Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 264, 2000 г.

**В. С. Колежук**

# АСИМПТОТИКА СПЕКТРА И СОБСТВЕННЫХ ГАРМОНИК ДИСКРЕТНОЙ СТРУНЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ БУСИНУ МАЛОЙ МАССЫ

## 0. Введение

В работе изучается задача о собственных колебаниях дискретной струны с конечным числом точечных масс (бусин). Струна – это невесомая нить с жёстко закреплёнными концами, натянутая единичной силой и занимающая интервал $[0;a]$ вещественной оси $x$. На нити в точках $x_i : 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < a$ размещены бусины массами $m_1, \ldots, m_n$. Числа $c_1 = x_1^{-1}$; $c_i = (x_i - x_{i-1})$, $i = 2, \ldots, n$; $c_{n+1} = (a - x_n)^{-1}$ называются жёсткостями.

Следуя [1], свяжем со струной квадратные матрицы порядка $n : M = \{m_j \delta_{jk}\}_{j,k=1}^n$ ($\delta_{jk}$ – символ Кронекера);

$$C = \left\{c_{jk}\right\}_{j,k=1}^n : c_{jj} = c_j + c_{j+1}; \quad c_{j\,j+1} = c_{j+1\,j} = -c_{j+1},$$

остальные $c_{jk}$ равны 0. Собственные гармоники струны описываются векторами $u_i = \operatorname{col}\{u_j^p\}_{p=1}^n \in \mathbb{R}^n$ (col – столбец), являющимися собственными векторами матрицы $L := M^{-1}C : Lu_j = \lambda_j\, u_j$; $\{\lambda_j\}_{j=1}^n : 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$ – спектр струны. Числа $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$ – суть собственные частоты струны. Если не оговорено противное, будем считать, что собственные векторы нормированы условием $u_j^1 = 1$.

Пусть одна из бусин, с номером $j = i$, имеет малую массу $m_i = \varepsilon$; наша цель – исследовать поведение гармоник и частот при $\varepsilon \to 0$.

Условимся об обозначениях. При необходимости индексом $\varepsilon$ будем снабжать матрицы, собственные значения, собственные векторы, отвечающие струне с массами $m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, \varepsilon, m_{i+1}, \ldots, m_n$. Роль предельного объекта играет струна той же длины, содержащая $n-1$ бусин, расположенных в точках $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ и имеющих массы $m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, m_{i+1}, \ldots, m_n$.

Работа поддержана грантом РФФИ 99-01-00107.

Пусть $L'$ есть матрица, отвечающая предельной струне; $0 < \lambda'_1 < \lambda'_2 < \ldots < \lambda'_{n-1}$ – ее собственные значения; $u'_1, \ldots, u'_{n-1}$ – собственные векторы.

Определим векторы $w_1, \ldots, w_{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$ с компонентами

$$w_j^p := \begin{cases} (u'_j)^p, \quad 1 \leqslant p < i; \\ (u'_j)^{i-1} \dfrac{c_i}{c_i + c_{i+1}} + (u'_j)^{i+1} \dfrac{c_{i+1}}{c_i + c_{i+1}}, \quad p = i; \\ (u'_j)^{p-1}, \quad i < p \leqslant n. \end{cases}$$

Приведем основной результат работы. Обозначим

$$D_1 := \frac{\max\limits_{k=1,\ldots,i} c_k}{\min\limits_{k=1,\ldots,i-1} m_k}; \quad D_2 := \frac{\max\limits_{k=i+1,\ldots,n+1} c_k}{\min\limits_{k=i+1,\ldots,n} m_k}; \quad \eta := \min_{k \neq j} \left| \frac{\lambda'_k - \lambda'_j}{2} \right|;$$

$$C = \begin{cases} 1, \qquad n = 2'; \\ \left(\dfrac{n-2}{2}\right)!(n-3)!! \cdot 2^{\frac{n-2}{2}}, \quad n \text{ – четное}, \quad n > 2; \\ \left(\dfrac{n-3}{2}\right)!(n-2)!! \cdot 2^{\frac{n-3}{2}}, \quad n \text{ – нечетное}, \quad n > 2; \end{cases}$$

(используем обозначение $(2k+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1)$).

**Теорема 1.** *Для произвольных* $\delta$, $N : 0 < \delta < \eta, N > \lambda'_{n-1} + \eta$ *при*

$$\varepsilon < \frac{C\delta\eta^{n-1}(c_i + c_{i+1})}{N(N + D_1 e)^{i-1}(N + D_2 e)^{n-i}}$$

*выполнены неравенства*

$$|\lambda_j(\varepsilon) - \lambda'_j| < \delta, \quad j = 1, \ldots, n-1; \quad |\lambda_n(\varepsilon)| > N.$$

*Справедливы предельные соотношения:*

$$u_j(\varepsilon) \to w_j, \quad j = 1, \ldots, n-1; \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u_n^p(\varepsilon)}{u_n^i(\varepsilon)} = \delta_{ip}, \quad p = 1, \ldots, n.$$

Поведение $j$-ой ($j = 1, \ldots, n-1$) гармоники иллюстрируется рисунком 1.

Жирной линией указана основная гармоника струны с четырьмя бусинами (с малой массой $m_2$); прерывистой – основная гармоника предельной струны – с тремя бусинами.

Автор признателен М. И. Белишеву за постановку задачи и внимание к работе.

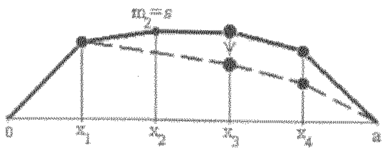


Рис. 1.

