Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 265, 1999 г.

Д. М. Лебединский

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ФАКТОРИЗАЦИИ ПО РАДИКАЛУ ДЛЯ K_0^+ ОТ КОЛЬЦА ЭНДОМОРФИЗМОВ

1. Введение

Основной целью настоящей работы является вычисление отображения факторизации по радикалу на K_0^+ от кольца эндоморфизмов почти вполне разложимой абелевой группы с использованием теоремы, полученной А. В. Яковлевым в [3]. Под K_0^+ понимается полугруппа конечно порожденных проективных модулей с точностью до изоморфизма (эта полугруппа в нашем случае лежит в группе Гротендика K_0, так как над полулокальным кольцом понятия стабильного и обычного изоморфизма совпадают). Теорема Яковлева позволяет записать элементы K_0^+ как некие наборы неотрицательных целых чисел, и именно в этих терминах вычисляется отображение факторизации по радикалу. Кроме того, в последнем параграфе работы дается ответ на вопрос, для каких наборов типов можно построить неразложимую (как объект $\bar{M}^p$) почти вполне разложимую группу, добавив всего одну дополнительную образующую.

Обозначения, используемые в статье, в основном согласованы со статьей [3]. Кольцо целых чисел обозначается $\mathbb{Z}$, его локализация по простому числу p обозначается $\mathbb{Z}_p$, кольцо целых p-адических чисел обозначается $\bar{\mathbb{Z}}_p$, поле рациональных чисел обозначается $\mathbb{Q}$, поле p-адических чисел обозначается $\bar{\mathbb{Q}}_p$. Под p-показателем числа понимается степень p, с которой оно входит в это число. Через $M_{n\times k}(R)$ обозначается множество матриц размера $n \times k$ над кольцом R; $M_n(R)$ обозначает $M_{n\times n}(R)$.

Через $J(M)$ обозначается радикал модуля M; в частности, $J(R)$ – радикал Джекобсона кольца R. Поле из p элементов обозначается $\mathbb{F}_p$, множество натуральных чисел с нулем обозначается $\mathbb{N}_0$. Тензорное произведение без указания кольца берется над $\mathbb{Z}$. Под категорией $\bar{M}^p$ понимается категория абелевых групп без кручения конечного ранга, группы морфизмов которой тензорно помножены на $\bar{\mathbb{Z}}_p$, после чего добавлены ядра идемпотентов (см. [3]).

2. Кольцо эндоморфизмов

Пусть $A = \langle L_1 z_1, \ldots, L_n z_n, y_1, \ldots, y_k \rangle$ – почти вполне разложимая группа, делимая на почти все простые числа. Здесь L_i – группы ранга 1, z_i линейно независимы и $y_i = \gamma_{i1} z_1 + \cdots + \gamma_{in} z_n$ – дополнительные образующие. Обозначим

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{k1} & \cdots & \gamma_{kn} \end{pmatrix}.$$

Будем предполагать, что $1 \in L_i$ и характеристика 1 в L_i состоит только из нулей и символов ∞.

Пусть L – группа ранга 1. Через $t(L)$ обозначим тип группы L.

Мы будем говорить, что квадратная $n \times n$ матрица M обладает T-свойством, и писать $t(M)$, если из $t(L_i) \not\geq t(L_j)$ следует $M_{ij} = 0$.

Лемма 1. *Пусть $f : A \to A$ – эндоморфизм и B – его матрица в базисе $\{z_i\}$. Тогда $t(B)$.*

Доказательство. Пусть $t(L_i) \not\geq t(L_j)$, тогда найдется простое число p такое, что z_j делится на p в любой степени, а z_i на p не делится. Имеем $f(z_j/p^l) = B_{1j}/p^l z_1 + \cdots + B_{ij}/p^l z_i + \cdots + B_{nj}/p^l z_n \in A$. Отсюда $f(z_j/p^l) = \sum_{r=1}^{n} \alpha_{lr} z_r + \sum_{r=1}^{k} \beta_{lr} y_r$, где $\alpha_{lr} \in L_r$ и β_{lr} – целые числа. Приравнивая коэффициенты при z_i в левой и правой частях, имеем:

$$B_{ij}/p^l = \alpha_{li} + \sum_{m=1}^{k} \beta_{lm} \gamma_{mi}.$$

Если $B_{ij} \neq 0$, то p-показатель левой части может быть сделан сколь угодно малым за счет выбора l, тогда как p-показатель правой части ограничен снизу.

В дальнейшем мы будем отождествлять эндоморфизмы и их матрицы, подразумевая всегда базис $\{z_i\}$.

Лемма 2. *Имеем* $x \in A$ *тогда и только тогда, когда*

$$x = (z_1, \dots, z_n)(\alpha + \Gamma^T \beta),$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$ *при* $\alpha_i \in L_i$ *и* $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)^T$ *при* $\beta_i \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Очевидно.

Лемма 3. *Пусть* B *– матрица эндоморфизма группы* A*. Тогда существуют такие матрицы* N *и* C*, что:*

1)

$$B\begin{pmatrix} \Gamma^T & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma^T & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N \\ C \end{pmatrix};$$

2) N *– целочисленная матрица размера* $k \times (n+k)$, C *– такая матрица размера* $n \times (n+k)$*, что* $C_{ij} \in L_i$.

Доказательство. Пусть $(x_1, \dots, x_n) = (z_1, \dots, z_n)B$. Тогда $x_i \in A$ и $(x_1, \dots, x_n)\Gamma^T \in A^k$ (образы дополнительных образующих). Пользуясь леммой 2 и собирая вместе полученные матричные тождества, получаем требуемое.

В дальнейшем, если матрица B удовлетворяет заключению леммы 3, то мы говорим, что матрица B обладает E-свойством и пишем $e(B)$.

Лемма 4. *Если* $n \times n$ *матрица* B *такова, что* $t(B)$ *и* $e(B)$*, то* B *есть матрица некоторого эндоморфизма* $f : A \to A$ *в базисе* $\{z_i\}$.

Доказательство. Определим эндоморфизм f делимой оболочки группы A как линейное отображение, имеющее матрицу B в базисе $\{z_i\}$. По лемме 2 образы z_i и дополнительных образующих будут лежать в A. Образы элементов qz_i при $q \in L_i$ будут лежать в A в силу $t(B)$. Таким образом, f является эндоморфизмом группы A, и лемма доказана.

Теорема 1.

$$\mathrm{End}(A) = \{B \in M_n(\mathbb{Q}) | t(B) \text{ и } e(B)\}.$$

Доказательство. Очевидно следует из лемм 1, 3, 4.

