Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 265, 1999 г.

Г. А. Гаркуша

FP-ИНЪЕКТИВНЫЕ И СЛАБО КВАЗИФРОБЕНИУСОВЫ КОЛЬЦА

0. Введение

Применение контекста двойственности относительно бимодуля ${}_RR_R$ к категориям конечно порожденных левых и правых R-модулей приводит к случаю, когда R – нетерово самоинъективное кольцо. Такие кольца называются квазифробениусовыми (или QF-кольцами). В свою очередь, R-двойственность категорий конечно представимых R-модулей приводит к классу слабо квазифробениусовых колец (или WQF-колец). Такие кольца описываются как когерентные FP-инъективные кольца [1].

В настоящей работе мы продолжаем исследование классов FP-инъективных и WQF-колец. При этом с самого начала оказывается необходимым введение понятия FP-кообразующего, которое играет существенную роль в нашем анализе, приблизительно ту же, что и понятие кообразующего для класса QF-колец. Используя также свойства fp-плоских и fp-инъективных модулей, мы приводим новые критерии для обоих классов колец (см. теоремы 2.2, 2.8 и 2.9), которые позволяют описать также классы когерентных CF- и FGF-колец. Кроме того, доказываются аналоги теорем Рено и Коннела для FP-инъективных и слабо квазифробениусовых групповых колец соответственно (теоремы 3.2 и 3.5).

Следует подчеркнуть, что наиболее трудные с технической точки зрения утверждения для FP-инъективных колец доказываются "в недрах" категории обобщенных модулей ${}_R\mathcal{C} = (\mathrm{mod}{-}R, \mathrm{Ab})$, состоящей из аддитивных ковариантных функторов из категории конечно представимых правых R-модулей $\mathrm{mod}{-}R$ в категорию абелевых групп Ab. В нашей ситуации это можно рассматривать как типичный случай, так как именно локализующие подкатегории категории ${}_R\mathcal{C}$ и соответствующие им функторы кручения позволяют приспособить многие интересующие нас свойства категории модулей к категории конечно представимых модулей. Именно с этой категорией связаны наиболее интересные утверждения для FP-инъективных и WQF-колец.

Всюду в работе категория левых (соответственно правых) R-модулей обозначается через $R-\mathrm{Mod}$ (соответственно $\mathrm{Mod}-R$), а категория конечно представимых левых (соответственно правых) R-модулей – через $R-\mathrm{mod}$ (соответственно $\mathrm{mod}{-}R$). Для $M \in R-\mathrm{Mod}$ двойственный к M модуль $\mathrm{Hom}_R(M,R)$ обозначается через M^*. Регулярные кольца предполагаются регулярными по фон Нейману.

Я хотел бы поблагодарить А. И. Генералова за ряд полезных замечаний.

1. Предварительные сведения

Напомним, что *категория обобщенных левых R-модулей*

$$ {}_R\mathcal{C} = (\mathrm{mod}{-}R, \mathrm{Ab}) $$

состоит из аддитивных ковариантных функторов из категории конечно представимых правых R-модулей $\mathrm{mod}{-}R$ в категорию абелевых групп Ab. В этом разделе мы приведем некоторые простейшие свойства категории ${}_R\mathcal{C}$, которые нам понадобятся в дальнейшем. Более подробную информацию о свойствах категории ${}_R\mathcal{C}$ можно найти в [2], и здесь мы будем главным образом придерживаться этой работы. Все рассматриваемые подкатегории предполагаются полными.

Говорим, что подкатегория $\mathcal{S}$ абелевой категории $\mathcal{C}$ – *подкатегория Серра,* если для всякой короткой точной последовательности

$$ 0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0 $$

в $\mathcal{C}$ объект $Y \in \mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда X, $Z \in \mathcal{S}$. Подкатегория Серра $\mathcal{S}$ категории Гротендика $\mathcal{C}$ *локализующая,* если она замкнута относительно взятия прямых пределов. Эквивалентно, функтор включения $i : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ имеет правый сопряженный функтор $t = t_{\mathcal{S}} : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$, который переводит каждый объект $X \in \mathcal{C}$ в максимальный подобъект $t(X)$, принадлежащий $\mathcal{S}$. Функтор t будем называть *функтором кручения.*

Объект X категории Гротендика $\mathcal{C}$ *конечно порожден,* если всякий раз, когда существуют подобъекты $X_i \subseteq X$, $i \in I$, такие, что $X = \sum_{i\in I} X_i$, существует конечное подмножество J множества I такое, что $X = \sum_{i \in J} X_i$. Подкатегорию конечно порожденных объектов обозначим через fg$\mathcal{C}$. Конечно порожденный объект X называется *конечно представимым,* если любой эпиморфизм $\gamma : Y \to X$, где $Y \in \mathrm{fg}\mathcal{C}$, имеет конечно порожденное ядро Kerγ. Через fp$\mathcal{C}$ обозначим подкатегорию, состоящую из конечно представимых объектов. Наконец, конечно представимый объект $X \in \mathcal{C}$ называем *когерентным,* если каждый конечно порожденный подобъект объекта X конечно представим. Подкатегорию когерентных объектов будем обозначать через coh$\mathcal{C}$.

Категория ${}_R\mathcal{C}$ является локально когерентной категорией Гротендика, т. е. всякий объект $C \in {}_R\mathcal{C}$ – прямой предел $C = \varinjlim_I C_i$ когерентных объектов $C_i \in \mathrm{coh}_R\mathcal{C}$, или эквивалентно, категория $\mathrm{coh}_R\mathcal{C}$ абелева. Кроме того, ${}_R\mathcal{C}$ богата когерентными проективными образующими $\{(M, -)\}_{M \in \mathrm{mod}-R}$. Таким образом, каждый когерентный объект $C \in \mathrm{coh}_R\mathcal{C}$ имеет проективное представление

$$(N, -) \longrightarrow (M, -) \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

где M, $N \in \mathrm{mod}-R$.