## 1. Поведение спектра

**1.1. Предельный спектр.**

Представим характеристический полином матрицы $L$ в удобном для дальнейшего виде. Раскладывая $i$-ый столбец в сумму, получаем:

$$\det(L-\lambda E) =: \mathrm{I}+\mathrm{II}, \tag{1.1}$$

где I и II суть определители, причем $i$-ый столбец II имеет вид $\mathrm{col}\,\{0,\dots,\underbrace{-\lambda}_{i},0,\dots,0\}$. Обозначим $P(\lambda) := m_i\,\mathrm{I}$, $Q(\lambda) := -\frac{1}{\lambda}\,\mathrm{II}$. Как нетрудно видеть, $P$ и $Q$ суть полиномы степени $n-1$, не зависящие от $m_i$, а уравнение на собственные значения $L$ принимает вид:

$$\frac{P(\lambda)}{m_i} = \lambda Q(\lambda). \tag{1.2}$$

**Лемма 1.** *Полином $P(\lambda)$ пропорционален характеристическому полиному матрицы $L'$, соответствующей предельной струне.*

**Доказательство.** Обозначим через $\Delta_{11}$ минор матрицы $L-\lambda E$, соответствующий первым $i-1$ строкам и столбцам; через $\Delta_{12}$ – минор, соответствующий первым $i-2$ строкам и столбцам, через $\Delta_{21}$ и $\Delta_{22}$ – миноры, соответствующие последним $i-1$ и $i-2$ строкам и столбцам, соответственно. Раскладывая определитель I по $i$-ой строке и, далее, по столбцу, который был в исходном определителе $i$-ым, нетрудно получить:

$$\frac{P(\lambda)}{m_i} = -\frac{c_i^2}{m_i\,m_{i-1}}\Delta_{12}\Delta_{21} - \frac{c_{i+1}^2}{m_i\,m_{i+1}}\Delta_{11}\Delta_{22} + \frac{c_i+c_{i+1}}{m_i}\Delta_{11}\Delta_{21}. \tag{1.3}$$

Матрица $L'-\lambda E$, отвечающая предельной струне содержит элементы

$$(L'-\lambda E)_{i-1,\,i-1} = \frac{c_{i-1}+c_i c_{i+1}/(c_i+c_{i+1})}{m_{i-1}} - \lambda;$$

$$(L' - \lambda E)_{i-1\,i} = -\frac{c_i c_{i+1}}{(c_i + c_{i+1})m_{i-1}};$$

$$(L' - \lambda E)_{i\,i-1} = -\frac{c_i c_{i+1}}{(c_i + c_{i+1})m_{i+1}};$$

$$(L' - \lambda E)_{i\,i} = \frac{c_{i+1} + c_i c_{i+1}/(c_i + c_{i+1})}{m_{i+1}} - \lambda;$$

Обозначим через $\Delta_3$ минор этой матрицы, соответствующий первым $i-1$ строкам и столбцам, а через $\Delta_4$ – последним $n-i$ строкам и столбцам. Заметим, что матрица, составленная из первых $i-1$ строк и столбцов матрицы $L - \lambda E$ отличается от матрицы, полученной таким же образом из $L' - \lambda E$ только последним диагональным элементом. Значит,

$$\Delta_3 = \Delta_{11} - \frac{c_i^2 \Delta_{12}}{(c_i + c_{i+1})m_{i-1}}.$$

Аналогично,

$$\Delta_4 = \Delta_{21} - \frac{c_{i+1}^2 \Delta_{22}}{(c_i + c_{i+1})m_{i+1}}.$$

Раскладывая в сумму $i$-й столбец, получаем представление

$$\det(L' - \lambda E) = \mathrm{III} + \mathrm{IV},$$

где III и IV – определители, причем $i$-й столбец определителя IV имеет вид

$$\mathrm{col}\left\{0, \dots, 0, \underbrace{-\frac{c_i c_{i+1}}{(c_i + c_{i+1})m_{i-1}}}_{i-1}, 0, \dots, 0\right\}.$$

Учитывая блочно-треугольную структуру III и раскладывая $i$-ю строку IV в сумму, получаем:

$$\det(L' - \lambda E) = \Delta_3 \Delta_4 +$$

$$+\begin{vmatrix} . & \vdots & . & . & . & 0 & \vdots & 0 \\ . & \vdots & . & . & -\frac{c_i\, c_{i+1}}{(c_i + c_{i+1})m_{i-1}} & . & \vdots & . \\ 0 & \vdots & 0 & -\frac{c_i\, c_{i+1}}{(c_i + c_{i+1})m_{i+1}} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ . & \vdots & . & . & . & . & \vdots & . \\ . & \vdots & . & . & . & . & \vdots & . \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} . & \vdots & . & . & . & . & \vdots & . \\ . & \vdots & . & -\frac{c_i\,c_{i+1}}{(c_i+c_{i+1})m_{i-1}} & . & . & \vdots & . \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{c_{i+2}}{m_{i+1}} & 0 & \vdots & 0 \\ . & \vdots & . & . & . & . & \vdots & . \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & . & . & \vdots & . \end{vmatrix} =$$

(так как в последнем определителе последние $n-i$ строк линейно зависимы)

$$= \Delta_3\Delta_4 - \left(\frac{c_i c_{i+1}}{c_i + c_{i+1}}\right)^2 \frac{\Delta_{12}\Delta_{22}}{m_{i-1}m_{i+1}}.$$

Подставляя вместо $\Delta_3$ и $\Delta_4$ их выражения, полученные ранее, получаем

$$\det(L' - \lambda E) = \left(-\frac{c_i^2}{m_i\,m_{i+1}}\Delta_{21}\Delta_{12} - \frac{c_{i+1}^2}{m_i\,m_{i+1}}\Delta_{11}\Delta_{22} + \right.$$
$$\left. + \frac{c_i + c_{i+1}}{m_i}\Delta_{11}\Delta_{21}\right)\frac{m_i}{c_i + c_{i+1}}. \qquad (1.4)$$

Сопоставляя (1.3) и (1.4), получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

Конечная дискретная струна имеет простой спектр [1]; поэтому корни полинома $\det(L' - \lambda E)$, образующие спектр предельной струны, суть простые. По лемме 1 то же верно и для $P(\lambda)$, множество корней $P(\lambda)$ совпадает со спектром предельной струны.

