Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 264, 2000 г.

Л. А. Молотков

О МАТРИЧНОМ МЕТОДЕ В ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В СЛОИСТЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ БИО

При построении волновых полей в пористых флюидонасыщенных средах Био [1], содержащих несколько тонких слоев, необходимо учитывать интерференцию волн, образующихся при отражениях и преломлениях на границах. Учет интерференции сводится, как и в случае упругих сред, к решению системы уравнений, записанных на основе граничных условий. Чтобы упростить процесс решения указанных систем уравнений, предполагается использовать матричный метод. Для упругих сред этот метод был впервые предложен в работах [3, 4] и затем был развит в книге [5].

Слоистая пористая среда рассматривалась в работе [6]. Использование матричного метода в этой работе сводилось к тому, что пачки пористых слоев Био заменялись одним эквивалентным слоем с использованием переходных матриц, относящихся к границам между соседними слоями. В другой статье [7] определялись матрицы, описывающие пористые слои Био, и пачка этих слоев характеризовалась произведением указанных матриц. Недостаток работы [7] состоит в том, что элементы матрицы слоя выражаются в виде отношений двух определителей третьего порядка, и такое представление оказывается неудобным для исследований.

В настоящей работе решаются задачи об определении волнового поля в двух типичных слоистых пористых средах Био. Для нахождения этого поля строятся матрицы каждого слоя, при этом элементы этих матриц представляются сравнительно простыми выражениями. Исследование упомянутых выражений позволяет получить матрицы в случае тонких слоев, а также матрицы, описывающие пористые слои, неоднородные в направле-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) грант 99-05-65537.

нии, перпендикулярном границам. Последние матрицы представляются в виде сходящихся рядов. Специально рассматривается случай, когда в пористом слое Био волны в упругой и жидкой фазах распространяются независимо друг от друга. Матрица такого слоя оказывается квазидиагональной и состоит из матриц упругого и жидкого слоев.

§1. Уравнение пористых сред и форма решения

Рассмотрим две слоисто-однородные изотропные пористые среды Био. Первая среда состоит из слоя 1 ($0 \leqslant z < H_1 = h_1$), слоя 2 ($H_1 \leqslant z < H_2 = H_1 + h_1$), ... слоя n ($H_{n-1} \leqslant z < H_n = H_{n-1} + h_n$) и полупространства $n+1$ ($z \geqslant H_{n+1}$) (рис. 1). Вторая среда отличается от первой тем, что содержит еще и полупространство $0\,(z < 0)$ (рис. 2). Предполагается, что волновые поля в обеих средах

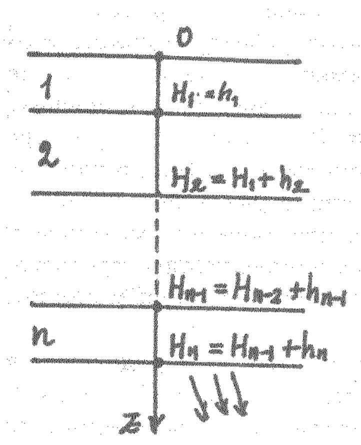

Рис. 1

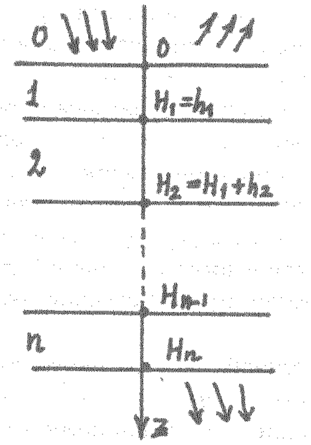

Рис. 2.

являются осесимметрическими и не содержат азимутальной составляющей смещений. Слои и полупространства описываются уравнениями

$$
\begin{aligned}
&\tau_{rr} = H\frac{\partial u_r}{\partial r} + B\left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + C\operatorname{div}\vec{w},\\
&\tau_{\theta\theta} = B\frac{\partial u_r}{\partial r} + H\frac{u_r}{r} + B\frac{\partial u_z}{\partial z} + C\operatorname{div}\vec{w},\\
&\tau_{zz} = B\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}\right) + H\frac{\partial u_z}{\partial z} + C\operatorname{div}\vec{w},\\
&-p = C\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + M\operatorname{div}\vec{w},\\
&\tau_{rz} = L\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right), \quad \operatorname{div}\vec{w} = \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{w_r}{r} + \frac{\partial w_z}{\partial z},\\
&\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \rho_f\frac{\partial^2 w_r}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \rho_f\frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2},\\
&-\frac{\partial p}{\partial r} = \rho_f\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + m\frac{\partial^2 w_r}{\partial t^2},\\
&-\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_f\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + m\frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2}, \quad H = B + 2L,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

в которых u_r, u_z – смещения в упругой фазе, τ_{rr}, τ_{rz}, τ_{zz} и $\tau_{\theta\theta}$ – компоненты тензора полных напряжений, w_x, w_z и p – относительные смещения и давление в жидкой фазе. Для краткости у величин в уравнениях (1.1) опущены индексы, определяющие номера слоев или полупространств. На внутренних границах в обеих средах выполняются граничные условия [8]

$$
\begin{aligned}
&u_{zi} = u_{zi+1}, \quad u_{xi} = u_{xi+1}, \quad w_{zi} = w_{zi+1},\\
&\tau_{rzi} = \tau_{rzi+1}, \quad \tau_{zzi} = \tau_{zzi+1}, \quad p_i = p_{i+1}
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

при $z = H_i$, $i = 1, 2, \ldots n$ в случае первой среды и при $i = 0, 1, \ldots, n$ и $H_0 = 0$ в случае второй среды.

Первая среда возбуждается некоторым осесимметрическим источником, действующим с момента $t = 0$, расположенным на границе $z = 0$ и заданным условиями

$$
\tau_{rz1} = \tau_{rz}^0, \quad \tau_{zz1} = \tau_{zz}^0, \quad p_1 = p^0,
\tag{1.3}
$$

в которых $\tau^0_{rz}(t,r,z)$, $\tau^0_{zz}(t,r,z)$ и $p^0(t,r,z)$ являются известными функциями и представляются равенствами

$$\tau^0_{rz} = -\int\limits_0^\infty \frac{k^2 J_1(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} T^0_{rz}(z,k,\eta)\, e^{kt\eta}\, d\eta,$$

$$\tau^0_{zz} = -\int\limits_0^\infty \frac{k^2 J_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} T^0_{zz}(z,k,\eta)\, e^{kt\eta}\, d\eta, \tag{1.4}$$

$$p^0 = \int\limits_0^\infty \frac{k^2 J_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} P^0(z,k,\eta)\, e^{kt\eta}\, d\eta.$$

Вторая среда возбуждается волнами, падающими из полупространства O и достигающими границы $z=0$ при $t=0$.