Говорим, что $M \in {}_R\mathcal{C}$ – *$\mathrm{coh}_R\mathcal{C}$-инъективный объект,* если $\mathrm{Ext}^1_{{}_R\mathcal{C}}(C, M) = 0$, для каждого $C \in \mathrm{coh}_R\mathcal{C}$. Вполне унивалентный функтор $-\otimes_R ? : R - \mathrm{Mod} \to {}_R\mathcal{C}$, $M \mapsto - \otimes_R M$, отождествляет категорию модулей $R-\mathrm{Mod}$ с подкатегорией $\mathrm{coh}_R\mathcal{C}$-инъективных объектов категории ${}_R\mathcal{C}$. Кроме того, функтор $- \otimes_R M \in \mathrm{coh}_R\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда $M \in R - \mathrm{mod}$. Далее, для всякого $C \in \mathrm{coh}_R\mathcal{C}$ имеется также точная в $\mathrm{coh}_R\mathcal{C}$ последовательность

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow - \otimes_R M \longrightarrow - \otimes_R N,$$

где M, $N \in R - \mathrm{mod}$.

Предложение 1.1 ([3, 4]). *Для кольца R следующие условия эквивалентны:*

(1) *R когерентно слева;*

(2) *для всякого конечно представимого правого R-модуля M модуль $M^* = \mathrm{Hom}_R(M, R)$ конечно представим;*

(3) *для всякого конечно представимого правого R-модуля M модуль $M^* = \mathrm{Hom}_R(M, R)$ конечно порожден;*

(4) *для всякого когерентного объекта $C \in \mathrm{coh}_R\mathcal{C}$ левый R-модуль $C(R)$ конечно представим;*

(5) *для всякого когерентного объекта* $C \in \mathrm{coh}_R\mathcal{C}$ *левый* R*-модуль* $C(R)$ *конечно порожден.*

Напомним также, что мономорфизм $\mu : M \to N$ в $R - \mathrm{Mod}$ – *чистый мономорфизм,* если для всякого $K \in \mathrm{Mod} - R$ морфизм $K \otimes \mu$ – также мономорфизм, или, эквивалентно, если $_R\mathcal{C}$-морфизм $- \otimes \mu$ – мономорфизм.

Далее нам также понадобятся следующие подкатегории Серра категории $\mathrm{coh}_R\mathcal{C}$:

$$\mathcal{S}^R = \{C \in \mathrm{coh}_R\mathcal{C} \mid C(R) = 0\}$$

$$\mathcal{S}_R = \{C \in \mathrm{coh}_R\mathcal{C} \mid (C, - \otimes_R R) = 0\},$$

а также локализующие подкатегории $\vec{\mathcal{S}}^R$ и $\vec{\mathcal{S}}_R$ категории $_R\mathcal{C}$

$$\vec{\mathcal{S}}^R = \{C \in {}_R\mathcal{C} \mid C = \varinjlim C_i, C_i \in \mathcal{S}^R\}$$

$$\vec{\mathcal{S}}_R = \{C \in {}_R\mathcal{C} \mid C = \varinjlim C_i, C_i \in \mathcal{S}_R\}.$$

Соответствующие подкатегориям $\vec{\mathcal{S}}^R$ и $\vec{\mathcal{S}}_R$ функторы кручения будем обозначать через $t_{\mathcal{S}^R}$ и $t_{\mathcal{S}_R}$ соответственно.

2. FP-инъективные и слабо квазифробениусовы кольца

Левый R-модуль M называется FP*-инъективным* (или *абсолютно чистым*), если для любого $F \in R - \mathrm{mod}$ имеем: $\mathrm{Ext}^1_R(F, M) = 0$, или эквивалентно, всякий мономорфизм $\mu : M \to N$ чист [5, 2.6]. Кольцо R FP*-инъективно слева,* если модуль $_RR$ FP-инъективен. M называется fp*-инъективным,* если для всякого мономорфизма $\mu : K \to L$ в $R - \mathrm{mod}$ морфизм (μ, M) является эпиморфизмом. Очевидно, что FP-инъективные модули fp-инъективны, а любой конечно представимый fp-инъективный модуль FP-инъективен. M называется fp*-плоским,* если для всякого мономорфизма $\mu : K \to L$ в $\mathrm{mod}{-}R$ морфизм $\mu \otimes M$ – также мономорфизм.

Левый R-модуль K назовем FP*-кообразующим,* если для всякого ненулевого гомоморфизма $f : M \to N$ из конечно порожденного модуля M в конечно представимый модуль N, существует $g \in \mathrm{Hom}_R(N, K)$ такой, что $gf \neq 0$. K называем fp*-кообразующим,* если для всякого ненулевого гомоморфизма $f : M \to N$ в $R - \mathrm{mod}$ найдется $g \in \mathrm{Hom}_R(N, K)$ такой, что $gf \neq 0$. Очевидно, что FP-кообразующие являются fp-кообразующими. С другой стороны, ясно, что всякий fp-кообразующий является FP-кообразующим, если кольцо R когерентно слева.

Лемма 2.1. *Для левого R-модуля K следующие условия эквивалентны:*

(1) *K – FP-кообразующий;*

(2) *всякий конечно представимый левый R-модуль вкладывается в произведение $K^I = \prod_I K$ некоторого семейства копий модуля K;*

(3) *для всякого конечно представимого левого R-модуля M выполнено соотношение:*

$$\bigcap_{\phi \in \mathrm{Hom}_R(M,K)} \mathrm{Ker}\phi = 0.$$

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $M \in R{-}\mathrm{mod}$, $I = \mathrm{Hom}_R(M, K)$, и пусть $\mu : M \to K^I$ – гомоморфизм такой, что $\mu(x) = (\phi(x))_{\phi \in I}$. Если $0 \neq x \in M$ и $i : Rx \to M$ – вложение, то найдется такой $\phi : M \to K$, что $\phi i(x) \neq 0$. Следовательно, μ – мономорфизм.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $0 \neq f : M \to N$ – гомоморфизм из конечно порожденного модуля M в конечно представимый модуль N. По условию, существует мономорфизм $g = (g_i)_{i \in I} : N \to K^I$. Тогда $gf \neq 0$, следовательно, существует такой $i_0 \in I$, что $g_{i_0} f \neq 0$.

(1) $\Rightarrow$ (3). Пусть $\mu : M \to K^I$ – мономорфизм, построенный в доказательстве импликации (1) $\Rightarrow$ (2). Тогда

$$\bigcap_{\phi \in \mathrm{Hom}_R(M,K)} \mathrm{Ker}\phi = \mathrm{Ker}\mu = 0.$$

(3) $\Rightarrow$ (2). В качестве I можем взять множество $\mathrm{Hom}_R(M, K)$.

Напомним, что модуль $M \in R - \mathrm{Mod}$ *полурефлексивен* (соответственно *рефлексивен*), если канонический гомоморфизм $M \to M^{**}$ – мономорфизм (соответственно изоморфизм).