### 1.2. Предельный спектр.

Рассмотрим множество $\Lambda := \{\lambda : P(\lambda) = 0\} \cup \{+\infty\}$, состоящее из спектра $\{\lambda'_j\}_{j=1}^{n-1}$ предельной струны и точки $x = +\infty$; напомним, что этот спектр положителен [1].

**Лемма 2.** *Справедливы соотношения* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lambda_j(\varepsilon) = \lambda'_j$, $j = 1, \ldots, n-1$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lambda_n(\varepsilon) = +\infty$. *Стремление* $\lambda_j(\varepsilon)$ *к пределу является монотонным.*

**Доказательство.** Введем множество

$$\Lambda(\delta) := \left[\bigcup_{j=1}^{n-1}\left(\lambda'_j - \delta_j; \lambda'_j + \delta\right)\right] \cup \{\lambda : \lambda > \delta\} \qquad (1.5)$$

и число

$$M(\delta) := \max_{\lambda\in[0;+\infty)\setminus\Lambda(\delta)} \frac{\lambda Q(\lambda)}{P(\lambda)}.$$

Пусть $\delta > 0$. Тогда при $\varepsilon < 1/M(\delta)$ все $\lambda_j(\varepsilon)$ лежат в $\Lambda(\delta)$. С другой стороны, существует $\delta_0$ такое, что при $\delta = \delta_0$ окрестности из правой части (1.5) попарно не пересекаются. Фиксируем номер $j$. При $\varepsilon < 1/M(\delta_0)$ $\lambda_j(\varepsilon)$ попадает в одну из этих окрестностей, например, $(\lambda'_k - \delta_0; \lambda'_k + \delta_0)$, и, являясь непрерывной функцией, не может покинуть ее при $\varepsilon \to 0$. Возьмем произвольное $0 < \delta < \delta_0$, пусть $\varepsilon < 1/M(\delta)$. Тогда

$$\lambda_j(\varepsilon) \in \Lambda(\delta) \cap \big(\lambda'_k - \delta_0; \lambda'_k + \delta_0\big) =$$

$$= \big(\lambda'_k - \delta; \lambda'_k + \delta\big), \quad \text{т.е.} \quad \lambda_j(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \lambda'_k.$$

Случай, когда $\lambda_j(\varepsilon) \in \big\{\lambda : \lambda > 1/\delta_0\big\}$ рассматривается аналогично.

Таким образом, каждое $\lambda'_j(\varepsilon)$, $j = 1, \dots, n$ стремится к пределу, который лежит в $\Lambda$.

Пусть $\chi \in \Lambda$. Докажем, что к $\chi$ стремится не более одного собственного числа $\lambda_j(\varepsilon)$. Пусть это неверно, то есть $\lambda_j(\varepsilon) \to \chi$ и $\lambda_k(\varepsilon) \to \chi$, $k \neq j$. Имеем несколько случаев:

1. $Q(\chi) = 0$. В этом случае $\chi$ удовлетворяет уравнению (1.2) и, следовательно, лежит в спектре струны. Поэтому, либо $\lambda_j(\varepsilon) \neq \chi$, либо $\lambda_k(\varepsilon) \neq \chi$ при всех $\varepsilon$. Поскольку при $\lambda_j(\varepsilon) \neq \chi$ имеем стремление

$$\frac{\lambda_j(\varepsilon) Q(\lambda_j(\varepsilon))}{P(\lambda_j(\varepsilon))} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} +\infty,$$

то получаем противоречие ввиду того, что

$$\lim_{\lambda\to\chi} \left| \frac{\lambda Q(\lambda)}{P(\lambda)} \right| < +\infty.$$

2. $Q(\chi) \neq 0$; $\chi < +\infty$; $\lambda_j(\varepsilon)$ и $\lambda_k(\varepsilon)$ лежат по разные стороны от $\chi$. Тогда

$$\lim_{\lambda\to\chi\pm 0} \frac{\lambda Q(\lambda)}{P(\lambda)} = +\infty,$$

следовательно, $\chi$ – кратный корень $P(\lambda)$, чего быть не может.

3. $Q(\chi) \neq 0$; $\lambda_j(\varepsilon)$ и $\lambda_k(\varepsilon)$ лежат по одну сторону от $\chi$ при всех $\varepsilon$. Поскольку

$$\lim_{\lambda\to\chi\pm 0} \frac{\lambda Q(\lambda)}{P(\lambda)} = \pm\infty, \quad \text{при} \quad \chi < \pm\infty,$$

то и

$$\lim_{\lambda\to\chi\pm 0} \left(\frac{\lambda Q(\lambda)}{P(\lambda)}\right)' = \pm\infty.$$

В случае $\chi = +\infty$ выражение

$$\lim_{\lambda\to\chi} \left(\frac{\lambda Q(\lambda)}{P(\lambda)}\right)'$$

есть константа, отличная от 0, так как $\lambda Q(\lambda)$ – полином степени $n$, а $P(\lambda)$ – полином степени $n-1$. Следовательно, найдется $\delta$ такое, что

$$\left(\frac{\lambda Q(\lambda)}{P(\lambda)}\right)' \neq 0 \quad \text{при} \quad \lambda \in \Lambda(\delta).$$

Поскольку

$$\frac{\lambda_j(\varepsilon) Q(\lambda_j(\varepsilon))}{P(\lambda_j(\varepsilon))} = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\lambda_k(\varepsilon) Q(\lambda_k(\varepsilon))}{P(\lambda_k(\varepsilon))},$$

то между $\lambda_j(\varepsilon)$ и $\lambda_k(\varepsilon)$ есть точка $\lambda$, в которой $\left(\frac{\lambda Q(\lambda)}{P(\lambda)}\right)' \neq 0$. Возьмем $\varepsilon$ такое, что $\lambda_j(\varepsilon)$ и $\lambda_k(\varepsilon) \in \Lambda(\delta)$ и придем к противоречию.