Чтобы выразить падающее волновое поле и найти образующиеся волновые поля, представим векторы смещений $\vec{u}$ и $\vec{w}$ соотношениями

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \operatorname{grad}\varphi_1 + \operatorname{grad}\varphi_2 + \operatorname{rot}(\psi_\theta \vec{\theta}_1), \\ \vec{w} &= B_1 \operatorname{grad}\varphi_1 + B_2 \operatorname{grad}\varphi_2 - \frac{\rho_f}{m}\operatorname{rot}(\psi_\theta \vec{\theta}_1) \end{aligned} \tag{1.5}$$

через скалярные потенциалы φ_1 и φ_2 и векторный потенциал ψ_θ, удовлетворяющие уравнениям

$$\Delta\varphi_1 = \frac{1}{v_1^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}, \quad \Delta\varphi_2 = \frac{1}{v_2^2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}, \quad \Delta\psi_\theta - \frac{\psi_\theta}{r^2} = \frac{1}{v_3^2}\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial t^2}. \tag{1.6}$$

Входящие в равенства (1.6) скорости распространения v_1, v_2 и v_3 двух продольных волн и одной поперечной волны представляются соотношениями

$$\begin{gathered} v_{1,2}^2 = \Big[\pm\sqrt{(mH+\rho M-2\rho_f C)^2 - 4(HM-C^2)(\rho m-\rho_f^2)} + \\ +mH+\rho M-2\rho_f C\Big] \Big/ \big[2(\rho m-\rho_f^2)\big]. \\ v_3^2 = Lm/(\rho m-\rho_f^2). \end{gathered} \tag{1.7}$$

В равенствах (1.5) коэффициенты B_1 и B_2 выражаются формулами

$$B_j = \frac{C-\rho_f v_j^2}{m v_j^2 - M} = \frac{H-\rho v_j^2}{\rho_f v_j^2 - C} \quad (j=1,2). \tag{1.8}$$

В соотношениях (1.3), (1.7) и (1.8) H, M, C и L – модули пористой среды, ρ – средняя плотность, ρ_f – плотность жидкой фазы, а коэффициент m выражается формулой

$$m = \rho_f \overline{\alpha}/\varepsilon, \tag{1.9}$$

где ε – пористость и $\overline{\alpha}$ – извилистость пор.

Как решения уравнений (1.6) потенциалы φ_{1i}, φ_{2i} и $\psi_{\theta i}$ выражаются равенствами

$$\begin{gathered}
\varphi_{1i} = \int\limits_0^\infty \frac{J_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[X_{1i}^+ \, e^{k(z-H_{i-1})\alpha_{1i}} + X_{1i}^- \, e^{k(H_{i-1}-z)\alpha_{1i}}\right] e^{kt\eta}\, d\eta, \\
\varphi_{2i} = \int\limits_0^\infty \frac{J_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[X_{2i}^+ \, e^{k(z-H_{i-1})\alpha_{2i}} + X_{2i}^- \, e^{k(H_{i-1}-z)\alpha_{2i}}\right] e^{kt\eta}\, d\eta, \\
\psi_{\theta i} = \int\limits_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[Y_i^+ \, e^{k(z-H_{i-1})\beta_i} + Y_i^- \, e^{k(H_{i-1}-z)\beta_i}\right] e^{kt\eta}\, d\eta, \\
(i = 1, 2, \dots, n),
\end{gathered} \tag{1.10}$$

в которых

$$\alpha_{1i} = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_{1i}^2}}, \quad \alpha_{2i} = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_{2i}^2}}, \quad \beta_i = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_{3i}^2}}. \tag{1.11}$$

Для однозначности радикалов (1.11) проведем из точек ветвления $\eta = \pm iv_1$, $\eta = \pm iv_2$ и $\eta = \pm iv_3$, разрезы в левую полуплоскость η параллельно вещественной оси и фиксируем основные листы условиями

$$\alpha_{1i}(0) = 1, \quad \alpha_{2i}(0) = 1, \quad \beta_i(0) = 1. \tag{1.12}$$

В таком же виде представим потенциалы

$$\begin{gathered}
\varphi_1^0 = \int\limits_0^\infty \frac{J_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X_1^0 \, e^{k(t\eta - z\alpha_{10})}\, d\eta, \\
\varphi_2^0 = \int\limits_0^\infty \frac{J_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X_2^0 \, e^{k(t\eta - z\alpha_{20})}\, d\eta,
\end{gathered} \tag{1.13}$$

$$\psi_\theta^0 = \int_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y^0\, e^{k(t\eta - z\beta_0)}\, d\eta$$

падающих возмущений, при этом $X_1^0(k,\eta)$, $X_2^0(k,\eta)$ и $Y^0(k,\eta)$ – заданные функции. Формулы (1.10) также справедливы и для полупространств 0 и $n+1$ ($i = 0,\ n+1$), при этом

$$\begin{aligned}
&X_{10}^- = X_1^0, \quad X_{20}^- = X_2^0, \quad Y_0^- = Y^0,\\
&X_{1n+1}^+ = 0, \quad X_{2n+1}^+ = 0, \quad Y_{n+1}^+ = 0, \qquad H_{-1} = 0.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Функции $X_{10}^+(k,\eta)$, $X_{20}^+(k,\eta)$ и $Y_0^+(k,\eta)$ определяют отраженные волны, величины $X_{1n+1}^-(k,\eta)$, $X_{2n+1}^-(k,\eta)$ и $Y_{n+1}^-(k,\eta)$ характеризуют преломленные волны, а волновое поле в слоях выражается, согласно формулам (1.10), через $X_{1i}^\pm(k,\eta)$, $X_{2i}^\pm(k,\eta)$ и $Y_i^\pm(k,\eta)$ ($i = 1,2,\dots,n$). Указанные функции являются неизвестными и определяются на основании граничных условий (1.2) и (1.3) при использовании известных функций T_{rz}^0, T_{zz}^0, P^0 или X_1^0, X_2^0 и Y^0. Так как предполагается, что волновое поле в обеих пористых средах является интерференционным, то все граничные условия (1.2) и (1.3) должны выполняться одновременно. В результате приходим к системе $6n+3$ уравнений для первой среды или к системе $6n+6$ уравнений в случае второй среды. Подобные системы уравнений записывались для аналогичных упругих сред и решались с помощью матричного метода [3–5]. Применяемый в этих работах метод будет использован также и для решения систем уравнений, определяющих образующиеся волновые поля в слоистых пористых средах.

§2. Матрицы полупространств и слоев

Для записи уравнений, определяющих функции $X_{1i}^\pm(k,\eta)$, $X_{2i}^\pm(k,\eta)$ и $Y_i^\pm(k,\eta)$, выразим через потенциалы величины

$$\begin{aligned}
u_z &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial\psi_\theta}{\partial r} + \frac{\psi_\theta}{r},\\
w_z &= B_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} + B_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} - \frac{\rho_f}{m}\left(\frac{\partial\psi_\theta}{\partial r} + \frac{\psi_\theta}{r}\right),\\
\tau_{rz} &= L\left(2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r\partial z} + 2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial r\partial z} + \frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r^2} - \frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial z^2}\right),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&u_r = \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial r} - \frac{\partial\psi_\theta}{\partial z}, \\
&-p = \rho_5 \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} + \rho_6 \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}, \\
&\tau_{zz} = \rho_3 \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} + \rho_4 \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} - 2L\Bigg(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} + \\
&\qquad + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} - \frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial r\partial z} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi_\theta}{\partial z}\Bigg),
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

входящие в граничные условия (1.2). В формулах (2.1) использованы обозначения

$$
\rho_3 = \rho + B_1\rho_f, \quad \rho_4 = \rho + B_2\rho_f, \quad \rho_5 = \rho_f + B_1 m, \quad \rho_6 = \rho_f + B_2 m. \tag{2.2}
$$

Равенства (2.1) установлены на основании соотношений (1.5), закона Гука для пористой среды Био (1.1) и уравнений (1.6). Для краткости записи в формулах (2.1) опущен значок среды i.

