в $\widetilde{\mathrm{T}}$ в топологии Зарисского. Тогда нижняя гирлянда решетки $Lat(\mathrm{T}, \mathrm{GL}(n, R))$ совпадает с интервалом $Lat(\mathrm{T}, \mathcal{N}_{\mathrm{GL}(n,R)}\mathrm{T})$.*

Доказательство. Применим теорему 4.1.

Замечание. Если пользоваться теоремой 4.2, то достаточно требовать, чтобы кольцо S аддитивно порождалось своими обратимыми элементами и k-алгебра $k \otimes_R S$ была полупростой, но при этом $\widetilde{\mathrm{T}}$ может не быть тором.

Следствие. *Пусть $R = k$ – поле, $S = K_1 \oplus \ldots \oplus K_t$, где K_i/k – конечные расширения поля k. Тогда:*

1) *если все K_i/k – сепарабельные расширения, то $\widetilde{\mathrm{T}}$ – максимальный k-определенный тор в $\mathrm{GL}(n, \overline{k})$;*
2) *если поле k бесконечно, то нижняя гирлянда решетки $Lat(\mathrm{T}, \mathrm{GL}(n, k))$ совпадает с интервалом $Lat(\mathrm{T}, \mathcal{N}_{\mathrm{GL}(n,k)}\mathrm{T})$.*

Доказательство. Вытекает из леммы 6.1 и результатов §5.

Случай конечного поля будет проанализирован в §8.

Отметим, что доказанное обобщает результат А. Х. Аль Хамада [1, с. 86].

Пример. Пусть $R = \mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел, рассмотрим кольцо $S = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}w$, где $w^2 = 0$. Очевидно, что имеется лишь два автоморфизма S/R, а именно, тождественный и переводящий w в $-w$. Далее, обратимые элементы S имеют вид $\pm 1 + bw$, где $b \in R$. Поэтому первые два условия теоремы 4.2 выполнены.

Группа T совпадает (при выборе в качестве базиса S/R элементов 1, w) с множеством матриц

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} : a = \pm 1,\ b \in R \right\}.$$

Чтобы получить $\overline{\mathrm{T}}$, нужно в последнем выражении брать $b \in \overline{\mathbb{Q}}$. Заметим, что эта группа несвязна, но условие $(*)$ при этом выполнено. Поэтому теорема 4.2 применима.

Отметим, что в данной ситуации применить теорему 4.1 невозможно, так как T содержит унипотентные элементы.

§7. Случай специальной линейной группы

Пусть $\widetilde{G} = \mathrm{SL}\,(n, \overline{k})$.

Лемма 7.1. *Пусть S – коммутативное кольцо и R – его целостное подкольцо. Предположим, что S является левым свободным R-модулем ранга n. Если $\overline{k}$-алгебра $\overline{k} \otimes_R S$ является полупростой, то группа $\widetilde{\mathrm{T}} \cap \widetilde{G}$ – максимальный k-определенный тор в $\mathrm{SL}\,(n, \overline{k})$.*

Доказательство. Покажем, что группа $\widetilde{\mathrm{T}} \cap \widetilde{G}$ является связной.

Так как $\overline{k} \otimes_R S$ является полупростой, то $\widetilde{\mathrm{T}} \cap \widetilde{G}$ оказывается сопряженной с группой $\mathrm{D}(n, \overline{k}) \cap \widetilde{G}$ диагональных матриц с определителем 1. Последняя группа связна, поскольку многочлен $x_1 x_2 \ldots x_n - 1$ неприводим над $\overline{k}$.

Для завершения доказательства осталось воспользоваться соображениями размерности.

Теорема 7.2. *Пусть S – кольцо и R – его целостное подкольцо, содержащееся в центре кольца S. Предположим, что S является левым свободным R-модулем ранга и аддитивно порождается своими обратимыми элементами. Пусть T' плотна в $\widetilde{\mathrm{T}} \cap \widetilde{G}$ в топологии Зарисского. Тогда нормализатор подгруппы T' в группе G' совпадает с пересечением полупрямого произведения нормального делителя T и группы $\mathrm{Aut}\,(S/R)$ всех кольцевых автоморфизмов кольца S, тождественных на R, с группой G'.*

Доказательство. Очевидно, что всякую матрицу из $\widetilde{\mathrm{T}}$ можно превратить в элемент $\widetilde{\mathrm{T}} \cap \widetilde{G}$ путем умножения на скалярную матрицу, поэтому условие $(*)$ из §3 выполнено, и мы можем применить теорему 3.5 (см. замечание после леммы 3.4).