Теперь мы имеем все необходимые сведения для доказательства следующего утверждения (ср. [1, 2.5]).

Теорема 2.2. *Для кольца R следующие условия эквивалентны:*

(1) *модуль R_R FP-инъективен;*

(2) *модуль ${}_RR$ – FP-кообразующий;*

(3) *в $R - \mathrm{Mod}$ существует fp-плоский FP-кообразующий;*

(4) *в $R - \mathrm{Mod}$ существует fp-плоский кообразующий;*

(5) *если* $\alpha : M \to N$ – *морфизм в* $R-\mathrm{mod}$ *такой, что* $\alpha^* = \mathrm{Hom}_R(\alpha, R)$ – *эпиморфизм, то* α – *мономорфизм;*

(6) *всякий конечно представимый левый* R*-модуль полурефлексивен;*

(7) *всякий конечно представимый левый* R*-модуль вкладывается в* fp*-плоский модуль;*

(8) *всякий (инъективный) левый* R*-модуль вкладывается в* fp*-плоский модуль;*

(9) *всякий* FP*-инъективный левый* R*-модуль* fp*-плосок;*

(10) *всякий инъективный левый* R*-модуль* fp*-плосок;*

(11) *всякий неразложимый инъективный левый* R*-модуль* fp*-плосок;*

(12) *всякий плоский правый* R*-модуль* fp*-инъективен.*

Доказательство. $(1) \Rightarrow (2)$. Согласно [1, 2.5] $\mathcal{S}_R \subseteq \mathcal{S}^R$ в ${}_R\mathcal{C}$. Рассмотрим ненулевой гомоморфизм $f : M \to N$, где $M \in \mathrm{fg}(R-\mathrm{Mod})$, а $N \in R-\mathrm{mod}$. Пусть $C = \mathrm{Im}(- \otimes f)$. Тогда C – конечно порожденный подобъект когерентного объекта $- \otimes_R N$. Поэтому $C \in \mathrm{coh}_R\mathcal{C}$. Предположим, что $gf = 0$ для всякого $g \in N^*$. Рассмотрим произвольный ${}_R\mathcal{C}$-морфизм $\gamma : C \to - \otimes_R R$. Так как $- \otimes_R R$ – $\mathrm{coh}_R\mathcal{C}$-инъективный объект, найдется $- \otimes h : - \otimes_R N \to - \otimes_R R$, ограничение $- \otimes h|_C$ которого на C совпадает с γ. Но $hf = 0$, а значит, $\gamma = 0$. Поэтому получаем, что $C \in \mathcal{S}_R$, и следовательно, $C \in \mathcal{S}^R$. Так как $C(R) = 0$, то $f = 0$, и получили противоречие.

$(2) \Rightarrow (3)$. Модуль ${}_RR$, – по условию, – FP-кообразующий.

$(3) \Rightarrow (7)$. Так как прямое произведение fp-плоских модулей снова fp-плоский модуль (см. [1, 2.3]), наше утверждение следует из леммы 2.1.

$(7) \Rightarrow (1)$. Пусть $f : M \to F$ – вложение модуля $M \in R-\mathrm{mod}$ в fp-плоский модуль F. Обозначим через $X = \mathrm{Ker}(- \otimes f)$. Пусть $X = \sum_I X_i$, где каждый $X_i \in \mathrm{fg}_R\mathcal{C}$. Так как X_i – подобъект когерентного объекта $- \otimes_R M$, объект X_i сам когерентен; а поскольку $X(R) = 0$, то каждый $X_i \in \mathcal{S}^R$. Следовательно, $X \in \vec{\mathcal{S}}^R$.

Применим теперь точный слева функтор $\mathcal{S}_R$-кручения $t_{\mathcal{S}_R}$ к точной последовательности

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow - \otimes_R M \longrightarrow - \otimes_R F.$$

Так как $t_{\mathcal{S}_R}(- \otimes_R F) = 0$ (см. [1, 2.2]), получаем, что $t_{\mathcal{S}_R}(- \otimes_R M) = t_{\mathcal{S}_R}(X) \subseteq X \in \vec{\mathcal{S}}^R$. Пусть теперь $C \in \mathcal{S}_R$. Поскольку C – подобъект

$-\otimes_R M$, для некоторого $M \in R-\mathrm{mod}$, то из соотношения

$$C = t_{\mathcal{S}_R}(C) \subseteq t_{\mathcal{S}_R}(-\otimes_R M) \in \vec{\mathcal{S}}^R$$

заключаем, что $\mathcal{S}_R \subseteq \mathcal{S}^R$, откуда кольцо R FP-инъективно справа по [1, 2.5].

(1) $\Rightarrow$ (5). Пусть $C = \mathrm{Ker}(-\otimes\alpha)$. Тогда $C \in \mathrm{coh}_R\mathcal{C}$, и так как $-\otimes_R R$ – $\mathrm{coh}_R\mathcal{C}$-инъективный объект, имеется точная последовательность

$$(-\otimes_R N, -\otimes_R R) \overset{(-\otimes\alpha,-\otimes_R R)}{\longrightarrow} (-\otimes_R M, -\otimes_R R) \longrightarrow (C, -\otimes_R R) \longrightarrow 0. \tag{2.1}$$

Так как α^* – эпиморфизм, заключаем, что $C \in \mathcal{S}_R \subseteq \mathcal{S}^R$. Следовательно, $C(R) = 0$, откуда α – мономорфизм.

(5) $\Rightarrow$ (1). Пусть $C \in \mathcal{S}_R$. Тогда существует точная последовательность $0 \to C \to -\otimes_R M \overset{-\otimes\alpha}{\longrightarrow} -\otimes_R N$, которая индуцирует точную последовательность вида (2.1). Так как $(C, -\otimes_R R) = 0$, α^* – эпиморфизм, а значит, α – мономорфизм. Итак, $C \in \mathcal{S}^R$. По [1, 2.5] модуль R_R FP-инъективен.

(1) $\Leftrightarrow$ (6). Следует из [7, 2.3].

(4) $\Rightarrow$ (3). Очевидно.

(1) $\Rightarrow$ (9), (10), (11). Следует из [1, 2.5].

(9) $\Rightarrow$ (10) $\Rightarrow$ (11). Очевидно.