Заметим, что поскольку $\lambda_j(\varepsilon)$ – непрерывно и $\lambda_j(\varepsilon) \neq \chi$ при $\varepsilon > 0$ в случаях 2 и 3, то свойство $\lambda_j(\varepsilon)$ и $\lambda_k(\varepsilon)$ находиться по одну или по разные стороны от $\chi$ не зависит от $\varepsilon$. Следовательно, все возможные случаи разобраны.

Таким образом, к каждому $\chi \in \Lambda$ стремится не более одного собственного числа. Учитывая, что $\lambda_j(\varepsilon)$ занумерованы в порядке возрастания, получаем требуемые соотношения.

Осталось доказать, что все $\lambda_j(\varepsilon)$ монотонны. Если

$$\lambda_j(\varepsilon_1) = \lambda_j(\varepsilon_2) =: \lambda, \quad \text{то} \quad \frac{1}{\varepsilon_1} = \frac{\lambda Q(\lambda)}{P(\lambda)} = \frac{1}{\varepsilon_2}.$$

Следовательно, $\lambda_j(\varepsilon)$ – непрерывная функция, имеющая обратную, значит она монотонна. Лемма доказана.

**1.3. Оценки для спектра при $\varepsilon \to 0$.**

В этом пункте мы установим неравенства, представленные в теореме 1. Их доказательству предпошлем леммы 3 и 4.

**Лемма 3.** *Пусть $c_j \neq 0$ – вещественные числа; обозначим*

$$B_k :=$$

$$\begin{vmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & \cdot & 0 \\ c_2 & c_2+c_3 & -c_3 & \vdots & \cdot & \cdot & \vdots & \cdot & \cdot \\ 0 & -c_3 & c_3+c_4 & \vdots & \cdot & \cdot & \vdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \vdots & \cdot & \cdot & \vdots & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \vdots & c_i+c_{i+1} & -c_{i+1} & \vdots & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \vdots & -c_{i+1} & c_{i+1}+c_{i+2} & \vdots & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \vdots & \cdot & \cdot & \vdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \vdots & \cdot & \cdot & \vdots & c_k+c_{k-1} & -c_k \\ 0 & \cdot & \cdot & \vdots & 0 & 0 & \vdots & -c_k & c_k+c_{k+1} \end{vmatrix}.$$

*Справедливо равенство*

$$B_k = \left(\prod_{j=1}^{k+1} c_j\right)\left(\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{c_j}\right).$$

**Доказательство.** При $k=1$ имеем:

$$B_1 = c_1 + c_2 = c_1 c_2\,(1/c_1 + 1/c_2)\,;$$

при $k=2$ имеем:

$$B_2 = (c_1+c_2)(c_2+c_3) - c_2^2 = c_1c_2 + c_2c_3 + c_1c_3 =$$
$$= c_1c_2c_3\,(1/c_1 + 1/c_2 + 1/c_3)\,.$$

Пусть представление для $B_k$ установлено при $k=m$ и $k=m-1$. Из разложения по последней строке и столбцу следуют равенства

$$B_{k+1} = (c_{k+1}+c_{k+2})B_k - c_{k+1}^2 B_{k-1} =$$
$$= (c_{k+1}+c_{k+2})c_1\cdot\ldots\cdot c_{k+1}\left(\frac{1}{c_1}+\cdots+\frac{1}{c_{k+1}}\right) -$$

$$-c_{k+1}^2\cdot c_1\cdot\ldots\cdot c_k\cdot\left(\frac{1}{c_1}+\cdots+\frac{1}{c_k}\right)=$$

$$=c_1\cdot\ldots\cdot c_k\cdot c_{k+1}^2\left[\left(\frac{1}{c_1}+\cdots+\frac{1}{c_{k+1}}\right)-\left(\frac{1}{c_1}+\cdots+\frac{1}{c_k}\right)\right]+$$

$$+c_1\cdot\ldots\cdot c_{k+2}\left(\frac{1}{c_1}+\cdots+\frac{1}{c_{k+1}}\right)=c_1\cdot\ldots\cdot c_{k+2}\left(\frac{1}{c_1}+\cdots+\frac{1}{c_{k+2}}\right).$$

Лемма доказана.

**Лемма 4.** *Пусть* $c_j$ *и* $m_j$ *– суть жёсткости и массы;* $\det(L-\lambda E)=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k p_k\lambda^k$ *– характеристический полином струны. Тогда при всех* $k=0,1,\ldots,n$ *справедливы неравенства*

$$0<p_k\leqslant C_{n+k+1}^{2k+1}\left(\frac{\max\limits_{j=1,\ldots,n+1}c_j}{\min\limits_{j=1,\ldots,n}m_j}\right)^{n-k}. \tag{1.6}$$

**Доказательство.** При целых $q_1\leqslant q_2$ рассмотрим минор матрицы $L$

$$A_{q_1}^{q_2}:=\begin{vmatrix} \frac{c_{q_1}+c_{q_1+1}}{m_{q_1}} & -\frac{c_{q_1+1}}{m_{q_1}} & 0 & \iddots \\ -\frac{c_{q_1+1}}{m_{q_1+1}} & \frac{c_{q_1+1}+c_{q_1+2}}{m_{q_1+1}} & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \frac{c_{q_2-1}+c_{q_2}}{m_{q_2-1}} & -\frac{c_{q_2}}{m_{q_2-1}} \\ \iddots & 0 & -\frac{c_{q_2}}{m_{q_2}} & \frac{c_{q_2}+c_{q_2+1}}{m_{q_2}} \end{vmatrix}.$$