После подстановки равенств (1.10) в соотношения (2.1) приходим к формулам

$$
\begin{aligned}
&u_{zi} = \int\limits_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} U_{zi}(z,k,\eta)e^{kt\eta}\,d\eta, \\
&w_{zi} = \int\limits_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} W_{zi}(z,k,\eta)e^{kt\eta}\,d\eta, \\
&\tau_{rzi} = -\int\limits_0^\infty \frac{k^2J_1(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} T_{rzi}(z,k,\eta)e^{kt\eta}\,d\eta, \\
&u_{ri} = -\int\limits_0^\infty \frac{kJ_1(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} U_{ri}(z,k,\eta)e^{kt\eta}\,d\eta, \\
&p_i = -\int\limits_0^\infty \frac{k^2J_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} P_z(z,k,\eta)e^{kt\eta}\,d\eta,
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

$$\tau_{zzi} = \int\limits_0^\infty \frac{k^2 J_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} T_{zzi}(z,k,\eta)e^{kt\eta}\, d\eta,$$

где

$$\begin{gathered}
U_{zi} = \alpha_{1i}\, X_{1i}^{+}\, e^{k(z-H_{i-1})\alpha_{1i}} - \alpha_{1i}\, X_{1i}^{-}\, e^{k(H_{i-1}-z)\alpha_{1i}} + \\
+\alpha_{2i}\, X_{2i}^{+}\, e^{k(z-H_{i-1})\alpha_{2i}} - \alpha_{2i}\, X_{2i}^{-}\, e^{k(H_{i-1}-z)\alpha_{2i}} + \\
+Y_i^{+}\, e^{k(z-H_{i-1})\beta_i} + Y_i^{-}\, e^{k(H_{i-1}-z)\beta_i}, \\
W_{zi} = B_1\alpha_{1i}\, X_{1i}^{+}\, e^{k(z-H_{i-1})\alpha_{1i}} - B_1\alpha_{1i}\, X_{1i}^{-}\, e^{k(H_{i-1}-z)\alpha_{1i}} + \\
+B_2\alpha_{2i}\, X_{2i}^{+}\, e^{k(z-H_{i-1})\alpha_{2i}} - B_2\alpha_{2i}\, X_{2i}^{-}\, e^{k(H_{i-1}-z)\alpha_{2i}} - \\
-(\rho_{f_i}/m_i)Y_i^{+}\, e^{k(z-H_{i-1})\beta_i} - (\rho_{f_i}/m_i)Y_i^{-}\, e^{k(H_{i-1}-z)\beta_i}, \\
T_{rzi} = 2L_i\, \alpha_{1i}\, X_{1i}^{+}\, e^{k(z-H_{i-1})\alpha_{1i}} - 2L_i\alpha_{1i}\, X_{1i}^{-}\, e^{k(H_{i-1}-z)\alpha_{1i}} + \\
+2L_i\, \alpha_{2i}\, X_{2i}^{+}\, e^{k(z-H_{i-1})\alpha_{2i}} - 2L_i\, \alpha_{2i}\, X_{2i}^{-}\, e^{k(H_{i-1}-z)\alpha_{2i}} + \qquad (2.4)\\
+L_i\, g_i\, Y_i^{+}\, e^{k(z-H_{i-1})\beta_i} + L_i\, g_i\, Y_i^{-}\, e^{k(H_{i-1}-z)\beta_i}, \; g_i = 2+\eta^2/v_{3i}^2, \\
U_{ri} = X_{1i}^{+}\, e^{k(z-H_{i-1})\alpha_{1i}} + X_{1i}^{-}\, e^{k(H_{i-1}-z)\alpha_{1i}} + X_{2i}^{+}\, e^{k(z-H_{i-1})\alpha_{2i}} + \\
+X_{2i}^{-}\, e^{k(H_{i-1}-z)\alpha_{2i}} + \beta_i\, Y_i^{+}\, e^{k(z-H_{i-1})\beta_i} - \beta_i\, Y_i^{-}\, e^{k(H_{i-1}-z)\beta_i}, \\
P_i = \rho_{5i}\, \eta^2\, X_{1i}^{+}\, e^{k(z-H_{i-1})\alpha_{1i}} + \rho_{5i}\, \eta^2\, X_{1i}^{-}\, e^{k(H_{i-1}-z)\alpha_{1i}} + \\
+\rho_{6i}\, \eta^2\, X_{2i}^{+}\, e^{k(z-H_{i-1})\alpha_{2i}} + \rho_{6i}\, \eta^2\, X_{2i}^{-}\, e^{k(H_{i-1}-z)\alpha_{2i}}, \\
T_{zzi} = \left(\rho_{3i}\, \eta^2 + 2L_i\right)\left[X_{1i}^{+}\, e^{k(z-H_{i-1})\alpha_{1i}} + X_{1i}^{-}\, e^{k(H_{i-1}-z)\alpha_{1i}}\right] + \\
+\left(\rho_{4i} + 2L_i\right)\left[X_{2i}^{+}\, e^{k(z-H_{i-1})\alpha_{2i}} + X_{2i}^{-}\, e^{k(H_{i-1}-z)\alpha_{2i}}\right] + \\
+2L_i\, \beta_i\, Y_i^{+}\, e^{k(z-H_{i-1})\beta_i} - 2L_i\, \beta_i\, Y_i^{-}\, e^{k(H_{i-1}-z)\beta_i}.
\end{gathered}$$

Установим для рассматриваемого слоя i связь между образами смещений и напряжений U_z, W_z, T_{rz}, U_r, P и T_{zz} на обеих границах $z = H_{i-1}$ и $z = H_i = H_{i-1} + h_i$. С этой целью из этих величин, а также из функций X_{1i}^{+}, X_{1i}^{-}, X_{2i}^{+}, X_{2i}^{-}, Y_i^{+}, Y_i^{-} составим матрицы-столбцы

$$\begin{gathered}
\mathbf{W}_i = (U_{zi}, W_{zi}, T_{rzi}, U_{ri}, P_i, T_{zzi})^{\intercal}, \\
\mathbf{Z}_i = \left(X_{1i}^{+}, X_{1i}^{-}, X_{2i}^{+}, X_{2i}^{-}, Y_i^{+}, Y_i^{-}\right)^{\intercal},
\end{gathered} \qquad (2.5)$$

при этом значок T выражает операцию транспонирования. Рассматривая соотношения (2.4) при $z = H_{i-1}$ и $z = H_i$, приходим к равенствам

$$\begin{aligned} \mathbf{W}\left(H_{i-1}\right) &= \mathbf{A}_i\, \mathbf{Z}_i, \\ \mathbf{W}\left(H_i\right) &= \mathbf{A}_i\, \mathbf{L}_i\, \mathbf{Z}_i, \end{aligned} \tag{2.6}$$