Теорема 2. *Если среди L_i нет делимых на простое число p, то*

$$\mathrm{End}(A)\otimes\mathbb{Z}_p=\{B\in M_n(\mathbb{Q})|t(B) \text{ и } \exists M\in M_{n+k}(\mathbb{Z}_p): \\ B\,(\,\Gamma^T\quad E\,)=(\,\Gamma^T\quad E\,)\,M\}.$$

Доказательство. Докажем, что левая часть содержится в правой. В самом деле, пусть $B\in\mathrm{End}(A)$, и $\lambda\in\mathbb{Z}_p$. Тогда очевидно $t(B\lambda)$ и

$$B\lambda\,(\,\Gamma^T\quad E\,)=(\,\Gamma^T\quad E\,)\,M\lambda,$$

и $M\lambda\in M_{n+k}(\mathbb{Z}_p)$. Обратно, пусть $t(B)$ и $B\,(\,\Gamma^T\quad E\,)=(\,\Gamma^T\quad E\,)\,M$, где $M\in M_{n+k}(\mathbb{Z}_p)$. Тогда $M=M'/m$, где $M'\in M_{n+k}(\mathbb{Z})$ и $m\in\mathbb{Z}$, m не делится на p. Обозначим $B'=mB$. Имеем $t(B')$ и $B'\,(\,\Gamma^T\quad E\,)=(\,\Gamma^T\quad E\,)\,M'$. Отсюда $B'\in\mathrm{End}(A)$ и $B=B'/m\in\mathrm{End}(A)\otimes\mathbb{Z}_p$.

Замечание. В дальнейшем нам понадобятся следующие утверждения: во-первых, если система линейных уравнений с рациональными коэффициентами разрешима над полем p-адических чисел, то она разрешима и над полем рациональных чисел; во-вторых, размерности пространств решений однородной системы линейных уравнений с рациональными коэффициентами над полями рациональных и p-адических чисел совпадают. Эти утверждения следуют из известных свойств ранга матриц рассматриваемых систем.

Обозначим $V=\{M\in M_{n+k}(\mathbb{Z}_p)|\exists B\in M_n(\mathbb{Q}):t(B) \text{ и } B(\Gamma^T E)=(\Gamma^T E)M\}$; это пересечение $M_{n+k}(\mathbb{Z}_p)$ и векторного пространства над $\mathbb{Q}$, т.е. свободный $\mathbb{Z}_p$-модуль; обозначим также $\bar V=\{M\in M_{n+k}(\bar{\mathbb{Z}}_p)|\exists B\in M_n(\bar{\mathbb{Q}}_p):t(B) \text{ и } B(\Gamma^T E)=(\Gamma^T E)M\}$.

Лемма 5. *Любой $\mathbb{Z}_p$-базис V будет $\bar{\mathbb{Z}}_p$-базисом $\bar V$.*

Доказательство. Пусть $e_1,\ldots,e_m$ – $\mathbb{Z}_p$-базис V. Следовательно, $\{e_i\}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, а по замечанию и над $\bar{\mathbb{Q}}_p$. Более того, по тому же замечанию ранг $\bar V$ над $\bar{\mathbb{Z}}_p$ равен рангу V над $\mathbb{Z}_p$. Отсюда видно, что всякий элемент $\bar V$ представляется в виде линейной комбинации e_i с коэффициентами из $\bar{\mathbb{Q}}_p$. Пусть $x\in\bar V$ и $x=\sum_{i=1}^m\alpha_ie_i$ при $\alpha_i\in\bar{\mathbb{Q}}_p$. Тогда $\alpha_i=\beta_i+\gamma_i$ при $\gamma_i\in\bar{\mathbb{Z}}_p$ и $\beta_i\in\mathbb{Q}$. Имеем $\sum_{i=1}^m\gamma_ie_i\in\bar V$, т.к. $e_i\in M_{n+k}(\mathbb{Z}_p)$ и, следовательно, $\gamma_ie_i\in M_{n+k}(\bar{\mathbb{Z}}_p)$ (принадлежность соответствующему векторному пространству очевидна). Тогда $\sum_{i=1}^m\beta_ie_i\in\bar V$, но $\sum_{i=1}^{m} \beta_i e_i \in M_{n+k}(\mathbb{Q})$, следовательно, по замечанию в условии “$\exists B \in M_n(\bar{\mathbb{Q}}_p)$” найдется B даже из $M_n(\mathbb{Q})$, а это значит, что $\sum_{i=1}^{m} \beta_i e_i \in V$. Отсюда следует, что $\beta_i \in \mathbb{Z}_p$, т.к. $\{e_i\}$ – базис $\mathbb{Z}_p$-модуля V. Итак, $\{e_i\}$ – базис $\bar{\mathbb{Z}}_p$-модуля $\bar{V}$.

Теорема 3. *Если среди L_i нет делимых на простое число p, то*

$$\mathrm{End}(A) \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p = \{B \in M_n(\bar{\mathbb{Q}}_p) | t(B) \text{ и } \exists M \in M_{n+k}(\bar{\mathbb{Z}}_p) : \\ B\,(\,\Gamma^T \quad E\,) = (\,\Gamma^T \quad E\,)\,M\}.$$

Доказательство. Докажем сначала, что левая часть содержится в правой. Мы будем говорить, что матрице M соответствует матрица B, и наоборот, если $B\,(\,\Gamma^T \quad E\,) = (\,\Gamma^T \quad E\,)\,M$. Заметим, что матрица B определяется матрицей M однозначно (матрица B есть последние n столбцов матрицы $(\,\Gamma^T \quad E\,)\,M$). Итак, если матрице B соответствует матрица M, то матрице $B\lambda$ соответствует матрица $M\lambda$ $(\lambda \in \bar{\mathbb{Z}}_p)$. Но $M\lambda \in M_{n+k}(\bar{\mathbb{Z}}_p)$, если $M \in M_{n+k}(\mathbb{Z}_p)$. Что касается свойства $t(B\lambda)$, то это очевидно.

Теперь докажем обратное включение. Пусть $B \in M_n(\bar{\mathbb{Q}}_p)$, $t(B)$, и ей соответствует матрица $M \in M_{n+k}(\bar{\mathbb{Z}}_p)$. Пусть $\{e_i\}$ – базис V. Тогда $M \in \bar{V}$, следовательно, по лемме 5 имеем $M = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i$, где $\alpha_i \in \bar{\mathbb{Z}}_p$ и каждому e_i соответствует матрица B_i из $\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Z}_p$ (по теореме 2). Таким образом, матрице M соответствует матрица $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i B_i \in \mathrm{End}(A) \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$, но по замечанию $B = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i B_i$.