Теорема 7.3. *Пусть S – коммутативное кольцо и R – его целостное подкольцо. Предположим, что S является левым свободным R-модулем ранга n, а $\overline{k}$-алгебра $\overline{k} \otimes_R S$ является полупростой. Пусть, наконец, группа T' плотна в $\widetilde{\mathrm{T}} \cap \widetilde{G}$ в топологии Зарисского. Тогда нижняя гирлянда решетки $Lat(\mathrm{T}', \mathrm{SL}(n,R))$ совпадает с интервалом $Lat(\mathrm{T}', \mathcal{N}_{\mathrm{SL}(n,R)}\mathrm{T}')$.*

Следствие. *Пусть $R = k$ – поле, $S = K_1 \oplus \ldots \oplus K_t$, где K_i/k – конечные сепарабельные расширения поля k. Тогда:*

1) *$\widetilde{\mathrm{T}} \cap \widetilde{G}$ – максимальный k-определенный тор в $\mathrm{SL}(n,\overline{k})$;*
2) *если поле k бесконечно, то нижняя гирлянда решетки $Lat(\mathrm{T}', \mathrm{SL}(n,k))$ совпадает с интервалом $Lat(\mathrm{T}', \mathcal{N}_{\mathrm{SL}(n,k)}\mathrm{T}')$, то есть с пересечением нижней гирлянды решетки $Lat(\mathrm{T}, \mathrm{GL}(n,k))$ с $\mathrm{SL}(n,k)$.*

Случай конечного поля будет проанализирован в §8.

Разберем некоторые примеры.

1°. Если K/k – конечное расширение полей, то $\mathrm{T}' = \mathrm{Ker}\,\mathrm{N}_{K/k}$.

2°. Пусть $k = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ – его квадратичное расширение, где d – целое рациональное число, свободное от квадратов. Если мы выберем в качестве базиса K/k элементы 1, $\sqrt{d}$, то

$$\mathrm{T}' = \left\{ \begin{pmatrix} x & yd \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{Q},\ x^2 - dy^2 = 1 \right\}.$$

Очевидно, что имеется лишь два автоморфизма K/k, именно, тождественный и переводящий $\sqrt{d}$ в $-\sqrt{d}$.

Теперь можно вычислить в явном виде подгруппу $\mathcal{N}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Q})}\mathrm{T}'$. Действительно, применяя следствие из теоремы 7.3, получаем, что результат зависит от арифметических свойств числа d (именно, от разрешимости в рациональных числах уравнения $x^2 - dy^2 = -1$): если d положительно и не содержит простых делителей вида $4m+3$, то

$$\mathcal{N}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Q})}\mathrm{T}' = \mathrm{T}' \cup \left\{ \begin{pmatrix} x & -yd \\ y & -x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{Q},\ x^2 - dy^2 = -1 \right\} = \\ = \mathrm{T}' \cup \mathrm{T}' \begin{pmatrix} x_0 & -y_0 d \\ y_0 & -x_0 \end{pmatrix},$$

где (x_0, y_0) – фиксированное решение уравнения $x^2 - dy^2 = -1$; во всех же остальных случаях $\mathcal{N}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Q})}\mathrm{T}' = \mathrm{T}'$. Итак, нижняя гирлянда решетки $Lat(\mathrm{T}', \mathrm{SL}(2, \mathbb{Q}))$ состоит либо из одной, либо из двух подгрупп.

3°. Пусть K/k – чисто несепарабельное расширение полей степени $q = p^n$, где $\operatorname{char} k = p$. Так как $\mathrm{N}_{K/k}(\alpha) = \alpha^q$, то $\operatorname{Ker} \mathrm{N}_{K/k} = 1$. Действительно, $\alpha^q = 1$ эквивалентно $(\alpha - 1)^q = 0$, откуда все и следует. Значит, в этом случае $\mathrm{T}' = 1$.

§8. Элементарный подход

Пусть K – конечное сепарабельное расширение бесконечного поля k, N – фиксированное натуральное число.