По лемме 3 имеем:

$$A_{q_1}^{q_2}=\frac{\left(\prod\limits_{j=q_1}^{q_2+1}c_j\right)\left(\sum\limits_{j=q_1}^{q_2+1}\frac{1}{c_j}\right)}{\prod\limits_{j=q_1}^{q_2}m_j}=\frac{\sum\limits_{j=q_1}^{q_2+1}\frac{\prod\limits_{j=q_1}^{q_2+1}c_k}{c_j}}{\prod\limits_{j=q_1}^{q_2}m_j}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\sum\limits_{j=q_1}^{q_2+1}\left(\max\limits_{k=q_1,\ldots,q_2+1}c_k\right)^{q_2-q_1+1}}{\left(\min\limits_{j=q_1,\ldots,q_2}m_j\right)^{q_2-q_1+1}}=$$

$$= (q_2 - q_1 + 2) \left( \frac{\max\limits_{k=q_1,\dots,q_2+1} c_j}{\min\limits_{j=q_1,\dots,q_2} m_j} \right)^{q_2-q_1+1} . \tag{1.7}$$

Кроме того, поскольку $c_j$ и $m_k$ положительны, то

$$A_{q_1}^{q_2} > 0. \tag{1.8}$$

При $q_1 > q_2$ примем $A_{q_1}^{q_2} := 1$.

Пусть $\Gamma$ – некоторое подмножество множества $\{1, \dots, n\}$, обозначим через $A_\Gamma$ минор матрицы $L$, полученный вычеркиванием столбцов и строк с номерами из $\Gamma$. Обозначим

$$D := \frac{\max\limits_{j=1,\dots,n+1} c_j}{\min\limits_{j=1,\dots,n} m_j}.$$

Занумеруем $\Gamma$ в порядке возрастания $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$. Доопределив $\gamma_0 := 0$; $\gamma_{k+1} := n+1$, имеем равенство $A_\Gamma = \prod\limits_{m=0}^{k} A_{\gamma_m+1}^{\gamma_{m+1}-1}$. Учитывая (1.7) и (1.8), получаем, что

$$0 < A_\Gamma \leqslant D^{n-k} \prod_{m=0}^{k} (\gamma_{m+1} - \gamma_m).$$

Из известного равенства

$$p_k = \sum_{\substack{\Gamma \subset \{1,\dots,n\} \\ \#(\Gamma)=k}} A_\Gamma$$

следуют соотношения

$$0 < p_k \leqslant D^{n-k} \sum_{\substack{\Gamma \subset \{1,\dots,n\} \\ \#(\Gamma)=k}} \prod_{m=0}^{k} (\gamma_{m+1} - \gamma_m).$$

Обозначим через $T_n^k$ сумму, стоящую в правой части.

Для завершения доказательства установим комбинаторное равенство $T_n^k = C_{n+k+1}^{2k+1}$. Проверим его в простых случаях:

1. $k = 0$.

$$T_n^0 = \sum_{\substack{\Gamma \subset \{1,\dots,n\} \\ \#(\Gamma)=0}} \prod_{m=0}^{0} (\gamma_{m+1} - \gamma_m).$$

В сумме есть только одно слагаемое – соответствующее $\Gamma = \varnothing$, значит $T_n^0 = \gamma_1 - \gamma_0 = n+1$. С другой стороны,

$$C_{n+k+1}^{2k+1} = C_{n+1}^{1} = n+1.$$

2. В случае $k = n$ имеем $\Gamma = \{1, \ldots, n\}$ и, следовательно,

$$T_n^n = \sum_{\substack{\Gamma\subset\{1,\ldots,n\}\\ \#(\Gamma)=n}} \prod_{m=0}^{n} (\gamma_{m+1} - \gamma_m) = \prod_{m=0}^{n} 1 = 1 = C_{2n+1}^{2n+1}.$$

3. $k+1 = n$. В этом случае

$$T_n^k = \sum_{\substack{\Gamma\subset\{1,\ldots,n\}\\ \#(\Gamma)=n-1}} \prod_{m=0}^{n-1} (\gamma_{m+1} - \gamma_m) = \sum_{j=1}^{n} \prod_{m=0}^{k} (\gamma_{m+1} - \gamma_m),$$

где $j$ – единственный элемент множества $\{1, \ldots, n\}$, не содержащийся в $\Gamma$. Все множители равны 1, кроме одного, который равен 2. Значит,

$$T_n^k = 2n = C_{2n}^{2n-1} = C_{n+k+1}^{2k+1}.$$

Докажем теперь, что

$$T_{n+1}^{k+1} = T_n^k + 2T_{n-1}^k + \ldots + (n+2-k)T_{k+1}^k + (n+1-k)T_n^k =$$
$$= \sum_{m=k}^{n} (n+1-m) T_m^k. \tag{1.10}$$

Обозначим для натурального $p$ и множества $\Gamma \subset \{1, \ldots, p\}$ через $\gamma_m(\Gamma, p)$, $m \leqslant \#(\Gamma)$ $m$-ый по возрастанию элемент $\Gamma$; доопределим при $m = \#(\Gamma)+1$; $\gamma_m(\Gamma, p) := p+1$, при $m = 0$; $\gamma_m(\Gamma, p) := 0$.

Пусть $t$ – целое: $k+1 \leqslant t \leqslant n+1$; обозначим для $\Gamma$ таких, что $\#(\Gamma) = k+1$ и $\gamma_{k+1}(\Gamma, n+1) = t$, $\Gamma' := \Gamma \setminus \{t\}$; при этом

$$\gamma_{k+2}(\Gamma, n+1) = \gamma_{k+1}(\Gamma, n+1) = n+2-t; \quad \gamma_m(\Gamma, n+1) = \gamma_m(\Gamma', t-1)$$

при $m \leqslant k+1$. Имеем равенства

$$\sum_{\substack{\Gamma\subset\{1,\ldots,n+1\}\\ \#(\Gamma)=k+1\\ \gamma_{k+1}(\Gamma,n+1)=t}} \prod_{m=0}^{k+1} (\gamma_{m+1}(\Gamma, n+1) - \gamma_m(\Gamma, n+1)) =$$

$$= \sum_{\substack{\Gamma'\subset\{1,\dots,t-1\}\\ \#(\Gamma')=k}} \prod_{m=0}^{k} \left(\gamma_{m+1}(\Gamma', t-1) - \gamma_m(\Gamma', t-1)\right)(n+2-t) =$$

$$= T^k_{t-1}(n+2-t).$$

Если $\Gamma \subset \{1,\dots,n+1\}$, то $\gamma_{k+1}(\Gamma, n+1) \in [k+1, n+1]$;

$$T^{k+1}_{n+1} = \sum_{t=k+1}^{n+1} \sum_{\substack{\Gamma\subset\{1,\dots,n+1\}\\ \#(\Gamma)=k+1\\ \gamma_{k+1}(\Gamma,n+1)=t}} \prod_{m=0}^{k+1} (\gamma_{m+1} - \gamma_m) = \sum_{t=k+1}^{n+1} (n+2-t)\, T^k_{t-1},$$

что и доказывает (1.10).

