Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 265, 1999 г.

С. В. Востоков, И. Б. Жуков, Г. К. Пак

РАСШИРЕНИЯ С ПОЧТИ МАКСИМАЛЬНОЙ ГЛУБИНОЙ ВЕТВЛЕНИЯ

Введение

В работе [2] для классических локальных полей были найдены условия, при которых во вполне разветвленном p-расширении L/K дифферента $\mathcal{D}_{L/K}$ делится на степень расширения, т.е.

$$[L:K]\,|\,\mathcal{D}_{L/K}. \tag{$*$}$$

Для вполне разветвленных p-расширений полных дискретно нормированных полей аналогичный вопрос рассматривался в работе [1], §1. Важность условия $(*)$ объясняется, в частности, тем, что условие $(*)$ равносильно существованию нетривиально разложимых как $\mathcal{O}_K[G]$-модулей идеалов в L (здесь $\mathcal{O}_K$ – кольцо целых в K, а $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ (см. [6, 1]).

Условие $(*)$ означает, что глубина ветвления в L/K имеет "почти максимальное" значение. Рассмотрим, например, случай $[L:K]=p$. Тогда для нормирования дифференты имеем:

$$v_L(\mathcal{D}_{L/K}) = (p-1)(h+1) = pd + p - 1,$$

где h – скачок ветвления L/K, а $d = d_K(L/K)$ – глубина ветвления. Условие $(*)$ можно переписать следующим образом: $pe_K \leqslant (p-1)(h+1)$, или, эквивалентно, $h \geqslant \frac{pe_K}{p-1} - 1$, а также $d \geqslant e_K - \frac{p-1}{p}$. Напомним, что максимально возможные значения h и d равны $\frac{pe_K}{p-1}$ и e_K соответственно.

Рассмотрим фильтрацию ветвления группы $\mathrm{Gal}(L/K)$. Имеется каноническое разложение L/K в башню элементарных абелевых p-расширений. Мы можем, далее, разложить L/K в башню циклических расширений степеней p: $K = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n = L$. В работе [1] были сделаны следующие наблюдения.

А) Условие $(*)$ для L/K влечет $(*)$ для всех промежуточных расширений в L/K (см. [1], предложение 1.5).

Частично поддержана грантом РФФИ (No. 97-01-00058-a).

Б) Условие $(*)$ для "верхней ступени" L/K_{n-1} влечет $(*)$ для всего расширения L/K (см. там же).

С) Условие $(*)$ для "нижней ступени" K_1/K не влечет $(*)$ для всего расширения L/K, однако, если глубина ветвления для K_1/K максимальна (т.е. равна e_K), то расширение L/K – циклическое, и глубина ветвления максимальна на каждой ступени. В частности, $(*)$ верно для K_1/K. (Это хорошо известно, см., например, [5], гл. IV, пример $3f$.)

Д) Условие $(*)$ определяет группу Галуа расширения L/K, а именно, она является циклической, если $p > 2$ (см. [2], а также [1], предложение 1.5).

Е) Если мы знаем a priori, что L/K циклическое, то условие $(*)$ для "нижней ступни" K_1/K влечет $(*)$ для всего расширения L/K. (Это следует из [1], лемма 1.2.1.)

Цель статьи – рассмотреть общий случай без предположения, что L/K вполне разветвлено. Иначе говоря, мы допускаем, что расширение полей вычетов $\overline{L}/\overline{K}$ может быть несепарабельным, и пытаемся найти соответствующие обобщения для А), Б), С), Д), Е).

§§1–3 содержат некоторые вспомогательные результаты. В §4 мы устанавливаем общую структурную теорему для расширений, удовлетворяющих $(*)$ при условии, что $p-1$ делит $e := e_K$. В §5 мы даем полную классификацию циклических расширений, удовлетворяющих $(*)$. §6 и §7 содержат доказательства следующих теорем, описывающих структуру абелевых почти максимально разветвленных расширений. В формулировке ниже мы используем понятие *расширений с независимым ветвлением*, которое вводится в начале §3.

Теорема 1. *Пусть $p-1|e$ и E/K – абелево p-расширение. Обозначим через E_1/K максимальное подрасширение из E/K экспоненты p. Тогда следующие условия эквивалентны*

1) *E/K удовлетворяет $(*)$.*

2) *E_1/K удовлетворяет $(*)$.*

3) *$E = MN$, где M/K и N/K независимо разветвлены, M/K – циклическое расширение, удовлетворяющее $(*)$, а N/K – максимально разветвленное расширение, т.е. его глубина ветвления равна ne, где $p^n = [N:K]$.*

Теорема 2. *Пусть $p-1\nmid e$, и L/K – абелево p-расширение. Запишем L как композит $K^1\dots K^m$, где K^i/K – линейно разделенные циклические расширения, $i=1,\dots,m$. Тогда L/K удовлетворяет условию $(*)$ в том и только в том случае, когда выполнены следующие три условия.*

1) *Подрасширение степени p в K^i/K удовлетворяет $(*)$ для всех $i=1,\dots,m$.*

2) *Подрасширения степени p в K^i/K независимо разветвлены, $i=1,\dots,m$.*

3)
$$\varepsilon\sum_{i=1}^m\left(1-\frac{1}{p^{r_i}}\right)\leqslant 1-\frac{1}{p^r},$$

где
$$p^{r_i}=[K^i:K],\quad i=1,\dots,m;\quad r=\max(r_1,\dots,r_m);$$
$$\varepsilon=\frac{pe}{p-1}-\left[\frac{pe-1}{p-1}\right].$$

Наконец, в §8 мы даем некоторые дальнейшие свойства композитов циклических расширений, удовлетворяющих $(*)$.

Существенная часть статьи была сделана в институте Макса Планка в г. Бонне, второй автор выражает глубокую признательность этому институту за прекрасные условия для работы.

Обозначения и терминология

p – простое число; *мы предполагаем на протяжении всей статьи, что $p>2$.*

Во всей статье K обозначает *пленальное* поле, т.е. полное дискретно нормированное поле нулевой характеристики или характеристики p с полем вычетов характеристики p. Для такого поля K мы используем следующие обозначения:

• $v=v_K$: нормирование на K, а также его ненормализованное продолжение на алгебраическое замыкание поля K;

• $\mathcal{O}=\mathcal{O}_K$: кольцо нормирования в K;

• $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_K=\{a\in\mathcal{O}_K : v(a)>0\}$: максимальный идеал в кольце $\mathcal{O}$;

• $\mathfrak{p}(i)=\mathfrak{p}_K(i)=\mathfrak{M}_K^i$ для любого $i\in\mathbb{Z}$;

• $U_K=\mathcal{O}_K^*$;

- $U_{i,K} = 1 + \mathfrak{p}_K(i)$ для $i \geqslant 1$;
- $\overline{K}$: поле вычетов поля K;
- $\overline{a}$: класс вычетов в $\overline{K}$ элемента $a \in \mathcal{O}_K$;
- $e = e_K = v_K(p)$: абсолютный индекс ветвления K;
- $e(L/K)$: индекс ветвления конечного расширения L/K;
- $\mathcal{D}_{L/K}$: дифферента конечного расширения L/K;
- ζ_n: фиксированный первообразный корень степени n из 1.

Говорим, что конечное расширение L/K:

- ручное, если $(p, e(L/K)) = 1$;
- дикое, если $[L : K] = e(L/K) =$ степень p;
- свирепое, если $[L : K] = [\overline{L} : \overline{K}]_{insep}$;
- строго сепарабельное, если $[\overline{L} : \overline{K}]_{insep} = 1$.
- дико-свирепое, если подполе ветвления (т.е. максимальное ручное подрасширение) в L/K совпадает с K.

Другими словами, дико-свирепое расширение является расширением, которое можно представить как башню расширений степени p, каждое из которых либо дикое, либо свирепое.

Пусть L/K – алгебраическое расширение и M/L – конечное сепарабельное подрасширение. Под глубиной ветвления расширения M/L понимаем

$$d_K(M/L) = \inf\left\{ v_K\left(\frac{\mathrm{Tr}_{M/L}\, y}{y}\right) \middle| y \in M^* \right\}.$$

Пусть $\operatorname{char} K = 0$. Говорим, что расширение L/K – *почти максимально разветвлено* (ПМР), если $[L : K] | \mathcal{D}_{L/K}$. Расширение L/K называем *максимально разветвленным* (МР), если $[L : K] = p^s$ и $d_K(L/K) = se$.

Пусть L/K – расширение Галуа, $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$. *Скачком ветвления* $h(\sigma)$ автоморфизма σ называем

$$h(\sigma) = \min_{a \in L^*} v_L(a^{\sigma-1} - 1).$$

Если $h(\sigma)$ одно и то же для всех $\sigma \neq 1$, то оно называется *скачком ветвления* расширения L/K и обозначается $h(L/K)$. В частности, $h(L/K)$ всегда определено для циклического расширения L/K степени p.

§1. Свойства глубины ветвления

Следующие свойства глубина ветвления взяты из статьи Hyodo [7].

Предложение 1.1. *Пусть L/K и M/L – конечные расширения. Тогда*

$$d_K(M/L) = v_K(\mathcal{D}_{M/L}) + v_K(\pi_M) - v_K(\pi_L).$$

В частности, $d_K(M/L) = 0$ тогда и только тогда, когда M/L – ручное.

Доказательство. Немедленно следует из определения дифференты. □

Предложение 1.2. *Пусть N – промежуточное поле в M/L. Тогда*

$$d_K(M/L) = d_K(M/N) + d_K(N/L).$$

Это лемма (2–4) в [7].

Следствие 1.3. $d_K(M(\zeta_p)/L(\zeta_p)) = d_K(M/L)$.