(11) $\Rightarrow$ (4). Пусть $\{M_i \mid i \in I\}$ – система представителей классов изоморфных простых R-модулей. Тогда каждый $E_i = E(M_i)$ – неразложимый инъективный R-модуль, а модуль $E = \prod_I E(M_i)$ – кообразующий в $R-\mathrm{Mod}$. Так как каждый модуль E_i fp-плосок, модуль E fp-плосок по [1, 2.3].

(8) $\Rightarrow$ (7). Очевидно.

(10) $\Rightarrow$ (8). Достаточно заметить, что инъективная оболочка $E(M)$ модуля M – fp-плоский модуль.

(1) $\Rightarrow$ (12). Следует из [1, 2.5].

(12) $\Rightarrow$ (1). Так как модуль R_R плосок, то он fp-инъективен, а значит, и FP-инъективен.

Говорим, что левый (соответственно правый) идеал I кольца R *аннуляторный*, если $I = \mathfrak{l}(X)$ (соответственно $I = \mathfrak{r}(X)$), где X – некоторое подмножество кольца R, а $\mathfrak{l}(X) = \{r \in R \mid rX = 0\}$ (соответственно $\mathfrak{r}(X) = \{r \in R \mid Xr = 0\}$). Согласно [8, с. 429] левый идеал I аннуляторный тогда и только тогда, когда $I = \mathfrak{l}\mathfrak{r}(I)$.

Предложение 2.3. *Для кольца R справедливы следующие утверждения:*

(1) *если R_R – FP-инъективный модуль, то*

(a) *для произвольных конечно порожденных правых идеалов I, J кольца R имеем: $\mathfrak{l}(I \cap J) = \mathfrak{l}(I) + \mathfrak{l}(J)$;*

(b) *для произвольного конечно порожденного левого идеала I имеем: $I = \mathfrak{l}\mathfrak{r}(I)$.*

(2) *если для R выполнены условия* (a) *и* (б) *из* (1)*, то каждый гомоморфизм любого конечно порожденного правого идеала кольца R в R получается умножением слева на некоторый элемент из R.*

Доказательство. Доказательство проводится аналогично [9, 12.4.2].

Следствие 2.4. *Если кольцо R когерентно справа и выполнены условия* (a) *и* (b) *из предложения* 2.3*, то R – FP-инъективное справа кольцо.*

Доказательство. Из предложения 2.3 следует, что $\mathrm{Ext}^1_R(R/I, R) = 0$ для всякого конечно порожденного правого идеала I кольца R. Из [5, 3.1] вытекает, что $\mathrm{Ext}^1_R(M, R) = 0$ для всякого $M \in \mathrm{mod}{-}R$, т.е. R FP-инъективно справа.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда всякий конечно представимый левый модуль вкладывается в свободный модуль. Кольца с таким свойством называем *левыми IF-кольцами.* Ввиду теоремы 2.2 всякое левое IF-кольцо является FP-инъективным справа. Следующее утверждение расширяет список свойств, характеризующих IF-кольца (ср. [3]).

Предложение 2.5. *Для кольца R следующие условия эквивалентны:*

(1) *R – левое IF-кольцо;*

(2) *всякий конечно представимый левый R-модуль вкладывается в плоский R-модуль;*

(3) *всякий FP-инъективный левый R-модуль плосок;*

(4) *всякий инъективный левый R-модуль плосок.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Очевидно.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $f : K \to M$ – вложение модуля $K \in R - \mathrm{mod}$ в плоский модуль M. По теореме Говорова-Лазара [8, 11.32] модуль M является прямым пределом $\varinjlim_I P_i$ проективных модулей

P_i. По [6, V.3.4] найдется такой $i_0 \in I$, что f пропускается через P_{i_0}. Следовательно, K – подмодуль P_{i_0}. Остается заметить, что P_{i_0} – подмодуль некоторого свободного модуля.

(1) $\Leftrightarrow$ (4). Следует из [3, 2.1].

(3) $\Rightarrow$ (4). Очевидно.

(4) $\Rightarrow$ (3). Если M – FP-инъективный левый R-модуль, то последовательность

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow E/M \longrightarrow 0,$$

в которой $E = E(M)$, чиста. Так E – плоский модуль, модуль E/M плосок по [6, I.11.1]. Обозначим через $\widehat{M} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ модуль характеров M. По [6, I.10.5] модули $\widehat{E}$ и $\widehat{E/M}$ инъективны, а значит, точная последовательность

$$0 \longrightarrow \widehat{E/M} \longrightarrow \widehat{E} \longrightarrow \widehat{M} \longrightarrow 0$$

расщепляется. Следовательно, модуль $\widehat{M}$ инъективен, откуда M плосок по [6, I.10.5].

Колби [3] построил пример левого IF-кольца, которое не является правым IF-кольцом.

Предложение 2.6. *Если R – FP-инъективное слева кольцо и левое IF-кольцо, то оно когерентно справа.*

Доказательство. По условию, всякий $K \in R-\mathrm{mod}$ вкладывается в свободный модуль (а значит, и в конечно порожденный свободный модуль). Имеется точная последовательность

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow R^n \longrightarrow R^m \tag{2.2}$$

в $R-\mathrm{mod}$. Так как модуль ${}_RR$ FP-инъективен, получаем точную последовательность

$$R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow K^* \longrightarrow 0 \tag{2.3}$$

в $\mathrm{mod}-R$, откуда $K^* \in \mathrm{mod}-R$. По предложению 1.1 кольцо R когерентно справа.

IF-проблема. Будет ли левое IF-кольцо когерентным справа?

Следует отметить, что IF-проблема, ввиду предложения 2.5, эквивалентна проблеме, поставленной Джейном в [7, с. 442]: будет ли кольцо R когерентным справа, если всякий инъективный левый R-модуль плосок?

Напомним, что кольцо R *почти регулярно* (см. [1]), если всякий (левый и правый) модуль fp-плосок. По теореме 2.2 почти регулярные кольца FP-инъективны как слева, так и справа.

Следствие 2.7. *Почти регулярное кольцо R будет левым IF-кольцом в том и только том случае, когда оно регулярно.*

Доказательство. Ясно, что почти регулярное кольцо регулярно в том и только том случае, когда оно когерентно слева или справа. Поэтому, наше утверждение непосредственно следует из предложения 2.6.

Напомним, что кольцо R *недискретно,* если оно простое почти регулярное кольцо. Прест, Ротмалер и Циглер [10] построили пример нерегулярного недискретного кольца.