Из (1.10) вытекает равенство

$$T^{k+1}_{n+1} - T^{k+1}_{n} = \sum_{m=k}^{n} T^k_m,$$

и далее:

$$T^{k+1}_{n+1} - 2\cdot T^{k+1}_{n} + T^{k+1}_{n-1} = \left(T^{k+1}_{n+1} - T^{k+1}_{n}\right) - \left(T^{k+1}_{n} - T^{k+1}_{n-1}\right)]T^k_n. \quad (1.11)$$

Покажем теперь, что

$$C^{2k+1}_{n+k+2} - 2C^{2k+1}_{n+k+1} + C^{2k+1}_{n+k} = C^{2k-1}_{n+k}.$$

Имеем равенства

$$C^{2k+1}_{n+k+2} - C^{2k+1}_{n+k+1} =$$

$$= \frac{(n-k+2)\cdot\ldots\cdot(n+k+2) - (n-k+1)\cdot\ldots\cdot(n+k+1)}{(2k+1)!} =$$

$$= \frac{(n-k+2)\cdot\ldots\cdot(n+k+1)\cdot(2k+1)}{(2k+1)!} =$$

$$= \frac{(n-k+2)\cdot\ldots\cdot(n+k+1)}{(2k)!};$$

$$\left(C^{2k+2}_{n+k+1} - C^{2k+1}_{n+k+1}\right) - \left(C^{2k+1}_{n+k+1} - C^{2k+1}_{n+k}\right) =$$

$$= \frac{(n-k+2)\cdot\ldots\cdot(n+k+1) - (n-k+1)\cdot\ldots\cdot(n+k)}{(2k)!} =$$

$$= \frac{(n-k+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)}{(2k-1)!} = C_{n+k}^{2k-1}.$$

Таким образом, для $C_{n+k+1}^{2k+1}$ выполняется реккурентное соотношение, аналогичное (1.11). Кроме того, равенство $T_n^k = C_{n+k+1}^{2k+1}$ выполнено при всех $k=0$, $k=n$ или $k=n-1$. Значит, оно верно при всех $k \leqslant n$, что и завершает доказательство леммы 4.

Можно показать, что оценка для $p_k$, установленная в лемме 4, точна, причем равенство реализуется в случае $m_1 = m_2 = \ldots = m_n$; $c_1 = c_2 = \ldots = c_{n+1}$.

**Лемма 5.** *При $\lambda > 0$ справедливо неравенство*

$$\bigl|\det(L-\lambda E)\bigr| < (\lambda + De)^n, \tag{1.12}$$

*где $D$ определяется равенством* (1.9).

**Доказательство.** По лемме 4 имеем:

$$|\det(L-\lambda E)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} C_{n+k+1}^{2k+1}\lambda^k D^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k+1)!}{(n-k)!\cdot(2k+1)!}\lambda^k D^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!}\cdot\left(\frac{n+1}{k+1}\right)\cdot\left(\frac{n+2}{k+2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n+k+1}{2k+1}\right)\lambda^k D^{n-k} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{n+1}{k+1}\right)^{k+1}\lambda^k D^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(1+\frac{n-k}{k+1}\right)^{k+1}\lambda^k D^{n-k} <$$

$$< \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{n-k}\lambda^k D^{n-k} = (\lambda+De)^n.$$

Лемма 5 доказана.

Раскладывая определитель $\mathrm{II} = -\lambda Q(\lambda)$ в (1.1) по $i$-му столбцу, получим представление

$$\mathrm{II} = -\lambda \begin{vmatrix} \frac{c_1+c_2}{m_1}-\lambda & -\frac{c_2}{m_1} & 0 & \vdots & \ldots \\ -\frac{c_2}{m_2} & \frac{c_2+c_3}{m_2}-\lambda & -\frac{c_3}{m_2} & \vdots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \vdots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \vdots & \frac{c_{i-1}+c_i}{m_{i-1}}-\lambda \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \frac{c_{i+1}+c_{i+2}}{m_{i+1}} - \lambda & -\frac{c_{i+2}}{m_{i+1}} & \vdots & \dots \\ -\frac{c_{i+2}}{m_{i+2}} & \frac{c_{i+2}+c_{i+3}}{m_{i+2}} - \lambda & \vdots & \dots \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \dots & \dots & \vdots & \frac{c_n+c_{n+1}}{m_n} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Для каждого из определителей-сомножителей верна оценка типа (1.12); из оценок следует:

$$|Q(\lambda)| \leqslant (\lambda + D_1 e)^{i-1} (\lambda + D_2 e)^{n-i}. \tag{1.13}$$

Согласно лемме 1 и равенству (1.4), имеем соотношение

$$|P(\lambda)| = (c_1 + c_{i+1}) \prod_{k=1}^{n-1} |\lambda - \lambda'_k|; \tag{1.14}$$

напомним, что постоянные $\eta$ и $C$ определены во введении.