Предложение 1.4. *Пусть L/K – циклическое расширение степени p. Тогда $d_L(L/K) = (p-1)h(L/K)$.*

Предложение следует из леммы (2–10) в [7].

Напомним, какие возможные значения имеет $h(L/K)$ в этом случае (детали см. [4, Prop. III. 2.3 и Ex. 1 в III. 2]).

Предложение 1.5. 1) *Пусть L/K – дикое расширение степени p, $h = h(L/K)$. Тогда или $0 < h < pe/(p-1)$, и $(p,h) = 1$, или $h = pe/(p-1)$. Последний вариант возможен только в том случае, когда $\operatorname{char} K = 0$ и $\zeta_p \in K$.*

2) *Пусть L/K – свирепое расширение степени p, $h = h(L/K)$. Тогда $0 < h \leqslant e/(p-1)$.*

Напомним, наконец, неравенство Hyodo (см. [7], лемма (4–1) или [3], §1); см. также предложение 2.2 ниже.

Предложение 1.6. *Пусть M/K – циклическое расширение степени p^2, L – промежуточное поле. Тогда*

$$d_K(M/L) \geqslant \min((p-1+p^{-1})d_K(L/K), e - p^{-1}e + p^{-1}d_K(L/K)).$$

§2. Некоторые вычисления в расширениях степени p

Предложение 2.1. *Пусть L/K – циклическое расширение степени p, $d = d_K(L/K)$. Тогда*

$$v\left(\frac{N_{L/K}a}{a^p} - 1\right) \geqslant d$$

для любого $a \in L^*$.

Доказательство. Утверждение тривиально в неразветвленном случае, и поэтому мы считаем, что L/K или дикое, или свирепое расширение.

Обозначим $v\Big(\frac{N_{L/K}a}{a^p} - 1\Big)$ через $j(a)$. Так как $j(a^{-1}) = j(a)$, то мы имеем

$$\min_{a\in L^*} j(a) = \min_{a\in\mathcal{O}_L\setminus\{0\}} j(a).$$

Далее, для любых a, $b \in \mathcal{O}_L$ имеем

$$v(N_{L/K}(a+b) - N_{L/K}a - N_{L/K}b) \geqslant d + p\min(v(a), v(b)),$$

и

$$v((a+b)^p - a^p - b^p) \geqslant e + p\min(v(a), v(b)) \geqslant d + p\min(v(a), v(b)).$$

Предположим, что

$$a, b \in \mathcal{O}_L, \quad a\,b \neq 0 \quad \text{и} \quad v(a+b) = \min(v(a), v(b)).$$

Тогда

$$\begin{aligned} j(a+b) &= v(N_{L/K}(a+b) - (a+b)^p) - p\min(v(a), v(b)) \\ &\geqslant \min(j(a), j(b), d). \end{aligned} \tag{1}$$

Любой элемент $a \in \mathcal{O}_L$ можно записать в виде

$$\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i x^i,$$

где $\alpha_i \in \mathcal{O}_K$ (здесь x – простой элемент L, если L/K – дикое расширение, и $x \in \mathcal{O}_L$, $\overline{x} \notin \overline{K}$, если L/K – свирепое). Из (1) следует

$$j(a) \geqslant \min(j(\alpha_0), j(\alpha_1 x), \ldots, j(\alpha_{p-1}x^{p-1}), d) = \min(j(x), d).$$

Пусть $\operatorname{char} K = 0$. Без нарушения общности мы можем считать, что $\zeta_p \in K$. Тогда $L = K(y)$, $y^p \in K$. Если $d = e$, то можно считать, что $x = y$, откуда $j(x) = \infty$. Пусть $d < e$. Можно выбрать y так, что $v(y-1) = \frac{1}{p-1}(e-d)$. При подходящем выборе x имеем: $x = \pi^{-n}(y-1)^i$, где π – простой элемент в K, $(i,p) = 1$. Следовательно, $j(x) = j(y-1)$. Из того, что $y^p \in K$, следует, что

$$N_{L/K}(y-1) = N_{L/K}y + (-1)^p = (-1)^{p-1}y^p + (-1)^p.$$

Имеем далее

$$j(y-1) = v\left(\frac{y^p-1}{(y-1)^p} - 1\right) = v(y-1) + e - pv(y-1) = d,$$

и утверждение леммы в этом случае проверено.

Пусть теперь $\operatorname{char} K = p$. Тогда $L = K(y)$, $y^p - y \in K$, $v(y) = -\frac{1}{p-1}d$. При подходящем выборе x имеем $x = \pi^n y^i$, где π, i – как выше, и $j(x) = j(y)$. Имеем $N_{L/K}y = y^p - y$, откуда $j(y) = v(-y^{1-p}) = d$. $\square$

Предложение 2.2. *Пусть* $\operatorname{char} K = 0$, $\zeta_p \in K$, M/K *– циклическое расширение степени* p^2, L *– промежуточное поле,* $d = d_K(L/K)$. *Предположим, что* $d > \frac{e}{p}$.

Пусть

$$L = K(x), \quad x^p = 1 + \rho \in K, \quad v(\rho) = \frac{p}{p-1}(e-d).$$

Тогда

$$M = L(y), \quad y^p = b(1+\tau),$$

где $b \in K$, $\tau \in L$; *и*

$$v(\tau^p - \rho) \geqslant \frac{p}{p-1}(e-d) + \min(pd-e, d).$$

Замечание. Мы не исключаем случай $d = e$. В этом случае $v(\rho) = v(\tau) = 0$.

Доказательство. Применяя лемму 1.3 из [1], получим

$$M = L(\sqrt[p]{a}), \quad a \in L, \quad a^{\sigma-1} = c^p, \quad c \in L^*, \quad N_{L/K}c \neq 1,$$

где σ – образующий элемент $\operatorname{Gal}(L/K)$. Пусть $c = 1 + \gamma$, тогда

$$N_{L/K}c = 1 + N_{L/K}\gamma + \operatorname{Tr}_{L/K}\gamma', \tag{2}$$

где $v(\gamma' - \gamma) \geqslant 2v(\gamma)$. Так как $N_{L/K}c$ – первообразный корень степени p из 1, то

$$v(N_{L/K}\gamma + \operatorname{Tr}_{L/K}\gamma') = \frac{e}{p-1}.$$

С другой стороны, $v(\operatorname{Tr}_{L/K}\gamma') \geqslant v(\gamma) + d$ по определению глубины ветвления, откуда $v(N_{L/K}\gamma) = pv(\gamma)$. Так как $d > \frac{e}{p}$, получаем

$$v(\gamma) \leqslant \frac{e}{p(p-1)},$$

откуда
$$v(N_{L/K}\gamma) < v(\operatorname{Tr}_{L/K}\gamma')$$
и поэтому
$$v(\gamma) = \frac{e}{p(p-1)}.$$

По предложению 2.1,
$$v(N_{L/K}\gamma - \gamma^p) \geqslant \frac{e}{p-1} + d.$$
С другой стороны,
$$v(\operatorname{Tr}_{L/K}\gamma') \geqslant \frac{e}{p(p-1)} + d.$$
Поэтому из (2) следует
$$N_{L/K}c \equiv 1 + \gamma^p \mod \mathfrak{p}\left(\frac{e}{p(p-1)} + d\right),$$
и далее,
$$N_{L/K}c \equiv (1+\gamma)^p \mod \mathfrak{p}\left(\min\left(\frac{e}{p(p-1)} + d, e\right)\right)\mathcal{O}_L.$$

Имеем: $(1+\gamma)^p = c^p = a^{\sigma-1}$. Элемент $x^{\sigma-1}$ является также первообразным корнем степени p из 1, откуда $x^{\sigma-1} = (N_{L/K}c)^i$ при некотором $1 \leqslant i \leqslant p-1$. Получили
$$x^{\sigma-1} \equiv (a^i)^{\sigma-1} \mod \mathfrak{p}\left(\min\left(\frac{e}{p(p-1)} + d, e\right)\right)\mathcal{O}_L.$$
Запишем x в виде $a^i b_1(1+\tau_1)$, где $b_1 \in K$ и $v(\tau_1)$ – максимально возможное. Имеем
$$v\left(\frac{1+\tau_1^\sigma}{1+\tau_1} - 1\right) \geqslant \min\left(\frac{e}{p(p-1)} + d, e\right).$$

С другой стороны, из выбора τ_1 следует, что $\tau_1 \notin K^* \cdot U_{1,L}$, откуда $v(\tau_1^{\sigma-1} - 1) = \frac{d}{p-1}$. Таким образом,
$$v(\tau_1) \geqslant \min\left(\frac{e}{p(p-1)} + d, e\right) - \frac{d}{p-1}.$$

Положим $y = \sqrt[p]{a^i}$. Тогда $M = L(\sqrt[p]{a}) = L(y)$,

$$y^p = a^i = b_1^{-1}x(1+\tau_1)^{-1} = b(1+\tau),$$

где $b = b_1^{-1}$, $\tau = x(1+\tau_1)^{-1} - 1$. Чтобы оценить $v(\tau^p - \rho)$, заметим, что $x = (1+\tau)(1+\tau_1)$, откуда

$$1+\rho = x^p = (1+\tau)^p(1+\tau_1)^p$$

и

$$v(\tau^p - \rho) \geqslant \min(v(\tau_1^p), v(p\tau), v(p\tau_1)).$$

Так как

$$v(x-1) = \frac{1}{p-1}(e-d) \quad \text{и} \quad d > \frac{e}{p},$$

то $v(x-1) < v(\tau_1)$, откуда

$$v(\tau) = v(x-1) = \frac{1}{p-1}(e-d)$$

и

$$\begin{aligned} v(\tau^p - \rho) &\geqslant \min(v(\tau_1^p), v(p\tau)) \\ &= \min\left(pv(\tau_1), \frac{pe}{p-1} - \frac{d}{p-1}\right) \\ &= \min\left(\frac{e}{p-1} + pd - \frac{pd}{p-1}, pe\frac{pd}{p-1}, \frac{pe}{p-1} - \frac{d}{p-1}\right) \\ &= \frac{p}{p-1}(e-d) + \min(pd-e, d). \end{aligned}$$

В последнем переходе мы использовали условие $p > 2$. $\square$

Замечание. Из доказательства видно, что $v(b) = v(a^i)$, $1 \leqslant i \leqslant p-1$. С другой стороны, можно предполагать, что или $p \nmid v_L(a)$, или $v_L(a) = 0$. Поэтому или $p \nmid v_L(b)$, или $v_L(b) = 0$.