Теорема 4. *Пусть C – матрица над $\mathbb{Q}$ размера $n \times n$, столбцы которой суть базис $\mathbb{Z}_p$-модуля, порожденного столбцами $(\Gamma^T E)$. Тогда*

$$\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Z}_p = \{B \in M_n(\mathbb{Q}) | t(B) \text{ и } \exists M \in M_{n \times (n+k)}(\mathbb{Z}_p) : \\ B\,(\,\Gamma^T \quad E\,) = CM\}.$$

Доказательство. Утверждение теоремы следует из равенства

$$\{(\,\Gamma^T \quad E\,)\,M | M \in M_{n+k}(\mathbb{Z}_p)\} = \{CM | M \in M_{n \times (n+k)}(\mathbb{Z}_p)\}.$$

Теорема 5. *Пусть C – та же, что и в теореме 4. Тогда*

$$\mathrm{End}(A) \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p = \{B \in M_n(\bar{\mathbb{Q}}_p) | t(B) \text{ и } \\ \exists M \in M_{n \times (n+k)}(\bar{\mathbb{Z}}_p) : B\,(\,\Gamma^T \quad E\,) = CM\}.$$

Доказательство. Достаточно показать, что столбцы C будут базисом $\bar{\mathbb{Z}}_p$-модуля, порожденного столбцами $(\Gamma^T \quad E)$. Линейная независимость столбцов C над $\bar{\mathbb{Q}}_p$ следует из замечания. Обозначим через W группу, порожденную столбцами матрицы $(\Gamma^T \quad E)$. Тогда $\mathbb{Z}_p$-модуль, порожденный столбцами этой матрицы, будет равен $W \otimes \mathbb{Z}_p$, и аналогично для $\bar{\mathbb{Z}}_p$. Так как матрица $(\Gamma^T \quad E)$ имеет полный ранг над $\mathbb{Q}$ и $\bar{\mathbb{Q}}_p$, то размерности пространств $W \otimes \mathbb{Q}$ и $W \otimes \bar{\mathbb{Q}}_p$, порожденных столбцами $(\Gamma^T \quad E)$ над $\mathbb{Q}$ и $\bar{\mathbb{Q}}_p$ совпадают. Отсюда следует, что всякий элемент $W \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$ представляется как линейная комбинация столбцов C с коэффициентами из $\bar{\mathbb{Q}}_p$. Обозначим C_i столбцы матрицы C, и пусть $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i C_i \in W \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$ при $\alpha_i \in \bar{\mathbb{Q}}_p$. Тогда $\alpha_i = \beta_i + \gamma_i$, где $\beta_i \in \mathbb{Q}$ и $\gamma_i \in \bar{\mathbb{Z}}_p$. Имеем $\sum_{i=1}^n \gamma_i C_i \in W \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$, т.к. $C_i \in W \otimes \mathbb{Z}_p$. Тогда $\sum_{i=1}^n \beta_i C_i \in W \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$, но $\sum_{i=1}^n \beta_i C_i \in W \otimes \mathbb{Q}$, так что $\sum_{i=1}^n \beta_i C_i \in W \otimes \mathbb{Z}_p = W \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p \cap W \otimes \mathbb{Q}$ (см. лемму Дерри (лемма 93.2 в книге [1])). Но C_i – базис $W \otimes \mathbb{Z}_p$, следовательно, $\beta_i \in \mathbb{Z}_p$.

Лемма 6. *Пусть C – матрица из теоремы 4. Тогда найдется такая матрица N, обратимая в $M_{n+k}(\mathbb{Z}_p)$, что $(\Gamma^T \quad E)N = (C \quad 0)$.*

Доказательство. Умножение на N можно рассматривать как преобразование столбцов, поэтому достаточно указать обратимое преобразование столбцов, переводящее $(\Gamma^T \quad E)$ в $(C \quad 0)$. Это преобразование можно выбрать так: ставим выбранные столбцы на первые места и затем вычитаем их из оставшихся столбцов с подходящими коэффициентами, чтобы остальные столбцы обнулились.

Теорема 6. *Найдется такая обратимая матрица $C \in M_n(\mathbb{Q})$, что*

$$\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Z}_p = \{B \in M_n(\mathbb{Q}) | t(B) \text{ и } \exists M \in M_n(\mathbb{Z}_p) : BC = CM\}.$$

Доказательство. Пусть C – матрица из теоремы 4. Тогда имеем цепочку равносильных утверждений:

1) $\exists M \in M_{n\times(n+k)}(\mathbb{Z}_p) : B(\Gamma^T \quad E) = B(C \quad 0)N^{-1} = CM$;
2) $\exists M \in M_{n\times(n+k)}(\mathbb{Z}_p) : B(C \quad 0) = CMN$;
3) $\exists M \in M_{n\times(n+k)}(\mathbb{Z}_p) : B(C \quad 0) = CM$;
4) $\exists M \in M_n(\mathbb{Z}_p) : BC = CM$.

Здесь N берется из леммы 6.

3. Сведение P/JP к $P \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p/J(P \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p)$

Обозначим $\Lambda = \mathrm{End}(A)$, S – множество тех простых чисел, на которые делятся не все элементы группы A.

Лемма 7.
$$\Lambda/J(\Lambda) \cong \bigoplus_{p \in S} \mathbb{F}_p \otimes (\Lambda/J(\Lambda)).$$

Доказательство. Обозначим $u = \prod_{p \in S} p$. Тогда $u \in J(\Lambda)$ (см. [2], следствие 9.3 (b)). Следовательно, $u\Lambda/J(\Lambda) = 0$. Отсюда $\Lambda/J(\Lambda) \cong \bigoplus_{p \in S} \Lambda_p$, где $\Lambda_p = \{x \in \Lambda/J(\Lambda) | px = 0\}$. Итак, имеем

$$\mathbb{F}_q \otimes (\Lambda/J(\Lambda)) \cong \mathbb{F}_q \otimes \bigoplus_{p \in S} \Lambda_p \cong \bigoplus_{p \in S} \mathbb{F}_q \otimes \Lambda_p \cong \mathbb{F}_q \otimes \Lambda_q \cong \Lambda_q.$$

Замечание 1. Из изоморфизма $\mathbb{F}_p \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p \cong \mathbb{F}_p$ следует, что

$$\mathbb{F}_p \otimes (\Lambda/J(\Lambda)) \cong \mathbb{F}_p \otimes (\Lambda/J(\Lambda)) \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$$

Замечание 2. Из того, что $\bar{\mathbb{Z}}_p$ – плоский $\mathbb{Z}$-модуль, следует, что

$$(\Lambda/J(\Lambda)) \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p \cong (\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p)/(J(\Lambda) \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p)$$

Лемма 8.

$$(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p/(J(\Lambda) \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p)) \otimes_\Lambda P \cong (\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p/(J(\Lambda) \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p)) \otimes_{\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p} P \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p.$$

Доказательство. Данная лемма следует из [4, Гл. II, §6, Случай 2].

Далее мы фиксируем $p \in S$.