**Лемма 6.** *Для всех $\lambda > 0$, удовлетворяющих условию $|\lambda - \lambda'_j| \leqslant \delta$, $j = 1, 2, \dots, n-1$ справедлива оценка*

$$|P(\lambda)| \geqslant (c_1 + c_{i+1}) C \eta^{n-2} \delta. \tag{1.15}$$

**Доказательство.** Пусть $\lambda \in (\lambda'_m; \lambda'_{m+1})$ и $|\lambda - \lambda'_{m+1}| > \eta$, где $m = 1, \dots, n-2$. Обозначим

$$\theta(m) = (m-1)!\, \frac{(2(n-m)-3)!!}{2^{n-m-1}}, \quad m = 1, \dots, n-1.$$

Имеем неравенства

$$|\lambda - \lambda'_p| \geqslant \begin{cases} (m-p) \cdot 2\eta, & p = 1, \dots, m-1; \\ \delta, & p = m; \\ \dfrac{2(p-m+1)+1}{2} \cdot 2\eta, & p = m+1, \dots, n-1; \end{cases}$$

следовательно,

$$\prod_{p=1}^{n-1} |\lambda - \lambda'_p| \geqslant \delta (m-1)!\, \frac{(2(n-m)-3)!!}{2^{n-m-1}} (2\eta)^{n-2}. \tag{1.16}$$

Аналогично получаются оценки для остальных случаев:

1. если $\lambda \in \left(\lambda'_m, \lambda'_{m+1}\right)$ и $|\lambda - \lambda'_m| > \eta$, $m = 1, \ldots, n-2$, то

$$\prod_{p=1}^{n-1} |\lambda - \lambda'_p| \geqslant \theta(n-m-1) \cdot (2\eta)^{n-2} \cdot \delta; \tag{1.17}$$

2. если $\lambda \in (\lambda'_1 - \eta; \lambda'_1) \cup \left(\lambda'_{n-1}; \lambda'_{n-1} + \eta\right)$, то

$$\prod_{p=1}^{n-1} |\lambda - \lambda'_p| \geqslant \theta(n-1) \cdot (2\eta)^{n-2}; \tag{1.18}$$

3. случай $\lambda \leqslant \lambda'_1 - \eta$ или $\lambda \geqslant \lambda'_{n-1} + \eta$ сводится к случаю 2, так как функция $\prod_{p=1}^{n-1} |\lambda - \lambda'_p|$ убывает при $\lambda < \lambda'_1$ и возрастает при $\lambda > \lambda'_{n-1}$.

Нетрудно видеть, что при $m < [n/2]$ ([ ] – целая часть) справедливо неравенство $\theta(m) \geqslant \theta(m+1)$, а при $m > [n/2]$ — $\theta(m) \leqslant \leqslant \theta(m+1)$, следовательно, учитывая (1.16), (1.17) и (1.18), имеем:

$$\prod_{p=1}^{n-1} |\lambda - \lambda'_p| \geqslant \theta\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right) (2\eta)^{n-2}\, \delta = C\eta^{n-2}\, \delta,$$

откуда с учетом (1.14) вытекает утверждение леммы 6.

Пусть $\lambda$ таково, что $|\lambda - \lambda'_j| \geqslant \delta$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$; $0 < \lambda \leqslant N$; в этом случае, используя неравенства (1.13) и (1.15) в равенстве (1.2), приходим к оценке:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_i} &\leqslant \frac{\lambda(\lambda + D_1 e)^{i-1}(\lambda + D_2 e)^{n-i}}{c_i + c_{i+1})C\eta^{n-2}\delta} \leqslant \\ &\leqslant \frac{N(N + D_1 e)^{i-1}(N + D_2 e)^{n-i}}{(c_i + c_{i+1})C\eta^{n-2}\delta}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Пусть $\lambda$ – произвольное решение уравнения (1.2). Поскольку $m_i = \varepsilon$, оценка (1.19) оказывается равносильной первому утверждению теоремы 1. Действительно, при

$$\varepsilon < \frac{N(N + D_1 e)^{i-1}(N + D_2 e)^{n-i}}{(c_i + c_{i+1})C\eta^{n-2}\delta}$$

выполняется одно из неравенств: $|\lambda - \lambda'_j| < \delta$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$; или $\lambda > N$. Учитывая, что $\lambda_j(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \lambda'_j$, получаем неравенство $|\lambda_j(\varepsilon) - \lambda'_j| < \delta$, $j = 1, \ldots, n-1$ и, аналогично, $\lambda_n(\varepsilon) > N$, так как окрестности $(\lambda'_j - \delta; \lambda'_j + \delta)$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$ и $\{\lambda : \lambda > N\}$ не пересекаются ввиду условий $\delta < \eta$ и $N > \lambda'_{n-1} + \eta$.

## 2. Поведение гармоник

### 2.1. Гармоника, соответствующая $n$-ому собственному числу.

Пусть $u_n$ есть собственный вектор, $L(\varepsilon)u_n(\varepsilon) = \lambda_n(\varepsilon)u_n(\varepsilon)$; напомним условие нормировки: $u_n^1(\varepsilon) = 1$. Из вида матрицы $L(\varepsilon)$ для компонент $u_n$ имеем:

$$\frac{c_1 + c_2}{m_1} u_n^1(\varepsilon) - \frac{c_2}{m_1} u_n^2(\varepsilon) = \lambda_n(\varepsilon) u_n^1(\varepsilon),$$

откуда $u_n^2(\varepsilon) \sim \mathrm{const}\, \lambda_n(\varepsilon)$. Для компоненты $u_n^3$ из уравнения

$$-\frac{c_2}{m_2} u_n^1 + \frac{c_2 + c_3}{m_2} u_n^2 - \frac{c_3}{m_2} u_n^3 = \lambda_n(\varepsilon) u_n^2$$

нетрудно получить $u_n^3(\varepsilon) \sim \mathrm{const}\, \lambda_n^2(\varepsilon)$; продолжая эти рассуждения, получаем:

$$u_n^p(\varepsilon) \sim \mathrm{const}\, \lambda_n^{p-1}(\varepsilon), \quad p = 1, 2, \ldots, i. \tag{2.1}$$