§3. Расширения с независимым ветвлением

Предложение 3.1. *Пусть L/K и K'/K – конечные сепарабельные расширения, $L' = K'L$. Тогда $d_K(L'/K') \leqslant d_K(L/K)$.*

Доказательство. Пусть сперва L/K – циклическое, степени p. Предположим, что $\operatorname{char} K = 0$. Учитывая следствие 1.3, мы можем считать, что $\zeta_p \in K$. Тогда

$$L = K(x), \quad x^p = a \in K, \quad v(a-1) = \frac{p}{p-1}(e - d_K(L/K)).$$

Так как $L' = K'(x)$, получаем

$$v(a-1) \leqslant \frac{p}{p-1}(e - d_K(L'/K')),$$

откуда $d_K(L'/K') \leqslant d_K(L/K)$. Случай $\operatorname{char} K = p$ разбирается аналогично.

Пусть теперь L/K – произвольное дико-свирепое расширение степени p. Обозначим через M/K нормальное замыкание L/K; подполе ветвления в M/K обозначим через E. Тогда M/E – циклическое расширение степени p, и мы имеем

$$\begin{aligned} d_K(L'/K') = d_K(M'/K') = d_K(M'/E') \leqslant \\ \leqslant\ d_K(M/E) = d_K(M/K) = d_K(L/K). \end{aligned}$$

В самом деле, расширения M/L, M'/L', E/K и E'/K' являются ручными.

В случае произвольного расширения L/K мы можем представить его в виде башни $K \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n = L$, где K_1/K – ручное, а K_{i+1}/K_i – дико-свирепые расширения, $i = 1, \dots, n-1$. $\square$

Следствие 3.2. *Пусть L_1/K, L_2/K – конечные сепарабельные расширения. Тогда*

$$d_K(L_1 L_2/K) \leqslant d_K(L_1/K) + d_K(L_2/K).$$

Доказательство. Нужно объединить предложение 3.1 с предложением 1.2. $\square$

Определение. *Конечные сепарабельные расширения $L_1/K, L_2/K, \dots, L_r/K$ называем независимо разветвленными (или расширениями с независимым ветвлением), если*

$$d_K(L_1 \dots L_r/K) = d_K(L_1/K) + \cdots + d_K(L_r/K).$$

Предложение 3.3. 1) *Пусть $K_1/K, \dots, K_r/K$ – подрасширения в $L_1/K, \dots, L_r/K$ соответственно. Если $L_1/K, \dots, L_r/K$ – независимо разветвлены, то $K_1/K, \dots, K_r/K$ – тоже независимо разветвлены.*

2) *Пусть $r \geqslant 3$. Тогда расширения $L_1/K, \dots, L_r/K$ – независимо разветвлены в том и только том случае, когда $L_1/K, \dots, L_{r-1}/K$ независимо разветвлены, и L_r/K независимо разветвлено с расширением $L_1 \dots L_{r-1}/K$.*

Доказательство. Немедленно следует из определения. $\square$

Замечание 1. В “классическом случае” (когда поле вычетов поля K совершенно) произвольные два расширения не могут быть независимо разветвлены, исключая случай, когда одно из них ручное. Действительно, легко видеть, что мы имеем строгие неравенства в доказательстве предложения 3.1.

Замечание 2. Пусть L_1/K, L_2/K – конечные сепарабельные расширения, L_1/K – дикое расширение, а L_2/K – свирепое. Тогда L_1/K и L_2/K независимо разветвлены. В самом деле, можно проследить доказательство предложения 3.1 и увидеть, что мы получаем равенства вместо неравенств.

Предложение 3.4. *Пусть* $\operatorname{char} K = 0$, $\zeta_p \in K$, $L_1 = K(x_1)$, $L_2 = K(x_2)$, $x_1^p = a_1 \in K$, $x_2^p = a_2 \in K$. *Для каждого* $i = 1, 2$ *положим, что* $a_i = \rho_i$ *или* $a_i = 1 + \rho_i$, *где* $v(\rho_i) \geqslant 0$, $\rho_i \notin (K^*)^p \cdot U_{v_K(\rho_i)+1,K}$. *Тогда следующие два условия равносильны*

1) L_1/K *и* L_2/K *– независимо разветвлены;*
2) $\forall i = 1, 2, \ldots, p-1\colon \rho_1/\rho_2^i \notin (K^*)^p \cdot U_{1,K}$.

Замечание. Мы дадим доказательство только для расширений, у которых $d_K(L_1/K) = d_K(L_2/K)$. Предложение будет использоваться только для расширений, удовлетворяющих этому условию.

Доказательство.
Случай 1: L_1/K – свирепое, L_2/K – дикое расширение. Тогда L_1/K и L_2/K независимо разветвлены по замечанию 2 выше. Имеем, $p|v(\rho_1)$, $p \nmid v(\rho_2)$. Поэтому $p \nmid v(\rho_1/\rho_2^i)$ для любого $i = 1, \ldots, p-1$, откуда $\rho_1/\rho_2^i \notin (K^*)^p \cdot U_{1,K}$.

Случай 2: L_1/K – дикое, L_2/K – свирепое. Аналогично случаю 1.

Случай 3: оба L_1/K и L_2/K – дикие расширения. Если $d_K(L_1/K) = d_K(L_2/K) = e$, то можем предположить, что $v(\rho_1) = v(\rho_2) = 1$. Тогда $x_1 = \tau_1$ – простой элемент в L_1. Если

$$d_K(L_1/K) = d_K(L_2/K) = e - \frac{p-1}{p} j, \quad j \geqslant 1,$$

то имеем $x_1 = 1 + \tau_1$, $v_{L_1}(\tau_1) = j$.

Предположим, что

$$\rho_1/\rho_2^i \notin (K^*)^p \cdot U_{1,K}, \quad i = 1, \ldots, p-1.$$

Тогда
$$\rho_2 = \rho_1 \cdot t, \quad t \in U_K, \quad \overline{t} \notin \overline{K}^p.$$

Это означает, что в L_1 мы имеем или $a_2 = \tau_1^p t + \dots$, или $a_2 = 1 + \tau_1^p t + \dots$, где точки обозначают члены более высокого порядка. В обоих случаях мы видим немедленно, что $d_K(L_1L_2/L_1) = d_K(L_1/K)$ ($= e$ или $e - \frac{p-1}{p}j$ соответственно).

Предположим, $\rho_1/\rho_2^i \in (K^*)^p \cdot U_{1,K}$; ясно, что это возможно, только когда $i = 1$. Мы получаем тогда или $a_2 = \tau_2^p b^p + \dots$, или $a_2 = 1 + \tau_2^p b^p + \dots$ при некотором $b \in U_K$, откуда $d_K(L_1L_2/L_1) < d_K(L_1/K)$.

Случай 4: Как L_1/K, так и L_2/K – свирепые расширения. Пусть сперва $d_K(L_1/K) = d_K(L_2/K) = e$. Тогда $a_1 = \rho_1 \in U_K$, $a_2 = \rho_2 \in U_K$, $\overline{\rho_1}, \overline{\rho_2} \notin \overline{K}^{\,p}$. Имеем
$$\begin{aligned}
&\frac{\rho_1}{\rho_2^i} \notin (K^*)^p \cdot U_{1,K}, \quad i = 1, \dots, p-1\\
\iff &\frac{\overline{\rho_1}}{\overline{\rho_2}^i} \notin \overline{K}^{\,p}, \quad i = 1, \dots, p-1\\
\iff &\overline{L_1} \cap \overline{L_2} = \overline{K}\\
\iff &\overline{\rho_2} \notin \overline{L_1}^p\\
\iff &d_K(L_1L_2/L_1) = 0\\
\iff &L_1/K \ \text{ и } \ L_2/K \text{ – независимо разветвлены.}
\end{aligned}$$

Далее, пусть $d_K(L_1/K) = d_K(L_2/K) < e$. Тогда
$$a_1 = 1 + \pi^{pn} b_1, \quad a_2 = 1 + \pi^{pn} b_2, \quad b_1, b_2 \in U_K, \quad \overline{b_1}, \overline{b_2} \notin \overline{K}^p.$$

Тогда
$$\frac{\rho_1}{\rho_2^i} \notin (K^*)^p \cdot U_{1,K}, \quad i = 1, \dots, p-1 \iff \frac{\overline{b_1}}{\overline{b_2}^i} \notin \overline{K}^{\,p}, \quad i = 1, \dots, p-1,$$

и мы продолжаем доказательство как выше. $\square$

Следствие 3.5. *Пусть* $\operatorname{char} K = 0$, $\zeta_p \in K$, $L_i = K(x_i)$, $x_i^p = 1 + \pi^n b_i \in K$, $v(b_i) = 0$, $i = 1, \dots, m$, π – *простой в* K, $n \geqslant 1$.