Лемма 9.
$$J(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p) \subset J(\Lambda) \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$$

Доказательство. Заметим сначала, что, коль скоро $u = \prod_{q \in S} q \in J(\Lambda)$, то для любого простого модуля M над Λ существует и единственно простое число $q \in S$ такое, что $qM = 0$. Теперь пусть $x \in J(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p)$, т.е. x аннулирует все простые модули над $\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$. Рассмотрим $u' = \prod_{q \in S, q \neq p} q$ и $x' = u'x$. Тогда x' аннулирует все простые модули над Λ. В самом деле, если простой модуль аннулируется простым числом, отличным от p, то он аннулируется множителем u'. Если же он аннулируется простым числом p, то он является модулем над $\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$, очевидно простым, т.к. любой его подмодуль над этим кольцом также будет подмодулем над Λ, и следовательно, аннулируется элементом x. В итоге $x' \in J(\Lambda)$ и $x = x'/u' \in J(\Lambda) \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что z_i расположены так, что при $i < j$ выполнено $t(L_i) \not> t(L_j)$, и все делимые на p расположены в конце списка. Кроме того, поскольку все фигурирующие в этом параграфе кольца суть подкольца колец матриц над соответствующими полями, мы будем изображать элементы колец блочными матрицами, причем деление на блоки соответствует делению множества $\{z_i\}$ на неделимых и делимых на p. Кроме того, разложение единицы $E = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ в кольце индуцирует прямое разложение любого модуля над этим кольцом, рассматриваемого как абелева группа, в прямую сумму. В соответствии с этим разложением элементы модуля выписываются в виде столбца.

Лемма 10. *Пусть есть редуцированное кольцо конечного ранга без кручения над $\bar{\mathbb{Z}}_p$. Тогда p принадлежит радикалу этого кольца.*

Доказательство. Доказательство почти дословно повторяет доказательство следствия 9.3 (b) из книги [2]. Единственное отличие состоит в том, что делимая оболочка этого кольца будет конечномерной алгеброй не над $\mathbb{Q}$, а над $\bar{\mathbb{Q}}_p$.

Лемма 11. *Любой простой $\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$-модуль аннулируется $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$, если этот модуль не делим на p, и $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, если делим.*

Доказательство. Докажем сначала, что любой простой $\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$-модуль аннулируется $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ либо $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$. Пусть M – простой $\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$-модуль. Рассмотрим Z – множество элементов из M вида $\begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix}$ – подмодуль M. Так как M – прост, то либо $Z = 0$, тогда M аннулируется $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$, либо $Z = M$, тогда M аннулируется $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Так как M – простой модуль, он либо аннулируется простым числом p, либо делим на p. Если M аннулируется p, то делимый на p эндоморфизм $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ аннулирует его.

Если же M делим на p, то он аннулируется либо $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, либо $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$. Если $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} M = 0$, то $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M = M$, следовательно, для любого $m \in M$, отличного от 0, имеем $M = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M = \{\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} m : \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} \in \Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p\} = \{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} m : \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p\}$. Таким образом, M – простой модуль над кольцом K, состоящим из матриц вида $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ из $\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$. Но это кольцо редуцировано, и следовательно, $p \in J(K)$ (по лемме 10), а значит, $pM = 0$ – противоречие с делимостью M на p. Итак, если M делим на p, то $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M = 0$.

Теорема 7. *Имеет место изоморфизм колец*

$$\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p / J(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p) \cong M_{s_1}(\bar{\mathbb{Q}}_p) \times \cdots \times M_{s_l}(\bar{\mathbb{Q}}_p) \times \Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p / (J(\Lambda) \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p).$$

Доказательство. Докажем сначала, что $\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p / J(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p) \cong (J(\Lambda) \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p)/J(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p) \times \Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p/(J(\Lambda) \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p)$. Для этого достаточно предъявить центральный идемпотент, порождающий $(J(\Lambda) \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p)/J(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p)$. Докажем, что таким идемпотентом будет $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} + J(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p)$.

Рассмотрим элемент $a = \left(\prod_{q \in S, q \neq p} q\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$. Он лежит в $J(\Lambda)$, так как аннулирует все простые Λ-модули по соображениям, аналогичным приведенным в доказательстве леммы 9. Таким образом, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \in J(\Lambda) \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$.

Докажем, что этот идемпотент центральный по модулю $J(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p)$. В самом деле, имеем $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$. Имеем $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \in J(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p)$, так как $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ аннулирует любой простой модуль над $\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$ по лемме 11.

Далее докажем, что этот идемпотент порождает $(J(\Lambda) \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p)/J(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p)$. Достаточно доказать, что $J(\Lambda) \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p = \Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} + J(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p)$. Пусть $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} \in J(\Lambda) \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$. Тогда $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \in J(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p)$, и нам осталось доказать, что из $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J(\Lambda) \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$ следует $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p)$. Пусть M – простой $\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$-модуль. Тогда либо $pM = 0$, либо $pM = M$. Если $pM = 0$, то M прост как Λ-модуль, так как всякий его Λ-подмодуль также аннулируется простым числом p, и следовательно, является $\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$-модулем. Отсюда видно, что $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M = 0$, так как $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J(\Lambda) \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$. Если же $pM = M$, то $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M = 0$ по лемме 11, и мы имеем $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M = 0$. В итоге $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p)$.

Для доказательства теоремы осталось доказать, что $J(\Lambda) \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p / J(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p) \cong M_{s_1}(\bar{\mathbb{Q}}_p) \times \cdots \times M_{s_l}(\bar{\mathbb{Q}}_p)$. Обозначим через $\widetilde{\Lambda}$ кольцо, состоящее из матриц вида $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, лежащих в $J(\Lambda) \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$. По уже доказанному имеем $\widetilde{\Lambda} + J(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p) = J(\Lambda) \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$. Тогда $J(\Lambda) \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p / J(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p) = (\widetilde{\Lambda} + J(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p))/J(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p) \cong \widetilde{\Lambda}/(\widetilde{\Lambda} \cap J(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p))$. Докажем, что $\widetilde{\Lambda} \cap J(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p) = J(\widetilde{\Lambda})$.

Ясно, что $J(\widetilde{\Lambda}) \subset \widetilde{\Lambda} \cap J(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p)$.

Пусть теперь $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \widetilde{\Lambda} \cap J(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p)$ и M – простой $\widetilde{\Lambda}$-модуль.

Тогда $\begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix}$ – простой модуль над $J(\Lambda)\otimes\bar{\mathbb{Z}}_p$, который не аннулируется $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ и, следовательно, делим на p, причем деление на p однозначно (множество элементов, которых аннулирует p, составляет подмодуль). Таким образом, это – модуль над $\Lambda\otimes\bar{\mathbb{Z}}_p$ $(\prod_{q\in S} q \in J(\Lambda))$, и следовательно, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ его аннулирует. Итак, $\widetilde{\Lambda}\cap J(\Lambda\otimes\bar{\mathbb{Z}}_p)\subset J(\widetilde{\Lambda})$.

Что касается $\widetilde{\Lambda}$, то это – кольцо блочно-треугольных матриц (обладающих T-свойством) над $\bar{\mathbb{Q}}_p$. В кольце $\Lambda\otimes\bar{\mathbb{Z}}_p$ на эти элементы нет никаких ограничений, кроме проистекающих из T-свойства, и $J(\Lambda)\supset\left(\prod_{q\in S} q\right)\Lambda$, так что и в $J(\Lambda)\otimes\bar{\mathbb{Z}}_p$ на эти элементы нет никаких ограничений, кроме проистекающих из T-свойства.