Лемма 8.1. *Пусть $x \in K \setminus k$. Тогда множество таких элементов $\alpha \in k$, что $(x + \alpha)^N \in k$, не может содержать больше N элементов.*

Доказательство. Через p мы будем обозначать характеристическую экспоненту поля k. Тогда $N = p^r N'$, где $(N', p) = 1$. Ввиду сепарабельности K/k можно считать, что $(N, p) = 1$.

Допустим, что утверждение леммы неверно, и выберем различные $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in k$, для которых $(x + \alpha_i)^N \in k$ для всех $i = 0, 1, \ldots, N$. Раскрывая по формуле бинома, получим систему уравнений вида $CX = Y$, где $C \in \mathrm{GL}(N+1, k)$, $Y \in k^{N+1}$, откуда $X \in k^{N+1}$, в частности, $Nx \in k$, поэтому $x \in k$. Противоречие.

Следствие. *Существует бесконечно много примитивных элементов расширения K/k, имеющих норму 1.*

Доказательство. Возьмем некоторый примитивный элемент x конечного сепарабельного расширения K/k. Для каждого $\alpha \in k$ можно рассмотреть элемент $x_\alpha = \frac{(x+\alpha)^n}{N_{K/k}(x+\alpha)}$, где $n = (K : k)$. Все такие элементы имеют норму 1. Так как имеется лишь конечное число промежуточных подполей F, $k \subseteq F \subseteq K$, из леммы 8.1 легко вывести, что среди элементов x_α имеется бесконечное число различных примитивных.

Если k – конечное поле, то, как нетрудно проверить, и в этом случае найдется примитивный элемент расширения K/k, имеющий норму 1.

Пусть $R = k$ – поле, $S = K_1 \oplus \ldots \oplus K_t$, где K_i/k – конечные расширения поля k степени n_i, $\widetilde{G} = \mathrm{SL}(n, \overline{k})$.

Лемма 8.2. *Если $S \neq \mathbb{F}_3 \oplus \mathbb{F}_3$, то $\mathcal{N}_{G'}\mathrm{T}' = N_{\mathrm{GL}(n,k)}\mathrm{T} \cap G'$.*

Доказательство. Проверим, что множество S', состоящее из k-линейных комбинаций элементов $s \in S$, для которых $t(s) \in G'$, содержит S^*. Тогда будет выполнено условие $(*)$, и мы сможем применить лемму 3.4.

А. Пусть не все K_i/k одномерны. Для каждого номера j, для которого $n_j \geqslant 2$, выберем примитивный элемент α_j расширения K_j/k, имеющий норму 1. Тогда $(0, \ldots, \alpha_j - 1, \ldots, 0) \in S'$, и мы получаем $K_j \subseteq S'$.

Если какие-то из K_i одномерны, то в случае $k = \mathbb{F}_2$ доказывать нечего. Если же $k \neq \mathbb{F}_2$, то для каждого j, для которого $n_j = 1$, можно выбрать элемент $c_j \in K_j = k$, отличный от 0 и 1. Не умаляя общности, считаем, что $n_1 \geqslant 2$. Пользуясь сюръективностью норменного гомоморфизма, найдем в K_1/k элемент α с нормой c_j^{-1}. Тогда легко видеть, что $(0, \ldots, c_j - 1, \ldots, 0) \in S'$, поэтому $K_j \subseteq S'$.

Б. Пусть все $K_i = k$ и $|k| \geqslant 4$. Выберем элемент $c \in k^*$, для которого $c^2 \neq 1$. Тогда $(c^2 - 1, c - 1, \ldots, c - 1, 0) \in S'$, откуда $(c + 1, 1, \ldots, 1, 0) \in S'$. Проделав ту же операцию с $c + 1 \neq 0$, получим $(1, 0, \ldots, 0) \in S'$.

В. Осталось разобрать случай $K_i = \mathbb{F}_3$, $t \geqslant 3$. Если t нечетно, то

$$(1, -1, \ldots, -1) + (1, \ldots, 1) = (-1, 0, \ldots, 0) \in S'.$$

Если t четно, то аналогично $(-1, -1, 0, \ldots, 0) \in S'$. Но также и

$$(-1, 1, 0, \ldots, 0) = (1, -1, 1, -1, \ldots, -1) + (1, -1, -1, 1, \ldots, 1) \in S'.$$

Лемма доказана.

Замечание. Как легко убедиться, для случая $S = \mathbb{F}_3 \oplus \mathbb{F}_3$ утверждение леммы 8.2 неверно.