в которых

$$\mathbf{A} = \tag{2.7}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & , & -\alpha_1 & , & \alpha_2 & , & -\alpha_2 & , & 1 & , & 1 \\ B_1\alpha_1 & , & -B_1\alpha_1 & , & B_2\alpha_2 & , & -B_2\alpha_2 & , & -\rho_f/m & , & -\rho_f/m \\ 2L\alpha_1 & , & -2L\alpha_1 & , & 2L\alpha_2 & , & -2L\alpha_2 & , & Lg & , & Lg \\ 1 & , & 1 & , & 1 & , & 1 & , & \beta & , & -\beta \\ \rho_5\eta^2 & , & \rho_5\eta^2 & , & \rho_6\eta^2 & , & \rho_6\eta^2 & , & 0 & , & 0 \\ \rho_3\eta^2{+}2L & , & \rho_3\eta^2{+}2L & , & \rho_4\eta^2{+}2L & , & \rho_4\eta^4{+}2L & , & 2L\beta & , & -2L\beta \end{pmatrix},$$

а $\mathbf{L}_i$ – диагональная матрица,

$$\mathbf{L}_i = \left[e^{kh_i\alpha_{1i}}, e^{-kh_i\alpha_{1i}}, e^{kh_i\alpha_{2i}}, e^{-kh_i\alpha_{2i}}, e^{kh_i\beta_i}, e^{-kh_i\beta_i}\right]. \tag{2.8}$$

Из первого соотношения (2.6) следует формула

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{A}_i^{-1}\, \mathbf{W}\left(H_{i-1}\right), \tag{2.9}$$

где

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\zeta}{2}\times \tag{2.10}$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1}(2L\rho_6 + B_2\gamma\eta^2) & , & -\frac{\gamma\eta^2}{\alpha_1} & , & -\frac{\rho_6}{\alpha_1} & , & -2L\rho_6 & , & -\rho_4 & , & \rho_6 \\ \frac{-1}{\alpha_1}(2L\rho_6 + B_2\gamma\eta^2) & , & \frac{\gamma\eta^2}{\alpha_1} & , & \frac{\rho_6}{\alpha_1} & , & -2L\rho_6 & , & -\rho_4 & , & \rho_6 \\ \frac{-1}{\alpha_2}(2L\rho_5 + B_1\gamma\eta^2) & , & \frac{\gamma\eta^2}{\alpha_2} & , & \frac{\rho_5}{\alpha_2} & , & 2L\rho_5 & , & \rho_3 & , & -\rho_5 \\ \frac{1}{\alpha_2}(2L\rho_5 + B_1\gamma\eta^2) & , & -\frac{\gamma\eta^2}{\alpha_2} & , & -\frac{\rho_5}{\alpha_2} & , & 2L\rho_5 & , & \rho_3 & , & -\rho_5 \\ -2Lmb & , & 0 & , & mb & , & \frac{Lmbg}{\beta} & , & \frac{\rho_f b}{\beta} & , & -\frac{mb}{\beta} \\ -2Lmb & , & 0 & , & mb & , & -\frac{Lmbg}{\beta} & , & -\frac{\rho_f b}{\beta} & , & \frac{mb}{\beta} \end{pmatrix}$$

и используются обозначения

$$b = B_2 - B_1, \quad \gamma = \rho m - \rho_f^2, \quad \zeta = (b\gamma\eta^2)^{-1}. \tag{2.11}$$

После подстановки равенства (2.9) во вторую формулу (2.6) приходим к соотношению

$$\mathbf{W}(H_i) = \mathbf{A}_i\, \mathbf{L}_i\, \mathbf{A}_i^{-1}\, \mathbf{W}\left(H_{i-1}\right), \tag{2.12}$$

связывающему значения матрицы-столбца $W(z)$ на границах слоя i. Эта связь осуществляется матрицей

$$\mathbf{C}_i = \mathbf{A}_i\, \mathbf{L}_i, \mathbf{A}_i^{-1}, \tag{2.13}$$

характеризующей распространение волн в пористом слое Био с номером i. Элементы этой матрицы выражаются равенствами

$$c_{11} = \zeta\left[\left(2L\rho_6 + B_2\gamma\eta^2\right)C_{\alpha 1} - \left(2L\rho_5 + B_1\gamma\eta^2\right)C_{\alpha 2} - 2LmbC_\beta\right],$$

$$c_{12} = -\zeta\gamma\eta^2\left(C_{\alpha 1} - C_{\alpha 2}\right),$$

$$c_{13} = -\zeta\left(\rho_6\, C_{\alpha 1} - \rho_5\, C_{\alpha 2} - mbC_\beta\right),$$

$$c_{14} = -\zeta L\left(2\rho_6\alpha_1 S_{\alpha 1} - 2\rho_5\alpha_2 S_{\alpha 2} - mbg\beta^{-1}S_\beta\right),$$

$$c_{15} = -\zeta\left(\rho_4\alpha_1 S_{\alpha 1} - \rho_3\alpha_2 S_{\alpha 2} - \rho_f b\beta^{-1}S_\beta\right),$$

$$c_{16} = \zeta\left(\rho_6\alpha_1 S_{\alpha 1} - \rho_5\alpha_2 S_{\alpha 2} - mb\beta^{-1}S_\beta\right),$$

$$c_{21} = \zeta\left[B_1\left(2L\rho_6 + B_2\gamma\eta^2\right)C_{\alpha 1} - B_2\left(2L\rho_5 + B_1\gamma\eta^2\right)C_{\alpha 2} + 2L\rho_f bC_\beta\right],$$

$$c_{22} = -\zeta\gamma\eta^2\left(B_1 C_{\alpha 1} - B_2 C_{\alpha 2}\right),$$

$$c_{23} = -\zeta\left(B_1\rho_6 C_\alpha - B_2\rho_5 C_{\alpha 2} + \rho_f bC_\beta\right),$$

$$c_{24} = -\zeta L\left(2B_1\rho_6\alpha_1 S_{\alpha 1} - 2B_2\rho_5\alpha_2 S_{\alpha 2} + \rho_f bg\beta^{-1}S_\beta\right),$$

$$c_{25} = -\zeta\left(B_1\rho_4\alpha_1 S_{\alpha 1} - B_2\rho_3\alpha_2 S_{\alpha 2} + \rho_f^2 m^{-1}b\beta^{-1}S_\beta\right),$$

$$c_{26} = \zeta\left(B_1\rho_6\alpha_1 S_{\alpha 1} - B_2\rho_5\alpha_2 S_{\alpha 2} + \rho_f b\beta^{-1}S_\beta\right),$$

$$c_{31} = 2\zeta L\left[\left(2L\rho_6 + B_2\gamma\eta^2\right)C_{\alpha 1} - \left(2L\rho_5 + B_1\gamma\eta^2\right)C_{\alpha 2} - LmbgC_\beta\right],$$

$$c_{32} = -2L\zeta\gamma\eta^2\left(C_{\alpha 1} - C_{\alpha 2}\right),$$

$$c_{33} = -L\zeta\left(2\rho_6 C_{\alpha 1} - 2\rho_5 C_{\alpha 2} - mbgC_\beta\right),$$

$$c_{34} = -\zeta L^2\left(4\rho_6\alpha_1 S_{\alpha 1} - 4\rho_5\alpha_2 S_{\alpha 2} - mbg^2\beta^{-1}S_\beta\right),$$

$$c_{35} = -L\zeta\left(2\rho_4\alpha_1 S_{\alpha 1} - 2\rho_3\alpha_2 S_{\alpha 2} - \rho_f bg\beta^{-1}S_\beta\right),$$