Простые модули над $\widetilde{\Lambda}$ – это в точности модули над одним из диагональных блоков, так что радикал состоит из матриц, в которых диагональные блоки равны нулю, и фактор по радикалу – произведение диагональных блоков.

Теорема 8. *Пусть P – проективный модуль над Λ. Имеем*

$$P/JP\cong\bigoplus_{p\in S}\mathbb{F}_p\otimes(P\otimes\bar{\mathbb{Z}}_p)/J(P\otimes\bar{\mathbb{Z}}_p),$$

где последний радикал берется над $\Lambda\otimes\bar{\mathbb{Z}}_p$.

Доказательство. Пользуясь предыдущими замечаниями, леммами и теоремами этого параграфа, имеем

$$P/JP\cong\Lambda/J(\Lambda)\otimes_\Lambda P\cong\bigoplus_{p\in S}\mathbb{F}_p\otimes\Lambda/J(\Lambda)\otimes_\Lambda P$$

$$\cong\bigoplus_{p\in S}\mathbb{F}_p\otimes\Lambda/J(\Lambda)\otimes\bar{\mathbb{Z}}_p\otimes_\Lambda P$$

$$\cong\bigoplus_{p\in S}\mathbb{F}_p\otimes(\Lambda\otimes\bar{\mathbb{Z}}_p/J(\Lambda)\otimes\bar{\mathbb{Z}}_p)\otimes_\Lambda P$$

$$\cong\bigoplus_{p\in S}\mathbb{F}_p\otimes(\Lambda\otimes\bar{\mathbb{Z}}_p/J(\Lambda)\otimes\bar{\mathbb{Z}}_p)\otimes_{\Lambda\otimes\bar{\mathbb{Z}}_p}(P\otimes\bar{\mathbb{Z}}_p)$$

$$\cong \bigoplus_{p\in S} \mathbb{F}_p \otimes (\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p / J(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p)) \otimes_{\Lambda\otimes\bar{\mathbb{Z}}_p} (P \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p)$$

$$\cong \bigoplus_{p\in S} \mathbb{F}_p \otimes (P \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p)/J(P \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p).$$

4. Образ K_0^+ при факторизации по радикалу

Обозначим через $\widetilde{K}_0^+$ полугруппу классов изоморфизма прямых слагаемых прямых сумм нескольких экземпляров группы A (операция в этой полугруппе – прямая сумма).

Следующая лемма позволяет перевести разговор о проективных модулях над кольцом эндоморфизмов на язык прямых разложений абелевых групп.

Лемма 12. *Полугруппа $\widetilde{K}_0^+$ изоморфна $K_0^+(\Lambda)$.*

Доказательство. Построим два взаимно-обратных гомоморфизма $\varphi : K_0^+(\Lambda) \to \widetilde{K}_0^+$ и $\psi : \widetilde{K}_0^+ \to K_0^+(\Lambda)$.

Пусть дан конечно порожденный проективный Λ-модуль P. Тогда существуют гомоморфизмы $i : P \to \Lambda\oplus\cdots\oplus\Lambda$ и $\pi : \Lambda\oplus\cdots\oplus\Lambda \to P$ такие, что $\pi i = \mathrm{id}_P$ и $i\pi \in \mathrm{End}_\Lambda(\Lambda\oplus\cdots\oplus\Lambda) = M_n(\Lambda^{op})$ – идемпотентная матрица. Тогда $(i\pi)^T \in M_n(\Lambda)$ также будет идемпотентной матрицей. Поэтому существует группа B такая, что имеются гомоморфизмы $j : B \to A \oplus \cdots \oplus A$ и $\sigma : A \oplus \cdots \oplus A \to B$ с соотношениями $\sigma j = \mathrm{id}_B$ и $j\sigma = (i\pi)^T$. Класс изоморфизма группы B мы и объявим $\varphi(P)$. Докажем корректность определения φ. Пусть $P \cong Q$ – проективные Λ-модули. Рассмотрим следующие коммутативные диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
P \oplus R = \Lambda \oplus \cdots \oplus \Lambda \arrow[r, "\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}"] \arrow[d, "(1\quad 0)=\pi"'] & \Lambda \oplus \cdots \oplus \Lambda = Q \oplus T \arrow[d, "\pi'=(1\quad 0)"] \\
P \arrow[r, "\alpha"] & Q
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
P \oplus R = \Lambda \oplus \cdots \oplus \Lambda \arrow[r, "\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}"] & \Lambda \oplus \cdots \oplus \Lambda = Q \oplus T \\
P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[u, "i=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}"] & Q \arrow[u, "i'=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
P \oplus R = \Lambda \oplus \cdots \oplus \Lambda \arrow[d, "\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} = \pi"'] & \Lambda \oplus \cdots \oplus \Lambda = Q \oplus T \arrow[l, "\begin{pmatrix}\bar\alpha & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}"'] \arrow[d, "\pi' = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}"] \\
P & Q \arrow[l, "\bar\alpha"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
P \oplus R = \Lambda \oplus \cdots \oplus \Lambda & \Lambda \oplus \cdots \oplus \Lambda = Q \oplus T \arrow[l, "\begin{pmatrix}\bar\alpha & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}"'] \\
P \arrow[u, "i = \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}"] & Q \arrow[l, "\bar\alpha"'] \arrow[u, "i' = \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
B \oplus B' = A \oplus \cdots \oplus A \arrow[r, "C^T"] \arrow[d, "\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} = \sigma"'] & A \oplus \cdots \oplus A = D \oplus D' \arrow[d, "\sigma' = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}"] \\
B \arrow[r, "\beta"] & D
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
B \oplus B' = A \oplus \cdots \oplus A \arrow[r, "C^T"] & A \oplus \cdots \oplus A = D \oplus D' \\
B \arrow[r, "\beta"] \arrow[u, "j = \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}"] & D \arrow[u, "j' = \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
B \oplus B' = A \oplus \cdots \oplus A \arrow[d, "\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} = \sigma"'] & A \oplus \cdots \oplus A = D \oplus D' \arrow[l, "\bar C^T"'] \arrow[d, "\sigma' = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}"] \\
B & D \arrow[l, "\bar\beta"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
B \oplus B' = A \oplus \cdots \oplus A & A \oplus \cdots \oplus A = D \oplus D' \arrow[l, "\bar C^T"'] \\
B \arrow[u, "j = \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}"] & D \arrow[l, "\bar\beta"'] \arrow[u, "j' = \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}"']
\end{tikzcd} .$$

Здесь $\bar\alpha = \alpha^{-1}$ – изоморфизм, обратный к изоморфизму α, и матрицы гомоморфизмов выписаны в соответствии с разложениями на два прямых слагаемых ($P \oplus R$, а не $\Lambda \oplus \cdots \oplus \Lambda$, и так далее).