1) *Пусть* $p|n$. *Тогда* $L_1/K, \dots, L_m/K$ *независимо разветвлены в том и только в том случае, когда*
$$d\overline{b_1}, \dots, d\overline{b_m} \in \Omega_{\overline{K}/\overline{K}^p}$$

линейно независимы над $\overline{K}^p$.

2) *Пусть* $p \nmid n$. *Тогда* $L_1/K, \dots, L_m/K$ *независимо разветвлены в том и только в том случае, когда*

$$d(\overline{b_2/b_1}), \dots, d(\overline{b_m/b_1}) \in \Omega_{\overline{K}/\overline{K}^p}$$

линейно независимы над $\overline{K}^p$.

Два нижеследующих следствия не будут использоваться в оставшейся части статьи, и мы опустим их доказательство.

Следствие 3.6. *Пусть* L_1/K *и* L_2/K *– независимо разветвленные циклические расширения степени* p, $d(L_1/K) = d(L_2/K)$. *Пусть* M *– промежуточное поле в* L_1L_2/K, $[M : K] = p$. *Тогда* $d(M/K) = d(L_1/K)$.

Следствие 3.7. *Пусть* L_1/K *и* L_2/K *– независимо разветвленные циклические расширения степени* p. *Пусть* $L_3, \dots, L_{p+1}$ *– промежуточные поля в* L_1L_2/K, *отличные от* K, L_1, L_2, L_1L_2. *Предположим, что* $d(L_1/K) \leqslant d(L_2/K)$. *Тогда* L_1/K *и* L_i/K *независимо разветвленные для* $i = 3, \dots, p+1$. *В частности, если* $d(L_1/K) = d(L_2/K)$, *то* L_i/K *и* L_j/K *независимо разветвлены для всех* $i \neq j$.

Частично обращение этого следствия выглядит следующим образом.

Предложение 3.8. *Пусть* $L_1/K, \dots, L_r/K$ *– циклические расширения степени* p, *такие что* $[L_1 \dots L_r : K] = p^r$. *Предположим, что* $d(M/K) = e$ *для любого* $M \subset L_1 \dots L_r$ *такого, что* $[M : K] = p$. *Тогда* $L_1/K, \dots, L_r/K$ *независимо разветвлены.*

Доказательство. Индукция по r. Пусть сперва $r = 2$. Без нарушения общности мы можем считать, что $\zeta_p \in K$. Пусть $L_i = K(x_i)$, $x_i^p = a_i \in K$, $i = 1, 2$. По теории Куммера различные поля $M \subset L_1L_2$ соответствуют a_1, a_2, a_1a_2, $a_1a_2^2, \dots, a_1a_2^{p-1}$. Так как $d_K(M/K) = e$ для любого M, то

$$a_1,\, a_2,\, a_1a_2,\, a_1a_2^2, \dots, a_1a_2^{p-1} \notin (K^*)^p \cdot U_{1,K}.$$

Тогда по предложению 3.4 поля L_1/K и L_2/K независимо разветвлены.

Пусть теперь $r \geqslant 3$. Предположим, что $L_1/K, \dots, L_r/K$ не являются независимо разветвленными. Применяя случай $r = 2$, получаем, что $d_K(L_2L_1/L_1) = \dots = d_K(L_rL_1/L_1) = e$. Так как

$d_K(L_1/K) = e$, то расширения $L_2L_1/L_1, \ldots, L_rL_1/L_1$ не могут быть независимо разветвленными. По индукционному предположению существует некоторое подрасширение M'/L_1 в $L_1 \ldots L_r/L_1$ степени p такое, что $d_K(M'/L_1) < e$. Имеем $M' = M_1L_1$, $[M_1 : K] = p$. Так как $M_1 \subset L_1 \ldots L_r$, $d_K(M_1/K) < e$, то L_1/K и M_1/K не являются независимо разветвленными. Еще раз применяя случай $r = 2$, мы приходим к существованию $M \subset L_1M_1$, $[M : K] = p$ и $d_K(M/K) < e$ – противоречие. $\square$

Следующие леммы будут использоваться в §4 и §7 соответственно.

Лемма 3.9. *Пусть L/K и K'/K – дикие циклические расширения степени p, которые являются независимо разветвленными. Предположим, что $d_K(L/K) = e$ и $d_K(K'/K) \geqslant \frac{p-1}{p}$. Тогда $d_{K'}(LK'/K') \leqslant e_{K'} - (p-1)$. В частности, LK'/K' не является ПМР-расширением.*

Лемма 3.10. *Пусть L/K и K'/K – независимо разветвленные расширения Галуа, L/K – свирепое расширение. Тогда LK'/K' – свирепое расширение.*

§4. Общие замечания о ПМР-расширениях

В этом параграфе $\operatorname{char} K = 0$; K_n/K является дико-свирепым расширением Галуа, $[K_n : K] = p^n$. Обозначим $p^s = e(K_n/K)$.

Обсудим сперва случай $n = 1$.

Предложение 4.1. *Пусть L/K – циклическое расширение степени p.*

1) *Пусть L/K – дикое расширение и $\zeta_p \in K$. Тогда L/K является ПМР в том и только в том случае, если*

$$h(L/K) \geqslant \frac{pe}{p-1} - 1.$$

2) *Пусть L/K – дикое расширение и $\zeta_p \notin K$. Тогда L/K является ПМР в том и только в том случае, если*

$$h(L/K) = \left[\frac{pe-1}{p-1}\right].$$

3) *Пусть L/K – свирепое расширение. Тогда L/K является ПМР в том и только в том случае, если*

$$h(L/K) = \frac{e}{p-1}.$$

В общем случае L/K является ПМР тогда и только тогда, когда $d_K(L/K) \geqslant e - \frac{p-1}{p}$.

Доказательство. Для циклического расширения L/K степени p условие ПМР равносильно неравенству

$$d_K(L/K) - v_K(\pi_L) + v_K(\pi_K) \geqslant e$$

(см. предложение 1.1). В свирепом случае это означает, что

$$d_L(L/K) = d_K(L/K) \geqslant e, \quad \text{т.е.} \quad h(L/K) = e/(p-1).$$

В диком случае условие ПМР равносильно неравенству

$$\frac{p-1}{p} h(L/K) - \frac{1}{p} + 1 \geqslant e, \quad \text{т.е.} \ h(L/K) \geqslant \frac{pe}{p-1} - 1.$$

Заметим, что если $\zeta_p \notin K$, то $h(L/K) < \frac{pe}{p-1}$ и единственное возможное значение скачка ветвления в ПМР-расширении равно $\left[\frac{pe-1}{p-1}\right]$. $\square$

Замечание. Расширения третьего типа могут существовать, только если расширение $K(\zeta_p)/K$ неразветвлено. Поэтому, если $e(K(\zeta_p)/K) \neq 1$, то нет расширений над K с максимальным ветвлением, заметим при этом, что в случае свирепого расширения понятие ПМР-расширения совпадает с понятием МР-расширения.

Теперь мы перейдем к общему случаю и начнем с почти очевидной леммы.

Лемма 4.2. *Пусть K_n/K является ПМР-расширением, M – промежуточное поле. Тогда M/K является ПМР-расширением.*

Доказательство. Пусть $[M:K] = p^m$, $e(M/K) = p^r$. Тогда

$$\begin{aligned} d_K(M/K) &= d_K(K_n/K) - d_K(K_n/M) \geqslant \\ &\geqslant ne - 1 + \frac{1}{p^s} - (n-m)e = me - 1 + \frac{1}{p^s}. \end{aligned}$$

Так как $p^r d_K(M/K) = d_M(M/K)$ – целое, то

$$d_K(M/K) \geqslant me - 1 + \frac{1}{p^r},$$

т.е. M/K является ПМР-расширением. $\square$

Замечание. K_n/M не обязательно, вообще говоря, является ПМР-расширением.

Построим теперь индуктивной процедурой некоторую последовательность подполей $K_0 = K, K_1, \ldots, K_{n-1}$ в K_n/K таких, что $[K_i : K] = p^i$. Пусть G_h – последняя нетривиальная подгруппа ветвления в $\mathrm{Gal}(K_n/K)$; она является элементарной абелевой p-группой. Пусть H – произвольная подгруппа порядка p в G_h; обозначим через K_{n-1} соответствующее промежуточное поле в K_n/K. Очевидно, что K_{n-1}/K – расширение Галуа степени p^{n-1}. Тогда повторим этот шаг относительно K_{n-1}/K.

Заметим, что

$$d_K(K_n/K_{n-1}) = (p-1)\frac{h}{p^s} \quad \text{и} \quad d_K(K_n/L) \leqslant (p-1)\frac{h}{p^s},$$

где L – произвольное промежуточное поле в K_n/K такое, что $[K_n : L] = p$. Тогда имеем следующую лемму.

Лемма 4.3. 1) *K_i/K – нормальные расширения степеней p^i, $i = 1, \ldots, n$.*

2) *Если M – промежуточное поле в K_i/K_{i-2}, то*

$$d_K(K_i/M) \leqslant d_K(K_i/K_{i-1}),$$

и тем самым,

$$d_K(M/K_{i-2}) \geqslant d_K(K_{i-1}/K_{i-2}), \quad i = 2, \ldots, n.$$

Теорема 4.4. *Пусть $p-1|e$. Расширение K_n/K является ПМР тогда и только тогда, когда существует нормальное подрасширение L/K степени p^l, $0 \leqslant l \leqslant n$, со следующими свойствами:*

1) *L/K – циклическое дикое расширение и*

$$d_K(K_i/K_{i-1}) = e - 1/p^{i-1} + 1/p^i, \quad i = 1, \ldots, l,$$

где K_i/K обозначает подрасширение степени p^i в L/K.