$$c_{36} = L\zeta\left(2\rho_6\alpha_1 S_{\alpha 1} - 2\rho_5\alpha_2 S_{\alpha 2} - mbg\beta^{-1}S_\beta\right),$$

$$c_{41} = \zeta\left[\left(2L\rho_6 + B_2\gamma\eta^2\right)\alpha_1^{-1}S_{\alpha 1} - \left(2L\rho_5 + B_1\gamma\eta^2\right)\alpha_2^{-1}S_{\alpha 2} - 2Lmb\beta S_\beta\right],$$

$$c_{42} = -\zeta\gamma\eta^2\left(\alpha_1^{-1}S_{\alpha 1} - \alpha_2^{-1}S_{\alpha 2}\right), \tag{2.14}$$

$$c_{43} = -\zeta\left(\rho_6\alpha_1^{-1}S_{\alpha 1} - \rho_5\alpha_2^{-1}S_{\alpha 2} - mb\beta S_\beta\right),$$

$$c_{44} = -L\zeta\left(2\rho_6\, C_{\alpha 1} - 2\rho_5 C_{\alpha 2} - mbgC_\beta\right),$$

$$c_{45} = -\zeta\left(\rho_4 C_{\alpha 1} - \rho_3 C_{\alpha 2} - \rho_f bC_\beta\right),$$

$$c_{46} = \zeta\left(\rho_6 C_{\alpha 1} - \rho_5 C_{\alpha 2} - mbC_\beta\right),$$

$$c_{51} = \zeta\eta^2\left[\rho_5\left(2L\rho_6 + B_2\gamma\eta^2\right)\alpha_1^{-1}S_{\alpha 1} - \rho_6\left(2L\rho_5 + B_1\gamma\eta^2\right)\alpha_2^{-1}S_{\alpha 2}\right],$$

$$c_{52} = -\gamma\zeta\eta^4\left(\rho_5\alpha_1^{-1}S_{\alpha 1} - \rho_6\alpha_2^{-1}S_{\alpha 2}\right),$$

$$c_{53} = -\rho_5\rho_6\zeta\eta^2\left(\alpha_1^{-1}S_{\alpha 1} - \alpha_2^{-1}S_{\alpha 2}\right),$$

$$c_{54} = -2L\rho_5\rho_6\zeta\eta^2\left(C_{\alpha 1} - C_{\alpha 2}\right),$$

$$c_{55} = -\zeta\eta^2\left(\rho_4\rho_5 C_{\alpha 1} - \rho_3\rho_6 C_{\alpha 2}\right),$$

$$c_{56} = \rho_5\rho_6\zeta\eta^2\left(C_{\alpha 1} - C_{\alpha 2}\right),$$

$$c_{61} = \zeta\Big[\left(2L\rho_6 + B_2\gamma\eta^2\right)\left(2L + \rho_3\eta^2\right)\alpha_1^{-1}S_{\alpha 1} -$$

$$- \left(2L\rho_5 + B_1\gamma\eta^2\right)\left(2L + \rho_4\eta^2\right)\alpha_2^{-1}S_{\alpha 2} - 4L^2 mb\beta S_\beta\Big],$$

$$c_{62} = -\gamma\zeta\eta^2\left[\left(\rho_3\eta^2 + 2L\right)\alpha_1^{-1}S_{\alpha 1} - \left(\rho_4\eta^2 + 2L\right)\alpha_2^{-1}S_{\alpha 2}\right],$$

$$c_{63} = -\zeta\left[\rho_6\left(\rho_3\eta^2 + 2L\right)\alpha_1^{-1}S_{\alpha 1} - \rho_5\left(\rho_4\eta^2 + 2L\right)\alpha_2^{-1}S_{\alpha 2} - 2Lmb\beta S_\beta\right],$$

$$c_{64} = -2L\zeta\left[\rho_6\left(\rho_3\eta^2 + 2L\right)C_{\alpha 1} - \rho_5\left(\rho_4\eta^2 + 2L\right)C_{\alpha 2} - LmbgC_\beta\right],$$

$$c_{65} = -\zeta\left[\rho_4\left(\rho_3\eta^2 + 2L\right)C_{\alpha 1} - \rho_3\left(\rho_4\eta^2 + 2L\right)C_{\alpha 2} - 2L\rho_f bC_\beta\right],$$

$$c_{66} = \zeta\left[\rho_6\left(\rho_3\eta^2 + 2L\right)C_{\alpha 1} - \rho_5\left(\rho_4\eta^2 + 2L\right)C_{\alpha 2} - 2LmbC_\beta\right],$$

в которых использованы обозначения

$$\begin{aligned} &C_{\alpha 1} = \operatorname{ch} kh\alpha_1, \quad C_{\alpha 2} = \operatorname{ch} kh\alpha_2, \quad S_{\alpha 1} = \operatorname{sh} kh\alpha_1, \\ &S_{\alpha 2} = \operatorname{sh} kh\alpha_2, \quad C_\beta = \operatorname{ch} kh\beta, \quad S_\beta = \operatorname{sh} kh\beta. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Для краткости в соотношениях (2.14) и (2.15) опущен значок слоя i. В заключение отметим два обстоятельства: 1) матрица $\mathbf{C}_i$, характеризующая волновой процесс в слое i, определяется только параметрами слоя i, 2) матрица $\mathbf{C}_i$ не зависит от того, каким осесимметрическим источником возбуждается среда, содержащая слой i.

§3. Решение задач для первой и второй сред

Для построения волновых полей в заданных слоистых пористых средах полезно использовать соотношения (2.5)–(2.15). Из формул (2.12) и (2.13) следует равенство

$$\mathbf{W}_i(H_i) = \mathbf{C}_i\,\mathbf{W}_i\,(H_{i-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.1}$$

Граничные условия (1.2) приводят к формулам

$$\mathbf{W}_i(H_i) = \mathbf{W}_{i+1}\,(H_i) \quad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{3.2}$$

Многократно применяя соотношения (3.1) и (3.2), удается установить связь

$$\mathbf{W}_{n+1}(H_n) = \mathbf{C}_n\,\mathbf{C}_{n-1}\ldots\mathbf{C}_1\,\mathbf{W}(0) \tag{3.3}$$

между матрицами $\mathbf{W}$ на границах $z = H_n$ и $z = 0$. Для описания распространения волн в полупространствах 0 и $n + 1$ полезно использовать матрицы $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{A}_{n+1}^{-1}$, входящие в равенства

$$\mathbf{W}_1(0) = \mathbf{A}_0\,\mathbf{Z}_0, \quad \mathbf{Z}_{n+1} = \mathbf{A}_{n+1}^{-1}\,\mathbf{W}_n(H_n). \tag{3.4}$$

Первая среда, содержащая одно полупространство $n+1$, описывается матрицей

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}_{n+1}^{-1}\,\mathbf{C}_n\,\mathbf{C}_{n-1}\ldots\mathbf{C}_1, \tag{3.5}$$