Пусть $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} : P\oplus R \to Q\oplus T$, $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = C \in M_n(\Lambda^{op}) = \mathrm{End}_\Lambda(\Lambda\oplus\cdots\oplus\Lambda)$, $\begin{pmatrix}\bar\alpha & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \bar C$. Тогда $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, то есть $Ci\pi = C$, следовательно $(i\pi)^T C^T$, то есть $j\sigma C^T = C^T$. Таким образом, если $C^T = \begin{pmatrix}\beta & \gamma\\ \delta & \epsilon\end{pmatrix} : D\oplus D' \to B\oplus B'$, то $C^T = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta & \gamma\\ \delta & \epsilon\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta & \gamma\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, и значит, $\delta = 0$ и $\epsilon = 0$. Аналогично из $\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ имеем $\gamma = 0$. Так же, как и выше, имеем $\bar C^T = \begin{pmatrix}\bar\beta & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Докажем теперь, что $\beta\bar\beta = \mathrm{id}_B$. Заметим сначала, что $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar\alpha & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = i'\pi'$ и $\begin{pmatrix}\bar\alpha & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = i\pi$. Имеем:

$$\begin{aligned}\beta\bar\beta\sigma = \beta\bar\beta\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} &= \beta\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar\beta & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar\beta & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} C^T\bar C^T\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}(\bar C C)^T = \sigma(i\pi)^T = \sigma j\sigma = \sigma.\end{aligned}$$

Учитывая эпиморфность σ, получаем требуемое. Аналогично $\bar\beta\beta = \mathrm{id}_D$, и корректность доказана. Теперь построим обратное отображение ψ. Пусть B – прямое слагаемое $A\oplus\cdots\oplus A$. Тогда имеются гомоморфизмы $j : B \to A\oplus\cdots\oplus A$ и $\sigma : A\oplus\cdots\oplus A \to B$ такие, что $\sigma j = \mathrm{id}_B$, $j\sigma$ – идемпотентная матрица из $End(A\oplus\cdots\oplus A) = M_n(\Lambda)$. Найдем такую идемпотентную матрицу $m \in M_n(\Lambda^{op})$, что $m^T = j\sigma$. В силу идемпотентности m найдется такой модуль P с гомоморфизмами $i : P \to \Lambda\oplus\cdots\oplus\Lambda$ и $\pi : \Lambda\oplus\cdots\oplus\Lambda \to P$ такими, что $\pi i = \mathrm{id}_P$ и $i\pi = m$. Класс изоморфизма этого модуля мы и примем за $\psi(B)$. Корректность проверяется так же, как и для φ, но в обратном порядке. Тот факт, что φ и ψ взаимно-обратны, как и их гомоморфность, очевиден.

Обозначим $\bar K_0^+$ полугруппу классов изоморфизма прямых слагаемых прямых сумм нескольких экземпляров A в категории $\bar M^p$.

Операция в полугруппе – прямая сумма.

Лемма 13. *Полугруппа* $K_0^+(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p)$ *изоморфна* $\bar{K}_0^+$.

Доказательство. Доказательство вполне аналогично доказательству предыдущей леммы. В этом случае мы строим взаимно обратные изоморфизмы $\widetilde{\varphi} : K_0^+(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p) \to \bar{K}_0^+$ и $\widetilde{\psi} : \bar{K}_0^+ \to K_0^+(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p)$.

Замечание. Введенные в доказательствах последних двух лемм обозначения будут использованы в дальнейшем.

Обозначим функтор вложения категории абелевых групп без кручения конечного ранга в категорию $\bar{M}^p$ через F_p.

Лемма 14. *Соответствие* $\widetilde{\psi} F_p \varphi$ *сопоставляет классу изоморфизма проективного модуля* P *класс изоморфизма модуля* $P \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$.

Доказательство. Пусть P – проективный Λ-модуль с отображениями $i : P \to \Lambda \oplus \cdots \oplus \Lambda$ и $\pi : \Lambda \oplus \cdots \oplus \Lambda \to P$, так что $\pi i = \mathrm{id}_P$ и $i\pi$ – идемпотентная матрица. Гомоморфизм φ сопоставляет ему группу B такую, что существуют отображения $j : B \to A \oplus \cdots \oplus A$ и $\sigma : A \oplus \cdots \oplus A \to B$, причем $\sigma j = \mathrm{id}_B$ и $j\sigma = (i\pi)^T$. Функтор F_p сопоставляет группе B объект $F_p(B)$, причем $F_p(j) = j \otimes 1$ и $F_p(\sigma) = \sigma \otimes 1$. Рассмотрим $\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$-модуль $P \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$ и гомоморфизмы $i \otimes 1 : P \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p \to (\Lambda \oplus \cdots \oplus \Lambda) \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p = \Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p \oplus \cdots \oplus \Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$ и $\pi \otimes 1 : (\Lambda \oplus \cdots \oplus \Lambda) \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p \to P \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$. Поскольку $(\pi \otimes 1)(i \otimes 1) = \mathrm{id}_{P \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p}$ и $((i \otimes 1)(\pi \otimes 1))^T = (j \otimes 1)(\sigma \otimes 1)$, то $\widetilde{\psi}$ сопоставляет объекту $F_p(B)$ модуль $P \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$.

Пусть $A \cong n_{p1} A_{p1} \oplus \cdots \oplus n_{pk_p} A_{pk_p}$ в категории $\bar{M}_p$, где A_{pj} – неразложимые попарно не изоморфные объекты. Пусть также v_{pi} – вектор A_{pi} (см. [3]).

Обозначим

$$\Gamma^+ = \{(d_{pi}) | d_{pi} \in \mathbb{N}_0, p \in S, 1 \leqslant i \leqslant k_p, \sum_{i=1}^{k_p} d_{pi} v_{pi} \text{ не зависит от } p\}$$

.

Лемма 15. *Полугруппа* $\widetilde{K}_0^+$ *изоморфна* Γ^+.

Доказательство. Лемма немедленно следует из теоремы 9 в работе [3]. Приведем соответствие обозначений и некоторые дополнительные замечания. $S_0 = \{L_1, \dots, L_n\}$, $P = S$, $S_p = \{A_{p1}, \dots, A_{pk_p}\}$. Тогда $M(\Theta) = \widetilde{K}_0^+$. Действительно, $M(\Theta) \supset \widetilde{K}_0^+$ – очевидно. Пусть $B \in M(\Theta)$. Тогда $d(B) = (\beta_1, \dots, \beta_s)$, и найдется такое m, что $d(mA) = (\beta'_1, \dots, \beta'_s)$, где $\beta'_i > \beta_i$. Следовательно, $mA = B' \oplus C$, где $d(B') = d(B)$ и значит, B и B' принадлежат одному роду и, следовательно, изоморфны (см. книгу [2], теорема 7.16). Таким образом, $M(\Theta) \subset \widetilde{K}_0^+$.

Коэффициенты d_l^0 можно не писать – они однозначно определяются остальными, так как вектора v_{0l} – единичные.

Одному и тому же вектору соответствуют группы одного рода, которые в нашем случае будут изоморфны – см. выше.