2) *K_n/L является максимально разветвленным расширением.*

Доказательство. Из существования L с двумя свойствами немедленно следует, что K_n/K является ПМР-расширением.

Мы должны показать обратное. Если $d_K(K_i/K_{i-1}) = e$ для произвольного i, то возьмем $L = K$. В противном случае рассмотрим максимальное l такое, что $d_K(K_l/K_{l-1}) < e$. Пусть $L = K_l$. Очевидно, что $d_K(K_n/L) = (n-l)e$, и остается проверить первое свойство.

Предположим, что $d_K(K_i/K_{i-1}) = e$ при некотором $i < l$; считаем, что i – максимально возможное с таким свойством. Рассмотрим K_{i+1}/K_{i-1}, которое является расширением Галуа степени p^2. Если оно циклическое, то $d_K(K_{i+1}/K_i) = e$ по предложению 1.6, что противоречит максимальности i. Если K_{i+1}/K_{i-1} является элементарно абелевым, то для любого промежуточного поля M в K_{i+1}/K_{i-1} имеем $d_K(M/K_{i-1}) = e$, учитывая лемму 4.3. По следствию 3.6 расширение K_i/K_{i-1} является независимо разветвленным с произвольным M/K_{i-1}, отличным от K_i/K_{i-1}, и мы заключаем, что $d_K(K_{i+1}/K_i) = e$.

Таким образом, $d_K(K_i/K_{i-1}) < e$ для всех $i \leqslant l$.

Используя индукцию по i, проверим следующее утверждение.

Для всех $i = 1, \ldots, l$:

K_i/K_{i-1} – дикое расширение, в котором $d_K(K_i/K_{i-1}) = e-1/p^{i-1}+1/p^i$, при этом K_n/K_i является ПМР-расширением и K_i/K_{i-2} – циклическое расширение для $i \geqslant 2$.

Пусть $i = 1$. Если K_1/K было бы свирепым, то $d_K(K_1/K)$ было бы целым, значит $d_K(K_1/K) = e$ – противоречие. Таким образом, K_1/K – дикое расширение. Далее, $pd_K(K_1/K)$ должно быть целым, откуда $d_K(K_1/K) \geqslant e-1-1/p$. Так как $d_K(K_1/K) < e$, то $d_K(K_1/K) \geqslant e-1+1/p$. Далее, $d_{K_1}(K_n/K_1) \geqslant (n-1)e_{K_1} - 1 + \frac{1}{p^{s-1}}$, и поэтому K_n/K_1 является ПМР-расширением.

Для $i > 1$ рассуждение аналогично. Предположим, что K_i/K_{i-2} – не циклическое. Тогда оно является элементарным абелевым, т.е. композитом K_{i-1}/K_{i-2} и некоторого циклического M/K_{i-2}. Так как

$$d_K(K_i/K_{i-1}) > d_K(K_{i-1}/K_{i-2}),$$

то должно быть выполнено

$$d_K(M/K_{i-2}) > d_K(K_{i-1}/K_{i-2}),$$

откуда $d_K(M/K_{i-2}) = e$. Расширения M/K_{i-2} и K_{i-1}/K_{i-2} не могут быть независимо разветвленными, т.к. $d_K(K_i/K_{i-1}) < e$. По лемме 3.9

$$d_K(K_i/K_{i-1}) \leqslant e - \frac{p-1}{p^{i-1}}$$

– противоречие.

Тем самым наше утверждение проверено, и цикличность L/K следует из общих теоретико-групповых рассуждений. $\square$

Следствие 4.5. *Пусть $p-1|e$ и K_n/K – ПМР-расширение. Тогда существует самое большее одно подрасширение M/K степени p в K_n/K такое, что $d_K(M/K) < e$.*

Доказательство. Предположим, что существует M/K такое, что $d_K(M/K) < e$ и $M \neq K_1$. Так как L/K – циклическое, то $M \not\subset L$. Поэтому $d_K(LM/L) < e$, что противоречит $d_K(K_n/L) = (n-l)e$. $\square$

Следствие 4.6. *Пусть $p-1|e$. Предположим, что K_n/K – композит двух линейно разделенных расширений M/K и M'/K, и пусть K_n/K является ПМР-расширением. Тогда по крайней мере одно из расширений M/K, M'/K является МР.*

Доказательство. Предположим, что K_n/K является ПМР-расширением. По крайней мере одно из M/K, M'/K линейно разделено с L/K из условия теоремы. Предположим, что это M'/K. Так как LM'/L – подрасширение в K_n/L, то оно является максимально разветвленным, и поэтому M'/K также является максимально разветвленным. $\square$

§5. Циклические ПМР-расширения

В этом параграфе используем обозначения §4 и предположим, кроме того, что K_n/K – циклическое расширение.

Предложение 5.1. *Пусть M/K – циклическое расширение степени p^2, L – промежуточное поле.*

1) *Пусть L/K – дикое расширение, в котором*

$$h(L/K) = \frac{pe}{p-1} - i, \quad 0 < i < \frac{\min(e_{K(\zeta_p)}, p)}{e(K(\zeta_p)/K)}.$$

Тогда или M/L – дикое расширение со скачком $h(M/L) = \frac{p^2e}{p-1} - i$, или M/L – свирепое, со скачком $h(M/L) = \frac{pe}{p-1}$.

2) *Пусть* L/K – *свирепое расширение, в котором* $h(L/K) = \frac{e}{p-1}$. *Тогда или* M/L – *свирепое расширение со скачком* $h(M/L) = \frac{e}{p-1}$, *или* M/L – *дикое, со скачком* $h(M/L) = \frac{pe}{p-1}$.

3) *Пусть* L/K – *дикое расширение со скачком* $h(L/K) = \frac{pe}{p-1}$. *Тогда* M/L – *дикое расширение со скачком* $h(M/L) = \frac{p^2e}{p-1}$.

Доказательство. Не нарушая общности, мы можем считать, что $\zeta_p \in K$ (см. следствие 1.3).

1. Так как

$$d_K(L/K) = \frac{p-1}{p} h(L/K) > e - \frac{p-1}{p}\min(e,p) \geqslant \frac{e}{p},$$

то применимо предложение 2.2, в котором имеем $v_K(\rho) = i$ и, следовательно, $v_L(\tau) = i$. Запишем $b = \pi_K^j u$, где $u \in U_K$, $\pi_K = N_{L/K}\pi_L$, π_L – простой элемент в L. Можем считать, что $0 \leqslant j \leqslant p-1$. По предложению 2.1 имеем

$$v_L(\pi_K/\pi_L^p - 1) \geqslant p\big(e - \frac{p-1}{p} i\big) > i.$$

Поэтому

$$b(1+\tau) \approx \pi_L^{pj} u(1+\tau) \mod \mathfrak{p}_L(i+1).$$

Если $\overline{u} \notin (\overline{K})^p$, то M/L – свирепое расширение и $h(M/L) = \frac{pe}{p-1}$. В противном случае

$$u \in (K^*)^p \cdot U_{1,K} \subset (K^*)^p \cdot U_{i+1,L}.$$

Поэтому M/L – дикое расширение, и

$$h(M/L) = \frac{p}{p-1} e_L - v_L(\tau) = \frac{p^2 e}{p-1} - i.$$

2. Использование предложения 2.2 дает $v(1+\tau) = 0$ и $\overline{1+\tau} \notin (\overline{L})^p$. Если $p | v_K(b)$, то M/L – свирепое расширение и $h(M/L) = \frac{e}{p-1}$. В противном случае, M/L – дикое расширение со скачком $h(M/L) = \frac{pe}{p-1}$.

3. Полагая, что $1+\rho$ – простой элемент в K, видим, используя предложение 2.2, что $1+\tau$ – простой элемент в L. Отсюда следует, что $v_L(b(1+\tau) \equiv 1 \mod p$, откуда M/L – дикое расширение и $h(M/L) = \frac{p^2e}{p-1}$. $\square$

Следствие 5.2. *Предположим, что K_1/K – дикое расширение со скачком*

$$h(K_1/K) = \frac{pe}{p-1} - i, \quad 0 < i < \frac{\min(e_{K(\zeta_p)}, p)}{e(K(\zeta_p)/K)}.$$

Тогда существуют целые l и m, $1 \leqslant l \leqslant m \leqslant n$, такие, что:

1) *если $1 \leqslant j \leqslant l$, то K_j/K_{j-1} – дикое расширение со скачком*

$$h(K_j/K_{j-1}) = \frac{p^j e}{p-1} - i;$$

2) *если $l+1 \leqslant j \leqslant m$, то K_j/K_{j-1} – свирепое расширение со скачком*

$$h(K_j/K_{j-1}) = \frac{p^l e}{p-1};$$

3) *если $m+1 \leqslant j \leqslant n$, то K_j/K_{j-1} – дикое расширение со скачком*

$$h(K_j/K_{j-1}) = \frac{p^{l+j-m} e}{p-1}.$$

Более того, $l < m$, кроме случая $l = m = n$. В случае $\zeta_p \notin K$ имеем $m = n$.

Следствие 5.3. *Предположим, что K_1/K имеет максимально возможное значение скачка, т.е. $h(K_1/K) = e_L/(p-1)$. Тогда существует целое m, $0 \leqslant m \leqslant n$, такое, что:*

1) *если $1 \leqslant j \leqslant m$, то K_j/K_{j-1} – свирепое расширение со скачком*

$$h(K_j/K_{j-1}) = \frac{e}{p-1};$$

2) *если $m+1 \leqslant j \leqslant n$, то K_j/K_{j-1} – дикое расширение со скачком*

$$h(K_j/K_{j-1}) = \frac{p^{j-m} e}{p-1}.$$

В случае $\zeta_p \notin K$ имеем $m = n$.