связывающей формулой

$$\mathbf{Z}_{n+1} = \mathbf{D}\,\mathbf{W}_1(0) \tag{3.6}$$

одностолбцовые матрицы $\mathbf{Z}_{n+1}$ и $\mathbf{W}_1(0)$. Матричное равенство (3.6) равносильно 6 скалярным соотношениям. Выпишем из них первое, третье и пятое соотношения

$$\begin{aligned}
&d_{11}\,U_{z1}^0 + d_{12}\,W_{z1}^0 + d_{13}\,T_{1z}^0 + d_{14}\,U_x^0 + d_{15}\,P^0 + d_{16}\,T_{zz}^0 = 0,\\
&d_{33}\,U_{z1}^0 + d_{32}\,W_{z1}^0 + d_{33}\,T_{1z}^0 + d_{34}\,U_x^0 + d_{35}\,P^0 + d_{36}\,T_{zz}^0 = 0,\\
&d_{51}\,U_{z1}^0 + d_{52}\,W_{z1}^0 + d_{53}\,T_{1z}^0 + d_{54}\,U_x^0 + d_{55}\,P^0 + d_{56}\,T_{zz}^0 = 0,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

в которых d_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, 6)$ – элементы матрицы (3.5), а через U_{z1}^0, W_{z1}^0, U_{x1}^0 обозначены соответствующие образы смещений u_{z1}^0, w_{z1}^0, u_{x1}^0. Решая систему уравнений (3.7) относительно этих образов смещения, приходим к равенствам

$$U_{z1}^0 = \left[D\binom{135}{234}T_{rz}^0 - D\binom{135}{245}P^0 - D\binom{135}{246}T_{zz}^0\right]\Big/D\binom{135}{124},$$

$$W_{z1}^0 = -\left[D\binom{135}{134}T_{rz}^0 - D\binom{135}{145}P^0 - D\binom{135}{146}T_{zz}^0\right]\Big/D\binom{135}{124}, \quad (3.8)$$

$$U_{x1}^0 = -\left[D\binom{135}{123}T_{rz}^0 - D\binom{135}{125}P^0 + D\binom{135}{126}T_{zz}^0\right]\Big/D\binom{135}{124},$$

в которых миноры матрицы $\mathbf{D}$ выражаются формулой

$$D\binom{i\,j\,k}{l\,m\,n} = \begin{vmatrix} d_{il} & d_{im} & d_{in} \\ d_{jl} & d_{jm} & d_{jn} \\ d_{kl} & d_{km} & d_{kn} \end{vmatrix}. \quad (3.9)$$

Равенства (3.8) совместно с заданными величинами T_{rz}^0, P^0 и T_{zz}^0 определяют все элементы столбца $\mathbf{W}_1(0)$ на границе $z = 0$. Через этот столбец выражаются столбцы $\mathbf{W}$ на всех границах с помощью соотношения

$$\mathbf{W}\,(H_{i-1}) = \mathbf{C}_{i-1}\,\mathbf{C}_{i-2}\ldots\mathbf{C}_1\,\mathbf{W}_1(0) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad (3.10)$$

а с учетом формулы (2.9) приходим к равенству

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{A}_i^{-1}\,\mathbf{C}_{i-1}\,\mathbf{C}_{i-2}\ldots\mathbf{C}_1\,\mathbf{W}_1(0), \quad (3.11)$$

которое совместно с формулами (2.3) и (2.4) определяет волновое поле потенциалов, смещений и напряжений во всех точках первой среды.

Вторая среда, ограниченная полупространствами 0 и $n+1$, характеризуется, согласно равенству (3.6) и первой формуле (3.4), соотношением

$$\mathbf{Z}_{n+1} = \mathbf{D}\,\mathbf{Z}_0 \quad (3.12)$$

и матрицей

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}_{n+1}^{-1}\,\mathbf{C}_n\,\mathbf{C}_{n-1}\ldots\mathbf{C}_1\,\mathbf{A}_0. \quad (3.13)$$

Матричное равенство (3.12) равносильно системе шести скалярных уравнений. Для нахождения функций X_{10}^+, X_{20}^+ и Y_0^+, определяющих отраженные волны, достаточно выписать только первое, третье и пятое уравнения

$$\begin{aligned} &d_{11}\,X_{10}^+ + d_{12}\,X_{10}^- + d_{13}\,X_{20}^+ + d_{14}\,X_{20}^- + d_{15}\,Y_0^+ + d_{16}\,Y_0^- = 0,\\ &d_{31}\,X_{10}^+ + d_{32}\,X_{10}^- + d_{33}\,X_{20}^+ + d_{34}\,X_{20}^- + d_{35}\,Y_0^+ + d_{36}\,Y_0^- = 0, \quad (3.14)\\ &d_{51}\,X_{10}^+ + d_{52}\,X_{10}^- + d_{53}\,X_{20}^+ + d_{54}\,X_{20}^- + d_{55}\,Y_0^+ + d_{56}\,Y_0^- = 0, \end{aligned}$$

в которых d_{ij} – элементы матрицы (3.13). Решая систему уравнений (3.14) относительно функций X_{10}^{+}, X_{20}^{+} и Y_0^{+}, приходим к равенствам

$$
\begin{aligned}
X_{10}^{+} &= -\left[D\binom{135}{235}X_{10}^{-} - D\binom{135}{345}X_{20}^{-} + D\binom{135}{356}Y_0^{-}\right]\Big/D\binom{135}{135},\\
X_{20}^{+} &= -\left[D\binom{135}{125}X_{10}^{-} + D\binom{135}{145}X_{20}^{-} - D\binom{135}{156}Y_0^{-}\right]\Big/D\binom{135}{135}, \qquad (3.15)\\
Y_0^{+} &= \left[D\binom{135}{123}X_{10}^{-} - D\binom{135}{134}X_{20}^{-} - D\binom{135}{136}Y_0^{-}\right]\Big/D\binom{135}{135}.
\end{aligned}
$$

Соотношения (3.15) совместно с заданными функциями X_1^0, X_2^0 и Y^0 определяют все элементы столбца Z_0. После подстановки первого равенства (3.4) в формулу (3.11) получаем соотношение

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{A}_i^{-1}\,\mathbf{C}_{i-1}\,\mathbf{C}_{i-2}\ldots\mathbf{C}_1\,\mathbf{A}_0\,\mathbf{Z}_0, \qquad (3.16)$$

которое определяет функции X_{1i}^{+}, X_{1i}^{-}, X_{2i}^{+}, X_{2i}^{-}, Y_i^{+} и Y_i^{-} во всех слоях и обоих полупространствах. Совместно с формулами (1.10) равенство (3.16) позволяет выразить потенциалы во всей второй пористой среде.