Лемма 16. *Кольцо эндоморфизмов объекта A_{pi} в категории $\bar{M}^p$ локально.*

Доказательство. В силу теоремы 6 работы [3] A_{pi} можно считать почти вполне разложимой группой. Обозначим $R = \mathrm{End}_{\bar{M}^p}(A_{pi})$. Тогда либо $R = \bar{\mathbb{Q}}_p$, и тогда все ясно, либо R редуцировано (в силу неразложимости A_{pi}). Рассмотрим R/pR. Так как R редуцировано, то $J(R) \supset pR$, и следовательно, фактор по радикалу у R/pR будет такой же, как и у R. Но R/pR – конечномерная алгебра над конечным полем из p элементов, в которой нет нетривиальных идемпотентов (любой идемпотент подымается по модулю pR до идемпотента по модулю p^lR для любого натурального l, у полученной последовательности идемпотентов есть предел в p-адической топологии в силу полноты R, который будет нетривиальным идемпотентом в R – чего не бывает, так как A_{pi} неразложим). Таким образом, R/pR – локальна. Следовательно, ее фактор по радикалу есть тело, а значит, и у R фактор по радикалу есть тело.

Лемма 17. *Обозначим $P_{pi} = \widetilde{\psi}(A_{pi})$. Тогда $P_{pi}/J(P_{pi}) \cong T_{pi}^{n_{pi}}$, где T_{pi} – тело.*

Доказательство. Найдутся такие гомоморфизмы $j : A_{pi} \to n_{p1}A_{p1} \oplus \dots \oplus n_{pk_p}A_{pk_p}$ и $\sigma : n_{p1}A_{p1} \oplus \dots \oplus n_{pk_p}A_{pk_p} \to A_{pi}$, что $\sigma j = \mathrm{id}_{A_{pi}}$ и $j\sigma = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \mathrm{id}_{A_{pi}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$. Тогда найдут-

ся $i : P_{pi} \to \Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$ и $\pi : \Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p \to P_{pi}$ для P_{pi} такие, что $\pi i = \mathrm{id}_{P_{pi}}$ и $\pi(x) = xj\sigma$. Это значит, что $P_{pi} = \Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p j\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \mathrm{Hom}(A_{pi}, A_{p1}) & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \mathrm{Hom}(A_{pi}, A_{pi}) & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \mathrm{Hom}(A_{pi}, A_{pi}) & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \mathrm{Hom}(A_{pi}, A_{pk_p}) & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $J(P_{pi}) = J(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p) P_{pi} =$
$J(\Lambda \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p) j\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \mathrm{Hom}(A_{pi}, A_{p1}) & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & J(\mathrm{Hom}(A_{pi}, A_{pi})) & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & J(\mathrm{Hom}(A_{pi}, A_{pi})) & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \mathrm{Hom}(A_{pi}, A_{pk_p}) & \dots & 0 \end{pmatrix}$. В итоге $P_{pi}/J(P_{pi}) = T_{pi}^{n_{pi}}$, где $T_{pi} = \mathrm{Hom}(A_{pi}, A_{pi})/J(\mathrm{Hom}(A_{pi}, A_{pi}))$ – тело по предыдущей лемме.

Предыдущие леммы дают нам возможность отождествлять $K_0^+(\Lambda)$ и Γ^+. Поэтому заключительная теорема вычисляет отображение факторизации по радикалу именно в терминах Γ^+.

Назовем "плохими" такие пары индексов у d_{pi}, что v_{pi} имеет всего одну ненулевую компоненту, равную 1, причем эта 1 стоит на месте, отвечающем делимой на p группе L_j. Все остальные пары индексов назовем "хорошими".

Теорема 9. *Полугруппа $K_0^+(\Lambda/J(\Lambda))$ изоморфна $\mathbb{N}_0^s$, где s – число хороших пар индексов. Если конечно порожденному проективному модулю P над Λ соответствует набор $(d_{pi}) \in \Gamma^+$, то отображение факторизации по радикалу переводит его в набор d_{pi} с хорошими парами индексов, т.е. это отображение соответствует вычеркиванию коэффициентов d_{pi} с плохими парами индексов.*

Доказательство. Если $\varphi(P) = B$, то группе B соответствует набор $(d_{pi}) \in \Gamma^+$. Тогда функтор F_p сопоставляет группе B объект $\bigoplus_i d_{pi} A_{pi}$. Гомоморфизм $\widetilde{\psi}$ сопоставляет этому объекту

$\bigoplus_i d_{pi} P_{pi}$, но по лемме 14 такое сопоставление дает $P \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p$, так что $P \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p \cong \bigoplus_i d_{pi} P_{pi}$. Итак,

$$P/JP \cong \bigoplus_p \mathbb{F}_p \otimes (P \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p)/J(P \otimes \bar{\mathbb{Z}}_p)$$

$$\cong \bigoplus_{i,p} \mathbb{F}_p \otimes d_{pi} P_{pi}/J(P_{pi}) \cong \widetilde{\bigoplus}_{p,i} d_{pi} T_{pi}^{n_{pi}},$$

где волна над прямой суммой означает выкидывание тех слагаемых, где T_{pi} делимо на p. В остальных случаях $pT_{pi} = 0$, и тензорное умножение на $\mathbb{F}_p$ можно опустить.

5. О возможной неразложимости

Фиксируем простое число p. В этом параграфе мы исследуем вопрос о том, для каких наборов типов групп L_i существует почти вполне разложимая группа A со всего одной дополнительной образующей, неразложимая как объект $\bar{M}^p$ (в дальнейшем мы говорим просто “неразложима”, имея ввиду именно неразложимость как объект этой категории). Поскольку нас интересует неразложимость именно в категории $\bar{M}^p$, мы можем считать, что коэффициенты при z_i в дополнительной образующей – степени простого числа p. Также мы предполагаем, что группы L_i не делятся на p.

Лемма 18. *Если группа A со всего одной дополнительной образующей неразложима, то среди типов L_i нет одинаковых.*

Доказательство. Пусть $t(L_i) = t(L_j)$, $A = \langle L_1 z_1, \ldots, L_n z_n, \gamma_1 z_1 + \cdots + \gamma_n z_n \rangle$. Пусть для определенности p-показатель γ_i больше, чем у γ_j. Тогда $A = B \oplus C$, где $B = \langle L_1 z_1, \ldots, L_j(z_j + \gamma_i/\gamma_j z_i), \ldots, L_n z_n, \gamma_1 z_1 + \cdots + \gamma_j(z_j + \gamma_i/\gamma_j z_i) + \cdots + \gamma_n z_n \rangle$ и $C = \langle L_i z_i \rangle$.

Введем понятие графа несравнимостей. Вершинами этого графа служат типы L_i, и два типа соединены ребром, если они несравнимы.