Следствие 5.4. *Предположим, что K_1/K – ПМР-расширение. Тогда существуют целые l и m, $1 \leqslant l \leqslant m \leqslant n$, такие, что:*

1) если $1 \leqslant j \leqslant l$, то K_j/K_{j-1} – дикое расширение со скачком

$$h(K_j/K_{j-1}) = \left[\frac{p^j e - 1}{p-1}\right];$$

2) если $l+1 \leqslant j \leqslant m$, то K_j/K_{j-1} – свирепое расширение со скачком

$$h(K_j/K_{j-1}) = \frac{p^l e}{p-1};$$

3) если $m+1 \leqslant j \leqslant n$, то K_j/K_{j-1} – дикое расширение со скачком

$$h(K_j/K_{j-1}) = \frac{p^{l+j-m} e}{p-1}.$$

Более того, $l < m$, кроме случая $l = m = n$. В случае $\zeta_p \notin K$ имеем $m = n$.

В частности, любое K_j/K_{j-1} является ПМР-расширением, и K_n/K – тоже ПМР-расширение. Кроме того,

$$d_K(K_n/K) = ne - \left(1 - \frac{1}{p^l}\right)i,$$

где

$$i = \frac{pe}{p-1} - \left[\frac{pe-1}{p-1}\right].$$

Доказательство. Заметим, что

$$1 < \frac{\min(e_{K(\zeta_p)}, p)}{e(K(\zeta_p)/K)},$$

кроме случая $e = e_K = 1$. В случае $e = 1$ мы тем не менее имеем

$$\frac{pe}{p-1} - \left[\frac{pe-1}{p-1}\right] = \frac{1}{p-1} < \frac{\min(e_{K(\zeta_p)}, p)}{e(K(\zeta_p)/K)}.$$

Поэтому любое расширение K_n/K, у которого K_1/K является ПМР-расширением, удовлетворяет условиям или следствия 5.2, или следствия 5.3. Поэтому следствие 5.2, в котором взято

$$i = \frac{pe}{p-1} - \left[\frac{pe-1}{p-1}\right],$$

и следствие 5.3 дают классификацию всех циклических дикосвирепых расширений K_n/K, у которых K_1/K является ПМР-расширением (в ситуации следствия 5.3 мы должны предположить, что $l = 0$).

Остается показать, что K_n/K является ПМР-расширением. Мы получаем

$$d_K(K_n/K) = \sum_{j=1}^{n} d_K(K_j/K_{j-1}) =$$
$$= \sum_{j=1}^{l} \left(e - \frac{p-1}{p^j} i\right) + \sum_{j=l+1}^{n} e = ne - \left(1 - \frac{1}{p^l}\right) i,$$

где

$$i = \frac{pe}{p-1} - [\frac{pe-1}{p-1}] \leqslant 1.$$

Отсюда следует, что

$$v_K(\mathcal{D}_{K_n/K}) = d_K(K_n/K) + 1 - \frac{1}{p^{l+n-m}} \geqslant ne = v_K(p^n).$$

□

Теорема 5.5. *Следующие условия равносильны:*

1) K_n/K *является ПМР-расширением,*

2) K_j/K_{j-1} *является ПМР-расширением,* $j = 1, \dots, n$.

3) K_1/K *является ПМР-расширением.*

Доказательство. $1 \Longrightarrow 2$ по теореме 4.4;
$2 \Longrightarrow 3$ – тривиально;
$3 \Longrightarrow 1$ по следствию 5.4. □

§6. Абелевы ПМР-расширения, $p - 1|e$

Лемма 6.1. *Пусть* L/K, $K_1/K, \dots, K_r/K$ *– независимо разветвленные расширения степени* p. *Пусть* M/K *– циклическое расширение степени* p^2 *такое, что* $L \subset M$. *Предположим, что* L/K *является ПМР-расширением и* $K_1/K, \dots, K_r/K$ *– максимально разветвленные расширения. Предположим далее, что*

$$d_K(M/K) \leqslant d_K(M'/K),$$

где M'/K – произвольное циклическое подрасширение степени p^2 в $MK_1 \dots K_r/K$. Тогда M/L, $LK_1/L, \dots LK_r/L$ – независимо разветвленные расширения.

Доказательство. Обозначим $K' = K_1 \dots K_r$.

Случай 1: M/L не является максимально разветвленным расширением. Так как L/K является ПМР-расширением, то можно применить следствие 5.4. Мы получим, что

$$d_K(L/K) = e - \frac{p-1}{p} i \quad \text{и} \quad d_K(M/L) = e - \frac{p-1}{p^2} i,$$

где

$$i = \frac{pe}{p-1} - \left[\frac{pe-1}{p-1}\right].$$

Поэтому

$$d_K(LK'/K') = e - \frac{p-1}{p} i$$

и

$$d_K(MK'/LK') \leqslant e - \frac{p-1}{p^2} i.$$

С другой стороны,

$$d_K(MK'/LK') \geqslant e - \frac{p-1}{p^2} i$$

по предложению 1.6. Отсюда следует, что M/L независимо разветвлено с LK'/L. Осталось заметить, что $LK_1/L, \dots, LK_r/L$ являются, очевидно, независимо разветвленными расширениями и применить предложение 3.3.

Случай 2: L/K – максимально разветвленное расширение. Тогда $d_K(LK'/K') = e$, откуда (по предложению 1.6) $d_K(MK'/LK') = e$.

Случай 3: L/K не является максимально разветвленным, в то время как M/L – максимально разветвлено. По предложению 3.6 существует $M' \subset MK'$ такое, что $[M' : L] = p$ и $d_K(M'/L) < e$. Ясно, что $M' \not\subset LK'$, откуда M'/K – циклическое расширение степени p^2, и мы имеем

$$d_K(M'/K) = d_K(L/K) + d_K(M'/L) < d_K(L/K) + e = d_K(M/K),$$

– противоречие. $\square$

Теорема 6.2. *Пусть $p-1|e$ и E/K – абелево p-расширение. Обозначим через E_1/K максимальное подрасширение в E/K показателя p. Тогда следующие условия равносильны.*

1) E/K – ПМР-расширение.

2) E_1/K – ПМР-расширение.

3) $E = MN$, где M/K и N/K – независимо разветвленные расширения, M/K – циклическое ПМР-расширение, и N/K – максимально разветвленное расширение.

Доказательство. $1 \Longrightarrow 3$. Рассмотрим подполе L как в теореме 4.4. Обозначим через M/K циклическое подрасширение максимальной степени, содержащее L. Далее обозначим N/K произвольное подрасширение в E/K такое, что M/K и N/K линейно разделены и $MN = E$. Так как E/L – максимально разветвлено, то $d_K(E/M) = ne$, откуда $d_K(N/K) = ne$, т.е. N/K – максимально разветвлено и независимо разветвлено с M/K.

$3 \Longrightarrow 2$. Имеем $E_1 = M_1N_1$, где M_1/K, N_1/K – максимальные подрасширения экспоненты p в M/K и N/K соответственно. Тогда M_1/K является ПМР-расширением, E_1/M_1 – максимально разветвлено, откуда E_1/K – ПМР-расширение.

$2 \Longrightarrow 1$. Учитывая теорему 4.4, получаем $E_1 = K_1K'$, где K_1/K – ПМР-расширение степени p, K'/K – расширение показателя p, являющееся максимально разветвленным, и, наконец, K_1/K, K'/K – независимо разветвленные расширения. Пусть M/K – циклическое подрасширение в E/K максимальной степени такое, что $K_1 \subset M$ и M/N не является максимально разветвленным расширением для любого N, $K \subset N \subset M$. Пусть L_1/K – циклическое подрасширение в E/K максимальной степени, содержащее M/K. Выберем, далее, произвольные L_i/K, $i = 2, \dots, r$ такие, что L_i/K – циклические,

$$L_1 \dots L_r = E, \quad [L_1 : K] \dots [L_r : K] = [L_1 \dots L_r : K],$$

и

$$L_i \cap K' = K_i \neq K, \quad i = 2, \dots, r.$$

Пусть L_1^i/K – подрасширение степени p^i в L_1/K. Применяя лемму 6.1, индукцией по i получаем, что

$$L_1^{i+1}/L_1^i, \quad K_2L_1^i/L_1^i, \dots, \quad K_rL_1^i/L_1^i$$

независимо разветвлены. Таким образом, $K_2L_1/L_1, \dots, K_rL_1/L_1$ являются максимально разветвленными и при этом независимо разветвленными расширениями.

Применяя те же рассуждения, получим, что $K_3L_1L_2/L_1L_2, \dots, K_rL_1L_2/L_1L_2$ являются независимо разветвленными МР-расширениями, а тогда процесс индукции дает, что E/L_1 – максимально разветвленное расширение, откуда E/K будет ПМР-расширением по теореме 5.5 и теореме 4.4. $\square$

Замечание. В классическом случае (когда поле вычетов совершенно) ПМР-расширение всегда циклическое. В общем случае легко построить нециклическое ПМР-расширение и даже максимально разветвленное расширение. Действительно, пусть

$$\zeta_p \in K, \quad M = K(x), \quad N = K(y),$$

где

$$x^p = a \in \mathcal{O}_K, \quad \overline{a} \notin \overline{K}^p,$$

$y^p = \pi$ – простой элемент в K. Тогда M/K и N/K – независимо разветвлены по предложению 3.4, и MN/K является максимально разветвленным расширением по теореме 6.2.