§4. Исследование матрицы пористого слоя Био

В случае малой толщины пористого слоя $0 \leqslant z \leqslant h$ матрица $\mathbf{C}$ выражается приближенным соотношением

$$\mathbf{C} = \mathbf{E} + kh\boldsymbol{\varkappa}, \qquad (4.1)$$

в котором $\mathbf{E}$ – единичная матрица, а матрица $\boldsymbol{\varkappa}$ представляется равенством

$$\boldsymbol{\varkappa} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \varkappa_{14} & \varkappa_{15} & \varkappa_{16}\\ 0 & 0 & 0 & \varkappa_{24} & \varkappa_{25} & \varkappa_{26}\\ 0 & 0 & 0 & \varkappa_{34} & \varkappa_{35} & \varkappa_{36}\\ -1 & 0 & L^{-1} & 0 & 0 & 0\\ \rho_f\eta^2 & m\eta^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \rho\eta^2 & \rho_f\eta^2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (4.2)$$

$$
\begin{aligned}
&\varkappa_{14} = -\varkappa_{36} = \frac{BM - C^2}{HM - C^2}, \quad \varkappa_{15} = \varkappa_{26} = -\frac{C}{HM - C^2},\\
&\varkappa_{16} = \frac{M}{HM - C^2}, \quad \varkappa_{24} = -\varkappa_{35} = \frac{2LC}{HM - C^2} - \frac{\rho_f}{m}, \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

$$\varkappa_{25} = \frac{1}{m\eta^2} + \frac{H}{HM - C^2}, \quad \varkappa_{34} = \frac{\gamma\eta^2}{m} + \frac{4L(HM - C^2 - ML)}{HM - C^2}.$$

Формулы (4.1)–(4.3) записаны на основании соотношений при использовании равенств (1.7), (1.8), (1.11), (2.11),

$$v_1^2 = \frac{C + B_1 M}{\rho_5} = \frac{M + B_1 C}{\rho_3}, \qquad v_2^2 = \frac{C + B_2 M}{\rho_6} = \frac{M + B_2 C}{\rho_4},$$
$$v_1^2 v_2^2 = (HM - C^2)/\gamma, \quad \rho_4 - \rho_3 = b\rho_f, \quad \rho_6 - \rho_5 = bm. \tag{4.4}$$

Из формулы (4.1) также следует, что при $h = 0$ матрица слоя становится единичной и эта единичная матрица может быть исключена из произведений матриц (3.5) и (3.13).

Исследуем теперь другой случай, когда параметры пористого слоя удовлетворяют условиям

$$\rho_f = 0, \quad C = 0, \quad Hm > M\rho. \tag{4.5}$$

Как показано в работе [8], в этом случае выполняются равенства

$$B_1 = 0, \quad B_2 = \infty, \quad \rho_3 = \rho, \quad \rho_4 = B_2\rho_f, \quad \rho_5 = 0, \quad \rho_6 = \infty. \tag{4.6}$$

Используя эти равенства и формулы (2.4), приходим к соотношению

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} & c_{14} & 0 & c_{16} \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 & c_{25} & 0 \\ c_{31} & 0 & c_{33} & c_{34} & 0 & c_{36} \\ c_{41} & 0 & c_{43} & c_{44} & 0 & c_{46} \\ 0 & c_{52} & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ c_{61} & 0 & c_{63} & c_{64} & 0 & c_{66} \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

в котором

$$c_{11} = \frac{L}{\rho\eta^2}\left(g\,C_{\alpha 1} - 2C_\beta\right), \quad c_{13} = -\frac{1}{\rho\eta^2}\left(C_{\alpha 1} - C_\beta\right),$$
$$c_{14} = -\frac{L}{\rho\eta^2\beta}\left(2\alpha_1\beta\,S_{\alpha 1} - g\,S_\beta\right), \quad c_{16} = \frac{1}{\rho\eta^2\beta}\left(\alpha_1\,\beta\,S_{\alpha 1} - S_\beta\right),$$
$$c_{31} = \frac{2L^2 g}{\rho\eta^2}\left(C_{\alpha 1} - C_\beta\right), \quad c_{33} = -\frac{L}{\rho\eta^2}\left(2C_{\alpha 1} - g\,C_\beta\right), \tag{4.8}$$
$$c_{34} = -\frac{L^2}{\rho\eta^2\beta}(4\alpha_1\,\beta\,S_\alpha - g^2\,S_\beta),$$

$$c_{36} = -c_{14}, \quad c_{41} = \frac{L}{\rho\eta^2\alpha_1}\left(g\,S_{\alpha 1} - 2\alpha_1\beta S_\beta\right),$$

$$c_{43} = -\frac{1}{\rho\eta^2\alpha_1}\left(S_{\alpha 1} - \alpha_1\beta S_\beta\right), \quad c_{44} = c_{33}, \quad c_{46} = -c_{13},$$

$$c_{61} = \frac{L^2}{\rho\eta^2\alpha_1}\left(g^2\,S_{\alpha 1} - 4\alpha_1\beta S_\beta\right), \; c_{63} = -c_{41}, \; c_{64} = -c_{31}, \quad c_{66} = c_{11};$$

$$c_{22} = C_{\alpha 2}, \quad c_{25} = \frac{\alpha_2 S_{\alpha 2}}{m\eta^2}, \quad c_{52} = \frac{m\eta^2}{\alpha_2}S_{\alpha 2}, \quad c_{55} = c_{22}. \tag{4.9}$$

Величины (4.8) образуют матрицу 4×4, которая совпадает с матрицей упругого слоя (см. [5], (1.2.21)) и в которой v_1 и v_3 – скорости продольной и поперечной волн, ρ – плотность и L – модуль сдвига. Из величин (4.9) можно сформировать матрицу жидкого слоя 2×2 (см. [5], (1.2.16)), в котором v_2 – скорость, а m – плотность. Таким образом, при выполнении условий (4.6), в пористом слое Био волны в упругой и жидкой фазах распространяются независимо друг от друга.

§5. Матрица пористого слоя, неоднородного вдоль оси z

Рассмотрим случай, когда в слое Био $0 \leqslant z \leqslant h$ параметры являются функциями координаты z, и построим матрицу этого слоя. Неоднородный слой по-прежнему описывается уравнениями (1.1). Особенность этих уравнений состоит в том, что они содержат производные по z от шести величин u_z, w_z, τ_{zz}, u_r, p и τ_{zz}, которые, согласно граничным условиям (1.2), являются непрерывными на границах раздела. Выразим эти производные из уравнений (1.1) и придем к шести равенствам

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{BM - C^2}{HM - C^2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}\right) + \frac{Cp}{HM - C^2} + \frac{M\tau_{zz}}{HM - C^2},$$

$$\frac{\partial^3 w_z}{\partial z \partial t^2} = \left(\frac{\rho_f}{m} - \frac{2LC}{HM - C^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}\right) +$$
$$+\frac{1}{m}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}\right) - \frac{H}{HM - C^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{C}{HM - C^2}\frac{\partial^2 \tau_{zz}}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = \frac{\gamma}{m}\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} - \frac{4L(HM - C^2 - LM)}{HM - C^2}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2}\right) +$$

$$+\left(\frac{2LC}{HM-C^2}-\frac{\rho_f}{m}\right)\frac{\partial p}{\partial r}-\frac{BM-C^2}{HM-C^2}\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial r}, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial z}=-\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\tau_{zz}}{L},$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho_f\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}-m\frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}+\rho_f\frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)\tau_{rz}.$$

Подставим в уравнения (5.1) соотношения (2.3) и для образов смещений и напряжений получим равенства

$$\frac{dU_z}{kdz}=\frac{BM-C^2}{HM-C^2}U_x-\frac{C}{HM-C^2}P+\frac{M}{HM-C^2}T_{zz},$$

$$\frac{dW_z}{kdz}=\left(\frac{2LC}{HM-C^2}-\frac{\rho_f}{m}\right)U_x+\left(\frac{1}{m\eta^2}+\frac{H}{HM-C^2}\right)P-$$

$$-\frac{C}{HM-C^2}T_{zz},$$

$$\frac{dT_{rz}}{kdz}=\left[\frac{\gamma\eta^2}{m}+\frac{4L(HM-C^2-ML)}{HM-C^2}\right]U_x+\left(\frac{\rho_f}{m}-\frac{2LC}{HM-C^2}\right)P-$$

$$-\frac{BM-C^2}{HM-C^2}T_{zz}, \tag{5.2}$$

$$\frac{dU_r}{kdz}=-U_z+\frac{1}{L}T_{rz},$$

$$\frac{dP}{kdz}=\rho_f\eta^2U_z+m\eta^2W_z,$$

$$\frac{dT_{zz}}{kdz}=\rho\eta^2U_z+\rho_f\eta^2W_z+\tau_{zz}.$$

Если использовать столбец $\mathbf{W}$, введенный первой формулой (2.5), то уравнения (5.2) можно записать в матричной форме

$$\frac{d\mathbf{W}}{dz}=k\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{W}, \tag{5.3}$$

в которой матрица $\boldsymbol{\varkappa}$ выражается соотношения (4.2) и (4.3).