Аналогично, начиная рассуждения с последней компоненты $u_n^n$, получим:

$$u_n^p(\varepsilon) \sim \mathrm{const}\, \lambda_n^{n-p}(\varepsilon)\, u_n^n(\varepsilon), \quad p = i, i+1, \ldots, n. \tag{2.2}$$

При $\varepsilon \to 0$ имеем $\lambda_n(\varepsilon) \to +\infty$, откуда, согласно (2.1), (2.2), нетрудно получить:

$$\frac{u_n^p(\varepsilon)}{u_n^i(\varepsilon)} \delta_{ip}, \quad p = 1, 2, \ldots, n.$$

### 2.2. Остальные гармоники.

Напомним, что векторы $w_j$, $j = 1, \ldots, n-1$ определены во введении. Пусть $u_j(\varepsilon) \in \mathbb{R}^n$ есть $j$-ый собственный вектор матрицы $L(\varepsilon)$; $u_j^1 = 1$; $u_j'$ – $j$-ый собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_j'$ матрицы $L'$, соответствующей предельной струне. Рассматривая уравнения $L(\varepsilon)u_j(\varepsilon) = \lambda_j(\varepsilon)u_j(\varepsilon)$ и $L'u_j' = \lambda_j' u_j'$ покомпонентно и учитывая связь $u_j'$ с $w_j$, имеем равенства

$$\begin{aligned} &\frac{c_1 + c_2}{m_1} u_j^1(\varepsilon) - \frac{c_2}{m_1} u_j^2(\varepsilon) = \lambda_j(\varepsilon) u_j^1(\varepsilon); \\ &\frac{c_1 + c_2}{m_1} w_j^1 - \frac{c_2}{m_1} w_j^1 = \lambda_j' w_j^1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

При $\varepsilon \to 0$ $\lambda_j(\varepsilon) \to \lambda'_j$ и, как легко видеть из (2.3), $u_j^2(\varepsilon) \to w_j^2$. Продолжая аналогично, получим: $u_j^p(\varepsilon) \to w_j^p$, при $p=1,\dots,i-1$.

Обсудим поведение компоненты $u_j^i(\varepsilon)$. Справедливы равенства для компонент

$$-\frac{c_{i-1}}{m_{i-1}}u_j^{i-2}(\varepsilon)+\frac{c_{i-1}+c_i}{m_{i-1}}u_j^{i-1}(\varepsilon)-\frac{c_i}{m_{i-1}}u_j^i(\varepsilon)=\lambda_j(\varepsilon)u_j^{i-1}(\varepsilon); \quad (2.4)$$

$$-\frac{c_{i+1}}{m_{i+1}}u_j^i(\varepsilon)+\frac{c_{i+1}+c_{i+2}}{m_{i+1}}u_j^{i+1}(\varepsilon)-\frac{c_{i+2}}{m_{i+1}}u_j^{i+2}(\varepsilon)=\lambda_j(\varepsilon)u_j^{i+1}(\varepsilon); \quad (2.5)$$

$$-\frac{c_i}{m_i}u_j^{i-1}(\varepsilon)+\frac{c_i+c_{i+1}}{m_i}u_j^i(\varepsilon)-\frac{c_{i+1}}{m_i}u_j^{i+1}(\varepsilon)=\lambda_j(\varepsilon)u_j^i(\varepsilon);$$

из последнего равенства имеем:

$$-c_iu_j^{i-1}(\varepsilon)+(c_i+c_{i+1})u_j^i(\varepsilon)-c_{i+1}u_j^{i+1}(\varepsilon)=m_i\lambda_j(\varepsilon)u_j^i(\varepsilon). \quad (2.6)$$

Из (2.4), (2.5) и (2.6) следует, что существуют пределы $u_j^p(\varepsilon)$, $p=i,\ i+1,\ i+2$: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}u_j^p(\varepsilon)=:\nu_j^p$ и выполняется соотношение

$$\frac{c_ic_{i+1}}{(c_i+c_{i+1})m_{i-1}}\nu_j^{i+1}=$$

$$=-\frac{c_{i-1}}{m_{i-1}}(u'_j)^{i-2}+\left(\frac{c_{i-1}+c_i}{m_{i-1}}-\lambda'_j-\frac{c_i^2}{m_{i-1}(c_i+c_{i+1})}\right)(u'_j)^{i-1}.$$

Из уравнения $L'u'_j=\lambda'_ju'_j$ для компоненты $(u'_j)^{i+1}$ имеем равенство

$$\frac{c_ic_{i+1}}{(c_i+c_{i+1})m_{i-1}}(u'_j)^{i+1}=$$

$$=-\frac{c_{i-1}}{m_{i-1}}(u'_j)^{i-2}+\left(\frac{c_{i-1}+c_i\,c_{i+1}/(c_i+c_{i+1}}{m_{i-1})}-\lambda'_j\right)(u'_j)^{i-1};$$

сопоставляя его с предыдущим, получаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}u_j^{i+1}(\varepsilon)=\nu_j^{i+1}=(u'_j)^{i+1}=w_j^{i+1}.$$

Аналогично, используя (2.5) и (2.6), получаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}u_j^{i+2}(\varepsilon)=w_j^{i+2}.$$

Наконец, (2.6) влечет

$$\lim_{\varepsilon\to 0}u_j^i(\varepsilon)=w_j^i.$$

Продолжая рассуждения аналогично случаю $p=1,\dots,i-1$, легко показать, что $u_j^p(\varepsilon)\to w_j^p$ для остальных $p=i+3,\dots,n$. Таким образом, второе утверждение теоремы доказано.

## Литература

1. Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн, *Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем.* ГИТТЛ, М. (1950).

Kolezhuk V. S. Asymptotics of spectrum and eigenharmonics of the discrete string containing a bead of vanishing mass.

A discrete string with fixed endpoints containing a finite number of pointlike masses (beads) is under consideration. Behaviour of eigenfrequences and eigenharmonics of the string when one of the masses tending to zero is studied.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 20 ноября 1999 г.