§7. Абелевы ПМР-расширения, $p - 1 \nmid e$

Если $p - 1 \nmid e$, то мы не можем более применять теорему 4.4. Тем не менее в этом случае ветвление композита циклических независимо разветвленных ПМР-расширений имеет достаточно регулярное поведение.

Говорим, что циклическое расширение L/K является *чисто ПМР-расширением*, если оно ПМР-расширение, и для любого промежуточного M расширение L/M не является максимально разветвленным. Ясно, что любое чисто ПМР-расширение является диким, и что в случае $p - 1 \nmid e$ все циклические ПМР-расширения являются чистыми ПМР-расширениями.

Для циклического p-расширения L/K обозначим через L_j/K подрасширение степени p^j в L/K, где $p^j \leqslant [L : K]$.

Лемма 7.1. *Пусть $K^1/K, \dots, K^m/K$ – независимо разветвленные чисто ПМР-расширения степени p. Тогда $K^1 \dots K^m/K^1$ – свирепое расширение.*

Доказательство. Расширения K^iK^1/K^1, $i = 2, \dots, m$, – независимо разветвленные и свирепые. Их композит – свирепое по лемме 3.10. $\square$

Предложение 7.2. *Пусть $K^1/K, \dots, K^m/K$ – циклические чисто ПМР-расширения. Предположим, что $K_1^1/K, \dots, K_1^m/K$ – независимо разветвленные расширения. Тогда:*

1) $K^1/K, \dots, K^m/K$ *– независимо разветвлены;*

2) $e(K^1 \dots K^m/K) = \max([K^1 : K], \dots, [K^m : K])$.

Доказательство. Пусть $p^r = \max([K^1 : K], \dots, [K^m : K])$; применим индукцию по r.

Если $r = 1$, то все проверено, см. лемму 7.1. Пусть $r \geqslant 2$. Обозначим через $L = K_1^1 \dots K_1^m$. Без ограничения общности можем предполагать, что для некоторого $l \leqslant m$ имеем

$$[K^i : K] \geqslant p^2, \quad i = 1, \dots, l,$$

и

$$[K^{l+1} : K] = \dots = [K^n : K] = p.$$

Достаточно проверить, что $K^1L/L, \dots, K^lL/L$ – чистые ПМР-расширения и $K_2^1L/L, \dots, K_2^lL/L$ независимо разветвлены. Действительно, по индукционному предположению расширения $K^1L/L, \dots, K^lL/L$ независимо разветвлены. Заметим, что L/K_1^i – свирепое расширение по лемме 7.1, и поэтому является независимо разветвленным с K^i/K_1^i, $i = 1, \dots, l$. Получаем

$$\begin{aligned} d_K(K^1 \dots K^m/K) &= d_K(K^1 \dots K^m/L) + d_K(L/K) \\ &= d_K(K^1 \dots K^lL/L) + d_K(L/K) \\ &= d_K(K^1L/L) + \dots + d_K(K^lL/L) + d_K(L/K) \\ &= d_K(K^1/K_1^1) + \dots + d_K(K^l/K_1^l) \\ &+ d_K(K_1^1/K) + \dots + d_K(K_1^m/K) \\ &= d_K(K^1/K) + \dots + d_K(K^m/K) \end{aligned}$$

и

$$e(K^1 \dots K^m/K) = e(K^1 \dots K^m/L) + e(L/K) = r - 1 + 1 = r.$$

Очевидно, что все K^iL/L – чисто ПМР-расширения, т.к. K^i/K_1^i – дикие, а L/K_1^i – свирепые расширения.

Осталось показать, что $K_2^1L/L, \ldots, K_2^lL/L$ независимо разветвлены. Это эквивалентно тому, что

$$K_2^1L(\zeta_p)/L(\zeta_p), \ldots, K_2^lL(\zeta_p)/L(\zeta_p)$$

независимо разветвлены.

Для любого i расширение $K_1^i(\zeta_p)/K(\zeta_p)$ соответствует уравнению Куммера $x_i^p = 1 + \pi^n u_i$, где $u_i \in U_K$, π – простой элемент в $K(\zeta_p)$, и

$$n = e(K(\zeta_p)/K)\left(\frac{pe}{p-1} - \left[\frac{pe-1}{p-1}\right]\right) \leqslant p-1$$

не зависит от i. Применяя предложение 2.2, видим, что $K_2^i(\zeta_p)/K_1^i(\zeta_p)$ соответствует уравнению Куммера

$$y_i^p = b_i(1+\tau_i), \quad v_{K(\zeta_p)}(\tau_i^p - \pi^n u_i) > n, \quad b_i \in K(\zeta_p).$$

Учитывая замечание после предложения 2.2, мы можем считать $v(b) = 0$. Так как $K_2^i(\zeta_p)/K_1^i(\zeta_p)$ – дикое расширение, то $\overline{b_i} \in \overline{K(\zeta_p)}^p$, т.е. $b_i = \theta_i^p(1+\pi a_i)$, $\theta_i, a_i \in \mathcal{O}_{K(\zeta_p)}$. Обозначим:

$$\tau_i' = (1+\tau_i)(1+\pi a_i) - 1.$$

Тогда

$$K_2^i(\zeta_p) = K_1^i(\zeta_p, y_i'),$$

где

$$y_i'^p = 1 + \tau_i', \quad v_{K(\zeta_p)}(\tau_i'^p - \pi^n u_i) > n.$$

Отсюда немедленно следует, что $\tau_2'/\tau_1', \ldots, \tau_m'/\tau_1'$ – единицы в $L(\zeta_p)$, и

$$(\overline{\tau_i'/\tau_1'})^p = \overline{u_i/u_1}, \quad i = 2, \ldots, m.$$

По следствию 3.5,

$$d(\overline{u_i/u_1}) \in \Omega_{\overline{K(\zeta_p)}/\overline{K(\zeta_p)}^p}, \quad i = 2, \ldots, p,$$

линейно независимы над $\overline{K(\zeta_p)}^p$. Существует инъективное отображение

$$\begin{gathered} \overline{L(\zeta_p)} \to \overline{K(\zeta_p)} \\ x \mapsto x^p \end{gathered}$$

Отсюда следует, что

$$d\big(\overline{\tau_i'/\tau_1'}\big) \in \Omega_{\overline{L(\zeta_p)}/\overline{L(\zeta_p)}^p}, \quad i = 2, \dots, p,$$

линейно независимы над $\overline{L(\zeta_p)}^p$. Применяя следствие 3.5 несколько раз, получаем, что

$$K_2^1 L(\zeta_p)/L(\zeta_p), \dots, K_2^l L(\zeta_p)/L(\zeta_p)$$

независимо разветвлены. $\square$

В доказательстве предложения 7.2 легко вычислить глубину ветвления расширения $K^1 \dots K^m/K$. Пусть

$$\varepsilon = \frac{pe}{p-1} - \left[\frac{pe-1}{p-1}\right]$$

и

$$p^{r_i} = [K^i : K], \quad i = 1, \dots, m.$$

Получаем

$$\begin{aligned} d_K(K^1 \dots K^m/K) &= \sum_{i=1}^m d_K(K^i/K) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{r_i} d_K(K_j^i/K_{j-1}^i) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{r_i} \left(e - \frac{p-1}{p^j}\varepsilon\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \left(r_i e - \left(1 - \frac{1}{p^{r_i}}\right)\varepsilon\right). \end{aligned}$$

Предложение 7.3. *Пусть $K^1/K, \dots, K^m/K$ – линейно разделенные циклические чисто ПМР-расширения. Тогда $K^1 \dots K^m/K$ – ПМР-расширение, если и только если выполнены следующие два условия:*

1. *$K_1^1/K, \dots, K_1^m/K$ – независимо разветвлены,*
2. $$\varepsilon \sum_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{p^{r_i}}\right) \leqslant 1 - \frac{1}{p^r},$$

где

$$p^{r_i} = [K^i : K], \quad i = 1, \ldots, m; \quad r = \max(r_1, \ldots, r_m);$$

$$\varepsilon = \frac{pe}{p-1} - \left[\frac{pe-1}{p-1}\right].$$

Доказательство. Если $K_1^1/K, \ldots, K_1^m/K$ независимо разветвлены, то, ввиду приведенного выше вычисления $d_K(K^1 \ldots K^m/K)$, второе условие равносильно тому, что $K^1 \ldots K^m/K$ – ПМР-расширение.

Предположим, что $K_1^1/K, \ldots, K_1^m/K$ не будут независимо разветвленными расширениями. Возьмем минимальное j такое, что $K_1^1/K, \ldots, K_1^j/K$ не являются независимо разветвленными. Можно показать, что

$$d_K(K_1^1 \ldots K_1^j/K_1^1 \ldots K_1^{j-1}) \leqslant e - \frac{p-1}{p}\varepsilon - \frac{p-1}{p}.$$

Отсюда следует, что

$$d_K(K_1^1 \ldots K_1^j/K) \leqslant j\left(e - \frac{p-1}{p}\varepsilon\right) - \frac{p-1}{p} < e - 1 + \frac{1}{p^2},$$

т.е. $K_1^1 \ldots K_1^j/K$ не является ПМР-расширением, а $K^1 \ldots K^m/K$ не является ПМР-расширением по лемме 4.2. $\square$

Немедленно получаем следующую классификацию абелевых ПМР-расширений в случае, когда $p - 1 \nmid e$.