Решение матричного уравнения (5.3), удовлетворяющее начальному условию

$$\mathbf{W}(z)\Big|_{z=0} = \mathbf{W}(0), \tag{5.4}$$

представляется рядом

$$\mathbf{W}(z) = \mathbf{E} + k\int\limits_0^z \varkappa\, dz + k^2\int\limits_0^z \varkappa(z_1)dz_1\int\limits_0^{z_1}\varkappa(z_2)dz_2 + \cdots . \tag{5.5}$$

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, заменим уравнение (5.3) с начальными условиями (5.4) равносильным интегральным уравнением

$$\mathbf{W}(z) = k\int\limits_0^z \varkappa(z_1)\mathbf{W}(z_1)dz_1 + \mathbf{W}(0) \tag{5.6}$$

и будем его решать методом последовательных приближений. За нулевое приближение примем

$$\mathbf{W}_0(z) = \mathbf{W}(0) \tag{5.7}$$

и, подставив выражение (5.7) в правую часть уравнения (5.3), получим первое приближение в виде формулы

$$\mathbf{W}_1(z) = \Big(\mathbf{E} + k\int\limits_0^z \varkappa(z_1)dz_1\Big)\mathbf{W}(0). \tag{5.8}$$

Остальные приближения выражаются соотношениями

$$\mathbf{W}_{i+1}(z) = k\int\limits_0^z \varkappa(z_1)\mathbf{W}_i(z_1)\,dz_1 + \mathbf{W}_i(0) \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{5.9}$$

При $i \to \infty$ получаем равенство

$$\mathbf{W}(z) = \lim_{i\to\infty}\mathbf{W}_i(z) =$$

$$= \Big[\mathbf{E} + k\int\limits_0^z \varkappa\, dz + k^2\int\limits_0^z \varkappa(z_1)dz_1\int\limits_0^{z_1}\varkappa(z_2)dz_2 + \cdots\Big]\mathbf{W}(0). \tag{5.10}$$

Ряд (5.10) сходится регулярно в области ограниченных с обеих сторон параметров и величины $|\eta|$. С помощью прямой подстановки ряда (5.10) в уравнение (5.3) убеждаемся, что выражение

(5.10) удовлетворяет уравнению (5.3). Из решения (5.10) при $z = h$ следует формула

$$\mathbf{C} = \mathbf{E} + k \int_0^h \boldsymbol{\varkappa}\, dz + k^2 \int_0^h \boldsymbol{\varkappa}(z_1) dz_1 \int_0^{z_1} \boldsymbol{\varkappa}(z_2) dz_2 + \cdots . \tag{5.11}$$

для матрицы неоднородного слоя, в котором параметры изменяются вдоль координаты z. Формулы для волнового поля (3.7) и (3.15) останутся справедливыми и в том случае, когда один или несколько слоев в рассматриваемых системах являются неоднородными вдоль оси z и описываются матрицами (5.11).

Рассмотрим теперь случай, когда рассматриваемый неоднородный слой оказывается однородным. В этом случае матричная функция $\varkappa(z)$ становится постоянной, ряд (5.11) суммируется и формула (4.11) заменяется равенством

$$\mathbf{C} = e^{kh\boldsymbol{\varkappa}}. \tag{5.12}$$

Выражения (5.12) и (2.14) являются эквивалентными. В этом можно убедиться, доказав, что матрица $\mathbf{C}$, определенная соотношениями (2.14), удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\mathbf{C}}{dh} = k\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{C} = k\mathbf{C}\boldsymbol{\varkappa}. \tag{5.13}$$

Решив это уравнение, как и уравнение (5.3), методом последовательных приближений, получаем формулу (5.12).

Следует еще отметить, что переход от матрицы однородных слоев к матрице неоднородного вдоль оси z слоя может быть осуществлен без использования уравнений (4.3). В самом деле, заменим неоднородный пористый слой пачкой из m тонких однородный слоев. Эта пачка, согласно формулам (4.1), будет описываться произведением

$$\prod_{i=m}^{1} (\mathbf{E} + kh_i \boldsymbol{\varkappa}_i), \tag{5.14}$$

которое приближенно равно выражению

$$\mathbf{E} + k \sum_{i=1}^{m} h_i \boldsymbol{\varkappa}_i + k^2 \sum_{i=1}^{m} h_i \boldsymbol{\varkappa}_i \sum_{j=1}^{i-1} \boldsymbol{\varkappa}_j\, h_j + \cdots . \tag{5.15}$$

В результате обратного перехода к неоднородному слою при $m \to \infty$ суммы в выражении (5.15) заменяются интегралами и приходим к формуле (5.11). Подобный переход, в частности, был осуществлен в работе [9].

Литература

1. M. A. Biot, *Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I Low-frequency range.* — J. Acoust. Soc. Am. **28, No. 2** (1956), 168–178.
2. M. A. Biot, *Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media.* — J. Appl. Phys. **33,** No. 4 (1962), 1482–1498.
3. W. T. Thomson, *Transmission of elastic waves through a stratified solid material.* — J. Appl Phys. **21,** No. 1 (1950), 89–93.
4. N. A. Haskell, *The dispersion of surface waves on multilayered media.* — Bull. Seismol. Soc. Am. **43,** No. 1 (1953), 17–43.
5. Л. А. Молотков, *Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах.* Наука, Ленинград (1984).
6. J. F. Allard, C. Depollier, P. Rebillard, W. Lauris, and A. Cops, *Inhomogeneous Biot waves in layered media.* — J. Appl. Phys. **66,** No. 6 (1989), 2278–2284.
7. G. E. Baird, P. D. Thomas, and G. Sang, *The propagation of elastic waves through a layered poroelastic medium.* — J. Acoust. Soc. Am. **99,** No. 6 (1996), 3385–3392.
8. Л. А. Молотков, *Об источниках, действующих на свободной границе пористой среды Био, и об отражении волн на этой границе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **264** (2000).
9. Л. А. Молотков, *О дисперсионных уравнениях слоисто-неоднородных упругих и жидких систем.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **42** (1974), 189–211.

Molotkov L. A. About the matrix method in the theory of wave propagation in layered porous Biot media.

Wave propagation in porous Biot media with homogeneous isotropic layers is investigated by matrix method. In order to use this method the matrices describing porous layers and half-spaces are established. On the basic of these matrices the wave fields in layered porous media are derived and explored. In this paper the matrices of inhomogeneous porous layers are determined also and these matrices are expressed by convergent series.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 2 декабря 1999 г.