Следствие. *Пусть $R = k$ – поле, $S = K_1 \oplus \ldots \oplus K_t$, где K_i/k – конечные сепарабельные расширения поля k, причем:*

1) *не более двух из них совпадают с $\mathbb{F}_2$;*
2) $S \neq \mathbb{F}_3 \oplus \mathbb{F}_3$

Тогда нормализатор подгруппы T' в группе G' совпадает с пересечением полупрямого произведения T и $\mathrm{Aut}\,(S/R)$ с группой G'.

В работе [8] Г. Зейтцем было получено практически исчерпывающее описание промежуточных подгрупп в конечных группах типа Ли, содержащих группу рациональных точек максимального тора в соответствующей алгебраической группе. Ограничимся при изложении его результатов группами Шевалле.

Пусть $\widetilde{G} = G(\Phi, \overline{k})$ – группа Шевалле типа Φ над алгебраическим замыканием $\overline{k}$ конечного поля $k = \mathbb{F}_q$, где $\operatorname{char} k \neq 2, 3$ и $q \geqslant 13$, $G = G(\Phi, k)$. Тогда, как показано в [8], группа k-рациональных точек T произвольного максимального тора $\widetilde{\mathrm{T}}$ в $\widetilde{G}$ является паранормальной подгруппой в G (см. [2, 10]), откуда, в частности, следует, что нижняя гирлянда решетки промежуточных подгрупп, содержащих этот тор, совпадает с интервалом $Lat(\mathrm{T}, \mathcal{N}_G\mathrm{T})$.

Поэтому в случае конечного поля k следствия из теорем 6.2 и 7.3 могут быть соответствующим образом уточнены.

Для полей k, не удовлетворяющих условиям, при которых справедливы результаты Зейтца, нижняя гирлянда решетки $Lat(\mathrm{T}, G)$ действительно может не совпадать с интервалом $Lat(\mathrm{T}, \mathcal{N}_G\mathrm{T})$. Примеры такого рода легко построить а случае $k = \mathbb{F}_3$, $K = (\mathbb{F}_3)^n$, $n \geqslant 2$.

В заключение автор выражает благодарность Б. Э. Кунявскому и В. И. Черноусову за полезные обсуждения, Н. А. Вавилову и А. И. Генералову за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания, и E. Bayer-Fluckiger за оказанное гостеприимство во время посещения автором университета г. Безансон, Франция.

Литература

1. А. Х. Аль Хамад, *Гирлянды в линейных группах, связанные с кольцами нормирования.* Канд. дисс., СПб. 1992.
2. М. С. Ба, З. И. Боревич, *О расположении промежуточных подгрупп.* В книге: Кольца и линейные группы, Краснодар 1988, с. 14–41.
3. З. И. Боревич, В. А. Койбаев, Чан Нгок Хой, *Решетки подгрупп в* $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Q})$*, содержащих нерасщепимый тор.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **191** (1991), 24–43.
4. З. И. Боревич, А. А. Панин, *О максимальном торе в подгруппах полной линейной группы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **227** (1995), 15–22.
5. В. А. Койбаев, *Нормализатор группы автоморфизмов модуля, возникающего при расширении основного кольца.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **211** (1994), 133–135.
6. Ч. Кэртис, И. Райнер, *Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.* М. (1969).
7. Дж. Хамфри, *Линейные алгебраические группы.* М. (1980).

8. G. M. Seitz, *Root subgroups for maximal tori in finite groups of Lie type.* — Pacif. J. Math. **106**, No. 1 (1995), 153–244.
9. N. A. Vavilov, *Subgroups of Chevalley groups containing a maximal torus.* — Transl. Am. Math. Soc. **155** (1993), 59–100.
10. N. A. Vavilov, *Intermediate subgroups in Chevalley groups.* in: Proc. Conf. Groups of Lie Type and their Geometries (Como–1993), Cambridge Univ. Press 1995, pp. 233–280.

Panin A. A. On the lower garland of certain subgroup lattices in linear groups.

We describe here the lower garland of some lattices of intermediate subgroups in linear groups. The results are applied to the case of subgroup lattices in general and special linear groups over a class of rings, containing the group of rational points T of a maximal non-split torus in the corresponding algebraic group. It turns out that lower garlands of these lattices coincide with their intervals consisting of subgroups between T and its normalizer.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail address: alex@ap2707.spb.edu

Поступило 1 ноября 1999 г.