Говорим, что кольцо R *слабо квазифробениусово* (или WQF-*кольцо*), если оно задает R-двойственность категорий конечно представимых левых и правых R-модулей. Такие кольца описываются как FP-инъективные (слева и справа) когерентные (слева и справа) кольца [1, 2.11].

Следующая теорема расширяет список свойств, характеризующих WQF-кольца (ср. [1, 2.11; 2.12], [3, 2.2]).

Теорема 2.8. *Для кольца R следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *R – WQF-кольцо;*

(2) *R – левое и правое IF-кольцо;*

(3) *R когерентно слева и FP-инъективно слева, и всякий циклический конечно представимый левый R-модуль вкладывается в свободный модуль;*

(4) *всякий левый и всякий правый FP-инъективный R-модуль плосок;*

(5) *всякий левый и всякий правый инъективный R-модуль плосок.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (4). Следует из [1, 2.11].

(2) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5). Применить предложение 2.5.

(2) $\Rightarrow$ (1). Так как всякое левое и правое IF-кольцо FP-инъективно с двух сторон, наше утверждение следует из предложения 2.6.

(1) $\Rightarrow$ (3). Очевидно.

(3) $\Rightarrow$ (1). Так как для всякого ненулевого циклического $K \in R-\mathrm{mod}$ дуальный модуль $K^* \neq 0$, доказательство правой FP-инъективности кольца R проводится аналогично [1, 2.9].

Покажем теперь, что кольцо R когерентно справа. Ввиду предложения 1.1 достаточно доказать, что $K^* \in \mathrm{mod}{-}R$ для всякого $K \in R{-}\mathrm{mod}$. Проведем доказательство индукцией по числу образующих n модуля K. Если $n = 1$, то рассматривая для K точные последовательности (2.2) и (2.3), получим, что $K^* \in \mathrm{mod}{-}R$. Если же K конечно представим по n образующим, через K' обозначим подмодуль K, порожденный одним из этих элементов. Так как R когерентно слева, модули K' и K/K' конечно представимы по меньшему числу образующих. Так как R FP-инъективно слева, имеется точная последовательность

$$0 \longrightarrow (K/K')^* \longrightarrow K^* \longrightarrow (K')^* \longrightarrow 0,$$

в которой, по индукционному предположению, модули $(K')^*$, $(K/K')^* \in \mathrm{mod}{-}R$. Следовательно, $K^* \in \mathrm{mod}{-}R$.

Теперь мы объединим предыдущие рассуждения в следующей теореме (ср. со свойствами QF-колец [11, 24.4], [9, 13.2.1], а также со свойствами колец с полной дуальностью [9, 12.1.1]):

Теорема 2.9. *Для когерентного (слева и справа) кольца R следующие условия эквивалентны:*

(1) R – WQF-*кольцо;*

(2) *модули ${}_RR$ и R_R FP-инъективны;*

(3) ${}_RR$ *и* R_R – FP-*кообразующие;*

(4) *модуль* R_R – FP-*инъективный* FP-*кообразующий;*

(5) *всякий левый и всякий правый конечно представимый R-модуль рефлексивен;*

(6) *всякий левый и всякий правый циклический конечно представимый R-модуль рефлексивен;*

(7) *всякий левый и всякий правый циклический конечно представимый R-модуль вкладывается в свободный модуль;*

(8) *для всякого конечно порожденного левого идеала I и для всякого конечно порожденного правого идеала J кольца R справедливы равенства:* $\mathfrak{l}\mathfrak{r}(I) = I$ *и* $\mathfrak{r}\mathfrak{l}(J) = J$.

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (2). Следует из [1, 2.11].

(2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4). Применить теорему 2.2.

(2) $\Leftrightarrow$ (5). Следует из [5, 4.9].

(5) $\Rightarrow$ (6). Очевидно.

(6) $\Rightarrow$ (7). Пусть M – циклический конечно представимый левый R-модуль. Ввиду предложения 1.1 модуль $M^* \in \mathrm{mod}-R$, поэтому существует эпиморфизм $R^n \to M^*$, откуда $M \approx M^{**} \to R^n$ – мономорфизм.

(7) $\Rightarrow$ (8). Пусть I – конечно порожденный левый идеал кольца R. По условию модуль R/I вкладывается в свободный модуль. По [11, 20.26] существует конечное подмножество X кольца R такое, что $I = \mathfrak{l}(X)$, т. е. I – аннуляторный идеал. Симметрично, каждый конечно порожденный правый идеал аннуляторный.

(8) $\Rightarrow$ (2). Ввиду следствия 2.4 достаточно доказать, что для произвольных конечно порожденных правых идеалов I и J кольца R выполнено равенство: $\mathfrak{l}(I \cap J) = \mathfrak{l}(I) + \mathfrak{l}(J)$. Поскольку R – когерентное кольцо, по теореме Чейза [6, I.13.3] идеалы $I \cap J$ и $\mathfrak{l}(I) + \mathfrak{l}(J)$ конечно порождены.

Имеем

$$\mathfrak{r}\mathfrak{l}(I \cap J) = I \cap J = \mathfrak{r}\mathfrak{l}(I) \cap \mathfrak{r}\mathfrak{l}(J) = \mathfrak{r}(\mathfrak{l}(I) + \mathfrak{l}(J)).$$

Применяя $\mathfrak{l}$, получаем

$$\mathfrak{l}(I \cap J) = \mathfrak{l}\mathfrak{r}(\mathfrak{l}(I) + \mathfrak{l}(J)) = \mathfrak{l}(I) + \mathfrak{l}(J).$$

Следовательно, R_R FP-инъективен, а по симметрии, ${}_RR$ FP-инъективен.

Хорошо известно, что QF-кольца имеют глобальную размерность, равную 0 (и тогда кольцо R полупросто), либо ∞. В свою очередь, WQF-кольца, ввиду [5, 3.6], имеют слабую глобальную размерность, равную 0 (и тогда кольцо R регулярно), либо ∞.

Некоторые примеры WQF-колец можно найти в [3].

Теперь мы рассмотрим класс колец, над которыми каждый конечно порожденный левый R-модуль вкладывается в свободный R-модуль. Кольца с указанным свойством называем *левыми* FGF-*кольцами.* Очевидно, что всякое FGF-кольцо является IF-кольцом. В свою очередь, если каждый циклический левый R-модуль вкладывается в свободный R-модуль, то кольцо R будем называть *левым* CF-*кольцом.* До сих пор остаются открытыми следующие проблемы (см. [12]):

FGF-проблема. Верно ли, что класс левых FGF-колец совпадает с классом QF-колец?