Лемма 19. *Следующие условия равносильны:*

1) *граф несравнимостей связен;*

2) *не существует такого разбиения множества типов на два подмножества, чтобы каждый элемент первого был бы сравним с каждым элементом другого;*

3) *не существует такого разбиения множества типов на два подмножества, чтобы каждый элемент первого был бы больше каждого элемента другого.*

Доказательство. Равносильность 1 и 2, равно как и то, что из 2 следует 3, очевидно. Докажем, что из 3 следует 2 от противного. Пусть есть такое разбиение, что каждый элемент из одного подмножества сравним с каждым из другого. Мы будем представлять частично упорядоченное множество ориентированным графом. Пусть между выбранными подмножествами есть стрелки в обоих направлениях. Выберем одно из направлений и назовем его правильным, а другое неправильным. Тогда найдется элемент в одном из подмножеств, у которого есть стрелки как в правильном направлении, так и в неправильном. Переведем элементы на других концах неправильных стрелок в другое подмножество. После этой операции неправильных стрелок станет меньше (стрелки из переброшенных элементов будут исключительно в правильном направлении) и свойство разбиения сохранится (то, что каждый элемент одного подмножества сравним с каждым элементом другого). Поступая так несколько раз, уберем все неправильные стрелки и получим разбиение, в котором все стрелки между подмножествами идут в одну сторону, что запрещается в условии 3.

Лемма 20. *Если граф несравнимостей связен, то z_i можно расположить в таком порядке, что:*

1) *при $i < j$ тип L_i не больше типа L_j;*

2) *для любого i, кроме $i = n$, среди $z_{i+1}, \ldots, z_n$ найдется по крайней мере один элемент, тип которого не сравним с типом z_i.*

Доказательство. Будем строить такой порядок, пользуясь обратной индукцией (от больших номеров к меньшим). В качестве последнего можно взять любой максимум из типов $z_1, \ldots, z_n$. Если последние l типов уже расположены в требуемом порядке, то среди оставшихся найдется максимальный, несравнимый хотя бы с одним из уже поставленных на место (иначе существует такое разбиение типов на два множества, что каждый из одного сравним с каждым из другого, что противоречит связности графа несравнимостей). Этот максимум мы и ставим в начало формируемого списка (перед всеми, уже поставленными на место).

Теорема 10. *Если среди типов L_i нет повторяющихся и граф несравнимостей связен, то можно так выбрать дополнительную образующую y, что группа $A = \langle L_1z_1, \dots, L_nz_n, y\rangle$ будет неразложима.*

Доказательство. Будем считать, что z_i расположены в порядке, гарантируемом леммой 20. Возьмем в качестве дополнительной образующей $y = p^{-1}z_1 + \dots + p^{-n}z_n$ и рассмотрим произвольный эндоморфизм $f : A \to A$ с матрицей B. Тогда B – треугольная матрица в силу $t(B)$. $f(z_1) = B_{11}z_1 + \dots + B_{n1}z_n = h_{11}z_1 + \dots + h_{1n}z_n + \alpha_1 y, \dots, f(y) = p^{-1}f(z_1) + \dots + p^{-n}f(z_n) = h_{n+1,1}z_1 + \dots + h_{n+1,n}z_n + \alpha_{n+1}y$. Приравнивая коэффициенты при z_i в этих равенствах, имеем: $B_{11} = h_{11} + p^{-1}\alpha_1, \dots, B_{n1} = h_{1n} + p^{-n}\alpha_1, \dots, p^{-1}B_{11} = h_{n+1,1} + p^{-1}\alpha_{n+1}, p^{-1}B_{21} + p^{-2}B_{22} = h_{n+1,2} + p^{-2}\alpha_{n+1}, \dots, p^{-1}B_{n1} + p^{-2}B_{n2} + \dots + p^{-n}B_{nn} = h_{n+1,n} + p^{-n}\alpha_{n+1}$. Заметим, что порядок следования z_i таков, что в каждом столбце матрицы B ниже главной диагонали встречается 0, следовательно, минимальный p-показатель B_{ij} (при $i > j$) равен $\min\{0, j - i + 1\}$, откуда в силу соотношений, проистекающих из анализа $f(y)$, получаем, что B_{ii} сравнимо с α_{n+1} по модулю p, а это означает отсутствие нетривиальных идемпотентов в кольце эндоморфизмов, а также в кольце эндоморфизмов в категории $\bar{M}^p$, поскольку сравнения по модулю p сохраняются при тензорном умножении на $\bar{\mathbb{Z}}_p$.

Теорема 11. *Если среди типов L_i нет одинаковых и граф несравнимостей несвязен, то такую группу нельзя сделать неразложимой путем добавления дополнительных образующих.*

Доказательство. По лемме 19 условие теоремы означает, что существует разбиение множества типов на два так, что любой тип из первого множества меньше любого типа из второго множества. Будем считать, что z_i расположены в таком порядке, что типы из первого множества идут в начале, а типы из второго множества – в конце. Как всегда, предполагается, что для $i < j$ тип L_i не больше типа L_j.

Построим нетривиальный идемпотент из кольца эндоморфизмов, пользуясь теоремой 6. Пусть C – как в той теореме, C приведена к треугольному виду преобразованиями столбцов и $C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$ – клеточное разбиение, соответствующее указанному разбиению множества $\{z_i\}$. Пусть $B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix}$ – аналогичное разбиение. Тогда имеем $t(B)$ и $BC = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ B_{21}C_{11} & 0 \end{pmatrix}$ и подберем B_{21} так, чтобы $B_{21}C_{11} = C_{21}$. Тогда очевидно имеем $C^{-1}BC \in M_n(\mathbb{Z}_p)$ и B – идемпотентная матрица. В итоге B – нетривиальный идемпотент из кольца эндоморфизмов.

Теорема 12. *Группу A можно сделать неразложимой, добавив одну дополнительную образующую, тогда и только тогда, когда среди типов L_i нет одинаковых и граф несравнимостей связен.*

Доказательство. Очевидное следствие предыдущих теорем.

Литература

1. Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы.* Т. 1, 2, М.: Мир, 1974, 1977.
2. A. D. Arnold, *Finite Rank Torsion Free Abelian Groups and Rings.* Lecture Notes in Math. 931, Springer-Verlag, 1982.
3. А. В. Яковлев, *Абелевы группы конечного ранга без кручения и их прямые разложения.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **175** (1989) 135–153.
4. А. Картан, С. Эйленберг, *Гомологическая алгебра.* М.: изд-во иностр. лит-ры, 1960.

Lebedinskii D. M. Computation of the mapping of factorization by the radical for K_0^+ of the endomorphism ring.

In the paper, the mapping of factorization by the radical is computed for the semigroup of projective, finitely generated modules over the endomorphism ring of an almost completely decomposable torsion-free Abelian group of finite rank that is divisible by almost all prime numbers. Also, an answer is given to the question concerning the collections of groups of rank 1 for which one can construct an almost completely decomposable group, indecomposable as an object in $\bar{M}^p$, by adding a generator.

С.-Петербургский государственный университет путей сообщения

Поступило 23 декабря 1999 г.