Теорема 7.4. *Предположим, что $p - 1 \nmid e$. Пусть L/K – абелево p-расширение. Пишем L в виде $K^1 \ldots K^m$, где K^i/K – циклические линейно разделенные, $i = 1, \ldots, m$. Тогда L/K является ПМР-расширением в том и только в том случае, если выполнены следующие три условия:*

1. *Подрасширение степени p в K^i/K является ПМР-расширением для всех $i = 1, \ldots, m$.*

2. *Подрасширения степени p в K^i/K независимо разветвлены, $i = 1, \ldots, m$.*

3. *Имеем*

$$\varepsilon \sum_{i=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p^{r_i}}\right) \leqslant 1 - \frac{1}{p^r},$$

где

$$p^{r_i} = [K^i : K], \quad i = 1, \ldots, m; \quad r = \max(r_1, \ldots, r_m);$$

$$\varepsilon = \frac{pe}{p-1} - \left[\frac{pe-1}{p-1}\right].$$

§8. Еще о композитах ПМР-расширений

Мы возвращаемся к случаю $p-1|e$. Если у нас есть два линейно разделенных ПМР-расширения, ни одно из которых не является максимально разветвленным, то их композит не может быть ПМР-расширением, согласно следствию 4.6. Однако в случае независимо разветвленных расширений ветвление композита ведет себя достаточно регулярно.

В этом параграфе K_n/K – циклическое расширение степени p^n, а L_m/K – циклическое расширение степени p^m, $n \geqslant m$. Оба расширения предполагаются ПМР-расширениями. Пусть K_i/K, L_i/K – подрасширения степени p^i в K_n/K и L_m/K соответственно. Предполагаем, что K_1/K и L_1/K – независимо разветвленные расширения.

Лемма 8.1. *Пусть $n \geqslant 2$. Тогда K_2L_1/K_1L_1 является ПМР-расширением.*

Доказательство. Пусть L_1/K – свирепое расширение. Тогда

$$d_{L_1}(K_1L_1/L_1) = d_K(K_1L_1/L_1) = \\ = d_K(K_1/K) \geqslant e_K - \frac{p-1}{p} = e_{L_1} - \frac{p-1}{p},$$

откуда K_1L_1/L_1 – ПМР-расширение. По теореме 5.5, K_2L_1/K_1L_1 тоже ПМР-расширение.

Пусть K_1/K – свирепое расширение. Тогда $d_K(K_1/K) = e$, K_1L_1/L_1 – максимально разветвлено, и поэтому по теореме 5.5 расширение K_2L_1/K_1L_1 является ПМР-расширением.

Наконец, пусть оба L_1/K и K_1/K – дикие расширения. Тогда ясно, что K_1L_1/L_1 – свирепое. Имеем

$$d_K(K_1L_1/L_1) = d_K(K_1/K) \geqslant e - \frac{p-1}{p},$$

откуда

$$d_{L_1}(K_1L_1/L_1) \geqslant e_{L_1} - (p-1),$$

и по предложению 1.6:

$$d_{L_1}(K_2L_1/K_1L_1) \geqslant e_{L_1} - \frac{p-1}{p}.$$

Так как $e(K_1L_1/L_1) = 1$, то K_2L_1/K_1L_1 – ПМР-расширение. $\square$

Замечание. Следующий пример показывает, что K_2/K_1 и L_1K_1/K_1 в общем случае не являются независимо разветвленными. Достаточно взять

$$K = \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^2})\{\{t\}\}, \quad \pi = \zeta_{p^2} - 1,$$

$$K_2 = K\left(\sqrt[p^2]{t^p(1+\pi)}\right), \quad L_1 = K\left(\sqrt[p]{1+\pi t}\right).$$

Лемма 8.2. *В ситуации леммы* 8.1 *предположим, что ни одно из* K_1/K, L_1/K, K_2L_1/K_1L_1 *не является максимально разветвленным. Тогда*

$$K_1(\zeta_p) = K(\zeta_p, \sqrt[p]{1+\rho}),$$
$$K_2L_1(\zeta_p) = K_1L_1(\zeta_p, \sqrt[p]{1+\tau}),$$

где $v(\tau^p - \rho) > v(\rho) > 0$.

Доказательство. Прямое вычисление с использованием предложения 2.2. $\square$

Лемма 8.3. *Пусть* $m \geqslant 2$. *Тогда* K_2L_2/K_1L_1 *– композит двух циклических независимо разветвленных ПМР-расширений степени* p.

Доказательство. 1. Предположим сперва, что по крайней мере одно из K_1/K, L_1/K максимально разветвлено. Тогда наше утверждение немедленно следует из теоремы 6.2.

2. Оба K_1/K и L_1/K не являются максимально разветвленными. Рассмотрим все подрасширения степени p в K_2L_2/K_1L_1: $M_1/K_1L_1, \ldots, M_{p+1}/K_1L_1$. Предположим, что все они являются максимально разветвленными. Тогда любые два из них будут независимо разветвленными, согласно предложению 3.7.

3. Предположим, что некоторые из $M_1/K_1L_1, \ldots, M_{p+1}/K_1L_1$ являются максимально разветвленными, а другие – нет; допустим M_1/K_1L_1 – максимально разветвлено, а M_2/K_1L_1 – нет. Меняя K_2 и L_2 внутри K_2L_2, мы можем, не нарушая общности, предполагать, что $M_1 = K_2L_1$, $M_2 = K_1L_2$. Отсюда следует, что

K_2/K_1 максимально разветвлено. Тогда из результатов §4 следует, что

$$K_2(\zeta_p) = K_1(\zeta_p, \sqrt[p]{a}),$$

где

$$a \in \mathcal{O}_{K_1(\zeta_p)}, \quad \overline{a} \notin \left(\overline{K_1(\zeta_p)}\right)^p.$$

Отсюда следует, что K_2L_1/K_1L_1 – свирепое расширение. С другой стороны, K_1L_2/K_1L_1 – ПМР-расширение (по лемме 7.1), но не максимально разветвленное. Поэтому оно является диким и независимо разветвленным с K_2L_1/K_1L_1.

4. Осталось рассмотреть случай, когда все $M_1/K_1L_1, \ldots$ $\ldots, M_{p+1}/K_1L_1$ не являются максимально разветвленными.

Пусть $K' = K(\zeta_p)$. Имеем:

$$K_1K' = K'(\sqrt[p]{1+\rho_1}), \quad L_1K' = K'(\sqrt[p]{1+\rho_2}),$$

где

$$v_{K'}(\rho_1) = v_{K'}(\rho_2) = i = \left(\frac{pe}{p-1} - \left[\frac{pe-1}{p-1}\right]\right)e(K'/K).$$

Так как K_1/K и L_1/K независимо разветвлены по предложению 3.4, то $\overline{\rho_1/\rho_2} \notin (\overline{K'})^p$. По лемме 8.2,

$$K_2L_1K' = K_1L_1K'(\sqrt[p]{1+\tau_1}), \quad K_1L_2K' = K_1L_1K'(\sqrt[p]{1+\tau_2}),$$

где

$$v_{K'}(\tau_1^p - \rho_1) > i, \quad v_{K'}(\tau_2^p - \rho_2) > i.$$

Поэтому

$$\overline{\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)} = \sqrt[p]{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \notin (\overline{K_1L_1K'})^p.$$

Действительно, $(\overline{K_1L_1K'})^p \subset \overline{K'}$. По предложению 3.4 выводим, что K_2L_1/K_1L_1 и K_1L_2/K_1L_1 независимо разветвлены. $\square$

Теорема 8.4. *Пусть $n > m$. Тогда $K_nL_m/K_{n-1}L_m$ – ПМР-расширение.*

Доказательство. Применяя лемму 8.3, уменьшаем m и n на единицу. В случае $m = 1$ теорема следует из леммы 7.1. $\square$

Теорема 8.5. *Пусть $n = m$. Тогда $K_nL_m/K_{n-1}L_{m-1}$ – композит двух независимо разветвленных циклических ПМР-расширений степени p.*

Доказательство. Применяем n раз лемму 8.3. $\square$

Литература

1. М. В. Бондарко, С. В. Востоков, И. Б. Жуков, *Аддитивные модули Галуа в полных дискретно нормированных полях.* — Алгебра и анализ **9, No. 4** (1997), 28–46.
2. С. В. Востоков, *Идеалы абелевых p-расширений иррегулярного локального поля как модули Галуа.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **46** (1974), 14–35.
3. И. Б. Жуков, *Структурная теорема для полных полей.* — Труды С.-Петерб. матем. общества **3** (1995), 215–234.
4. I. B. Fesenko and S. V. Vostokov, *Local Fields and Their Extensions. A Constructive Approach.* AMS, Providence, RI (1993).
5. J.-P. Serre, *Corps Locaux.* 2nd ed., Hermann, Paris (1968).
6. M. V. Bondarko, K. F. Lai, and S. V. Vostolov, *Galois structure for Abelian p-extensions of Dedekind domains.* — J. für die reine und angew. Math. **157** (1999).
7. O. Hyodo, *Wild ramification in the imperfect residue field case.* — Adv. Stud. Pure Math. **12** (1987), 287–314.

Vostokov S. V., Zhukov I. B., Pak G. K. Extensions with almost maximal depth of ramification.

The paper is devoted to classification of finite abelian extensions L/K which satisfy the condition $[L:K] \mid \mathcal{D}_{L/K}$. Here K is a complete discretely valued field of characteristic 0 with an arbitrary residue field of prime characteristic p, $\mathcal{D}_{L/K}$ is the different of L/K. This condition means that the depth of ramification in L/K has its "almost maximal" value. The condition appeared to play an important role in the study of additive Galois modules associated with the extension L/K.

The study is based on the use of the notion of independently ramified extensions, introduced by the authors. Two principal theorems are proven, describing almost maximally ramified extensions in the cases when the absolute ramification index e is (resp. is not) divisible by $p-1$.

С.-Петербургский
государственный университет
sergei@vostokov.usr.pu.ru,
zhukov@pdmi.ras.ru

Поступило 30 октября 1999 г.