CF-проблема. Будут ли левые CF-кольца артиновыми слева?

Напомним, что кольцо R – *левое кольцо Каша,* если инъективная оболочка $E(_RR)$ модуля $_RR$ – инъективный кообразующий в $R-\mathrm{Mod}$, или эквивалентно, если для всякого ненулевого циклического левого R-модуля M дуальный модуль $M^* \neq 0$ (см. [6, XI.5.1]).

Лемма 2.10. *Для кольца R справедливы следующие утверждения:*

(1) *если R – когерентное слева кольцо и левое* CF-*кольцо, то оно нетерово слева кольцо и левое кольцо Каша;*

(2) *если R – нетерово слева кольцо и левое IF-кольцо, то оно левое* FGF-*кольцо. Если R – когерентное слева кольцо и левое* FGF-*кольцо, то оно нетерово слева кольцо и левое IF-кольцо.*

Доказательство. (1). Очевидно, что R – левое кольцо Каша. Поэтому требуется доказать, что модуль $_RR$ нетеров.

Пусть I – левый идеал кольца R. По условию модуль R/I – подмодуль свободного R-модуля R^n, для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Так как кольцо R когерентно слева, модуль R^n когерентен, а значит, модуль R/I конечно представим, т. е. I – конечно порожденный идеал.

(2). Достаточно заметить, что над нетеровым кольцом всякий конечно порожденный модуль конечно представим, а также воспользоваться утверждением (1).

Предложение 2.11. *Для когерентного с обеих сторон кольца R следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *R – левое* FGF-*кольцо;*

(2) *модуль $_RR$ – нетеров FP-кообразующий;*

(3) *модуль $_RR$ нетеров, а модуль R_R FP-инъективен;*

(4) *R – нетерово слева кольцо, левое кольцо Каша и модуль $E(_RR)$ плосок.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Следует из леммы 2.10, леммы 2.1 и теоремы 2.2.

(1) $\Rightarrow$ (4). Применить лемму 2.10 и предложение 2.5.

(2) $\Leftrightarrow$ (3). Следует из теоремы 2.2.

(2) $\Rightarrow$ (1). Так как R – нетерово слева кольцо, каждый конечно порожденный левый R-модуль конечно представим. По лемме 2.1 каждый конечно представимый левый R-модуль – подмодуль модуля R^I. Поскольку кольцо R когерентно справа, модуль R^I плосок по [6, I.13.3]. По предложению 2.5 R – левое IF-кольцо, а по лемме 2.10 R – также левое FGF-кольцо.

(4) $\Rightarrow$ (1). В этом случае доказательство аналогично доказательству импликации (2) $\Rightarrow$ (1), если заметить, что каждый конечно порожденный левый R-модуль – подмодуль плоского модуля E^I.

Кольцо R называется *полуартиновым слева,* если всякий ненулевой циклический левый R-модуль имеет ненулевой цоколь. R *полурегулярно,* если $R/\mathrm{rad}R$ – регулярное кольцо.

Лемма 2.12 ([12, 2.1]). *Левое* CF-*кольцо* R *полуартиново слева в том и только том случае, когда* $\mathrm{soc}({}_RR)$ *– существенный подмодуль в* ${}_RR$.

Следующие два утверждения частично решают CF- и FGF-проблемы соответственно (ср. [12]):

Предложение 2.13. *Предположим, что R – нетерово слева кольцо и левое* CF-*кольцо. Тогда следующие условия эквивалентны для R:*

(1) *R артиново слева;*
(2) *R полуартиново слева или справа;*
(3) *R – полурегулярное кольцо;*
(4) *R – полусовершенное кольцо;*
(5) $\mathrm{soc}({}_RR)$ *– существенный подмодуль в* ${}_RR$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Всякое артиново слева кольцо совершенно слева, а значит, полуартиново справа по [6, VIII.5.1].

(2) $\Rightarrow$ (1). Наше утверждение следует из [6, VIII.5.2].

(1) $\Rightarrow$ (3). Очевидно.

(3) $\Rightarrow$ (4). Так как $\mathrm{soc}({}_RR)$ – конечно порожденный левый идеал R, наше утверждение следует из [12, 4.1].

(4) $\Rightarrow$ (5). Очевидно.

(5) $\Rightarrow$ (1). По предыдущей лемме R полуартиново слева, и так как R нетерово слева, наше утверждение завершает [6, VIII.5.2].

Предложение 2.14. *Пусть R – нетерово слева кольцо и левое* FGF-*кольцо. Тогда следующие условия эквивалентны для R:*

(1) *R –* QF-*кольцо;*
(2) *R –* WQF-*кольцо;*
(3) *R – FP-инъективное слева кольцо;*
(4) *R – правое кольцо Каша;*
(5) *R – полурегулярное кольцо;*
(6) *R полуартиново слева или справа;*

(7) $\mathrm{soc}({}_RR)$ – *существенный подмодуль в* ${}_RR$.

Доказательство. Импликации (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3), (1) $\Rightarrow$ (4), (5) очевидны.

(3) $\Rightarrow$ (1). Наше утверждение следует из [1, 2.6].

(4) $\Rightarrow$ (3). Над правым кольцом Каша модуль $M^* \neq 0$ для всякого ненулевого циклического правого R-модуля M. Так как R – левое FGF-кольцо, то по теореме 2.2 R – FP-инъективное справа кольцо, и тогда R – FP-инъективное слева кольцо по [1, 2.9].

(5) $\Leftrightarrow$ (6) $\Leftrightarrow$ (7). Применить предложение 2.13.

(7) $\Rightarrow$ (1). По предложению 2.13 кольцо R артиново слева. Так как артиново слева кольцо совершенно справа, наше утверждение следует из [12, 2.5].

3. Групповые кольца

Пусть R – кольцо, G – группа. Групповое кольцо группы G с коэффициентами в R обозначим через $R(G)$.

Лемма 3.1. *Предположим, что G – конечная группа и $M \in \mathrm{Mod}-R(G)$. Пусть $f = (f_i)_I : M \to R^I$, где I – некоторое множество, – некоторый R-мономорфизм. Тогда $R(G)$-гомоморфизм $\widetilde{f} = (\widetilde{f}_i)_I : M \to R(G)^I$, определенный по правилу*

$$\widetilde{f}_i(m) = \sum\nolimits_{g \in G} f_i(mg)g^{-1},$$

является $R(G)$-мономорфизмом.

Доказательство. Непосредственная проверка показывает, что $\widetilde{f}$, – действительно, – мономорфизм $R(G)$-модулей.

Согласно теореме Рено [13] групповое кольцо $R(G)$ самоинъективно слева в том и только том случае, когда кольцо R самоинъективно слева и группа G конечна. Для FP-инъективных колец справедлива следующая

Теорема 3.2. *Групповое кольцо $R(G)$ FP-инъективно слева в том и только том случае, когда кольцо R FP-инъективно слева и группа G локально конечна.*

Доказательство. Предположим, что $R(G)$ FP-инъективно слева, и пусть $M \in \mathrm{mod}-R$. Тогда модуль $M \otimes_R R(G) \in \mathrm{mod}-R(G)$, и, ввиду леммы 2.1 и теоремы 2.2, существует мономорфизм μ :

$M \otimes_R R(G) \to R(G)^I$, где I – некоторое множество индексов. Тогда композиция

$$M \xrightarrow{\beta} M \otimes_R R(G) \xrightarrow{\mu} \mu R(G)^I$$

морфизмов μ и β является R-мономорфизмом, где $\beta(m) = m \otimes e$, e – единица группы G. Так как $R(G)$ – свободный R-модуль, R-модуль $R(G)^I$ fp-плосок по [1, 2.3]. Из теоремы 2.2 следует, что кольцо R FP-инъективно слева.

Докажем теперь, что группа G локально конечна. Пусть неединичная подгруппа H группы G порождается элементами $\{h_i\}_{i=1}^n$. Тогда правый идеал ωH кольца $R(G)$, порожденный элементами $\{1 - h_i\}_{i=1}^n$, ненулевой. По предложению 2.3 $\mathfrak{l}(\omega H) \neq 0$, а значит, H конечна по [14, 2.1].

Допустим теперь, что R – FP-инъективное слева кольцо, а группа G локально конечна. Докажем сперва, что кольцо $R(G)$ FP-инъективно слева, если G конечна.

Пусть $M \in \mathrm{mod} - R(G)$. Поскольку группа G конечна, $M \in \mathrm{mod}{-}R$. Так как модуль R_R – FP-кообразующий по теореме 2.2, по лемме 2.1 M_R – подмодуль R^I, где I – некоторое множество. По лемме 3.1 $M_{R(G)}$ – подмодуль $R(G)^I$. Следовательно, $R(G)$ – FP-кообразующий, а значит $R(G)$ – FP-инъективное слева кольцо по теореме 2.2.

Предположим теперь, что G – произвольная локально конечная группа, и пусть $M \in R(G) - \mathrm{mod}$. Тогда существует короткая точная последовательность $R(G)$-модулей

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} R(G)^n \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0.$$

Пусть X – конечное множество образующих для ${}_{R(G)}K$. Так как G локально конечна, найдется такая конечная подгруппа H группы G, что $R(H)X \subseteq R(H)^n \subseteq R(G)^n$. В результате получаем короткую точную последовательность $R(H)$-модулей

$$0 \longrightarrow K' \xrightarrow{\bar{i}} R(H)^n \xrightarrow{\bar{p}} M' \longrightarrow 0, \qquad (3.1)$$

где $K' = R(H)X$, $M' = R(H)Y$, Y – конечное множество образующих модуля ${}_{R(G)}M$. Умножая тензорно на $R(G)_{R(H)}$ последовательность (3.1), получим следующую коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R(G) \underset{R(H)}{\otimes} K' \arrow[r, "1\otimes\bar{i}"] \arrow[d, "\alpha"'] & R(G) \underset{R(H)}{\otimes} R(H)^n \arrow[r, "1\otimes\bar{p}"] \arrow[d, "\beta"] & R(G) \underset{R(H)}{\otimes} M' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"'] & R(G)^n \arrow[r, "p"'] & M \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

в которой β – изоморфизм, $\alpha(r\otimes x) = rx$. Очевидно, что и α – изоморфизм, и следовательно, γ – изоморфизм.

Если мы покажем, что всякий $f \in \mathrm{Hom}_{R(G)}(K, R(G))$ продолжается до некоторого $\sigma \in \mathrm{Hom}_{R(G)}(R(G)^n, R(G))$, получим, что $\mathrm{Ext}^1_{R(G)}(M, R(G)) = 0$, что и требуется доказать.

Итак, пусть $f \in \mathrm{Hom}_{R(G)}(K, R(G))$, и пусть

$$\tau \in \mathrm{Hom}_{R(H)}(R(G), R(H)), \quad \tau(\sum_{g\in G} r(g)g) = \sum_{g\in H} r(g)g.$$

Рассмотрим

$$\bar{f} = \tau f|_{K'} \in \mathrm{Hom}_{R(H)}(K', R(H)).$$

Поскольку $R(H)$ – FP-инъективное слева кольцо, найдется такое $\bar{\sigma} : R(H)^n \to R(H)$, что $\bar{f} = \bar{\sigma}\bar{i}$. Получаем

$$f = (1\otimes \bar{f})\alpha^{-1} = (1\otimes\bar{\sigma})(1\otimes\bar{i})\alpha^{-1} = (1\otimes\bar{\sigma})\beta^{-1}i = \sigma i,$$

где $\sigma = (1\otimes\bar{\sigma})\beta^{-1}$ – искомый гомоморфизм.

Ввиду теоремы Рено и теоремы 3.2 по произвольному самоинъективному кольцу R мы можем строить FP-инъективные кольца, не являющиеся самоинъективными. А именно, справедливо следующее утверждение:

Следствие 3.3. *Если R – самоинъективное слева кольцо, G – локально конечная группа и $|G| = \infty$, то групповое кольцо $R(G)$ FP-инъективно слева, но не самоинъективно слева.*

Предложение 3.4 ([3]). *Групповое кольцо $R(G)$ – левое IF-кольцо в том и только том случае, когда R – левое IF-кольцо, а группа G локально конечна.*

Доказательство. Если $R(G)$ – левое IF-кольцо, то оно также FP-инъективно справа по теореме 2.2. По предыдущей теореме группа G локально конечна. Аналогично доказательству теоремы 3.2 для $M \in R-\text{mod}$ имеется композиция R-мономорфизмов

$$M \xrightarrow{\beta} R(G) \otimes_R M \xrightarrow{\mu} R(G)^n,$$

где $\beta(m) = e \otimes m$; а так как $R(G)$ – свободный R-модуль, модуль M – подмодуль свободного R-модуля $R(G)^n$.

Обратно, пусть R – левое IF-кольцо и G – локально конечная группа. Докажем сначала, что $R(G)$ – левое IF-кольцо, если G – конечная группа. Для этого рассмотрим $M \in R(G)-\text{mod}$. Так как G конечна, $M \in R-\text{mod}$, а значит, ${}_RM$ – подмодуль R^n, для некоторого $n \in \mathbb{N}$. По лемме 3.1 ${}_{R(G)}M$ – подмодуль $R(G)^n$, т. е. $R(G)$, – действительно, – левое IF-кольцо.

Если же G – произвольная локально конечная группа, то для всякого $M \in R(G)-\text{mod}$ существует такая конечная подгруппа H группы G, что

$$M \approx R(G) \otimes_{R(H)} R(H)Y,$$

где Y – конечное множество образующих для ${}_{R(G)}M$ (см. доказательство теоремы 3.2). По условию $R(H)$-модуль $R(H)Y$ – подмодуль свободного модуля $R(H)^n$, для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Значит, M – подмодуль свободного модуля $R(G)^n \approx R(G) \otimes_{R(H)} R(H)^n$.

Теорема 3.5. *Групповое кольцо $R(G)$ слабо квазифробениусово тогда и только тогда, когда кольцо R слабо квазифробениусово и группа G локально конечна.*

Доказательство. По теореме 2.8 всякое WQF-кольцо является левым и правым IF-кольцом. Теперь наше утверждение следует из предложения 3.4.

Хорошо известно, что групповое кольцо $R(G)$ полупросто (см. [14], [8, с. 580]) в том и только том случае, когда кольцо R полупросто, группа G конечна, и $|G|$ обратим в R. В свою очередь, по теореме Ауслэндера-Маклафлина (см. [14]) $R(G)$ – регулярное кольцо в том и только том случае, когда кольцо R регулярно, группа G локально конечна и для всякой конечной подгруппы H группы G из равенства $|H| = n$ следует, что $nR = R$.

В заключение мы приведем примеры WQF-колец, которые не являются одновременно ни QF-кольцами, ни регулярными кольцами.

Примеры. (1) По произвольному регулярному кольцу R мы можем строить WQF-кольца, которые не будут регулярными, если рассмотрим произвольную локально конечную группу, в которой порядок хотя бы одной конечной подгруппы необратим в R.

Например, пусть K – поле характеристики $p \neq 0$. Рассмотрим кольцо $R = \prod_{i=1}^{\infty} K_i$, $K_i = K$, с покомпонентным умножением. Тогда R, очевидно, является регулярным кольцом, но не является полупростым кольцом. Если G – такая конечная группа, что p делит $|G|$, то кольцо $R(G)$ слабо квазифробениусово и не является ни регулярным, ни квазифробениусовым кольцом.

(2) Если R – произвольное QF-кольцо, G – произвольная локально конечная группа и $|G| = \infty$, то $R(G)$ – слабо квазифробениусово кольцо, не являющееся квазифробениусовым. При этом $R(G)$ регулярно тогда и только тогда, когда R – полупростое кольцо, и порядок каждой конечной подгруппы группы G обратим в R.

Так, например, если K – поле характеристики $p \neq 0$, группа $G = \cup_{k \geqslant 1} G_k$, где каждая G_k – циклическая группа с образующим a_k порядка p^k и $a_k = a_{k+1}^p$, то групповая алгебра $K(G) = \varinjlim_k K(G_k)$ слабо квазифробениусова (см. также [15]), не являющаяся ни QF-кольцом, ни регулярным кольцом.

Литература

1. Г. А. Гаркуша, А. И. Генералов, *Двойственность для категорий конечно представимых модулей.* Алгебра и Анализ **11** (1999), вып. 6, 139–153.
2. I. Herzog, *The Ziegler spectrum of a locally coherent Grothendieck category.* Proc. London Math. Soc. **74** (1997), 503–558.
3. R. R. Colby, *Rings which have flat injective modules.* J. Algebra **35** (1975), 239–252.
4. G. Garkusha, *Grothendieck categories.* Preprint (http://xxx.lanl.gov), 1999.
5. B. Stenström, *Coherent rings and FP-injective modules.* J. London Math. Soc. **2** (1970), 323–329.
6. B. Stenström, *Rings of quotients.* Springer-Verlag, New York and Heidelberg, 1975.
7. S. Jain, *Flat and FP-injectivity.* Proc. Amer. Math. Soc. **41** (1973), 437–442.
8. К. Фейс, *Алгебра: кольца, модули и категории.* т. 1, Мир, Москва, 1977.
9. Ф. Каш, *Модули и кольца.* Мир, Москва, 1981.
10. M. Prest, Ph. Rothmaler, M. Ziegler, *Absolutely pure and flat modules and "indiscrete" rings.* J. Algebra **174** (1995), 349–372.
11. К. Фейс, *Алгебра: кольца, модули и категории.* т. 2, Мир, Москва, 1979.
12. J. Rada, M. Saorin, *On two problems about embedding of modules in free modules.* Notas de Matemática (Serie: Pre-Print) **170** (1998).

13. G. Renault, *Sur les anneaux de groupes.* C. R. Acad. Sc. Paris Ser. A **273**, No. 2 (1971), 84–87.
14. I. G. Connell, *On the group ring.* Canad. J. Math. **15** (1963), 650–685.
15. M.-P. Malliavin, *Sur les anneaux de groupes FP-self-injectifs.* C. R. Acad. Sc. Paris Ser. A **273**, No. 2 (1971), 88–91.

Garkusha G. A. FP-injective and weakly quasi-Frobenius rings.

The classes of FP-injective and weakly quasi-Frobenius rings are investigated. The properties for both classes of rings are closely linked with embedding of finitely presented modules in fp-flat and free modules respectively. Using these properties, we characterize the classes of coherent CF- and FGF-rings. Moreover, it is proved that the group ring $R(G)$ is FP-injective (weakly quasi-Frobenius) if and only if the ring R is FP-injective (weakly quasi-Frobenius) and G is locally finite.

Санкт-Петербург
email:ggarkusha@mail.ru

Поступило 27 декабря 1999 г.